Cuarta Escuela de Matemáticas de la UNGS - Sabrina Victoria Vieiro (EMASUNGS IV)

Problema 1:

En el pizarrón de cierta clase de matemática quedaron escritos varios números primos (algunos repetidos). Mauro y Fernando, dos alumnos de dicha clase, jugaron un poco con ellos realizando ciertas operaciones. Mauro, por un lado, sumó todos los números del pizarrón. Fernando, en cambio, los multiplicó, obteniendo un resultado igual a cuarenta veces el que obtuvo Mauro. ¿Se puede saber con estos únicos datos cuáles son los números que quedaron escritos en el pizarrón? Si es así, determinar cuáles pueden ser esos números primos. Intentar hallar todas las posibilidades.

Resolución del problema 1

Como el producto de los números primos es igual a cuarenta veces la suma de los mismos, entre los números escritos deben estar incluidos al menos los factores primos de 40, es decir, $2, 2, 2$ y 5. ¿Por qué se puede hacer esta afirmación? ¿Con qué teorema conocido de la matemática se puede justificar dicha afirmación?

Éstos no pueden ser los únicos, ya que $40(2+2+2+5) > 40$.

Supongamos ahora que hay solo un número primo adicional, llamémoslo p. Entonces tenemos que

$$40p = 40(11+p),$$

es decir tenemos que $p = 11 + p$. Observemos que esta ecuación no tiene solución. Por lo que se deduce que no puede haber solo un número primo adicional.

Supongamos ahora que tenemos dos primos adicionales p, q. Sin pérdida de generalidad podemos pensar que $p \leq q$. Entonces, tenemos que

$$40pq = 40(11+p+q).$$

De esta manera, deducimos que $pq = 11 + p + q$. Mediante cálculos elementales, tenemos que la ecuación anterior es equivalente a $(p-1)(q-1) = 12$.

De acá deducimos las siguientes posibilidades para los primos adicionales p y q

- $p = 3$, $q = 7$. Así la sucesión de números primos es $2, 2, 2, 5, 3, 7$.
- $p = 2$, $q = 13$. Así la sucesión de números primos es $2, 2, 2, 5, 2, 13$.

Supongamos ahora que tenemos tres primos adicionales $p \leq q \leq r$. Entonces $pqr = 11 + p + q + r$.

Si $p > 2$, entonces p, q y r deben ser impares. De esta manera, tenemos que pqr es impar, mientras que $p + q + r + 11$ es par (Dar una justificación de dichas afirmaciones). Llegamos así a un absurdo. Por lo tanto $p = 2$. Luego, tenemos que

$$13 + q + r = 2qr.$$

Observemos que si $q > 2$, tenemos que q y r son impares, por lo tanto $13 + q + r$ es impar, mientras que $2qr$ es par, llegando así a un absurdo. (Dar una justificación de dicha afirmación). De esta manera, $q = 2$. Luego, tenemos que $15 + r = 4r$. Deducimos que $r = 5$. De esta manera la sucesión de primos es $2, 2, 2, 5, 2, 2, 5$.

Si en cambio hay cuatro primos adicionales $p \leq q \leq r \leq s$, entonces

$$11 + p + q + r + s = pqrs.$$

Si $p = 2$, de la ecuación $13 + q + r + s = 2qrs$ deducimos que $q + r + s$ es impar. (¿Por qué?) De esta manera puede ocurrir los siguientes casos:

- $q = r = 2$, y por lo tanto $s > 2$ (Dar una justificación de dicha afirmación). De esta manera tenemos que $8s = 17 + s$, lo que resulta una contradicción.

- $q, r, s \geq 3$. Como el producto de enteros mayores que 1 siempre es mayor o igual que su suma, deducimos que

  $$2qrs = qrs + qrs \geq 27 + qrs > 13 + q + r + s.$$

  De esta manera concluimos que la ecuación $13q + r + s = 2qrs$ no tiene solución.

Si en cambio $p = p_0 > 2$, entonces $p_0qrs = (11 + p_0) + q + r + s$, donde q, r, s son primos impares.

Por otro lado, tenemos que

$$p_0qrs = (p_0 - 1)qrs + qrs \geq (p_0 - 1)3^3 + q + r + s.$$

Como $27(p_0 - 1) > 11 + p_0$, concluimos que

$$p_0qrs > (11 + p_0) + q + r + s,$$

por lo que concluimos que no hay cuatro primos adicionales.

Por último, supongamos que tenemos 5 o más primos adicionales $p_1 \leq \ldots \leq p_r$ que satisfacen que $p_1 \ldots p_r = 11 + p_1 + \ldots + p_r$. Así tenemos que

$$p_1 \ldots p_{r-1} = \frac{11}{p_r} + \frac{p_1}{p_r} + \ldots + \frac{p_{r-1}}{p_r} + 1. \tag{1}$$

Por un lado, como $p_i \geq 2$, para $i = 1 \ldots r$, tenemos que

$$p_1 \ldots p_{r-1} \geq 2^{r-1}. \tag{2}$$

Por otro lado, como $p_i \leq p_r$ para $i = 1 \ldots r - 1$, tenemos que

$$\frac{11}{p_r} + \frac{p_1}{p_r} + \ldots + \frac{p_{r-1}}{p_r} + 1 \leq \frac{11}{2} + r. \tag{3}$$

De (1), (2) y (3), deducimos que $2^{r-1} \leq \frac{11}{2} + r$.

Se puede probar, y dejamos de tarea al lector, que si $r \geq 5$ tenemos que $2^{r-1} > \frac{11}{2} + r$. Por lo que no puede haber más de 5 primos adicionales.

Por lo tanto las únicos posibles primos que pueden aparecer en el pizarrón son

- $2, 2, 2, 3, 5, 7$
- $2, 2, 2, 2, 5, 13$
- $2, 2, 2, 2, 2, 5, 5.$