¡Bienvenidos! a la Cuarta Escuela de Matemáticas de la UNGS - Sabrina Victoria Vieiro (EMASUNGS IV).

6 de agosto de 2018

1. Actividades propuestas.

Les presentamos tres problemas para pensar en el espacio **“Club de Problemas”** del día 10 de agosto.

La temática de este espacio corresponde al análisis de funciones de una variable real a valores reales y se presupone que los participantes disponen de los recursos conceptuales que se dan en la asignatura Cálculo I. La propuesta es que los participantes se asocien para resolver alguno de los problemas que a continuación se enuncian y que comuniquen, en los últimos 20 minutos, los resultados obtenidos al grupo en general.

1. Considere la sucesión de **Fibonacci** definida por recursivamente de la siguiente manera

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \ n \geq 2$$

No es inmediato establecer una fórmula cerrada para el término n-ésimo de esta sucesión. Para obtenerlo se propone probar que:

a) La sucesión $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ se puede definir recursivamente, es una sucesión acotada, $0 < b_n \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$, y más aún, es convergente.

b) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots$$

converge para $|x| < \frac{1}{2}$ y además

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

c) Para ciertas constantes A, B, α y β

$$f(x) = \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

y por lo tanto la serie $f(x)$ es igual a la suma de dos series geométricas

d) Concluir que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Observación: Este resultado puede establecerse por un camino totalmente independiente, usando algunos resultados básicos de la teoría de las sucesiones recurrentes (ver archvo anexo).

2. Considere la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$. Esta serie converge absolutamente para todo x tal que $|x| < e$. ¿Como se comporta la serie si $x = e$?. Para responder esta pregunta pruebe que:

a) Si f es monótona creciente en $[1, +\infty)$ entonces para todo número natural $n \geq 2$

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

b)

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}} \quad (*)$$

y concluya, de paso, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} \quad (**).$$

Sugerencia. Use el resultado del ítem anterior con $f(x) = ln(n)$ para probar (*) y luego deducir (**). Observe que el límite (**) pone de manifiesto que el crierio de la raíz enésima de Cauchy y en consecuencia tampoco el criterio del cociente de D'Alambret, sirve para decidir el compotamiento de la serie cuando $x = e$.

c) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ diverge
Sugerencia: use parte del resultado establecido en (*).

Pregunta al margen. ¿La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{e^n n^n}$, converge o diverge?.

3. Un recipiente cuya capacidad es de 1000 cm^3 se llena de líquido, a través de un dispositivo, en 50 minutos. El dispositivo opera de manera continua, aunque no necesariamente en forma constante, es decir la cantidad de líquido que entra al recipiente puede ser variable e incluso en algunos instantes el dispositivo puede interrrumpir el llenado. Además el recipiente

tiene unos orificios a través de los cuales drena (sistema de riego o de transfusión); al cabo de los 50 minutos el dispositivo entrega al recipiente la misma cantidad de líquido que éste pierde, de manera que permanece a partir de los 50 minutos siempre lleno. Demostrar que existe un lapso de tiempo de 10 minutos en el cual entran al recipiente exactamente 200 cm^3 de líquido.