Universidad Nacional de General Sarmiento

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Aspectos geométricos de esferas y espacios proyectivos en C*-álgebras.

Trabajo de tesis para optar por el título de Doctora en Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de General Sarmiento

Autora: Antunez Andrea Carolina

Director: Esteban Andruchow

Buenos Aires, Febrero 2020

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución Nº 1178/11. Calificación “B”.

FORMULARIO “E”
TESIS DE POSGRADO

Niveles de acceso al documento autorizados por el autor: Liberar el contenido de la tesis para acceso público.

a) Título completo del trabajo de Tesis: Aspectos geométricos de esferas y espacios proyectivos en C^*-álgebras.

b) Presentado por: Antunez Andrea Carolina

c) E-mail del autor: aantunez@campus.ungs.edu.ar

d) Estudiante del Posgrado: Doctorado en Ciencia y Tecnología.

e) Institución o Instituciones que dictaron el Posgrado: Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento

f) Para recibir el título de: Doctora en Ciencia y Tecnología.

g) Fecha de la defensa: / /

h) Director de la Tesis: Andruchow Esteban

i) Tutor de la Tesis: Andruchow Esteban

j) Colaboradores con el trabajo de Tesis:-

k) Descripción física del trabajo de Tesis: 109 páginas.

l) Alcance geográfico y/o temporal de la Tesis: Internacional. Publicado parcialmente en revistas con referato.

m) Temas tratados en la Tesis: Espacios homógeneos, grupos de Lie de operadores, métrica cociente, C^*-álgebras.

n) Resumen en español (hasta 1000 caracteres):

En esta tesis, estudiamos las propiedades geométricas de las esferas y el espacio proyectivo definidos en espacios donde el producto interno toma valores en una C^*-álgebra. Abordamos el problema de encontrar curvas cortas α tales que $\alpha(0) = x$ y $\dot{\alpha}(0) = v$, donde x y v son valores fijos dados. Además consideramos el problema de encontrar curvas cortas entre todas la curvas que unan los mismos puntos. En particular, presentamos dos casos de estudio.

En primer lugar, estudiamos la esfera unitaria $\mathcal{S}(H) = \{x \in H : \langle x,x\rangle = 1\}$ de un espacio de Hilbert H bajo la acción de $\mathcal{U}_p(H)$, el grupo de operadores unitarios u en H tales que $u-1$ pertenece al ideal $p-$Schatten $\mathcal{B}_p(H)$. Este grupo actúa suave y transitivamente en $\mathcal{S}(H)$, generando sobre la esfera una métrica de Finsler natural inducida por la $p-$norma $\|z\|_p = tr\left((zz^*)^{p/2}\right)^{1/p}$. Esta métrica está dada por $\|v\|_{x,p} = \text{mín}\{\|z-y\|_p : y \in \mathfrak{g}_x\}$ donde $z \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ satisface que $(d\pi_x)_1(z) = z\cdot x = v$ y $\mathfrak{g}_x$ denota el álgebra de Lie del subgrupo de unitarios que deja fijo a x. Tales operadores z se denominan levantamientos de v. Un levantamiento z_0 es denominado levantamiento minimal si además $\|v\|_{x,p} = \|z_0\|_p$. En este trabajo, mostramos propiedades de levantamientos minimales y estudiamos el problema de encontrar curvas cortas relacionadas con estos levantamientos.

Luego, dada $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra unital con un estado fiel φ, analizamos la geometría de la esfera unitaria $\mathcal{S}_\varphi = \{x \in \mathcal{A} : \varphi(x^*x) = 1\}$ y el espacio proyectivo $\mathbb{P}_\varphi = \mathcal{S}_\varphi/\mathbb{T}$. Mostramos que estos espacios son variedades suaves y espacios homogéneos del grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ de isomorfismos que actúan en $\mathcal{A}$ y que preservan el producto interno inducido por φ. En particular, $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ es un grupo suave de Banach-Lie. La teoría de operadores de espacios de Banach con dos normas, desarrollada por M.G. Krein y P. Lax, juega un importante rol en este desarrollo. En este contexto, definimos una métrica en $\mathbb{P}_\varphi$, y probamos la existencia de geodésicas minimales con condiciones iniciales o con puntos fijos dados.

o) Resumen en portugués (hasta 1000 caracteres):

Nesta tese nós estudaremos as propriedades geométricas das esferas e o espaço projetivo definido em espaços onde o produto interno tem valores numa C*-álgebra α tales que $\alpha(0) = x$ e $\dot{\alpha}(0) = v$, onde x e v são valores fixos dados. Além disso nos consideramos o problema de encontrar curvas curtas que unem dois pontos extremos dados. Pelo um lado, $\mathcal{S}(H) = \{x \in H : \langle x, x\rangle = 1\}$ a esfera unitária de Hilbert H, baixo a ação de $\mathcal{U}_p(H)$, o grupo dos operadores unitários u em H tales que $u-1$ pertence ao ideal $p-$Schatten $\mathcal{B}_p(H)$. Este grupo atua suave e transitivamente em $\mathcal{S}(H)$, gerando sobre a esfera unitária uma métrica de Finsler natural induzida pela $p-$norma $\|z\|_p = tr\left((zz^*)^{p/2}\right)^{1/p}$. Esta métrica está dada por $\|v\|_{x,p} = \text{mín}\{\|z-y\|_p : y \in \mathfrak{g}_x\}$ onde $z \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ satisfaz que $(d\pi_x)_1(z) = z \cdot x = v$ e $\mathfrak{g}_x$ denota o álgebra de Lie do subgrupo dos unitários que deixa fixo a x. Tales operadores z denominam-se levantamento de v. Um levantamento z_0 é denominado levantamento minimal se além $\|v\|_{x,p} = \|z_0\|_p$. Neste trabalho, nós mostraremos propriedades de levantamentos minimales e estudaremos o problema de encontrar curvas curtas associados o levantamento. Pelo outro lado, seja $\mathcal{A}$ una C*-álgebra unital com um estado fiel φ. Nós analisaremos a geometria da esfera unitária $\mathcal{S}_\varphi = \{x \in \mathcal{A} : \varphi(x^*x) = 1\}$ e o espaço projetivo $\mathbb{P}_\varphi = \mathcal{S}_\varphi/\mathbb{T}$. Nós mostraremos que estes espaços são variedades suaves e espaços homogêneos do grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ de isomorfismos que atuam em $\mathcal{A}$ e que preservam o produto interno induzido por φ. Em particular, $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ é um grupo suave de Banach-Lie. A teoria de operadores dos espaços de Banach com duas normas, desenvolvidas por M.G. Krein e P. Lax, tem um papel importante nos neste desenvolvimento. Nós definiremos uma métrica em $\mathbb{P}_\varphi$, e provaremos a existência de geodésicas minimais, tanto com dados iniciais o como com pontos extramais fixos.

p) Resumen en inglés (hasta 1000 caracteres):

In this thesis, we study geometric properties of spheres and projective spaces in spaces with an inner product which taking values in a C*-algebra. We treat the problem of finding short curves α such that $\alpha(0) = x$ and $\dot{\alpha}(0) = v$ which are given. Also we consider the problem of finding short curves which join two given endpoints. We present two cases of study.

On one hand, $\mathcal{S}(H) = \{x \in H : \langle x, x \rangle = 1\}$ is the unit sphere of a Hilbert space H with the action of $\mathcal{U}_p(H)$, the group of unitary operators in H such that $u - 1$ belongs to the $p-$Schatten ideal $\mathcal{B}_p(H)$. The group acts smoothly and transitively in $\mathcal{S}(H)$ and endows it with a natural Finsler metric induced by the $p-$norm $\|z\|_p = tr\left((zz^*)^{p/2}\right)^{1/p}$. The metric is given by $\|v\|_{x,p} = \text{mín}\{\|z - y\|_p : y \in \mathfrak{g}_x\}$ where $z \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ satisfies that $(d\pi_x)_1(z) = z \cdot x = v$ and $\mathfrak{g}_x$ denotes the Lie algebra of the subgroup of unitaries which fix x. We call z a lifting of v. A lifting z_0 is called a minimal lifting if additionally $\|v\|_{x,p} = \|z_0\|_p$. We show properties of minimal liftings and we treat the problem of finding short curves.

On the other hand, let $\mathcal{A}$ be a unital C*-algebra with a faithful state φ. We study the geometry of the unit sphere $\mathcal{S}_\varphi = \{x \in \mathcal{A} : \varphi(x^*x) = 1\}$ and the projective space $\mathbb{P}_\varphi = \mathcal{S}_\varphi/\mathbb{T}$. These spaces are shown to be smooth manifolds and homogeneous spaces of the group $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ of isomorphisms acting in $\mathcal{A}$ which preserve the inner product induced by φ. $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ is a smooth Banach-Lie group. An important role is played by the theory of operators in Banach spaces with two norms, as developed by M.G. Krein and P. Lax. We define a metric in $\mathbb{P}_\varphi$, and prove the existence of minimal geodesics, both with given initial data, and given endpoints.

q) Aprobado por:
Verónica Dimant,
Úrsula Molter y
Stefania Marcantognini

Firma y aclaración de la firma del Presidente del Jurado:

Firma del autor de la tesis:

Aspectos geométricos de esferas y espacios proyectivos en C*-álgebras.

PUBLICACIONES:

- Andruchow, E. ; Antunez, A.: *Quotient* $p-$*Schatten metrics on spheres.* Rev. Un. Mat. Argentina 58 (2017), no. 1, 21-36.
- Antunez, A.: *Sphere and projective space of a C*-algebra with a faithful state.* Demonstratio Mathematica 52(1) (2019), pp. 410-427.

APORTES ORIGINALES:

Los principales resultados de este trabajo de tesis se presentan de la siguiente manera. En el segundo capítulo se encuentran los resultados vinculados con el grupo de operadores adjuntables sobre una C*-álgebra con un estado fiel, invariantes respecto a φ, dado por $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ y otras propiedades de los operadores encontradas en este contexto. La caracterización de la descomposición matricial de los operadores presentada en esta sección será utilizada en las secciones posteriores. En el capítulo 3 se realiza la caracterización geométrica y métrica de la esfera de un espacio de Hilbert como espacio homogéneo de la acción de los grupos $\mathcal{U}_p(H)$, con $p \geq 2$ par. En particular, se presenta una caracterización de los elementos geométricos involucrados en la estructura reductiva en el caso $p = 2$ y las curvas minimales con esta métrica. En el capítulo 4, se aborda el estudio en la esfera de una C*-álgebra con un estado fiel, utilizando algunos resultados del capítulo 2 y siguiendo ideas similares al estudio realizado en el capítulo 3. Finalmente, en el último capítulo se incluyen resultados de minimalidad de curvas en el espacio proyectivo de una C*-álgebra con un estado fiel.

A Gabriel, Jimena y Sebastián

Agradecimientos

Quisiera expresar mis agradecimientos a quienes me acompañaron durante el proceso de elaboración de esta tesis.

A mi director, Esteban Andruchow, quien durante tantos años me acompañó e impulsó a seguir aprendiendo por caminos que aún no había recorrido. Agradezco la confianza y la paciencia que ha sabido tener conmigo para que pudiera avanzar aún cuando no todo parecía salir bien.

A mi compañero de vida, Gabriel, y a mis hijos, Jimena y Sebastián quienes no sólo me incentivaron a seguir mis sueños sino que colaboraron para que nada pueda interrumpirlos y nunca desconfiaron que pudiera lograrlo. Sólo ellos han sabido complementar mis tareas académicas con momentos únicos e inolvidables en familia. Los amo.

A mi hermana Gladys, mi cómplice, mi amiga, mi apoyo incondicional. Y a mis padres, mi hermana Adriana y a mis suegros, que siempre han están presentes dispuestos a compartir estos momentos en familia.

A mi compañera y amiga Marcela Villagra, quien me acompañó en la complicada tarea de lograr que los afectos, el trabajo y el estudio se mantengan siempre en equilibrio.

A mis amigos de la infancia, mis hermanos, Mauricio, Gabriel, Elisa, Mónica y JuanMa quienes supieron hacerme reír a carcajadas aún cuando las cosas no salían bien. Nunca dejaron de escucharme aún cuando no comprendían lo que les intentaba contar.

Y a Lilia Romanelli, excelente persona, quien fue la primera profesora en confiar en mis posibilidades, mostrándome muchos caminos por los que podía seguir y dándome esa fuerza que necesitaba para comenzar a confiar en mí misma.

Finalmente no puedo dejar de mencionar que esta tesis fue posible gracias al apoyo y la asistencia recibida en la Universidad Nacional de General Sarmiento y, principalmente, gracias a la educación pública, libre y gratuita que esta institución supo acercar a mi comunidad.

Índice general

Introducción

En este trabajo estamos interesados en estudiar las propiedades geométricas de esferas y rectas proyectivas definidas en un espacio vectorial provisto de un producto interno con valores en una C*-álgebra.

El método que utilizamos, que es clásico en geometría, consiste en caracterizar un grupo de operadores que actúa como un grupo de movimientos de dichos espacios. La acción de este grupo permitirá dotar de una estructura de espacio homogéneo a estos conjuntos. En estos espacios homogéneos, que son variedades de dimensión infinita, es posible introducir una métrica de Finsler natural. Nos enfocamos en aspectos relacionados con esta métrica, como la existencia y unicidad de curvas que tengan longitud mínima entre todas las curvas que unan los mismos puntos o que cumplan condiciones iniciales dadas.

En particular, estudiamos dos casos de espacios homogéneos infinito-dimensionales. Primero, analizamos la esfera de un espacio de Hilbert H separable. Definimos p-métricas cocientes con $p \geq 2$ par, inducidas por la acción del grupo de operadores unitarios $U \in \mathcal{U}_p(H)$ tales que $U - 1 \in \mathcal{B}_p(H)$ (donde $\mathcal{B}_p(H)$ es el ideal de Schatten). Luego, trabajamos con una C*-álgebra con un estado fiel. El estado define un producto interno no necesariamente completo. En este contexto, serán descriptas tanto la esfera como el espacio proyectivo y se desarrollarán resultados que describen las curvas cortas entre todas las curvas que unen los mismos puntos extremos.

0.1. Antecedentes en geometría en álgebras de operadores.

Existen varios trabajos que se focalizan en estudiar aspectos relacionados con la estructura diferencial y métrica de variedades en dimensión infinita. En particular, consideramos aquellos donde las variedades se presentan como órbitas de la acción de un grupo de Lie-Banach, es decir, como espacios homogéneos.

Los trabajos [32, 17] de G. Corach, H. Porta y L. Recht se encuentran entre los primeros en abordar espacios con este enfoque durante los años 90. Estos autores estudian la geometría diferencial de idempotentes en álgebras de Banach y C*-álgebras. Posteriormente aparecen una serie de artículos que siguen las mismas ideas y estudian la existencia de una estructura reductiva adicional (por ejemplo, [31, 19, 20]). En particular, estos autores analizan espacios homogéneos reductivos infinito-dimensionales modelados sobre C*-álgebras.

Un marco general que aportan trabajos como [31, 19, 20] es el siguiente: Si $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-C*-álgebra, bajo ciertas condiciones la órbita O de la acción del grupo unitario de $\mathcal{A}$ puede estudiarse como el cociente $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}/\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ y su espacio tangente resulta $(TO)_x \simeq \mathcal{A}_{ah}/\mathcal{B}_{ah}$ (donde $\mathcal{A}_{ah}$ y $\mathcal{B}_{ah}$ corresponde a los elementos anti-hermitianos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente). Resulta entonces natural introducir la métrica (cociente) $\|v\|_x = \text{ínf}\{\|z-y\| : y \in \mathcal{B}_{ah}\}$ para $x \in O$. El objetivo en este contexto se centra en establecer soluciones a los problemas:

- Dado $x \in O$ y $v \in (TO)_x$, hallar una curva γ contenida en la órbita de longitud mínima tal que $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = v$.

- Dados $x, y \in O$, hallar una curva de longitud mínima que los una.

Aunque en [19, 20] los autores llegan a solucionar estos problemas en determinados casos, en variedades modeladas con espacios de Banach más generales puede ocurrir que dos puntos no puedan ser unidos por una geodésica minimal ([22, 30]) o, más aún, no puedan ser unidos por una geodésica asociada a la conexión de la métrica ([16]).

En este trabajo abordamos ambos problemas en dos casos distintos.

Para el primer caso, los trabajos [9, 8] de L. Recht, G. Larotonda y E. Andruchow fueron fundamentales. Estos artículos tratan sobre la estructura diferenciable de la órbita de la acción de los grupos p-Schatten $\mathcal{U}_p(H)$, la distancia rectificable inducida y la métrica de Finsler asociada a la acción de este grupo. Tales antecedentes fueron considerados en esta tesis en el caso de las p-métricas cocientes en la esfera de un espacio de Hilbert.

Si generalizamos la situación anterior, podemos plantear el estudio de la esfera en un módulo de Hilbert M provisto de un producto interno con valores en una C*-álgebra unital. Este conjunto fue estudiado inicialmente en [5] donde se determinó su estructura de variedad diferencial y, posteriormente en [14], donde los autores definen una métrica cociente y algunas curvas minimales para la métrica definida. En particular, consideran la esfera como espacio homogéneo del grupo de $\mathcal{U}_c(M)$ de operadores unitarios acotados definidos en M tales que $U - I$ es un operador de rango finito.

Los artículos anteriores motivaron el segundo caso de estudio: el análisis de la esfera $\mathcal{S}_\varphi$ de una C*-álgebra con un estado fiel. Es decir, la esfera sobre el pre-módulo de Hilbert inducido por φ. La caracterización del grupo de operadores que actúa sobre esta esfera implicó considerar la teoría de operadores lineales propios y simetrizables en espacios con dos normas, iniciada independientemente por M.G. Krein y P. Lax [28, 24] y posteriormente desarrollada por I. Gohberg y M. Zambickii [21].

Por último, cabe mencionar que los problemas de minimización de curvas en órbitas fueron bastante estudiados cuando se considera la órbita de una proyección en $\mathcal{B}(H)$ bajo la acción de operadores unitarios $\mathcal{U}_2(H)$. Esta órbita coincide con la componente conexa de la variedad Grassmanniana. En [17, 32] se definió una estructura reductiva en esta variedad y en [2] se analizó la geometría de la Grassmanniana restringida o de Sato. Posteriormente en [1, 12] se muestra que todo par de proyecciones en la misma órbita puede unirse por una curva minimal y se establecen condiciones para su unicidad. Aplicaremos estos resultados al analizar la métrica en el espacio proyectivo.

0.2. Principales resultados obtenidos

Los aportes originales de esta tesis se encuentran publicados en los artículos [3] y [15]. En el primer trabajo, nos enfocamos al estudio de las métricas cocientes inducidas por la acción de los grupos $\mathcal{U}_p(H)$ sobre la esfera de un espacio de Hilbert H separable. El segundo trabajo corresponde al estudio de la esfera y el espacio proyectivo en el contexto de C*-álgebras con un estado fiel.

Los principales resultados de este trabajo de tesis se presentan de la siguiente manera. En el segundo capítulo se encuentran los resultados vinculados con el grupo de operadores adjuntables sobre una C*-álgebra con un estado fiel, invariantes respecto a φ, dado por $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ y otras propiedades de los operadores encontradas en este contexto. La caracterización de la descomposición matricial de los operadores presentada en esta sección será utilizada en las secciones posteriores. En el capítulo 3 se realiza la caracterización geométrica y métrica de la esfera de un espacio de Hilbert como espacio homogéneo de la acción de los grupos $\mathcal{U}_p(H)$, con $p \geq 2$ par. En particular, se presenta una caracterización de los elementos geométricos involucrados en la estructura reductiva en el caso $p = 2$ y las curvas minimales con esta métrica. En el capítulo 4, se aborda el estudio en la esfera de una C*-álgebra con un estado fiel, utilizando algunos resultados del capítulo 2 y siguiendo ideas similares al estudio realizado en el capítulo 3. Finalmente, en el último capítulo se incluyen resultados de minimalidad de curvas en el espacio proyectivo de una C*-álgebra con un estado fiel.

A continuación brindamos una breve enumeración de los principales resultados que desarrollaremos.

Métricas cocientes en la esfera de un espacio de Hilbert

Dado un espacio de Hilbert H separable con su producto interno $\langle \, , \, \rangle$, consideramos la esfera sobre H definida por

$$\mathcal{S}(H) = \Big\{ x \in H : \langle x, x \rangle = 1 \Big\}.$$

Las características geométricas de este conjunto con la métrica usual inducida por la norma de H son bien conocidas. Se trata de una subvariedad de H, cuya estructura diferencial fue estudiada tanto en dimensión finita como infinita. Estudiamos esta esfera bajo la acción de los grupos $\mathcal{U}_p(H)$ que son perturbaciones de la unidad por ideales de Schatten. Con el estudio de la estructura métrica inducida vamos a caracterizar no sólo las curvas minimales bajo condiciones iniciales sino también la estructura reductiva generada.

Sobre $\mathcal{S}(H)$, sea $\pi : \mathcal{U}_p(H) \times \mathcal{S}(H) \to \mathcal{S}(H)$ la acción del grupo $\mathcal{U}_p(H)$ dada por $u \cdot x := ux$, para $x \in \mathcal{S}(H)$ y $u \in \mathcal{U}_p(H)$. Es claro que la órbita de esta acción para cualquier $x \in \mathcal{S}(H)$ coincide con $\mathcal{S}(H)$, es decir, la acción es transitiva. Como además es suave, podemos considerar a la esfera $\mathcal{S}(H)$ como espacio homogéneo de la acción de $\mathcal{U}_p(H)$. Brevemente esto significa que podemos considerar $\mathcal{S}(H) \simeq \mathcal{U}_p(H)/G_x$, donde G_x es el subgrupo de isotropía de algún $x \in \mathcal{S}(H)$ fijo. Dado $x \in \mathcal{S}(H)$, definimos una métrica de Finsler sobre el espacio tangente $(T\mathcal{S}(H))_x$ cuando lo identificamos con el cociente $\mathcal{B}_p(H)_{ah}/\mathfrak{g}_x$, donde $\mathfrak{g}_x$ es el álgebra de Lie del grupo de isotropía de x. Si $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$, definimos

$$\|v\|_{x,p} = \text{mín}\Big\{ \|z - y\|_p : y \in \mathfrak{g}_x \Big\}$$

donde el mínimo se considera sobre algún representante $z \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ tal que $(d\pi_x)_1(z) = z \cdot x = v$. Cuando no haya confusión con el valor de p, abreviaremos la notación de la norma en el cociente por $\|v\|_x$. Estos operadores z se denominan levantamientos de v. Diremos que un levantamiento z_0 es minimal si verifica $\|v\|_{x,p} = \|z_0\|_p$.

Nuestros primeros resultados se focalizan en establecer la existencia y unicidad de estos levantamientos minimales y, además, en caracterizarlos matricialmente para cada $v \in T\mathcal{S}(H)$.

Teorema (3.1)**.** *Sean p positivo y par , $x \in \mathcal{S}(H)$ y $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$. Un elemento $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ tal que $(d\pi_x)_1(z_0) = v$ es un levantamiento minimal de v si y sólo si $tr(z_0^{p-1}y) = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}_x$.*

El levantamiento minimal z_0 verifica esta condición si y sólo si su representación matricial respecto la descomposición $H = \langle x \rangle \oplus \langle x \rangle^\perp$ es

$$z_0^{p-1} = \begin{pmatrix} \lambda i & -b^* \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

donde $b : \langle x\rangle \to \langle x\rangle^\perp$ operador acotado y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta esta caracterización, se deduce la forma matricial en varios casos particulares (Corol. 3.1, 3.2 y 3.3).

La identificación $(T\mathcal{S}(H))_x \simeq \mathcal{B}_p(H)_{ah}/\mathfrak{g}_x$ induce una forma de medir curvas en $\mathcal{S}(H)$ y una distancia rectificable $\overline{d}_p(x,y)$, definida como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas contenidas en $\mathcal{S}(H)$ que unen a x con y. Por el análisis anterior, es posible establecer la norma de los levantamientos minimales en función de $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ y obtener luego resultados como los siguientes:

Teorema (3.2)**.** *Sea p entero positivo par. Sean $x \in \mathcal{S}(H)$, $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$, dado por $v = \alpha i x + v \in H = \langle x\rangle \oplus \langle x\rangle^\perp$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), y $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ el único levantamiento minimal de v. Si*

$$\|z_0\|_p \leq \frac{\pi}{4}$$

entonces la curva

$$\mu(t) = e^{tz_0}x$$

que verifica $\mu(0) = x$ y $\dot{\mu}(0) = v$, tiene longitud minimal entre todas la curvas que unen los mismos puntos extremos.

Teorema (3.3)**.** *Sea p entero positivo par, $x \in \mathcal{S}(H)$, $v \in \langle x\rangle^\perp \subset (T\mathcal{S}(H))_x$ y $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ el único levantamiento minimal de v. Si*

$$\|v\| \leq \frac{\pi}{4\sqrt[p]{2}}$$

entonces la curva

$$\mu(t) = e^{tz_0}x$$

que verifica $\mu(0) = x$ y $\dot{\mu}(0) = v$, tiene longitud minimal en el intervalo $[0,1]$. Más aún, si $\|v\| \leq \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, esta curva es corta para todas estas p-métricas cocientes.

Para el caso $p = 2$, la esfera $\mathcal{S}(H)$ es un espacio homogéneo reductivo infinito-dimensional. La geometría de estos espacios fue estudiada en [31] en el contexto de C*-álgebras. Vamos a seguir esta referencia para las definiciones y los cálculos de los elementos que caracterizan esta estructura. Fue posible encontrar expresiones para las conexiones reductiva y clasificante e identificar características de sus curvas geodésicas (Prop. 3.6 y 3.7). En particular se obtuvo que la conexión de Levi-Civita para la métrica cociente está dada por

$$\nabla_w(V) = \dot{V}w - \frac{1}{2}\left[\langle v,x\rangle w + \langle w,x\rangle v\right]$$

para $x \in \mathcal{S}(H)$, V campo tangente y $v, w \in (T\mathcal{S}(H))_x$. La curva geodésica que comienza en x con velocidad v está dada por

$$\gamma(t) = \exp(\kappa_x(v)t)x$$

donde la aplicación exp es la aplicación exponencial de la estructura homogénea de $\mathcal{S}(H)$ y $\kappa_x : (T\mathcal{S}(H))_x \to \mathfrak{g}_x^{\perp}$ es la aplicación:

$$\kappa_x(v) := \begin{pmatrix} \lambda i & -v_0^* \\ v_0 & 0 \end{pmatrix}$$

para $v = i\lambda x + v_0$ con $v_0 \in \langle x \rangle^{\perp}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para el caso $p = 2$, en el Teorema 3.4 se explicitaron las curvas geodésicas a partir de condiciones iniciales dadas:

- La curva geodésica que inicia en $x \in \mathcal{S}(H)$ con velocidad $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ donde $v \in \langle x \rangle^{\perp}$ resulta ser $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{S}(H)$ dada por

$$\gamma(t) := \cos(\|v\|t)x + \frac{\operatorname{sen}(\|v\|t)}{\|v\|}v.$$

- La curva geodésica que une dos puntos $x, y \in \mathcal{S}(H)$, $y \neq -x$ tal que $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ resulta

$$\gamma(t) := \cos(kt)x + \frac{\operatorname{sen}(kt)}{\|v\|}v$$

  donde $v = y - \langle y, x \rangle x$ y $k = \arccos(\langle y, x \rangle)$.

En particular, en el caso de H espacio de Hilbert real, todas las geodésicas de la estructura reductiva vienen dadas por estas curvas.

Este análisis permitió mostrar que sólo en el caso de H un espacio de Hilbert real, la acción del grupo unitario de Hilbert-Schmidt induce en la esfera la métrica Riemmanianna usual (la métrica ambiente de la inclusión $\mathcal{S}(H) \subset H$).

La esfera de una C*-álgebra con un estado fiel y el espacio proyectivo asociado.

Sea $\mathcal{A}$ una C*álgebra unital con un estado fiel $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. El estado induce una estructura de pre-módulo de Hilbert en $\mathcal{A}$ dada por el producto inducido $\langle x, y \rangle = \varphi(x^* y)$. Notemos que en $\mathcal{A}$

quedan definidas dos normas: la norma usual $\|\cdot\|$ y la norma $\|\cdot\|_\varphi$ inducida por φ, donde esta última no resulta completa.

Definimos la esfera en $\mathcal{A}$ asociada a φ como el conjunto:

$$\mathcal{S}_\varphi := \Big\{x \in \mathcal{A} : \varphi(x^*x) = 1\Big\}$$

Vamos a definir una estructura C^∞ homogénea, inducida por la acción del grupo $\mathcal{U}_\varphi$ de operadores inversibles invariantes respecto al producto asociado al estado φ.

En primer lugar, nos enfocamos en encontrar propiedades de los operadores definidos sobre $\mathcal{A}$. Para ello trabajamos con el álgebra de los operadores acotados adjuntables $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$: operadores acotados $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ para los cuales existe $T^\sharp$ que verifica $\varphi(Tx, y) = \varphi(x, T^\sharp y)$. En esta álgebra definimos la norma

$$\|T\|_{\mathbf{a}} = \text{máx}\Big\{\|T\|, \|T^\sharp\|\Big\}.$$

Con esta norma, $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ resulta una $*$-álgebra. Señalemos algunos resultados útiles. En primer lugar, todo operador G adjuntable e inversible, suficientemente cerca de la identidad, que verifique $\|G^\sharp G - 1\|_{\mathbf{a}} < 1$ admite una descomposición de la forma $G = UH$ con $H \in Gl_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$, $H^\sharp = H$, $H^2 = G^\sharp G$ y $U \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ [Prop. 2.1]. En segundo lugar, si $U \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ con $\|U - 1\|_{\mathbf{a}} < r$, con r suficientemente chico, entonces existe $Z \in \mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ con $Z^\sharp = -Z$, Z una función C^∞ diferenciable de U, tal que $U = e^Z$ [Prop. 2.2].

Con estos resultados se prueba que el grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ es un grupo de Lie-Banach C^∞ diferenciable y una subvariedad complementada de $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. Más aún, su álgebra Lie-Banach es el conjunto $\mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$ de operadores T adjuntables tales que $T^\sharp = -T$. [Corol. 2.2]

Estos hechos permitieron probar que el conjunto de proyectores simétricos $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ es una subvariedad complementada de $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ [Teor. 2.4].

Como consecuencia de esta caracterización de operadores y sus propiedades fue posible mostrar que la acción del grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ sobre $\mathcal{S}_\varphi$ es transitiva [Teor.4.1]. Además, se demostró que los operadores inversibles en $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ que conectan 1 con cualquier otro elemento de la esfera son exponenciales del grupo. La exponencial se aplica a elementos de la forma $F + \lambda I$ donde F es un operador en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ y $\lambda \in (-\pi, \pi)$. De esta manera fue posible concluir que la esfera $\mathcal{S}_\varphi$ es conexa.

El siguiente paso fue describir la estructura diferencial de la esfera $\mathcal{S}_\varphi$. En particular, se demostró el teorema:

Teorema (4.2)**.** *La esfera $\mathcal{S}_\varphi$ es una C^∞ subvariedad complementada de $\mathcal{A}$, y un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$. Para todo $x_0 \in \mathcal{S}_\varphi$ fijo, la aplicación $\pi_{x_0} : \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}_\varphi$, dada por $\pi_{x_0}(U) = U(x_0)$, es una sumersión C^∞-diferenciable.*

Teniendo la estructura de variedad diferenciable homogénea, abordamos algunos resultados más específicos de este contexto. Un primer paso fue notar que el espacio tangente de $\mathcal{S}_\varphi$ en 1 se descompone naturalmente como la suma directa ($\mathbb{R}$-lineal)

$$(T\mathcal{S}_\varphi)_1 = \mathcal{A}_{ah} \oplus N(\varphi)_s.$$

Aquí $\mathcal{A}_{ah}$ denota el espacio de elementos antihermitianos de $\mathcal{A}$ y $N(\varphi)_s = N(\varphi) \cap \mathcal{A}_s$ son los elementos autoadjuntos en el núcleo de φ. [Lema 4.3]

Esta descomposición del $(T\mathcal{S}_\varphi)_1$ permite probar que la aplicación

$$\mu : (T\mathcal{S}_\varphi)_1 = \mathcal{A}_{ah} \oplus N(\varphi)_s \to \mathcal{S}_\varphi, \;\; \mu(a,b) = e^a(e^{b\otimes 1 - 1\otimes b}(1)).$$

resulta ser un difeomorfismo local cerca del origen. Luego todo elemento $x \in \mathcal{S}_\varphi$ suficientemente cerca de 1 se factoriza $x = ux_s$ con u unitario y con x_s un elemento autoadjunto en $\mathcal{S}_\varphi$.

Por otro lado, se prueba que la parte autoadjunta $\mathcal{S}_{\varphi,s}$ de $\mathcal{S}_\varphi$, dada por

$$\mathcal{S}_{\varphi,s} = \left\{ x \in \mathcal{A}_s : \varphi(x^2) = 1 \right\} = \mathcal{S}_\varphi \cap \mathcal{A}_s.$$

es una subvariedad de $\mathcal{A}$, y, por lo tanto, lo es de $\mathcal{S}_\varphi$. Lo interesante de los resultados anteriores surge al considerar la restricción m_s de la aplicación μ:

$$\mu_s : N(\varphi)_s \to \mathcal{S}_{\varphi,s} \quad , \quad \mu_s(a) = e^{a\otimes 1 - 1\otimes a}(1) = \cos(\varphi(a^2)^{1/2}) \cdot 1 + \frac{\sin(\varphi(a^2)^{1/2})}{\varphi(a^2)^{1/2}} \cdot a$$

La aplicación μ_s es sobreyectiva y tiene inversa a derecha suave definida sobre $\mathcal{S}_{\varphi,s} \setminus \{1,-1\}$. Mas áun, esta aplicación define un espacio recubridor. (Prop. 4.6)

A partir del análisis de $\mathcal{S}_\varphi$ se abordó el estudio del espacio proyectivo dado por

$$\mathbb{P}_\varphi = \mathcal{S}_\varphi / \mathbb{T} = \mathcal{S}_\varphi / \sim$$

donde $x \sim x'$ si $x' = zx$ para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Si $x \in \mathcal{S}_\varphi$, y $G \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$, entonces

$$Gx \in \mathcal{S}_\varphi \;\text{ y por lo tanto }\; [Gx] \in \mathbb{P}_\varphi.$$

Esto implica que existe una acción transitiva del grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ sobre $\mathbb{P}_\varphi$. Usando resultados demostrados para $\mathcal{S}_\varphi$ obtenemos que el espacio proyectivo $\mathbb{P}_\varphi$ es una variedad diferenciable y un espacio homogéneo del grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$, con la topología cociente. Más aún, $\mathbb{P}_\varphi = \exp(\mathcal{F}(\mathcal{A}))$ y por lo tanto, es conexo. [Teor. 5.1]

La estrategia para introducir una métrica e interpretar los elementos en el fibrado tangente del espacio proyectivo se basó en interpretar (vía homeomorfismo) cada clase $[x] \in \mathbb{P}_\varphi$ como el proyector $x \otimes x$ de rango uno, con $x \in \mathcal{S}_\varphi$ algún representante de la clase. El conjunto de estos proyectores lo denotamos por $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \varphi)$.

Si $[x_0] \in \mathbb{P}_\varphi$ y $[a]$ es un vector tangente a $[x_0]$, la métrica en este espacio tangente se define por

$$|[a]|_{[x_0]} = \text{ínf}\{\|a - ir \cdot x_0\|_\varphi : r \in \mathbb{R}\},$$

i.e. la norma cociente en el espacio inducida por la 2-norma en $\mathcal{A}$ (asociada al estado φ). Esta métrica resulta ser un múltiplo de la norma de Hilbert-Schmidt:

$$|[a]|_{[x]} = \frac{1}{\sqrt{2}} Tr((a \otimes x + x \otimes a)^2)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|a \otimes x + x \otimes a\|_{HS},$$

donde Tr denota la traza usual en $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ y $\|\cdot\|_{HS}$ denota la norma de Hilbert-Schmidt. [Teor. 5.2]

Los últimos resultados se concentran en determinar curvas minimales en función de condiciones iniciales o con puntos extremos fijos dados. Nuevamente el homeomorfismo de $\mathbb{P}_\varphi$ con $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \varphi)$ y resultados conocidos de proyectores sobre un espacio de Hilbert permitió encontrar soluciones a estos problemas:

Teorema (5.3). *Sea $[x] \in \mathbb{P}_\varphi$ y $[v] \in (T\mathbb{P}_\varphi)_{[x]}$. La única geodésica $\delta : [0,1] \to \mathbb{P}_\varphi$ que satisface*

$$\delta(0) = [x] \qquad y \qquad \dot{\delta}(0) = [v]$$

está dada por

$$\delta(t) = [e^{t\tilde{v}}(x_0)].$$

La geodésica es minimal para $|[v]|_{[x]} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Teorema (5.4). *Sean $[x], [y] \in \mathbb{P}_\varphi$.*

1. *Si $\varphi(y^*x) \neq 0$, entonces existe una única geodésica en $\mathbb{P}_\varphi$*

$$\delta(t) = [e^{it(z \otimes 1 + 1 \otimes z)}(1)]$$

que une $\delta(0) = [x]$ y $\delta(1) = [y]$, la cual es minimal para todo $t \in [0,1]$. El elemento z está dado por

$$z = -ie^{-i\theta} \frac{\cos^{-1}(|\varphi(x^*y)|)}{(2 - 2|\varphi(x^*y)|^2)^{1/2}} (y - \varphi(x^*y)x).$$

La distancia geodésica entre $[x]$ e $[y]$ está dada por

$$d([x],[y]) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^{-1}(|\varphi(x^* y)|).$$

2. *Si $\varphi(x^* y) = 0$, entonces existen infinitas curvas geodésicas minimales en $\mathbb{P}_\varphi$ que unen $[x]$ con $[y]$. Estas son de la forma*

$$\delta(t) = [e^{it\frac{\pi}{2}(x\otimes y + y \otimes x)}(x)]$$

y tienen longitud $d([x],[y]) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos algunas de las nociones preliminares y notaciones utilizadas durante el desarrollo del trabajo. Por un lado, se establecen aquellos contenidos vinculados con álgebras de operadores, las C*-álgebras y los módulos de Hilbert. Por otro lado, se determinan las nociones geométricas sobre variedades diferenciales y homogéneas en dimensión infinita que utilizaremos para describir las esferas dentro del contexto de las álgebras de operadores.

1.1. Álgebras de operadores

A lo largo de esta tesis consideremos H un espacio de Hilbert separable, $\mathcal{B}(H)$ el conjunto de los operadores acotados sobre H, ambos con la norma usual, y $1 \in \mathcal{B}(H)$ el operador identidad. En este contexto, definimos la esfera en H por $S(H) := \{x \in H : \langle x,x\rangle = 1\}$.

Al trabajar con operadores en $\mathcal{B}(H)$, estaremos utilizando las siguientes notaciones:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{B}(H)_h = \{a \in \mathcal{B}(H) : a = a^*\} & \mathcal{B}(H)_{ah} = \{a \in \mathcal{B}(H) : -a = a^*\} \\
\mathcal{U}(H) = \{u \in \mathcal{B}(H) : u \text{ es unitario } \} & \mathcal{K}(H) = \{a \in \mathcal{B}(H) : a \text{ es compacto}\} \\
\mathcal{U}(H)_c = \{u \in \mathcal{U}(H) : u - 1 \in \mathcal{K}(H)\} & \mathcal{F}(H) = \{a \in \mathcal{B}(H) : \dim(\operatorname{ran}(a)) < \infty\}
\end{array}$$

Notar que $\mathcal{F}(H)$ esta generado por los operadores de rango uno: si $x, y \in H$, el operador de rango uno $x \otimes y : H \to H$ está definido por

$$x \otimes y(z) := \langle z, y\rangle x$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ define el producto interno de H.

Denotaremos $Gl(H)$ al grupo de elementos inversibles en $\mathcal{B}(H)$, el cual es un conjunto abierto en $\mathcal{B}(H)$. Denotamos además $Q(H) = \{q \in \mathcal{B}(H) : q^2 = q\}$ al conjunto de elementos idempotentes y $\mathcal{P}(H) = \{p \in \mathcal{B}(H) : p^2 = p^* = p\}$ al conjunto de las proyecciones ortogonales de $\mathcal{B}(H)$. Como todo subespacio cerrado en H define un único proyector ortogonal con $S = \operatorname{ran}(p)$ entonces este conjunto está asociado a la variedad Grassmanniana del espacio de Hilbert dada por

$$Gr(H) := \{S \subset H : S \text{ es un subespacio cerrado de } H\}.$$

Por ejemplo, si $x \in H$ tiene norma 1, entonces el operador $x \otimes x$ es un proyector ortogonal sobre el subespacio $S =< x >$. Denotaremos $\mathcal{P}_1(H)$ al subconjunto de estos operadores de rango 1 en $\mathcal{P}(H)$.

Recordemos que el espacio $\mathcal{K}(H)$ con la norma usual de operadores es un espacio de Banach, y que un operador $a \in \mathcal{B}(H)$ es compacto si y sólo si la clausura de la imagen (por a) de la bola unitaria en H es un conjunto compacto en H.

Los autovalores de un operador autoadjunto y compacto $a \in \mathcal{B}(H)$ se pueden ordenar en una sucesión $\{\lambda_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$, de manera que $|\lambda_n(a)| \geq |\lambda_{n+1}(a)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde cada autovalor se repite tantas veces como indica su multiplicidad y completando con ceros la sucesión en el caso de que el operador tenga finitos autovalores. En particular se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *Sea a un operador compacto autoadjunto sobre H. Existe un sistema ortonormal $x_1, x_2, \ldots$ de autovectores de a con autovalores correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ tal que, para cada $x \in H$, es*

$$ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x; x_n \rangle x_n.$$

Si la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita, entonces converge a cero.

Un operador $a \in \mathcal{B}(H)$ se dice positivo si es autoadjunto y $\langle ax; x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$. Sea $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una b.o.n. para el espacio de Hilbert H. Para cada operador positivo $a \in \mathcal{B}(H)$ definimos la traza de a por

$$tr(a) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle Te_j, e_j \rangle$$

siendo $tr(a) \in [0, \infty)$. Esta definición no depende de la base elegida.

Para $1 \leq p < \infty$, la **p-clase de Schatten** se define por

$$\mathcal{B}_p(H) = \{a \in \mathcal{B}(H) : tr(|a|^p) < \infty\}.$$

La p-norma de un operador en $\mathcal{B}_p(H)$ se define por $\|a\|_p^p = tr(|a|^p)$, donde $|a| = (aa^*)^{1/2}$. Estos conjuntos son ideales biláteros en $\mathcal{B}(H)$. La notación para los subconjuntos de operadores se generaliza análogamente: $\mathcal{B}_p(H)_h$, $\mathcal{B}_p(H)_{ah}$ y $\mathcal{U}_p(H)$, representan los operadores autoadjuntos, los operadores antihermitianos de $\mathcal{B}_p(H)$ y los operadores unitarios con $u-1 \in \mathcal{B}_p(H)$ respectivamente.

Cuando $p=1$, los elementos de $\mathcal{B}_1(H)$ se conocen como operadores traza. Si $p=2$, los elementos de $\mathcal{B}_2(H)$ se denominan operadores de Hilbert-Schmidt, y forman un espacio de Hilbert con la 2-norma inducida. En este caso, el producto interno está dado por

$$\langle x,y\rangle = tr(xy^*); \quad x\ ,\ y \in \mathcal{B}_2(H).$$

1.2. C*-álgebras

Un **álgebra de Banach** $\mathcal{A}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial $(\mathcal{A},+)$ dotado de un producto algebraico equipado con una norma $\|\ .\ \|$ tal que $\mathcal{A}$ es un espacio normado completo con respecto a dicha norma y tal que se verifica

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

para todo $a,b \in \mathcal{A}$.

En particular, si existe un elemento unidad $1 \in \mathcal{A}$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$, diremos que $\mathcal{A}$ es **unital** y, en tal caso, la norma verifica $\|1\| = 1$. Una **involución** en $\mathcal{A}$ es una aplicación $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que cumple:

- $(a^*)^* = a$
- $(ab)^* = b^*a^*$
- $(\alpha a+b)^* = \overline{\alpha}a^* + b^*$

para todo $a,b \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Una **C*-álgebra** es una álgebra de Banach $\mathcal{A}$ con una involución $*$ tal que cumple la condición:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2. \tag{1.1}$$

Esta condición asegura que la involución preserva la norma y, por lo tanto, es continua. Es decir, para todo $a \in \mathcal{A}$

$$\|a\| = \|a^*\|.$$

Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra $\mathcal{A}$ se dice una **subálgebra** de $\mathcal{A}$ si es un subespacio vectorial de $\mathcal{A}$ cerrado respecto al producto algebraico. Una **C*-subálgebra** es una subálgebra cerrada bajo la involución $*$ que verifica la condición (1.1). En particular, para cualquier elemento $a \in \mathcal{A}$ se define $\mathrm{C}^*(a)$ la **C*-subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por** a. Esta subálgebra es la menor subálgebra que contiene a a y a^*.

Consideremos a continuación $\mathcal{A}$ una C*-álgebra unital, 1 unidad de $\mathcal{A}$. Un elemento $a \in \mathcal{A}$ se dice:

- **normal** si $a^*a = aa^*$;
- **hermitiano o autoadjunto** si $a = a^*$;
- **antihermitiano** si $a = -a^*$;
- **inversible** si existe $a^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$;
- **unitario** si a es inversible y $a^* = a^{-1}$;
- **idempotente** si $a^2 = a$;
- **proyección** si $a^2 = a = a^*$.
- **isometría parcial** si a^*a es una proyección. En particular, se denomina **proyección inicial** a a^*a y **proyección final** a aa^*. En el caso en que $a^*a = 1$, diremos que a es una **isometría**.

Al igual que antes, $\mathcal{A}_h$ denotará el conjunto de los elementos de $\mathcal{A}$ que son autoadjuntos y $\mathcal{A}_{ah}$ el conjunto de elementos antihermitianos.

Notar que si a es normal, el álgebra $\mathrm{C}^*(a)$ resulta conmutativa y por lo tanto (gracias al teorema de Gelfand-Naimark-Segal) puede representarse como $C(X)$ para cierto espacio topológico compacto X.

Cualquier elemento $a \in \mathcal{A}$ se puede escribir como $a = x + iy$ con x e y autoadjuntos, donde

$$x = \frac{a+a^*}{2} \qquad y = \frac{a+a^*}{2i} \qquad a^*a = x^2 + y^2 + i(xy + yx)$$

de donde resulta

$$a^*a + aa^* = 2(x^2 + y^2).$$

Notar que un elemento a es normal si y sólo si el conmutador $[x,y] := xy - yx$ es nulo.

Denotaremos $Gl_{\mathcal{A}}$ al **grupo de elementos inversibles** en $\mathcal{A}$. Este conjunto es abierto en $\mathcal{A}$. Denotamos además $Q_{\mathcal{A}}$ el **conjunto de elementos idempotentes** y $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ el **conjunto de las proyecciones** de una C^*-álgebra dada.

Definimos el espectro de $a \in \mathcal{A}$ por

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin Gl_{\mathcal{A}}\}$$

Dado $a \in \mathcal{A}$ las siguientes propiedades son equivalentes:

- a es autoadjunto y $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^+$,
- $a = b^2$ para algún b autoadjunto,
- $a = a^*$ y $\|t - a\| \leq t$ para cualquier $t \geq \|a\|$
- $a = a^*$ y $\|t - a\| \leq t$ para algún $t < \|a\|$.

Un elemento $a \in \mathcal{A}$ que satisface las condiciones anteriores se dice **positivo** (se simboliza $a \geq 0$) y $\mathcal{A}^+$ denota el conjunto de elementos positivos de $\mathcal{A}$. Por medio de los elementos positivos se puede ordenar parcialmente a $\mathcal{A}$ definiendo la relación $a \geq b$ siempre que $a - b \geq 0$.

Una **funcional** $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ sobre $\mathcal{A}$ es positiva si $\varphi(a) \geq 0$, $\forall a \geq 0$ y, en tal caso, denotaremos $\varphi \geq 0$. Un **estado** sobre $\mathcal{A}$ es una funcional positiva de norma 1. Por ejemplo, si $\xi \in H$, para H espacio de Hilbert, y $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra de operadores en $\mathcal{B}(H)$ entonces

$$\varphi_\xi(a) := \langle a\xi, \xi\rangle \qquad a \in \mathcal{A}$$

es una funcional positiva sobre $\mathcal{A}$ con norma $\|\phi_\xi\| = \|\xi\|^2$. Luego si ξ tiene norma 1, φ_ξ es un estado para $\mathcal{A}$. En particular, si $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ hay estados de la forma $\varphi_z(T) := \langle T(z), z\rangle$ (donde $z \in H$ y $|z| = 1$).

Diremos que un estado φ es **fiel** si $\varphi(x^*x) = 0$ implica que $x = 0$.

Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra unital y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ una C*-subálgebra de $\mathcal{A}$ con $1 \in \mathcal{B}$. Sea $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfismo tal que verifica:

- ϕ es lineal y su imagen es $\mathcal{B}$,
- $\phi^2 = \phi$ (ie, es un proyector sobre $\mathcal{B}$),
- $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$.

Este morfismo se denomina **esperanza condicional**. Diremos que la esperanza condicional es **fiel** si $\forall a \geq 0$, $\phi(a) = 0$ implica que $a = 0$.

Por ejemplo, los estados de una C*$-$álgebra unital $\mathcal{A}$ son esperanzas condicionales de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B} = \mathbb{C}1$.

Algunos ejemplos clásicos de C*-álgebras son:

- $\mathcal{B}(H)$ o $\mathcal{K}(H)$ con la norma usual de operadores y la involución dada por la adjunción.

- El conjunto de funciones continuas $C(X)$ sobre un conjunto compacto X con la norma $\|f\| := sup_{x\in X}|f(x)|$ y la involución es $f^*(x) := \overline{f(x)}$.

- El conjunto de funciones continuas $C_0(X)$ sobre X localmente compacto, que se anulan en infinito, con la misma norma e involución del ejemplo anterior.

- La subálgebra $\mathrm{C}^*(s) \subset \mathcal{B}(H)$ donde s es el operador unilateral shift (también denominada álgebra de Toeplitz).

Si consideramos una C*-álgebra $\mathcal{A}$ con un estado fiel φ, y consideramos el conjunto

$$N_\varphi = \{x \in \mathcal{A} : \varphi(x^*x) = 0\}$$

entonces existe un espacio de Hilbert asociado H_φ que es la completación del cociente $\mathcal{A}/N_\varphi$ con la norma $\|x\|_\varphi = \varphi(x^*x)$. Luego es posible representar a $\mathcal{A}$ en el espacio $\mathcal{L} = L^2(\mathcal{A},\varphi)$ (la completación de $(\mathcal{A}/N_\varphi, \| \|_\varphi))$ con la representación debida a Gelfand, Naimark y Segal (GNS) inducida por φ. Un elemento $a \in \mathcal{A}$ se incorpora en $\mathcal{L}$ como el operador $L_a(\xi) = a\xi$. La norma de estos operadores resulta $\|L_a\| = \|a\|_\varphi = \varphi(a^*a)^{1/2}$.

1.3. Módulos de Hilbert

Se dice que M es un **$\mathcal{A}$-módulo** a izquierda si M es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra y existe $\cdot : \mathcal{A} \times M \to M$ un mapa con las siguientes propiedades:

- $a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y$ y $a\cdot(\lambda x) = \lambda(a\cdot x)$

- $(a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x$, $(\lambda a)\cdot x = \lambda(a\cdot x)$ y $(ab)\cdot x = a\cdot(b\cdot x)$

para todo $x, y \in M$, $a; b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Un **semiproducto interno** en M a valores en $\mathcal{A}$ es un mapa $\langle\cdot;\cdot\rangle : M \times M \to \mathcal{A}$ tal que:

- $\langle\cdot;\cdot\rangle$ es lineal en la primera variable y $\langle a\cdot x; y\rangle = a\cdot\langle x; y\rangle$,

- $\langle x; y\rangle^* = \langle y; x\rangle$ y

- $\langle x; x\rangle \geq 0$,

para todo $x,y \in M, a \in \mathcal{A}$. Escribimos $\langle \cdot ; \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ cuando sea necesario distinguir la C^*-álgebra donde toma valores el semiproducto interno.

Si además se cumple que $\langle x;x \rangle = 0$ implica $x = 0$, decimos que $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ es un **producto interno** en M a valores en $\mathcal{A}$.

Si M es un $\mathcal{A}$ módulo con semiproducto interno y $x,y \in M$ entonces se cumple

$$\langle y,x \rangle \langle x,y \rangle \leq \| \langle x,x \rangle \| \langle y,y \rangle .$$

Para cada $x \in M$ notaremos $\|x\|_M := \| \langle x,x \rangle \|^{\frac{1}{2}}$, definido a partir de la norma $\| \, . \, \|$ en $\mathcal{A}$. Notaremos por $|x|$ al elemento autoadjunto de $\mathcal{A}$ dado por $\langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Luego, se sigue de la propiedad anterior que

$$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| |y|.$$

Diremos que M es un $\mathcal{A}-$**módulo de Hilbert** (a izquierda) si M es un módulo con producto interno tal que es completo respecto a la norma inducida por dicho producto. Si además la clausura $\overline{\{\langle x,y \rangle : x,y \in M\}} \subset \mathcal{A}$ coincide con $\mathcal{A}$, diremos que M es pleno. Veamos algunos ejemplos de módulos:

- Toda C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es, en sí misma, un $\mathcal{A}-$módulo de Hilbert con el producto $\langle a,b \rangle = a^*b$. Con este mismo producto, todo ideal a derecha cerrado de $\mathcal{A}$ también es un $\mathcal{A}-$módulo de Hilbert.

- Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra unital, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$ tal que $1 \in \mathcal{B}$. Si existe una esperanza condicional E en $\mathcal{A}$ respecto a $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, dado N un $\mathcal{A}$-módulo de Hilbert con $\langle \ , \ \rangle_{\mathcal{A}}$ producto interno entonces N es un pre$\mathcal{B}$-módulo de Hilbert con el semiproducto $\langle x,y \rangle_{\mathcal{B}} = E(\langle x,y \rangle_{\mathcal{A}})$.

- Sea $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ una familia de $\mathcal{A}-$módulos de Hilbert. Consideramos M el conjunto de las familias $x = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$, tales que para todo $i \in \mathbb{I}$, $x_i \in \mathcal{M}_i$. Si $\mathbb{I}$ es un conjunto finito, entonces M resulta un $\mathcal{A}-$módulo de Hilbert con el producto $\langle x,y \rangle = \sum \langle x_i, y_i \rangle$. Denotamos en particular $\bigoplus M_i$ a dicho módulo.

1.4. Operadores en módulos de Hilbert sobre una C^*-álgebra

Dados M,N dos $\mathcal{A}-$módulos de Hilbert, definimos el conjunto de **operadores adjuntables** como:

$$\mathcal{L}(M,N) := \left\{ t : M \to N : \exists t^\sharp, \langle tx,y \rangle = \langle x,t^\sharp y \rangle, \forall x \in M, \forall y \in N \right\}$$

y denotaremos $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M,M)$. En particular, $\mathcal{L}(M)$ es una C^*-álgebra con la norma

$$\|t\| := \sup\{\|\langle tx, x\rangle\| : x \in M\}.$$

Sea $x \in M$ e $y \in N$, con M,N dos $\mathcal{A}-$módulos de Hilbert, entonces definimos:

$$x \otimes y : N \to M \qquad , \qquad x \otimes y(z) = (x \otimes y)z := x\langle y, z\rangle$$

y estos operadores se denominan **operadores de rango 1**. Estos operadores tienen las siguientes propiedades:

- $(x \otimes y)^\sharp = y \otimes x$
- $(x \otimes y) \cdot (u \otimes v) = (x\langle y, u\rangle) \otimes v = x \otimes (v\langle u, y\rangle)$
- $t(x \otimes y) = (tx) \otimes y$
- $(x \otimes y)s = x \otimes (s^\sharp y)$

para todo $x \in M, y, u \in N, v \in G$; $s \in \mathcal{L}(G,N), t \in \mathcal{L}(M,G)$ con M,N,G $\mathcal{A}-$módulos de Hilbert.

Denotaremos por $\mathcal{F}(N,M)$ a la clausura del subespacio generado por $\{x \otimes y; x \in M, y \in N\}$. En particular, denotaremos $\mathcal{F}(M) := \mathcal{F}(M,M)$. Este subespacio es además un ideal en $\mathcal{L}(M)$. Si M es un $\mathcal{A}$-módulo de Hilbert entonces es posible probar que M es un $\mathcal{F}(M)$-módulo de Hilbert a derecha pleno con las siguientes operaciones:

- $\cdot : M \times \mathcal{F}(M) \to M, \qquad z.x \otimes y = x \otimes y(z)$
- $\langle \cdot; \cdot\rangle : M \times M \to \mathcal{F}(M); \qquad \langle x; y\rangle = x \otimes y$

con $x; y; z \in M$. Además las normas inducidas por $\mathcal{F}(M)$ y $\mathcal{A}$ en M coinciden.

Un operador adjuntable $u : M \to N$ se dice **unitario** si $uu^\sharp = 1_M$ y $u^\sharp u = 1_N$. Denotaremos por $\mathcal{U}(\mathcal{L}(M,N))$ a la clase de operadores unitarios en $\mathcal{L}(M,N)$. Los operadores $t \in \mathcal{L}(M)$ se dicen proyectores si $t^2 = t = t^\sharp$ y diremos que t es isometría parcial si $t^\sharp t$ es una proyección. En tal caso, denotaremos:

$$\mathcal{U}(M) = \{u \in \mathcal{L}(M) : u \text{ es unitario } u^\sharp u = uu^\sharp = 1\}$$

$$\mathcal{U}(M)_c = \{u \in \mathcal{L}(M) : u \text{ unitario y verifica } u - 1 \in \mathcal{F}(M)\}$$

Podemos definir dos aplicaciones lineales naturales entre elementos de M y operadores en $\mathcal{F}(M)$:

$$\Psi : M \to \mathcal{F}(M); \qquad \Psi(x) := x \otimes x$$

$$\Phi_x : M \to \mathcal{F}(M); \qquad \Phi_x(y) := x \otimes y$$

Si restringimos estas aplicaciones a los elementos de $x \in M$ tales que $\langle x,x\rangle = 1$, la imagen de Ψ estará contenida en el conjunto de proyecciones de $\mathcal{L}(M)$, ya que $\|x \otimes x\|_{\mathcal{L}(M)} = \|x\|_M = 1$. Por otro lado, la imagen de Φ_x será el conjunto de isometrías parciales con $y \otimes y$ proyección inicial y $x \otimes x$ proyección final. En ambos casos, la imagen de estas aplicaciones está contenida en $\mathcal{F}(M)$.

1.5. Operadores adjuntables en C*-álgebras con un estado fiel

Si $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra unital con un estado fiel $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ y $\varphi(1) = 1$ entonces el producto $\langle a,b\rangle = \varphi(a^*b)$ define en $\mathcal{A}$ una estructura de pre-$\mathbb{C}$-módulo de Hilbert. Luego las definiciones anteriores pueden redefinirse de manera similar en este contexto pero teniendo en cuenta que en esta situación, la norma inducida por el producto interno $\langle x,y\rangle := \varphi(x^*y)$ no es completa.

Con la misma notación que en $\mathcal{B}(H)$, se definen los operadores de rango 1 dados por:

$$x \otimes y(\xi) = \langle y,\xi\rangle x$$

donde $x,y \in \mathcal{A}$, definidos sobre $\xi \in H_\varphi$ (el espacio de Hilbert asociado a la representación de la C*-álgebra). En particular, si $a \in \mathcal{A}$, $x \otimes y(a) = \varphi(y^*a)x$. Usaremos nuevamente la notación $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ para el conjunto generado por operadores de rango uno con símbolos en A.

Denotaremos $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ al conjunto de operadores acotados definidos en $\mathcal{A}$. Diremos que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ es **adjuntable** si existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ tal que

$$\varphi(y^*T(x)) = \varphi(S(y)^*x).$$

Denotaremos en este caso $S = T^\sharp$. Por ejemplo, si L_a denota la multiplicación a izquierda ($a \in \mathcal{A}$) entonces $L_a^\sharp = L_{a^*}$. Denotamos $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ al conjunto de operadores adjuntables. Notar que en este caso, $\mathcal{A}$ no es un módulo de Hilbert con el producto inducido por φ (por falta de completitud de la norma asociada) y por lo tanto $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ es una subálgebra (no cerrada) de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Sea

$$\mathcal{B}_s(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A}) : T^\sharp = T\}$$

en conjunto de los operadores adjuntables que son simétricos respecto a φ. Estos operadores se denominaban *simetrizables*. M.G. Krein [24] y P. Lax [28] estudiaron esta clase de operadores, en el contexto de un álgebra de Banach con un producto interno definido positivo. En particular, ellos mostraron que estos operadores se extienden a operadores autoadjuntos en $\mathcal{L}$. Si T es adjuntable, $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^\sharp)$ y $T_2 = \frac{-i}{2}(T - T^\sharp)$ son simétricos, y además se extienden a $\mathcal{L}$, así $T = T_1 + iT_2$ se extiende a $\mathcal{L}$, al igual que $T^\sharp$, y la extensión de $T^\sharp$ es el operador adjunto de la extensión de T en $\mathcal{L}$. Este resultado también fue posteriormente obtenido por I. Gohberg and M.K. Zambickii [21] como una adaptación del caso de espacios de Banach con dos normas (ninguna de las cuales necesariamente es obtenida por un producto interno).

Notar que los operadores en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ son adjuntables ya que $(a \otimes b)^\sharp = b \otimes a$. Denotaremos

$$\mathcal{F}(\mathcal{A})_s = \{T \in \mathcal{F}(\mathcal{A}) : \varphi(x^*Ty) = \varphi((Tx)^*y)\},$$

al subconjunto de operadores en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ que son simétricos para el producto interno inducido por φ. Es decir, $\mathcal{F}(\mathcal{A})_s = \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_s(\mathcal{A})$.

Definimos en $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ la norma dada por

$$\|T\|_{\mathbf{a}} = \text{máx}\{\|T\|, \|T^\sharp\|\}.$$

Con esta norma, $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ resulta un espacio completo.

Además

$$\|TS\|_{\mathbf{a}} \leq \|T\|_{\mathbf{a}}\|S\|_{\mathbf{a}},$$

i.e. $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ es un álgebra de Banach, con involución $\sharp$. Además es claro que $\|T^\sharp\|_{\mathbf{a}} = \|T\|_{\mathbf{a}}$. Sin embargo, $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ no es una C*-álgebra. Por ejemplo, tomemos $a \in \mathcal{A}$ con $\|a\| = 1$ y $a^*a \neq 1$. Por cálculos elementales, es posible mostrar que

$$\|(1 \otimes a)^\sharp (1 \otimes a)\|_{\mathbf{a}} = \varphi(a^*a) \ \text{ y } \ \|1 \otimes a\|_{\mathbf{a}} \geq \|a\| = 1,$$

donde $\varphi(a^*a) < 1$. De hecho, como $a^*a \leq 1$ y φ es fiel, $\varphi(a^*a) = 1$ implica que $a^*a = 1$.

Denotemos $Gl_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ el grupo de operadores inversibles en $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. Notar que $G \in Gl_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ si y sólo si G y $G^\sharp$ son inversibles en $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. Además tenemos que $\sigma_{\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})}(T) = \sigma_{\mathcal{A}}(T^\sharp) \cup \overline{\sigma_{\mathcal{A}}(T)}$ para todo $T \in \mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$.

Consideremos el subgrupo cerrado

$$\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}) = \{G \in Gl_{\mathbf{a}}(\mathcal{A}) : \varphi((Gx)^*Gy) = \varphi(x^*y)\}.$$

Es decir, $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ consiste de los operadores inversibles que actúan en $\mathcal{A}$ que preserva el producto dado por el estado φ. Además, si $G \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ entonces $G^{-1} = G^\sharp$. Es claro que $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ contiene a $\mathcal{U}_\mathcal{A}$, el grupo unitario de $\mathcal{A}$, actuando por multiplicación a izquierda sobre $\mathcal{A}$: $L_u(x) = ux$ ($u \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}$). Además $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ contiene al grupo de los φ-invariante $*$-automorfismos de $\mathcal{A}$: $\theta \in Aut(\mathcal{A})$ tales que $\varphi(\theta(x)) = \varphi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. Para algunos cálculos (por ejemplo, para mostrar la transitividad de acciones de este grupo) sólo será suficiente considerar estos elementos en $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$.

Por último, notemos que los elementos G en $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ no necesariamente son isométricos, y $\|G\|_\mathbf{a} \geq 1$. Es claro que, para $a \in \mathcal{A}$, $\|L_a\|_\mathbf{a} = \|a\|_\infty$.

Sea $\mathcal{Q}_\mathbf{a}$ el conjunto de idempotentes en $\mathcal{B}_\mathbf{a}(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{Q}_\mathbf{a} = \{Q \in \mathcal{B}_\mathbf{a}(\mathcal{A}) : Q^2 = Q\}.$$

En particular, $\mathcal{Q}_\mathbf{a}$ es una subvariedad analítica de $\mathcal{B}_\mathbf{a}(\mathcal{A})$ (ver [33]). Denotemos

$$\mathcal{P}_\mathbf{a} = \{P \in \mathcal{Q}_\mathbf{a} : P^\sharp = P\},$$

el subconjunto de $\mathcal{Q}_\mathbf{a}$ de operadores idempotentes que son ortogonales con respecto a φ (y que extienden a las proyecciones autoadjuntas en $\mathcal{L}$). Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ al espacio de proyecciones autoadjuntas de $\mathcal{L}$, y por $\mathcal{P}_1(\mathcal{L})$ al subconjunto de proyecciones de rango 1. En particular, denotaremos $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\varphi)$ el conjunto de proyecciones de rango uno generadas por elementos en $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$, es decir, elementos de la forma $x \otimes x$ con $x \in \mathcal{A}$, $\varphi(x^*x) = 1$.

Dada una proyección fija $P_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, los operadores sobre $\mathcal{L}$ pueden escribirse como matrices de 2×2. Si escribimos

$$A = P_0AP_0 + P_0A(I-P_0) + (I-P_0)AP_0 + (I-P_0)A(I-P_0) = a+b+c+d$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde $a = P_0AP_0$ denota un operador en $\mathcal{B}(R(P_0))$, $b = P_0A(1-P_0)$ un operador en $\mathcal{B}(N(P_0), R(P_0))$, y así respectivamente. En esta forma matricial, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la composición de operadores es igual al producto de matrices. Además,

$$A^\sharp = \begin{pmatrix} a^\sharp & b^\sharp \\ c^\sharp & d^\sharp \end{pmatrix}^t.$$

Con esta notación, decimos que A es P_0-diagonal si verifica $b = c = 0$ y A es P_0-codiagonal si $a = d = 0$. Denotaremos por D_{P_0} y C_{P_0} los subespacios de operadores P_0-diagonales y P_0-codiagonales respectivamente. Basados en la representación respecto a P_0, $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ puede descomponerse como $D_{P_0} \oplus C_{P_0}$.

1.6. Variedades de Banach

1.6.1. Estructura diferencial en dimensión infinita

Decimos que M es **variedad topológica modelada por un espacio de Banach** E si existe una colección de abiertos $U_i \subset M$ y homeomorfismos $\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i)$ con $\varphi(U_i)$ abiertos en E y tales que se cumple la siguiente compatibilidad:

- Dados dos pares (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) la función de transición $\tau_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ resulta continua entre los correspondientes abiertos donde está definida. Llamaremos **carta** alrededor de $x \in M$ al par (U, φ) donde $x \in U$.

Diremos que M es una **variedad diferenciable de clase $\mathbf{C}^k$** si es una variedad topológica con funciones de transición diferenciables Fréchet de dicha clase. La colección de cartas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ se denomina **atlas** de M.

Decimos que un conjunto $S \subset M$, con M una variedad modelada por E espacio de Banach, es una **subvariedad regular** de M si:

- E se descompone como suma de dos espacios de Banach $E = E_1 \oplus E_2$.
- Dado $x \in S$, existen (U, φ) carta de M alrededor de x y abiertos $A_1 \in E_1, A_2 \in E_2$ tales que $\varphi : U \to A_1 \oplus A_2$ es un isomorfismo con $\varphi(U \cap S) = A_1 \times \{a_2\}$ para cierto $a_2 \in A_2$ fijo.

Bajo estas condiciones, para todo punto $x \in S$ existe una carta (U, φ) sobre M que induce una carta sobre S dada por el abierto $U \cap S$ y el difeomorfismo $\varphi\mid_S = pr_1 \circ \varphi$. Es claro que estas cartas forman un atlas diferenciable sobre S y la topología inducida por este atlas coincide con la topología de subespacio de M.

El espacio tangente de una variedad en un punto puede ser vista de diferentes formas equivalentes. A continuación, presentaremos dos definiciones para este espacio.

Sean M variedad modelada por un espacio de Banach E y $x \in M$, definimos el **espacio tangente** de M en x como:

$$(TM)_x = \Big\{(U, \varphi, v) \,:\, (U, \varphi) \text{ carta alrededor de } x,\, v \in E\Big\}\Big|_{\backsim_1}$$

donde la relación de equivalencia $\backsim_1$ está dada por

$$(U,\varphi,v) \backsim_1 (V,\psi,w) \text{ si y solo si } w = D(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}v$$

o, equivalentemente

$$(TM)_x = \Big\{[\alpha]_x : \alpha : I \to M \text{ curva diferenciable sobre } M \text{ con } \alpha(0) = x\Big\}\Big|_{\backsim_2}$$

donde la relación de equivalencia $\backsim_2$ está dada por

$$[\alpha] \backsim_2 [\beta] \text{ si y sólo si } \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\varphi\circ\alpha(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\varphi\circ\beta(t))$$

para alguna (U,φ) carta alrededor de x. Denotaremos $TM := \sqcup_{x\in M}(TM)_x$ a la unión disjunta de todos los espacios tangentes de M.

Se puede probar que las relaciones de equivalencias están bien definidas y son maneras equivalentes de presentar el espacio tangente a un punto en una variedad. Más aún, vía estas definiciones es posible mostrar que $(TM)_x \simeq E$ y que este espacio es, en sí mismo, una variedad diferenciable (ver [26]).

Sean E,F espacios de Banach y M,N variedades de Banach modeladas por estos espacios respectivamente.

- Una función $g : M \to N$ se dice **diferenciable (Fréchet) de clase C^r** si, para cada (U,φ) carta alrededor de $x\in M$ y (V,ψ) carta alrededor de $g(x)$, tal que $g(U)\subset V$, la función

  $$\psi\circ g\circ\varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

  es una función diferenciable (Fréchet) de clase C^r.

En el caso en que g sea diferenciable, definimos la **diferencial de la función** como la aplicación $g_* = Dg : TM \to TN$ dada localmente por:

$$g_*(x,v) := (\psi\circ g\circ\varphi^{-1}(x), D(\psi\circ g\circ\varphi^{-1})_x v)$$

donde (U,φ) y (V,ψ) son cartas de M y N respectivamente, $x\in\varphi(U)$ y $v\in E\simeq(TM)_x$.

Una herramienta útil para definir una estructura de subvariedad sobre un conjunto está dada por la siguiente proposición:

Proposición 1.1. *Sea $f : M \to Z$ diferenciable Fréchet de clase C^k (con $k \geq 1$) entre variedades, tal que para todo $x \in M$ se tiene que $f_{*x} = Df_x : (TM)_x \to (TZ)_{f(x)}$ es un epimorfismo cuyo núcleo* $\ker f_{*x}$ *se parte en $(TM)_x$, es decir, existe Q_x subespacio cerrado de $(TM)_x$ tal que*

$$(TM)_x = Q_x \oplus \ker f_{*x}.$$

Sea $z_0 \in Z$ fijo. Entonces el conjunto $N = f^{-1}(z_0) \in M$ admite una estructura de subvariedad regular cerrada de clase C^k con $(TN)_x \simeq \ker f_{*x}$ para todo $x \in N$.

Esta proposición es un resultado obtenido a partir del teorema de la función implícita para espacios de Banach cuya demostración puede verse en [25] o [26].

Notar que para poder aplicar la proposición anterior es necesario asegurar que el núcleo de una función diferenciable se parte, lo cual no siempre es posible.

El espacio doble-tangente de una variedad será pensado como el espacio tangente de la variedad TM. Denotaremos los elementos de TTM con la forma (x,v,u,w) donde $x \in U \subset M$ y $v,u \in (TU)_x$ o, equivalentemente, por la clase de una curva $[\beta]_{x,v}$ con $\beta(0) = (x,v)$ y $\frac{d}{dt}\big|_0 (\beta(t)) = (u,w)$.

Sea $TM := \sqcup_{x \in M} (TM)_x$ y $\pi : TM \to M$ la proyección canónica $\pi(x,v) = \pi([\alpha]_x) := x$ entonces (TM, M, π) es un fibrado vectorial denominado **fibrado tangente**. Las secciones de este fibrado $X : M \to TM$ (que son funciones diferenciales) se denominan **campos** y notaremos $\chi(M)$ al conjunto de estos campos. Todo campo se puede trabajar como una derivación usando que si $f \in C^k(M)$ entonces localmente $X(f)(x) := pr_2 \circ f_{*x}(X(x))$.

Análogamente, tenemos la estructura de fibrado vectorial en (TTM, TM, π_{TTM}) donde hemos definido $\pi_{TTM}(x,v,u,w) := (x,v)$. Sin embargo, tomando como función a $\pi_* : TTM \to TM$ la diferencial de $\pi : TM \to M$, dada por $\pi(x,v) = v$, tenemos otra estructura de fibrado (TTM, TM, π_*). Notar que localmente no es difícil ver que $\pi_*(x,v,u,w) = (x,u)$, con lo cual las estructuras sobre el doble-tangente son distintas. Dentro del fibrado doble-tangente tenemos al subfibrado vertical TVM dado por los elementos de la forma $(x,v,0,w)$ es decir $VTM = \ker \pi_*$.

1.6.2. Métricas de Finsler

Si M una variedad modelada sobre un espacio de Banach, una **métrica de Finsler** sobre M consiste en una distribución continua de normas $\| \, . \, \|_x$ en cada espacio tangente $(TM)_x$. Esta definición de métrica de Finsler no incluye necesariamente la diferenciabilidad y convexidad estricta de la norma, pues esto sería demasiado restrictivo para nuestro posterior trabajo donde generalmente consideraremos normas sin estas propiedades. Dada una métrica de Finsler, la **longitud** de una curva γ definida para $a \leq t \leq b$ está dada por:

$$long(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}.$$

Sea $R[x_0, x_1]$ el conjunto de las curvas suaves a trozos $\gamma : [0,1] \to X$ uniendo $\gamma(0) = x_0$ con $\gamma(1) = x_1$. Luego, se define la **distancia geodésica** en cada componente conexa de M como:

$$d(x_0, x_1) = \text{ínf}\{long(\gamma) : \gamma \in R[x_0, x_1]\}.$$

Una curva se dice minimal en M si su longitud coincide con la distancia geodésica entre sus puntos inicial y final.

1.7. Grupos de Lie y espacios homogéneos

Un **grupo de Lie-Banach** (real) es un grupo topológico G tal que es una variedad de Banach donde las funciones $G \times G \longrightarrow G; (u; v) \mapsto uv; G \longrightarrow G; u \mapsto u^{-1}$ son suaves.

El espacio tangente $(TG)_e$ en la identidad $e \in G$ se denomina **álgebra de Lie** de G y lo denotaremos por $\mathfrak{g}$. Una vez conocida el álgebra de Lie de un grupo de Lie-Banach es posible calcular el espacio tangente en cualquier $g_0 \in G$ trasladando a izquierda o derecha, es decir $(TG)_{g_0} = g_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}g_0$.

Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ una curva que satisface $\gamma(0) = e$ y $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$, para todo $s; t \in \mathbb{R}$. Un subgrupo uniparamétrico de G consiste de los elementos $\{\gamma(t)\}$ para una curva con la propiedad anterior. Para cada $v \in g$, existe un único subgrupo uniparamétrico suave γ_v de G tal que $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Esto permite la definición de la aplicación exponencial $\exp_G : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ dada por $\exp_G(v) = \gamma_v(1)$. Puede mostrarse que la exponencial es una función suave.

Como ejemplos de grupos de Lie-Banach clásicos que utilizaremos en este texto podemos mencionar:

- El grupo de operadores unitarios en $U(H)$ cuya álgebra de Lie es $\mathcal{B}(H)_{ah}$.
- El grupo de operadores unitarios de una C$^*-$álgebra unital $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ cuya álgebra de Lie es $\mathcal{A}_{ah}$.
- El grupo $\mathcal{U}_p(H)$, el cual es grupo de Lie-Banach con la topología relativa inducida por la p-norma de $\mathcal{B}_p(H)$. En particular, el álgebra de Lie de $\mathcal{U}_p(H)$ se identifica con el conjunto de operadores $\mathcal{B}_p(H)_{ah}$.

Sean G un grupo de Lie-Banach y X una variedad suave. Una **acción a izquierda** de G sobre X es una función suave $\pi : G \longrightarrow X$; $(g;x) \mapsto \pi_g x$; que satisface

- $\pi_h(\pi_g(x)) = \pi_{gh}(x)$
- $\pi_e(x) = x$ donde e es el elemento neutro de G.

para $g,h \in G$ y $x \in X$. Notaremos $\pi_g(x) = g \cdot x$

Dada un acción, la **órbita** de $x \in X$, es el subconjunto de X

$$O_x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Diremos que la acción es **transitiva** si se verifica que O_x coincide con X para todo $x \in X$, es decir, si para todos $x_0; x_1 \in X$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x_0 = x_1$. En este caso, diremos que X es un **espacio homogéneo**.

Si la acción es localmente transitiva, la órbita de la acción de un grupo de Banach-Lie no necesariamente tiene estructura de variedad con la topología heredada. Para lograr esto, será útil el siguiente resultado [34]:

Lema 1.1. *Sea G un grupo Banach-Lie actuando suavemente sobre un espacio de Banach X. Para $x_0 \in X$ fijo, denotemos por $\pi_{x_0} : G \to X$ la aplicación suave $\pi_{x_0}(g) = g \cdot x_0$. Supongamos que*

1. *π_{x_0} es una aplicación abierta, como aplicación desde G sobre la órbita $\{g \cdot x_0 : g \in G\}$ de x_0 (con la topología relativa de X);*
2. *la diferencial $d(\pi_{x_0})_1 : (TG)_1 \to X$ se parte: su núcleo y su rango son subespacios complementados cerrados.*

Entonces, la órbita $\{g \cdot x_0 : g \in G\}$ es una subvariedad suave de X y la aplicación

$$\pi_{x_0} : G \to \{g \cdot x_0 : g \in G\}$$

es una sumersión suave.

El subgrupo de un grupo de Lie-Banach G dado por

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

se denomina **grupo de isotropía** de la acción en $x \in X$. Si la acción es continua y transitiva en X entonces este grupo es una subvariedad cerrada de G.

Diremos que G_x es **locamente exponencial** en G si existen $\varepsilon_O, \delta_O > 0$ tales que si $\|u-1\| < \varepsilon_O$ y $u \in G_x$ entonces existe $z \in \mathfrak{g}$ cumpliendo $\|z\| < \delta_O$ y $\exp(z) = u$. Si para cada $u \in G$ existe $z \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp(z) = u$, se dice que G_x es un **subgrupo exponencial** de G. Notar que esto es equivalente a que $\mathfrak{g}_x$ resulte subvariedad con la topología heredada del álgebra $\mathfrak{g}$.

A continuación nos restringiremos a espacios homogéneos de grupos unitarios porque son los que estudiaremos más adelante, aunque es posible dar definiciones para espacios homogéneos cualesquiera.

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach provista de una involución. El grupo unitario $\mathcal{U}_\mathcal{B}$ se define igual que cuando $\mathcal{B}$ es una C*-álgebra. Supongamos que $\mathcal{U}_\mathcal{B}$ es un grupo de Lie-Banach con la topología de la norma de $\mathcal{B}$. Es decir, estamos pensando en los dos ejemplos dados más arriba: el grupo unitario $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ de una C*-álgebra $\mathcal{A}$ y los grupos unitarios $\mathcal{U}_p(H)$. Denotemos por $\mathcal{B}_{ah}$ al álgebra de Lie de $\mathcal{U}_\mathcal{B}$, o sea los elementos $b \in \mathcal{B}$ tales que $b^* = b$.

Sea O un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_\mathcal{B}$. Diremos que O es un **espacio homogéneo reductivo** si:

- Para todo $u \in \mathcal{U}_\mathcal{B}$ existe un subespacio cerrado $\mathcal{H}_u$ de $\mathcal{B}_{ah}$ que satisface: Existe $\mathcal{V}_u$ subespacio cerrado de $\mathcal{B}_{ah}$ cumpliendo $\mathcal{H}_u \times \mathcal{V}_u = \mathcal{B}_{ah}$ y $v\mathcal{H}_u v^* = \mathcal{H}_u$, para todo $v \in G_u$, donde G_u es el grupo de isotropía en $u \in \mathcal{U}_\mathcal{B}$.
- La distribución $u \to \mathcal{H}_u$ es suave. Esto significa que: Si $p_u : \mathcal{B}_{ah} \to \mathcal{H}_u$ es la proyección sobre $\mathcal{H}_u$, la función definida de $\mathcal{U}_\mathcal{B}$ en los operadores acotados sobre $\mathcal{B}$, dada por $u \mapsto \mathcal{H}_u$ resulta suave.

La correspondencia $u \mapsto \mathcal{H}_u$ define una conexión en O. En consecuencia, es posible introducir las nociones de levantamiento y desplazamiento horizontal, torsión, curvatura, geodésicas, etc.

Los espacios $\mathcal{H}_u$ consisten de los vectores horizontales de $\mathcal{B}_{ah}$ y los espacios $\mathcal{V}_u$ son los vectores verticales en $\mathcal{B}_{ah}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}_u$ es el álgebra de Lie del grupo G_{x_0} si $\pi_x(u) = x_0$. De esta manera, la idea de una conexión es levantar en $x : \mathcal{U}_\mathcal{B} \to O$ los espacios tangentes a $x_0 \in O$ mediante un isomorfismo a espacios horizontales que varían suavemente. Un análisis detallado acerca de espacios homogéneos reductivos de dimensión infinita puede encontrarse en [31]. En particular, en dicho artículo se muestra como también se puede definir una conexión a partir de una 1-forma equivariante $s_x : (TO)_x \to \mathcal{B}_{ah}$ donde s_x es el inverso a derecha de $(\pi_x)_e$. De esta manera, los espacios horizontales se obtienen como $\mathcal{H}_u = s_{ux}((TO)_x)$, $u \in \mathcal{U}_\mathcal{B}$.

Capítulo 2

Propiedades geométricas en álgebras de operadores

En este capítulo, analizamos algunas características particulares de los operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert, sobre un módulo de Hilbert y sobre una C*-álgebra con un estado fiel. Identificaremos resultados (algunos ya conocidos) que permitirán abordar el análisis de la estructura diferencial y métrica de la esferas en estos espacios. En particular, presentamos propiedades sobre los operadores adjuntables de una C*-álgebra unital con un estado fiel φ, varias de las cuales son necesarias para el estudio de curvas minimales.

2.1. Geometría en operadores sobre un espacios de Hilbert

En esta sección consideramos H un espacio de Hilbert separable y $\mathcal{B}(H)$ el álgebra de operadores lineales acotados con la norma usual de operadores.

2.1.1. La variedad Grassmanniana de un espacio de Hilbert

La variedad Grassmanniana del espacio de Hilbert H dada por

$$Gr(H) = \{S \in H : S \text{ subespacio de } H\}$$

puede estudiarse identificando cada subespacio cerrado S de H con el único proyector p_S que verifica $\mathrm{Im}(p_S) = S$, $p_S^2 = p_S$ y $p_S^* = p_S$. Es decir, para estudiar su estructura basta considerar el conjunto de proyectores

$$\mathcal{P}(H) = \{p \in \mathcal{B}(H) : p^2 = p^* = p\}.$$

Desde este punto de vista, varios autores estudiaron su geometría como variedad homogénea. Mencionaremos a continuación algunos resultados sin demostración.

El grupo de Lie Banach $\mathcal{U}(H)$ actúa sobre este conjunto a través de la conjugación

$$\pi(u,p) := u^* pu.$$

Esta acción es localmente transitiva ya que si $p,q \in \mathcal{P}(H)$ verifican $\|q-p\| < 1$ entonces existe $u \in \mathcal{U}(H)$ tal que $upu^* = q$ (ver, por ejemplo, [17] o [23]). Por lo tanto, este conjunto admite estructura de variedad homogénea y las órbitas de la acción

$$O_p(\mathcal{P}(H)) = \{u^* pu \in \mathcal{B}(H) : u \in \mathcal{U}(H)\}$$

son subvariedades suaves de $\mathcal{B}(H)$ que coinciden con las componentes conexas de la variedad. En particular, las proyecciones de rango uno forman la componente conexa $\mathcal{P}_1(H)$.

Fijando $p \in Gr(H)$, el espacio tangente puede describirse matricialmente como las matrices codiagonales respecto a p, es decir, si $v \in (T\mathcal{P}(H))_p$ entonces

$$v = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}$$

donde $b = (1-p)vp$.

La estructura de $\mathcal{P}(H)$ fue ampliamente estudiada e incluso se ha demostrado la existencia de una conexión lineal natural en $\mathcal{P}(H)$. Si $dim(H) < \infty$, esta resulta ser la conexión de Levi-Civita de la métrica Riemanniana al considerar el producto interno de Frobenius en cada espacio tangente. Más específicamente, la conexión lineal en $\mathcal{P}(H)$ esta inducida por la estructura reductiva, donde los elementos horizontales a p_0 (en el álgebra de Lie de $\mathcal{U}(H)$: $\mathcal{B}(H)_{ah}$) son operadores codiagonales antihermitianos. Si $dim(H) = \infty$, considerando la norma usual de $\mathcal{B}(H)$ en cada tangente de $\mathcal{P}(H)$, se obtiene una métrica de Finsler no regular.

El siguiente teorema recopila algunos resultados relacionados con la existencia de curvas minimales en este contexto. Las demostraciones pueden encontrarse en [9, 32, 2, 7].

Teorema 2.1. *Sea H espacio de Hilbert.*

- *Sea $p_0 \in \mathcal{P}(H)$ y $z \in \mathcal{B}(H)_{ah}$ codiagonal con respecto a p_0. Entonces la curva*

$$\delta(t) = e^{tz} p_0 e^{-tz} \tag{2.1}$$

es una curva geodésica que verifica que $\delta(0) = p_0$ y $\dot{\delta}(0) = [z, p_0]$.

- *Si* $dim(H) = \infty$ *las curvas geodésicas (2.1) resultan minimales a lo largo de sus puntos extremos para todo t tal que*
$$|t| \leq \frac{\pi}{2\|z\|}.$$
cuando se considera sobre la variedad la métrica inducida por la norma usual de $\mathcal{B}(H)$*.*

- *Si* $p_0, p_1 \in \mathcal{P}(H)$ *satisfacen* $\|p_0 - p_1\| < 1$*, entonces existe una única geodésica (salvo reparametrización) que une* p_0 *con* p_1*. Esta condición no es necesaria para la existencia de una única geodésica.*

- *Existe una única geodésica que une dos proyecciones p y q si y sólo si*
$$\operatorname{ran}(p) \cap \ker(q) = \ker(p) \cap \operatorname{ran}(q) = \{0\}.$$

- *Si* $dim(H) < \infty$*, la métrica de Frobenius puede ser utilizada para medir la longitud de las curvas. En esta situación, las curvas geodésicas resultan minimales en la norma de Frobenius cuando* $|t| \leq \frac{\pi}{2\|z\|}$*, lo cual es una condición sobre la norma usual de operadores.*

Como las proyecciones se pueden parametrizar usando simetrías s ($s^* = s$, $s^2 = 1$), a través de la aplicación:
$$p \longleftrightarrow s_p = 2p - 1$$
algunos cálculos algebraicos resultan más fáciles con el uso de simetrías. Por ejemplo, la condición de que el exponente z (de la geodésica) es p_0-codiagonal significa que z anti-commuta con s_{p_0}. Luego la geodésica (2.1), en términos de simetrías, puede ser simplificada por
$$s_\delta(t) = e^{itz} s_{p_0} e^{-itz} = e^{2itz} s_{p_0} = s_{p_0} e^{-2itz}.$$

2.1.2. El grupo de Lie-Banach $\mathcal{U}_p(H)$

Estamos interesados en analizar la acción del grupo de Lie-Banach $\mathcal{U}_p(H)$ con la topología relativa inducida por la norma de $\mathcal{B}_p(H)$. Previamente es necesario mencionar algunas cuestiones conocidas.

Lema 2.1. *El álgebra de Lie de* $\mathcal{U}_p(H)$ *se identifica con* $\mathcal{B}_p(H)_{ah}$ *para todo p par.*

El espacio tangente a $\mathcal{U}_p(H)$ para cada $u \in \mathcal{U}_p(H)$ puede caracterizarse por
$$(T\,\mathcal{U}_p(H))_u = u \cdot \mathcal{B}_p(H)_{ah} = \mathcal{B}_p(H)_{ah} \cdot u.$$

Análogamente al lema anterior, se obtiene:

Lema 2.2. *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra unital. Entonces el grupo $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ de elementos unitarios en $\mathcal{A}$ es un grupo de Lie Banach con álgebra dada por los elementos antihermitianos $\mathcal{A}_{ah}$.*

A continuación, consideremos en $\mathcal{U}_p(H)$ la métrica usual dada por la funcional $long_p$ de longitud de curvas y la métrica de Finsler dada por la p-norma. Además tomemos la distancia rectificable $d_p(u_1,u_2)$ como el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen los puntos $u_1,u_2 \in \mathcal{U}_p(H)$ dados.

El siguiente teorema recopila algunos resultados relacionados con la existencia de curvas minimales en $\mathcal{U}_p(H)$. En ([9]) puede encontrarse en detalle la demostración de los mismos.

Teorema 2.2. *Sea $p \in \mathbb{Z}$ par y positivo. Entonces*

1. *Sea $u \in \mathcal{U}_p(H)$ y $v \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ con $\|v\| \leq \pi$. Entonces la curva $\mu(t) = u\ e^{tv}$, $t \in [0,1]$ es la más corta sobre todas las curvas suaves a trozos en $\mathcal{U}_p(H)$ que une los mismos puntos extremos.*

   Más aún, si $\|v\| < \pi$, es única con ésta propiedad entre todas las curvas suaves contenidas en $\mathcal{U}_p(H)$.

2. *Sea $u_0,u_1 \in \mathcal{U}_p(H)$. Entonces existe una curva geodésica minimal que une dichos puntos. Si $\|u_0 - u_1\| < 2$, entonces la curva geodésica es única.*

3. *Existen en $\mathcal{U}_p(H)$ geodésicas minimales de longitud arbitraria. Es decir, el diámetro de $\mathcal{U}_p(H)$ es infinito.*

4. *Si $u,v \in \mathcal{U}_p(H)$ entonces*

$$\sqrt{1-\frac{\pi^2}{12}}d_p(u,v) \leq \|u-v\|_p \leq d_p(u,v).$$

   Más aún, el espacio métrico $(\mathcal{U}_p(H),d_p)$ es completo.

En particular, se tiene el siguiente resultado de convexidad de la función distancia entre $u \in \mathcal{U}_p(H)$ fijo y los puntos de una curva geodésica:

Teorema 2.3. *Sea p entero, par y positivo, $u \in \mathcal{U}_p(H)$ y $\beta : [0,1] \to \mathcal{U}_p(H)$ una geodésica no constante contenida en el entorno geodésico de radio $\frac{\pi}{2}$, es decir, $\beta \subset B_p(u,\frac{\pi}{2})$. Supongamos además que u no se encuentra en una prolongación de β. Entonces la función*

$$f_p(s) = d_p(u,\beta(s))^p$$

es una función estrictamente convexa.

Corolario 2.1. *Sean $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{U}_p(H)$ con $u_2, u_3 \in B_p(u_1, \frac{\pi}{2})$ no alineados (es decir, no todos contenidos en una misma curva geodésica). Sea γ la curva corta que une u_2 con u_3. Entonces $d_p(u_1, \gamma(s)) < \frac{\pi}{2}$ para $s \in [0,1]$ y el radio de convexidad de bolas en $\mathcal{U}_p(H)$ resulta ser $\frac{\pi}{4}$.*

2.2. Operadores unitarios en $\mathcal{L}(M)$ y en $\mathcal{B}(\mathcal{A})$

2.2.1. Operadores unitarios en $\mathcal{L}(M)$

Dado M un módulo de Hilbert, notar que $\mathcal{L}(M)$ es una C*-álgebra con la adjunción $\sharp$ y la norma de operadores asociada a la norma inducida por el producto interno.

Lema 2.3. *$\mathcal{U}(M)$ es un grupo de Lie Banach, donde su álgebra de Lie resulta:*

$$\mathfrak{u} = \{v \in \mathcal{L}(M) : e^{tv} \subset \mathcal{U}(M), t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(M)_{as}$$

En decir, el álgebra de Lie de este grupo se corresponde con los operadores adjuntables anti-simétricos $T^\sharp = -T$.

El grupo $\mathcal{U}_c(M)$ también resulta un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}(M)$. Sin embargo, su subálgebra de Lie $\mathfrak{u}_c \subset \mathfrak{u}$ puede no ser subvariedad con la topología de la norma heredada. Es decir, será necesario probar si existe un entorno $U \subset \mathfrak{u}$ alrededor de 0 tal que

$$\exp(U \cap \mathfrak{u}_c) = \exp(U) \cap \mathcal{U}_c(M).$$

Este hecho implica que la esfera $S(M)$ no pueda ser interpretada con normas cocientes como en el caso de la esfera $S(H)$.

2.2.2. Operadores unitarios en $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$

Si $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra unital entonces $U_{\mathcal{A}}$ es un grupo de Lie-Banach con la topología usual del álgebra. Si $\mathcal{A}$ tiene un estado fiel φ, podremos considerar el grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ de operadores inversibles $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que se extienden a operadores unitarios $\tilde{T} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ y son invariantes respecto al producto inducido por el estado φ en $B(\mathcal{A})$. Este grupo contiene al grupo de operadores unitarios $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, incluidos como operadores de $B(\mathcal{A})$ a través de la multiplicación a derecha: $L_u(x) = ux$ (con $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$). Más aún, este grupo contiene a los $*$-automorfismos de $\mathcal{A}$ φ-invariantes: $\theta \in Aut(\mathcal{A})$

tales que $\varphi(\theta(x)) = \varphi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. Para algunos cálculos, será suficiente considerar sólo estos elementos en $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$.

Comencemos notando que el grupo de operadores unitarios $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ no es un grupo de Lie-Banach con la topología que hereda del grupo de unitarios de $\mathcal{L}$: La condición de levantamiento de $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ definida no es cerrada ($\mathcal{A}$ es densa en $\mathcal{L}$). Para obtener una estructura regular para $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ usaremos la teoría desarrollada en espacios de Banach con dos normas. En nuestro contexto, las normas que estamos considerando es la norma usual $\|\cdot\|$ de $\mathcal{A}$ y la norma $\|\cdot\|_\varphi$ asociada al producto interno definido por el estado φ.

Comencemos por considerar un tipo de descomposición polar en $Gl_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$, considerando la norma en $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. Denotemos la serie logarítmica

$$\log(A) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1-A)^n$$

definida en $A \in \mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ con $\|A-1\|_{\mathbf{a}} < 1$.

Proposición 2.1. *Sea $G \in Gl_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ cerca de 1 tal que $\|G^\sharp G - 1\|_{\mathbf{a}} < 1$. Entonces existen $H \in Gl_{\mathbf{a}}$, $H^\sharp = H$, $H^2 = G^\sharp G$, y $U \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$, tales que son funciones C^∞ diferenciables en términos de G, tal que*

$$G = UH.$$

Demostración. Como $\|G^\sharp G - 1\|_{\mathbf{a}} < 1$, la serie log

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1-G^\sharp G)^n = L$$

converge en $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. Sea $H = e^{\frac{1}{2}L}$. Entonces resulta $H^\sharp = H \in Gl_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ y $H^2 = G^\sharp G$. Además H es una función C^∞ de G, y conmuta con $G^\sharp G$.

Sea $U = GH^{-1}$. Entonces

$$U^\sharp U = (GH^{-1})^\sharp GH^{-1} = H^{-1}G^\sharp GH^{-1} = 1,$$

i.e. $U \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$. □

Proposición 2.2. *Existe $0 < r < 1$ tal que si $U \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ con $\|U-1\|_{\mathbf{a}} < r$, entonces existe $Z \in \mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$ con $Z^\sharp = -Z$, Z una C^∞ función de U, tal que*

$$U = e^Z.$$

Demostración. Sea

$$Z = \log(U) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1-U)^n,$$

la cual converge en $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. De hecho, $e^Z = U$. Además, como $\|U^\sharp - 1\|_{\mathbf{a}} = \|U-1\|_{\mathbf{a}} < 1$,

$$Z^\sharp = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1-U^\sharp)^n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1-U^{-1})^n = \log(U^{-1}).$$

Entonces $e^{Z^\sharp} = U^{-1} = e^{-Z}$, i.e., como Z y $Z^\sharp$ conmutan, $e^{Z^\sharp + Z} = 1$.

De esto se sigue que

$$Z^\sharp + Z = \sum_{k=1}^{m} 2k\pi i Q_k, \tag{2.2}$$

para un conjunto finito de k enteros, donde $Q_k \in \mathcal{Q}_{\mathbf{a}}$, con $Q_k Q_{k'} = 0$ si $k \neq k'$. Note que

$$\|Z\|_{\mathbf{a}} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\|1-U\|_{\mathbf{a}}^n < \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} r^n = -\log(1-r).$$

Tomando $0 < r < 1$ tal que $-\log(1-r) < \pi$, i.e $0 < r < 1 - e^{-\pi}$. Entonces

$$\|Z^\sharp + Z\|_{\mathbf{a}} \leq \|Z^\sharp\|_{\mathbf{a}} + \|Z\|_{\mathbf{a}} = 2\|Z\|_{\mathbf{a}} < 2\pi.$$

Si existe un entero $k_0 \neq 0$ en la suma (2.2) tal que $Q_{k_0} \neq 0$, entonces

$$\|Z^\sharp + Z\|_{\mathbf{a}} \geq 2k_0\pi.$$

Sea $x_0 \in R(Q_{k_0}) \subset \mathcal{A}$ con $\|x_0\| = 1$. Entonces

$$\|\sum_{k\geq 1} 2k\pi i Q_k x_0\| = \|2k_0\pi i Q_{k_0} x_0\| = 2k_0\pi.$$

En efecto, $Z^\sharp = -Z$. $\square$

En particular, el resultado anterior permite obtener una carta local alrededor de 1 en $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$, definiendo un entorno en el origen de

$$\mathcal{B}_{as}(\mathcal{A}) = \{Z \in \mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A}) : Z^\sharp = -Z\},$$

vía la aplicación exponencial, en su forma estándar, como con el grupo unitario usual de una C*-álgebra.

Corolario 2.2. *El grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ es un grupo de Lie-Banach C^∞-diferenciable, y una subvariedad complementada de $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. Su álgebra de Lie-Banach es $\mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$.*

Usaremos estos hechos para probar que la parte simétrica $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ de $Q_{\mathbf{a}}$ es una subvariedad complementada de $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$:

Teorema 2.4. *$\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ es una C^∞-subvariedad de $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. La acción de $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ es localmente transitiva y existen secciones locales C^∞. En particular, para todo $P_0 \in \mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ fijo, la aplicación*

$$\pi_{P_0} : \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}) \to \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}) \cdot P_0 \ , \ \ \pi_{P_0}(U) = UP_0U^\sharp$$

es una sumersión C^∞ diferenciable y $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}) \cdot P_0$ es una unión de componentes conexas de P_0 en $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$. Abreviaremos estos hechos diciendo que $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ es un espacio C^∞-homogéneo de $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$.

Demostración. En el contexto de álgebras de Banach, Porta y Recht en [33] probaron que $Q_{\mathbf{a}}$ es un espacio homogéneo de $Gl_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. Siguiendo ideas similares, utilizaremos el Lema 1.1 para dotar a $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ de estructura de subvariedad.

Tomemos $G = \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$, $X = \mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$, $x_0 = P_0$ y la acción de G está dada por la conjugación $\pi_{P_0}(U) = UP_0U^{-1}$. Denotemos la órbita en P_0 como

$$O_{P_0} = \{UPU^\sharp : U \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})\}.$$

Para probar que la acción es localmente transitiva y que π_{P_0} es una aplicación abierta, construiremos secciones locales continuas para π_{P_0} definidas desde un entorno de P_0 en $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$. Consideramos

$$\mathcal{V}_{P_0} = \{P \in \mathcal{P}_{\mathbf{a}} : G = PP_0 + (1-P)(1-P_0) \in Gl_{\mathbf{a}}(\mathcal{A}) \text{ y } \|G^\sharp G - 1\|_{\mathbf{a}} < 1\}.$$

Resulta que $\mathcal{V}_{P_0}$ es abierto en $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$: si $P = P_0$ entonces $G = 1$. Luego G es inversible si P está suficientemente cerca de P_0. Tomemos

$$s_{P_0} : \mathcal{V}_{P_0} \to \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}), \ \ s_{P_0}(P) = U,$$

donde $U \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ está dada por la descomposición $G = UH$ obtenida en el Lema 2.1. Note que s_{P_0} es continua (como aplicación $G \mapsto U$ es C^∞). Además

$$GP_0 = PP_0 = PG.$$

Así $P_0^\sharp = G^\sharp P$ y $G^\sharp GP_0 = P_0G^\sharp G$. El operador H resulta una serie de potencias de $G^\sharp G$, y por lo tanto, $HP_0 = P_0H$. Entonces

$$\pi_{P_0} \circ s_{P_0}(P) = UP_0U^\sharp = GH^{-1}P_0U^\sharp = GP_0H^{-1}U^\sharp = PGH^{-1}U^\sharp = PUU^\sharp = P,$$

i.e. s_{P_0} es una sección continua para la acción y π_{P_0} es abierta.

Falta aún verificar la condición 2. del Lema 1.1. Estos cálculos son muy similares al caso de una variedad Grassmanniana de $\mathcal{B}(H)$, que incluiremos aquí. Diferenciando la aplicación π_{P_0} en $1 \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$, considerándola como aplicación en $\mathcal{B}_s(\mathcal{A})$, resulta

$$d(\pi_{P_0})_1 : \mathcal{B}_{as}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}_s(\mathcal{A}),\ d(\pi_{P_0})_1(Z) = ZP_0 - P_0Z.$$

Así el núcleo de $d(\pi_{P_0})_1$ consiste de los elementos Z en $\mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$ que conmutan con P_0. Usando matrices 2×2 en términos de P_0, estos operadores son matrices antisimétricas P_0-diagonales:

$$D_{P_0,as} = \left\{ A \in B_{as}(\mathcal{A}) : A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\ \text{donde } a = -a^\sharp\ ,\ d = -d^\sharp \right\}.$$

Un suplemento natural para estos núcleos es el espacio de matrices antisimétricas P_0-codiagonales, es decir, $Y \in \mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$ tales que $P_0YP_0 = 0 = (1-P_0)Y(1-P_0)$:

$$C_{P_0,as} = \left\{ Y \in B_{as}(\mathcal{A}) : Y = \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y^\sharp & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

El rango de $d(\pi_{P_0})_1$ es el conjunto $\{ZP_0 - P_0Z : Z \in \mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})\}$. Este subespacio de $\mathcal{B}_s(\mathcal{A})$ coincide con

$$C_{P_0,s} = \left\{ Y \in B_s(\mathcal{A}) : Y = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y^\sharp & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

el subespacio de matrices simétricas P_0-codiagonales. De hecho, es claro que el rango de $d(\pi_{P_0})_1$ está contenido en este subespacio.

Inversamente, fijando $Y \in \mathcal{B}_s(\mathcal{A})$ antisimétrico, notemos que

$$YP_0 + P_0Y = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y^\sharp & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & y \\ y^\sharp & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y^\sharp & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Y.$$

Tomando $Z = YP_0 - P_0Y = \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y^\sharp & 0 \end{pmatrix}$ resulta que $Z^\sharp = -Z$. Además notar que $d(\pi_{P_0})_1(Z) = Y$.

De hecho, sea $\gamma(t) = e^{tZ}P_0e^{-tZ}$. Entonces

$$d(\pi_{P_0})_1(Z) = \dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt}e^{tZ}P_0e^{-tZ}\,|_{t=0} = ZP_0 - P_0Z = YP_0 - P_0YP_0 - P_0YP_0 + P_0Y$$

$$= YP_0 + P_0Y = Y.$$

Luego el rango de $d(\pi_{P_0})_1$ es complementado en $\mathcal{B}_s(\mathcal{A})$: un suplemento natural es el espacio de matrices P_0-diagonales y simétricas. Por lo tanto, usando el Lema 1.1, la órbita de O_{P_0} es una subvariedad suave de $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$, la aplicación π_{P_0} es una sumersión suave y $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ es una unión (discreta) de las órbitas O_P, $P \in \mathcal{P}_{\mathbf{a}}$. $\square$

Capítulo 3

Las p-métricas cocientes en la esfera de un espacio de Hilbert

3.1. Estructura diferencial de $\mathcal{S}(H)$

Sea H un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle\ ,\ \rangle : H \to K$ (con $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$) y la esfera $\mathcal{S}(H)$ dada por el conjunto

$$\mathcal{S}(H) = \Big\{ x : \langle x, x \rangle = 1 \Big\}.$$

Este conjunto tiene estructura de subvariedad diferencial y puede obtenerse una descripción de la métrica usual inducida por la métrica de H, incluso en el contexto infinito dimensional. Seguiremos la notaciones del texto [26], en el cual varios de los resultados que mencionaremos en esta primera sección se encuentran ampliamente desarrollados.

Si consideramos el espacio de Hilbert complejo H no es difícil verificar que para $x \in \mathcal{S}(H)$ los elementos del espacio tangente $(T\mathcal{S}(H))_x$ se caracterizan localmente por:

$$v \in (T\mathcal{S}(H))_x \qquad \text{si y sólo si} \qquad Re(\langle x, v \rangle) = 0. \tag{3.1}$$

En particular si H es un espacio de Hilbert real, este resultado muestra que $(T\mathcal{S}(H))_x = \langle x \rangle^{\perp}$ con la definición de ortogonalidad usual en espacios de Hilbert.

Esta condición sobre los elementos del espacio tangente de la esfera generan una condición sobre los elementos del espacio doble-tangente $TT\mathcal{S}(H)$.

$$TT\mathcal{S}(H) = \Big\{ (x, v, u, w) : x \in \mathcal{S}(H)\,;\, v, u \in (T\mathcal{S}(H))_x\,;\, w \in H\,; \quad Re\big(\langle w, x \rangle + \langle v, u \rangle\big) = 0 \Big\} \tag{3.2}$$

Sea $x \in \mathcal{S}(H)$. Denotemos Q_x al complemento del $(T\mathcal{S}(H))_x$ y E_x a la aplicación $\mathbb{R}-$lineal con $\operatorname{ran}(E_x) = (T\mathcal{S}(H))_x$ y $\ker(E_x) = \operatorname{ran}(Id - E_x) = Q_x$ dada por

$$E_x(w) := w - Re(\langle x, w\rangle)x = w - \frac{1}{2}\langle x, w\rangle x - \frac{1}{2}\langle w, x\rangle x. \tag{3.3}$$

Si H es real, podemos considerar la aplicación

$$\begin{aligned} E : \mathcal{S}(H) &\longrightarrow \mathcal{B}(H) \\ x &\longmapsto E_x \end{aligned}$$

con rango en los operadores idempotentes de $\mathcal{B}(H)$. Si $E_* : T\mathcal{S}(H) \to T\mathcal{B}(H) = \mathcal{B}(H)$ es la diferencial de esta aplicación, E_{*V} será un operador lineal de H en H que dependerá de cada $V = (x, v) \in (T\mathcal{S}(H))_x$:

$$E_{*x,v}(w) = -\langle w, v\rangle x - \langle w, x\rangle v. \tag{3.4}$$

Esta aplicación sugiere definir la forma bilineal:

$$F(x, v) := \big(x, v; v, E_{*x,v}(v)\big) \;=\; \big(x, v; v, -Re\langle v, v\rangle x\big) \;=\; \big(x, v; v, -\|v\|^2 x\big)$$

Esta aplicación es un spray cuadrático bien definido y, en particular, es una sección del fibrado (TTS, TS, π_*) y del fibrado (TTS, TS, π_{TTS}), donde $\pi_{TTS} : TTS \to TS$ es la proyección $\pi_{TTS}(x, v, u, w) = (x, v)$ y $\pi : TTS \to TS$ es la diferencial de la proyección $\pi : T\mathcal{S}(H) \to \mathcal{S}(H)$. De hecho, $\big(x, v; v, -\|v\|^2 x\big) \in (TT\mathcal{S}(H))_{(x,v)}$.

Las geodésicas dadas por F serán las curvas $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{S}(H)$ que verifican $F(\alpha') = \alpha''$. Específicamente, deben cumplir $F_\alpha(\dot\alpha) = (\alpha, \dot\alpha, \dot\alpha, \ddot\alpha)$.

En particular, sean $x, \tilde y \in \mathcal{S}(H)$ con $Re\langle \tilde y, x\rangle = 0$ y $k \in \mathbb{R}$ fijos. Definamos

$$\gamma(t) = \cos(kt)x + \operatorname{sen}(kt)\tilde y. \tag{3.5}$$

Notar que γ es una curva suave con $\gamma(0) = x$ contenida en $\mathcal{S}(H)$. Derivando respecto de t

$$\dot\gamma(t) = k\big[-\operatorname{sen}(kt)x + \cos(kt)\tilde y\big]$$

por lo cual $\|\dot{\gamma}(t)\| = |k|$ y como

$$\ddot{\gamma}(t) = -k^2\left[\cos(kt)x + \operatorname{sen}(kt)\tilde{y}\right] = -k^2\gamma(t) = -\|\dot{\gamma}(t)\|^2\gamma(t)$$

entonces $\ddot{\gamma}(t)$ coincide con la cuarta coordenada del spray en el punto γ_t aplicado a $\dot{\gamma}_t$. Por lo tanto, esta curva verifica la condición dada por el spray $F(\gamma') = \gamma''$.

Luego, estas curvas definen las curvas geodésicas de la variedad dependiendo de los datos iniciales dados.

Consideremos primero $x \in \mathcal{S}(H)$ y $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ (i.e, $Re(\langle v,x\rangle) = 0$). Es claro que fijado x, cualquier $k \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathcal{S}(H)$ con $Re(\langle y,x\rangle) = 0$, la curva (3.5) verifica $\gamma(0) = x$. Si además la curva tiene que verificar $\dot{\gamma}(0) = v$, entonces

$$\dot{\gamma}(0) = k\tilde{y} = v.$$

Así resulta que si $k = \|v\|$ e $\tilde{y} = \frac{v}{\|v\|}$, la curva geodésica pasa en $t = 0$ por x con velocidad v:

$$\gamma_{xv}(t) := \cos\big(\|v\|t\big)x + \frac{\operatorname{sen}(\|v\|t)}{\|v\|}v.$$

Veamos ahora cuál es la curva que une dos puntos $x, y \in \mathcal{S}(H)$ (distintos y no antipodales) usando el mismo procedimiento anterior. Tomemos nuevamente $\gamma(t) = \cos(kt)x + \operatorname{sen}(kt)\tilde{y}$ y busquemos determinar $k \in \mathbb{R}$ e $\tilde{y}$ tales que $x = \gamma(0)$ e $y = \gamma(1)$.

La primera condición se cumple trivialmente. Consideremos $v = E_x(y-x) \in (T\mathcal{S}(H))_x$. Es claro que $Re(\langle v,x\rangle) = 0$. Además se cumple que

$$\begin{aligned} E_x(y-x) &= y - x - Re\langle y-x, x\rangle x = y - x - Re\left(\langle y,x\rangle - \langle x,x\rangle\right)x \\ &= y - Re\langle y,x\rangle x = E_x(y). \end{aligned}$$

Al calcular su norma obtenemos:

$$\begin{aligned} \|E_x(y)\|^2 &= \langle y - Re\langle y,x\rangle x, y - Re\langle y,x\rangle x\rangle = \|y\|^2 - Re\langle y,x\rangle\langle y,x\rangle - Re\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle + (Re\langle y,x\rangle)^2\|x\|^2 \\ &= 1 - Re\langle y,x\rangle\left[\langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle\right] + (Re\langle y,x\rangle)^2 = 1 - (Re\langle y,x\rangle)^2. \end{aligned}$$

Por lo cual, definimos $\tilde{y} = \frac{v}{\|v\|}$ y $k \in [0,\pi)$ al valor real que verifica:

$$\cos(k) = Re\langle y,x\rangle.$$

Este valor está bien definido pues $|\langle y,x\rangle| \leq \|x\|\|y\| = 1$. Más aún, se verifica:

$$\text{sen}^2(k) = 1 - \cos^2(k) = 1 - (Re\langle y,x\rangle)^2 = \|E_x(y-x)\|^2.$$

Luego así definidos $\tilde{y}$ y k en función de $x, y \in \mathcal{S}(H)$ dados, la curva

$$\gamma_{xy}(t) := \cos\big(kt\big)x + \frac{\text{sen}(kt)}{\|v\|}v$$

es una geodésica que verifica:

$$\begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = \cos(k)x + \dfrac{\text{sen}(k)}{\|v\|}v = y \end{cases}.$$

Con la métrica usual, esta curva tendrá longitud

$$long(\gamma_{xy}) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| = |\arccos(Re\langle y,x\rangle)|.$$

3.2. Estructura homogénea de $\mathcal{S}(H)$ y p-métricas cocientes

Sea $\pi : \mathcal{U}_p(H) \times \mathcal{S}(H) \to \mathcal{S}(H)$ la acción del grupo $\mathcal{U}_p(H)$ sobre $\mathcal{U}_p(H)$ dada por

$$u \cdot x := ux,$$

para $x \in \mathcal{S}(H)$ y $u \in \mathcal{U}_p(H)$. Es claro que, para todo $x \in \mathcal{S}(H)$, la órbita de esta acción es $\mathcal{S}(H)$. Es decir, la acción es transitiva y podemos considerar a la esfera $\mathcal{S}(H)$ como espacio homogéneo de la acción de $\mathcal{U}_p(H)$. Algunas propiedades de tales órbitas fueron estudiadas en [9], en un contexto general. Consideremos la descomposición del espacio de Hilbert $H = \langle x\rangle \oplus \langle x\rangle^\perp$ para describir operadores en $\mathcal{B}(H)$.

Para cada $x \in H$, denotaremos $\pi_x : \mathcal{U}_p(H) \to \mathcal{S}(H)$ a la aplicación dada por

$$\pi_x(u) := ux;$$

y si $u \in \mathcal{U}_p(H)$, denotaremos $\ell_u : \mathcal{S}(H) \to \mathcal{S}(H)$ a la aplicación

$$\ell_u(x) := ux.$$

Bajo esta acción, el grupo de isotropía viene dado por

$$G_x = \{u : u \in \mathcal{U}_p(H), u \cdot x = x\}.$$

Este grupo G_x coincide con la preimagen $\pi^{-1}(x)$, el cual es cerrado gracias a la continuidad de la acción. Si $u \in G_x$ entonces matricialmente con respecto al proyector $x \otimes x$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_0 \end{pmatrix}$$

donde $u_0 : \langle x\rangle^{\perp} \to \langle x\rangle^{\perp}$ es un operador en $\mathcal{U}_p(\langle x\rangle^{\perp})$.

Diferenciando la aplicación π_x y especializando en $1 = Id \in \mathcal{U}_p(H)$, la diferencial

$$(d\pi_x)_1 : (T\,\mathcal{U}_p(H))_1 = \mathcal{B}_p(H)_{ah} \to (T\mathcal{S}(H))_x$$

es la evaluación

$$(d\pi_x)_1(v) := vx$$

y su núcleo coincide con el espacio tangente de G_x en $1 = Id \in \mathcal{U}_p(H)$, es decir, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_x$ es $\ker(d\pi_x)_1$.

Esta condición permite caracterizar, para cada $x \in \mathcal{S}(H)$, los elementos de $\mathfrak{g}_x$ en la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

donde $C : \langle x\rangle^{\perp} \to \langle x\rangle^{\perp}$ es un operador antihermitiano en $\mathcal{B}_p(\langle x\rangle^{\perp})$.

Gracias al epimorfismo $d\pi_x$, podemos identificar el espacio tangente de la esfera en un punto con el cociente $\mathcal{B}_p(H)_{ah}/\ker(d\pi_x)$, es decir,

$$(T\mathcal{S}(H))_{x_0} \simeq \mathcal{B}_p(H)_{ah}/\mathfrak{g}_x.$$

Tengamos en cuenta que diferenciando la aplicación ℓ_u y especializando en $x \in \mathcal{S}(H)$, obtenemos que la aplicación $(d\ell_u)_x : \langle x\rangle^{\perp} \to \langle x\rangle^{\perp}$ viene dada por

$$(d\ell_u)_x(v) := uv.$$

Como la acción es suave, dado $x \in \mathcal{S}(H)$, podemos definir una métrica de Finsler sobre el espacio tangente $(T\mathcal{S}(H))_x$ cuando lo identificamos con el cociente $\mathcal{B}_p(H)/\mathfrak{g}_x$. Si $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$, definimos

$$\|v\|_{x,p} = \text{mín}\Big\{ \|z-y\|_p : y \in \mathfrak{g}_x \Big\}$$

donde el mínimo se considera sobre algún representante $z \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ tal que $(d\pi_x)_1(z) = z \cdot x = v$. Cuando no haya confusión con el valor de p, abreviaremos la notación de la norma en el cociente por $\|v\|_x$.

Estos operadores z se denominan levantamientos de v. En particular, diremos que z_0 es un levantamiento minimal si $(d\pi_x)_1(z_0) = v$ y $\|v\|_{x,p} = \|z_0\|_p$.

Denotaremos por $\overline{L}_p$ la funcional longitud para curvas suaves a trozos en $\mathcal{S}(H)$, medidas con la norma cociente, y dada por

$$\overline{L}_p(\gamma) := \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_{\gamma,p}.$$

Luego, como es usual, la distancia rectificable asociada a la misma se define por

$$\overline{d}_p(x,ux) = \text{ínf}\big\{\overline{L}_p(\gamma) : \gamma \subset \mathcal{S}(H), \gamma(0) = x, \gamma(1) = ux\big\}.$$

Observación 3.1. La p-métrica cociente dada por $\overline{d}_p$ es invariante bajo la acción del grupo $\mathcal{U}_p(H)$. Es decir, dado $u \in \mathcal{U}_p(H)$ para todo $x \in \mathcal{S}(H)$ se verifica

$$\|(d\ell_u)_x(v)\|_{ux} = \|v\|_x.$$

Observación 3.2. En [9] se demostró que si $\mathcal{U}_p(H)$ actúa transitivamente y suavemente sobre una variedad O y dotamos al fibrado tangente de O con la métrica cociente de arriba, entonces $(O, \overline{d}_p)$ es completa.

3.3. Caracterización de levantamientos minimales.

Estaremos interesados en caracterizar los operadores z_0 que son levantamientos minimales de $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ dado. Note que estos levantamientos verifican:

$$\|z_0\|_p \leq \|z_0 - y\|_p \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}_x$$

donde $\mathfrak{g}_x$ es el subálgebra de Lie de isotropía en x. Si consideramos el conjunto convexo $\overline{\mathfrak{g}_x}^p$ (clausura respecto a la p-norma) podemos definir Q la proyección del mejor aproximante sobre este conjunto cerrado y convexo. Tal proyección está dada en z por $Q(z) \in B_{ah}(H)$ que verifica:

$$\|z - Q(z)\|_p \leq \|z - y\|_p$$

para todo $y \in \overline{\mathfrak{g}_x}^p$. Gracias a las desigualdades de Clarkson en $\mathcal{B}_p(H)$, esta aplicación es continua y univaluada (ver [29]) y en el caso $p = 2$ posee propiedades similares a la proyectores ortogonales en H.

En particular, todo z_0 levantamiento minimal de algún $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ pertenece al conjunto:

$$\mathfrak{g}_x^{\perp} := Q^{-1}(0) = \{z \in \mathcal{B}_p(H)_{ah} : \|z\|_p \leq \|z-y\|_p \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}_x\}.$$

En el siguiente teorema establecemos la existencia y unicidad de levantamientos minimales en $\mathcal{S}(H)$ como órbita de la acción de $\mathcal{U}_p(H)$. Una demostración más general se puede encontrar en [9].

Teorema 3.1. *Sean p positivo y par , $x \in \mathcal{S}(H)$ y $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$. Un elemento $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ tal que $(d\pi_x)_1(z_0) = v$ es un levantamiento minimal de v si y sólo si $tr(z_0^{p-1}y) = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}_x$. Este levantamiento minimal z_0 verifica esta condición si y sólo si su representación matricial respecto a $x \otimes x$ es*

$$z_0^{p-1} = \begin{pmatrix} \lambda i & -b^* \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

donde $b : \langle x \rangle \to \langle x \rangle^{\perp}$ operador acotado y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ es un levantamiento minimal y fijemos $y \in \mathfrak{g}_x$ arbitrario. Entonces la función $f(t) = \|z_0 - ty\|_p^p$ es una función suave con mínimo en $t = 0$, es decir, $f'(0) = 0$. Como la derivada de esta función es $f'(t) = -ptr((z_0 - ty)^{p-1}y)$, resulta entonces que $tr(z_0^{p-1}y) = 0$. Luego esta condición se verifica para todo $y \in \mathfrak{g}_x$.

Recíprocamente, sea $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ levantamiento tal que $tr(z_0^{p-1}y)$ para todo $y \in \mathfrak{g}_x$. Supongamos que tal z_0 no es minimal, esto es, existe y_0 tal que $\|z_0 - y_0\|_p < \|z_0\|_p$. Esto implica que la función convexa $f(t) = \|z_0 - ty_0\|_p^p$ con $f'(0) = 0$ no tiene un mínimo en $t = 0$, lo cual es absurdo.

Ahora, analicemos la existencia y unicidad de estos levantamientos minimales. Para $x \in \mathcal{S}(H)$, sea Q la proyección sobre $\overline{\mathfrak{g}_x}^p$. Entonces todo elemento de $z \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ se descompone como

$$z = z - Q(z) + Q(z)$$

donde $z - Q(z) \in \mathfrak{g}_x^{\perp}$ y $Q(z) \in \overline{\mathfrak{g}_x}^p$. Como π_x es sumersión, su diferencial $(d\pi_x)_1$ es sobreyectiva y por lo tanto, dado $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$, existe $z \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ tal que $(d\pi_x)_1(z) = v$. Luego un levantamiento minimal para $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ se obtiene como

$$z_0 = z - Q(z) \in \mathfrak{g}_x^{\perp}.$$

Si $(d\pi_x)_1(z_1) = (d\pi_x)_1(z) = v$ entonces $z_1 - z_2 \in \mathfrak{g}_x = \ker(d\pi_x)_1$; si además son minimales resulta que $\|z_1\|_p \leq \|z_2 - (z_1 - z_2)\|_p = \|z_2\|_p$ y lo mismo inversamente. Luego $\|z_1\|_p = \|z_2\|_p = \|v\|_x$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|z_i\| = 1$. Sea $h(y) := \|z_1 - y\|_p^p$ definida sobre todo $y \in \mathfrak{g}_x$. Tenemos por hipótesis que $h(0) = \|z_1\|$ es mínimo de h. Además $h(z_2 - z_1) = \|z_2\|_p$ también es otro mínimo de esta función convexa. Luego h debe ser constantemente 1 sobre todo el segmento lineal $s(z_2 - z_1) \in g_x$ con $s \in [0,1]$. Tomando $s = 1/2$, obtenemos que

$$\left\| \frac{z_2 - z_1}{2} \right\|_p = \|z_2\|_p = \|z_1\|_p = 1.$$

Por la uniforme convexidad de $\mathcal{B}_p(H)$, resulta finalmente que $z_1 = z_2$. Finalmente, considerando la forma matricial de los operadores en $\mathfrak{g}_x$ dada en (3.6), tenemos que

$$tr\left(\begin{pmatrix} \lambda i & -b^* \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}\right) = tr(ac)$$

para todo $c \in \mathcal{B}_p(\langle x \rangle^\perp)$. Entonces a debe ser el operador nulo en $\mathcal{B}_p(\langle x \rangle^\perp)$. □

Corolario 3.1. *Sean $p = 2$, $x \in \mathcal{S}(H)$ y $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$. Entonces el único levantamiento minimal de v está dado en forma matricial respecto $x \otimes x$ por*

$$\begin{pmatrix} \lambda i & -v_0^* \\ v_0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $v_0 = v - \langle v, x \rangle x \in \langle x \rangle^\perp$ y $\lambda i = \langle v, x \rangle$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

En el caso especial en que el vector velocidad v es ortogonal a la posición x, el levantamiento minimal z_0 es fácil de calcular.

Corolario 3.2. *Sea $p \geq 2$. Si $x \in \mathcal{S}(H)$ y $v \in \langle x \rangle^\perp$ entonces el único levantamiento minimal $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ de v en x viene dado matricialmente respecto a $x \otimes x$ por*

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 & -v^* \\ v & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Como $v \in \langle x \rangle^\perp$ entonces si $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ verifica $z_0 x = v$ resulta que

$$\langle z_0 x, x \rangle = \langle v, x \rangle = 0$$

Entonces $(x\otimes x)z_0(x\otimes x)=0$. Luego el levantamiento minimal de v tiene la forma

$$z_0=\begin{pmatrix} 0 & -a^* \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, tomemos una base ortonormal $e_0=x,e_1,e_2,...$ de H para representar matricialmente estos operadores.

$$z_0=\begin{pmatrix} 0 & -\overline{a_1} & -\overline{a_2} & -\overline{a_3}\dots \\ a_1 & 0 & 0 & 0\dots \\ a_2 & 0 & 0 & 0\dots \\ a_3 & 0 & 0 & 0\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Sea $p\geq 2$ entero y par. La función $f(s)=s^{p-1}$ genera una aplicación biyectiva de $\mathcal{B}_p(H)_{ah}$ en sí mismo. Por lo cual, los operadores que resultan levantamientos minimales deben verificar

$$z_0^{p-1}=\begin{pmatrix} 0 & -\overline{b_1} & -\overline{b_2} & -\overline{b_3}\dots \\ b_1 & 0 & 0 & 0\dots \\ b_2 & 0 & 0 & 0\dots \\ b_3 & 0 & 0 & 0\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

con $b_i\in\mathbb{C}$.

No es difícil hallar la relación entre los coeficientes de z_0 y z_0^{p-1} particulares:

$$a_j=\frac{b_j}{\left(\sum|b_j|^2\right)^{\frac{p-2}{2}\frac{1}{p-1}}}$$

de donde las igualdades son válidas si $0\neq\left(\sum_j|b_j|^2\right)<\infty$. Notar que además es necesario que $\sum_i|a_i|^2<\infty$ si queremos aplicar la potenciación del operador, y esta condición se verifica cuando trabajamos con operadores en $\mathcal{B}_p(H)_{ah}$.

Más aún la condición $z_0 x = v$ implica:

$$z_0 x = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{a_1} & -\overline{a_2} & \overline{a_3}\dots \\ a_1 & 0 & 0 & 0\dots \\ a_2 & 0 & 0 & 0\dots \\ a_3 & 0 & 0 & 0\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = w$$

por lo cual $a_i = \langle v, e_i \rangle = v_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, como queríamos demostrar. $\square$

Hasta aquí hemos considerado un espacio de Hilbert complejo H.

Corolario 3.3. *Supongamos que H es un espacio de Hilbert real y $p \geq 2$. Entonces el único levantamiento de $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ tiene la forma matricial (respecto a $x \otimes x$):*

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 & -v^* \\ v & 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora algunas propiedades del levantamiento minimal de v en el caso en que $\langle v, x \rangle \neq 0$. Tengamos en cuenta que dado un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ por el cálculo funcional $(\sigma(A))^{p-1} = \sigma(A^{p-1})$, y como p es par, hay una biyección entre el espectro de $\sigma(A)$ y $\sigma(A^{p-1})$.

Lema 3.1. *Sea $x \in \mathcal{S}(H)$ fijo y $H = \langle x \rangle \oplus \langle x \rangle^{\perp}$. Si $M \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ es de la forma matricial*

$$M = \begin{pmatrix} \lambda i & -b^* \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ no nulo, entonces su espectro está compuesto por el autovalor $\mu_0 = 0$ y los autovalores no nulos

$$\mu_1 = \frac{sg(\lambda)i}{2}\left[\sqrt{|\lambda|^2 + 4\|b\|^2} + |\lambda|\right],$$

$$\mu_2 = \frac{sg(\lambda)i}{2}\left[\sqrt{|\lambda|^2 + 4\|b\|^2} - |\lambda|\right].$$

Más aún, los autovectores $\{e_1, e_2\}$ de norma 1 de μ_1, μ_2 son

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}}{[|\lambda|^2 + 4\|b\|^2]^{\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} \frac{sg(\lambda)i}{2}[\sqrt{|\lambda|^2 + 4\|b\|^2} + |\lambda|^2]^{\frac{1}{2}} \\ \\ \frac{v}{[\sqrt{|\lambda|^2 + 4\|b\|^2} + |\lambda|^2]^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{\sqrt{2}}{[|\lambda|^2+4\|b\|^2]^{\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} \frac{sg(\lambda)i}{2}[\sqrt{|\lambda|^2+4\|b\|^2}-|\lambda|^2]^{\frac{1}{2}} \\ \\ \frac{b}{[\sqrt{|\lambda|^2+4\|b\|^2}-|\lambda|^2]^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}$$

y el núcleo del autovalor $\mu = 0$ coincide con $\langle x\rangle^{\perp} \oplus \langle b\rangle^{\perp}$

Demostración. Como M es un operador de rango 2, es claro que $0 \in \sigma(M)$. Sea $w = w_0 + w_1 \in \langle x\rangle \otimes \langle x\rangle^{\perp}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \lambda i & -b^* \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda i w_0 - b^* w_1 \\ w_0 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad se verifica si y sólo si $w_0 = 0$ y $b^* w_1 = 0$. Es decir, $\ker(M) = \langle x\rangle^{\perp} \otimes \langle b\rangle^{\perp}$.

Probemos ahora que μ_i, $i = 1,2$ son autovalores. Sea $v^1 := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ v \end{pmatrix}$. Entonces

$$Mv^1 = \begin{pmatrix} \lambda i & -b^* \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda i \mu_1 - \|b\|^2 \\ \mu_1 b \end{pmatrix}.$$

$$\mu_1 v^1 = \begin{pmatrix} -\mu_1^2 \\ \mu_1 b \end{pmatrix}$$

Luego, solo basta verificar que $\mu_1^2 = \lambda i \mu_1 - \|b\|^2$.

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= \frac{-1}{4}\left[\sqrt{|\lambda|^2+4\|b\|^2}+|\lambda|\right]^2 \\ &= \frac{-|\lambda|^2}{2} - \|b\|^2 - \frac{|\lambda|}{2}\sqrt{|\lambda|^2+4\|b\|^2} \\ &= \frac{-|\lambda|}{2}\left[|\lambda| + \sqrt{|\lambda|^2+4\|b\|^2}\right] - \|b\|^2 = \lambda i \mu_1 - v^1 \end{aligned}$$

Usando este hecho resulta que $Mv^1 = \mu_1 v^1$. Al normalizar este vector, obtenemos el autovector e_1 buscado. Análogamente se obtiene el autovector e_2 a partir del autovector de μ_2 dado por

$$v^2 := \begin{pmatrix} \mu_2 \\ b \end{pmatrix}$$

□

Proposición 3.1. *Sea $p \geq 2$ par entero y $x \in \mathcal{S}(H)$. Dado $v = \alpha i + a \in T\mathcal{S}(H)_x$ (con $a \in \langle x \rangle^{\perp}$) entonces el único levantamiento minimal $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ de v en x viene dado por*

$$z_0 = U \begin{pmatrix} \sqrt[p-1]{\mu_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt[p-1]{\mu_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} U^{-1}$$

donde μ_i está en términos de b y λ tales que z_0^{p-1} es la matriz asociada a tales parámetros y $z_0 x = v$.

Demostración. La demostración es trivial usando el Teorema 3.1 y el Lema 3.1. □

Notar que el lema anterior para el caso $p = 2$ permite caracterizar el levantamiento minimal z_0 para cada $v = \lambda i + b \in T\mathcal{S}(H)_x$ (con $b \in \langle x \rangle^{\perp}$ y $\lambda \neq 0$). Matricialmente, resulta:

$$z_0 = U \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} U^{-1},$$

donde U es el operador unitario asociado a los autovectores de $0, \mu_1, \mu_2$ dados por

$$\mu_1 = \frac{sg(\lambda)i}{2}\left[\sqrt{|\lambda|^2 + 4\|b\|^2} + |\lambda|\right],$$

$$\mu_2 = \frac{sg(\lambda)i}{2}\left[\sqrt{|\lambda|^2 + 4\|b\|^2} - |\lambda|\right].$$

Con los resultados anteriores es posible determinar la norma de los levantamientos minimales en función de su descomposición matricial.

Proposición 3.2. *Dado $x \in \mathcal{S}(H)$ y $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ es matricialmente tal que*

$$z_0^{p-1} = \begin{pmatrix} -\lambda i & -b^* \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\|z_0\|_p^p = \frac{1}{2^{\frac{p}{p-1}}}\left\{\left[|\sqrt{|\lambda|^2 + 4\|b\|^2} + |\lambda|\right]^{\frac{p}{p-1}} + \left[\sqrt{|\lambda|^2 + 4\|b\|^2} - |\lambda|\right]^{\frac{p}{p-1}}\right\}.$

Demostración. La demostración se obtiene usando proposición anterior y calculando la norma p a partir de la suma de los autovalores de z_0, los cuales se obtienen de los autovalores de z_0^{p-1}. $\square$

Observación 3.3. El resultado anterior en el caso $p = 2$ muestra la diferencia entre las métricas cocientes y la métrica usual en $\mathcal{S}(H)$. Si γ es una curva reparametrizada en $[0,1]$ a velocidad constante, entonces

$$\left[\overline{L}(\gamma)\right]^2 = \left[\int_0^1 \|v\|_x\right]^2 = \|z_0\|_2^2 = |\lambda|^2 + 2\|b\|^2$$

para la métrica de espacio homogéneo. Mientras que en la norma usual de $(T\mathcal{S}(H))_x$

$$[L_2(\gamma)]^2 = \left[\int_0^1 \|v\|\right]^2 = \|v\|^2 = |\lambda|^2 + \|b\|^2$$

Esto evidencia que las métricas de la esfera $\mathcal{S}(H)$ como espacio homogéneo son diferentes (aunque eqivalentes) a la métrica Riemanniana usual si H es un espacio de Hilbert complejo y son coincidentes si H es real.

3.4. Minimalidad de curvas en $\mathcal{S}(H)$

Teniendo en cuenta el Teorema 2.2 donde se reúnen propiedades conocidas del grupo $\mathcal{U}_p(H)$, vamos a considerar la minimalidad de la curvas geodésicas respecto a todas las curvas que unen los mismos puntos.

Sea $ad_a : \mathcal{B}_p(H) \to \mathcal{B}_p(H)$ el operador $ad_a(x) := xa - ax$.

Proposición 3.3. *Sea $x \in \mathcal{S}(H)$ y la proyección $Q := Q_{\mathfrak{g}_x}$ al operador mejor aproximante en $\mathfrak{g}_x$. Sea $\gamma(t) := \Gamma(t)x \subset \mathcal{S}(H)$, donde $\Gamma : [0,1] \to \mathcal{U}_p(H)$ es una curva C^1 suave. Denotemos $F(z) := \dfrac{e^z - 1}{z}$. Entonces existe una curva C^1 suave a trozos $z : [0,1] \to \mathfrak{g}_x$ con $z(0) = 0$ tal que*

$$F(ad_z)\dot{z} = -Q(\Gamma^*\dot{\Gamma}).$$

Si $u_\Gamma = e^z \in G_x$ entonces $u_\Gamma(t) \in \mathcal{B}_p(H)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{u}_\Gamma u_\Gamma^* = -Q(\Gamma^*\dot{\Gamma})$$

y verifica $\overline{L}_p(u_\Gamma) \leq 2L_p(\Gamma)$.

Demostración. Ver [9]. $\square$

Observación 3.4. Sea $x \in \mathcal{S}(H)$ y $\gamma := \Gamma x \subset \mathcal{S}(H)$ parametrizada en el intervalo $[0,1]$. Sea β la curva de la proposición anterior. Como $u_\Gamma = e^{\beta}(t) \in G_x$ entonces $\Gamma u_\Gamma x = \gamma$. Mas aún, por la misma proposición $L_p[\beta] = \overline{L}[\gamma] \leq L_p(\Gamma)$. La curva β es denominada levantamiento isométrico de γ.

Teorema 3.2. *Sea p entero positivo par. Sean $x \in \mathcal{S}(H)$, $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$, dado por $v = \alpha i x + v \in H = \langle x \rangle \oplus \langle x \rangle^{\perp}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), y $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ el único levantamiento minimal de v. Si*

$$\|z_0\|_p \leq \frac{\pi}{4}$$

entonces la curva

$$\mu(t) = e^{tz_0}x$$

que verifica $\mu(0) = x$ y $\dot{\mu}(0) = v$, tiene longitud minimal entre todas la curvas que unen los mismos puntos extremos.

Demostración. La demostración de este teorema se basa en la existencia de levantamientos isométricos (observación 3.4)) y la convexidad de la las aplicaciones $f_p(t) = d_p(1, e^{z_0}e^{tz})$ para todo $y \in \mathfrak{g}_x$ (por Teorema 2.3). Este teorema fue probado en [9] para variedades homogéneas donde el grupo $\mathcal{U}_p(H)$ actúa transitiva y suavemente y, además, el grupo $G_x \subset \mathcal{U}_p(H)$ es localmente exponenciable, lo cual ocurre en nuestro caso particular. □

El teorema previo establece condiciones que garantizan que un arco de la curva $\gamma(t) = e^{tz}x$ minimice la longitud entre todas las curvas que une los mismos puntos extremales. Si $v \in \langle x \rangle^{\perp}$, por el Corolario 3.2, el levantamiento minimal de v tiene la forma matricial

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 & -v^* \\ v & 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que este levantamiento es independiente de $p \geq 2$. De hecho, para todo p par obtenemos una cota uniforme en términos de $\|v\|$, tal que la curva $\gamma(t) = e^{tz_0}x$ sea corta.

Teorema 3.3. *Sean p entero positivo par, $x \in \mathcal{S}(H)$, $v \in \langle x \rangle^{\perp} \subset (T\mathcal{S}(H))_x$ y $z_0 \in \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ el único levantamiento minimal de v. Si*

$$\|v\| \leq \frac{\pi}{4\sqrt[p]{2}}$$

entonces la curva $\mu(t) = e^{tz_0}x$, que verifica $\mu(0) = x$ y $\dot{\mu}(0) = v$, tiene longitud minimal en el intervalo $[0,1]$. Más aún, si $\|v\| \leq \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$, esta curva es corta para todas estas p-métricas cocientes.

Demostración. Veamos como se relaciona la cota de minimalidad para z_0 levantamiento de v en x (teorema anterior) con la norma de v cuando $\langle v,x\rangle = 0$.

Trabajemos matricialmente con

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 & -v^* \\ v & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$|z_0|^p = \left(\begin{pmatrix} 0 & v^* \\ -v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -v^* \\ v & 0 \end{pmatrix} \right)^{p/2}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} (v^*v)^{p/2} & 0 \\ 0 & (vv^*)^{p/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|v\|^p & 0 & 0 & 0\dots \\ 0 & |v_1|^p & 0 & 0\dots \\ 0 & 0 & |v_2|^p & 0\dots \\ 0 & 0 & 0 & |v_3|^p\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Con esto, resulta entonces que

$$\|z_0\|_p = tr(|z_0|^p)^{\frac{1}{p}} = (\|v\|^p + \sum |v_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\pi}{4}.$$

Por otro lado, si $p \geq 2$, para todo $v \in \mathcal{S}(H)$

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq \|v\|_2,$$

donde $\|v\|_p^p = [\sum |v_i|^p]$, $\|v\|_\infty = \sup |v_i|$ y donde $\|\ .\ \|_2 = \|\ .\ \|$ es la norma usual en H. En particular, si $v \in H$, para $p \geq 2$

$$\|v\|_\infty \leq \infty \qquad \text{y} \qquad \|v\|_p \leq \infty.$$

En particular, para el caso $p = 2$, la cota de minimalidad del teorema resulta ser

$$\|z_0\|_2 = \left[2\sum |v_i|^2\right]^{1/2} = \sqrt{2}\|v\| \leq \left(\frac{\pi}{4}\right),$$

con lo cual, si

$$\|v\| \leq \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

las geodésicas obtenidas vía z_0 tendrán longitud minimal.

Más en general, para cualquier p par y entero mayor a 2, como

$$\left[\|v\|^p + \sum |v_i|^p\right]^{1/p} \leq [\|v\|^p + \|v\|^p]^{1/p} = \sqrt[p]{2}\|v\|$$

entonces $\sqrt[p]{2}\|v\| \leq \pi/4$ si $\|v\| \leq \dfrac{\pi}{4\sqrt[p]{2}}$. En particular, la cota uniforme $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$ asegura longitud minimal para cualquiera de las p-métricas cocientes con p par entero positivo.

□

Corolario 3.4. *Sean H espacio de Hilbert real y $p \geq 2$ entero par. Dado $x \in \mathcal{S}(H)$, el levantamiento minimal de $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ en x define una curva geodésica minimal en el intervalo $[0,1]$ si*

$$\|v\| \leq \frac{\pi}{4\sqrt[p]{2}}.$$

3.5. Estructura reductiva en el caso $p = 2$

En esta sección, vamos a describir la 2-métrica cociente de la esfera $\mathcal{S}(H)$. En este caso, $\mathcal{S}(H)$ es un espacio homogéneo reductivo infinito-dimensional. La geometría de estos espacios fue estudiada en [31] en el contexto de C*-álgebras. Vamos a seguir esta referencia para las definiciones y los cálculos de los elementos que caracterizan esta estructura.

Comencemos considerando la 2-métrica sobre los espacios tangentes de $\mathcal{S}(H)$ usando la descomposición

$$\mathcal{B}_2(H)_{ah} = \mathfrak{g}_x \oplus \mathfrak{g}_x^{\perp}$$

donde $\mathfrak{g}_x$ es el álgebra de Lie de G en $x \in \mathcal{S}(H)$.

Consideremos nuevamente la aplicación π_x y su derivada $(d\pi_x)_1$. Sabemos que restringiendo a $\mathfrak{g}_x^{\perp}$, la aplicación

$$\delta_x := (d\pi_x)_1 \,|_{\mathfrak{g}_x^{\perp}} : \mathfrak{g}_x^{\perp} \to (T\mathcal{S}(H))_x$$

es un isomorfismo definido por $\delta_x(z) := zx$. Por lo tanto, es posible definir su inversa, que notaremos por

$$\kappa_x(v) := z \qquad \text{tal que} \qquad (d\pi_x)_1(z) = zx = v.$$

El Corolario 3.1 nos da una expresión explícita para esta aplicación:

$$\kappa_x(v) := \begin{pmatrix} \lambda i & -v_0^* \\ v_0 & 0 \end{pmatrix}$$

si $v = i\lambda x + v_0$ donde $v_0 \in \langle x\rangle^{\perp}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dados $z, w \in H$, denotemos $z \otimes w \in \mathcal{B}(H)$ al tensor elemental dado por

$$z \otimes w(h) := w^* z(h) = \langle h, w\rangle z.$$

Notemos que estos tensores permiten expresar el operador κ_x como

$$\kappa_x(v) := v \otimes x - x \otimes v - \langle v, x\rangle x \otimes x. \tag{3.7}$$

Esta aplicación verifica $\delta_x \circ \kappa_x = Id_{T_x\mathcal{S}(H)}$ y $\kappa_x \circ \delta_x = P_{\mathfrak{g}^\perp}$ (el proyector sobre $\mathfrak{g}^\perp$). De hecho,

$$\begin{aligned}\delta_x \circ \kappa_x(v) &= \delta_x(v \otimes x - x \otimes v - \langle v, x\rangle x \otimes x)\\ &= \|x\|^2 v - \langle x, v\rangle x - \langle v, x\rangle x = v.\end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $\langle v, x\rangle = -\langle x, v\rangle$ pues $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ (es decir, $Re\langle v, x\rangle = 0$).

Para la otra verificación, observemos que el proyector sobre $\mathfrak{g}_x^\perp$ viene dado por

$$P_{\mathfrak{g}^\perp}(z) := p_x z p_x + (I - p_x) z p_x + p_x z (I - p_x)$$

donde p_x es el proyector sobre el subespacio $\langle x\rangle$ dado por el tensor $x \otimes x$. Por lo cual resulta

$$\begin{aligned}P_{\mathfrak{g}^\perp}(z) &= (x\otimes x) z (x \otimes x) + (1 - x\otimes x) z (x \otimes x) + (x \otimes x) z (1 - x \otimes x)\\ &= z - (1 - x \otimes x) z (1 - x \otimes x).\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\kappa_x \circ \delta_x(z) = \kappa_x(zx) &= z(x \otimes x) - (x \otimes x) z^* - \langle zx, x\rangle (x \otimes x)\\ &= (x \otimes x) z (x \otimes x) + (I - (x \otimes x)) z (x \otimes x) + (x \otimes x) z - (x \otimes x)(zx \otimes x)\\ &= p_x z p_x + (I - p_x) z p_x + p_x z (I - p_x) = P_{\mathfrak{g}^\perp} z,\end{aligned}$$

donde, como $z \in \mathfrak{g}_x^\perp$, hemos utilizado que $z = -z^*$ y propiedades del cálculo de tensores.

Notemos además que se cumple la propiedad de invariancia de $\mathfrak{g}_x^\perp \subset \mathcal{B}_p(H)_{ah}$ bajo la adjunción con operadores en $G_x \subset \mathcal{U}_2(H)$, para todo $x \in \mathcal{S}(H)$. Es decir,

$$uvu^{-1} \in \mathfrak{g}_x^\perp \qquad v \in \mathfrak{g}_x^\perp \quad ; \quad u \in G_x.$$

De hecho, caracterizando matricialmente estos operadores, sean $u_0 \in U_p(< x >^{\perp})$ y $v_0 \in H$ tales que

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_0 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad v = \begin{pmatrix} \lambda i & -v_0^* \\ v_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} uvu^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda i & -v_0^* \\ v_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_0^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda i & -v_0^* \\ u_0 v_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_0^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda i & -v_0^* u_0^{-1} \\ u_0 v_0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde claramente resulta que este operador pertenece a $\mathfrak{g}_x^{\perp}$.

En definitiva hemos obtenido una aplicación $\kappa_x : (T\mathcal{S}(H))_x \to \mathfrak{g}_x^{\perp}$ tal que

- $(d\pi_x)_1 \circ \kappa_x : (T\mathcal{S}(H))_x \to (T\mathcal{S}(H))_x$ es la aplicación identidad.

- Para todo $u \in G_x$, el espacio $g_x^{\perp} = \kappa_x((T\mathcal{S}(H))_x)$ es adj_u-invariante.

Luego el producto interno en cada $(T\mathcal{S}(H))_x$ estará dado por

$$\langle v, w \rangle_x = \mathrm{Retr}\,(\kappa_x(\mathrm{w})^* \kappa_x(\mathrm{v})) = -\mathrm{tr}\,(\kappa_x(\mathrm{w})\kappa_x(\mathrm{v}))$$

donde Retr denota la parte real de la traza de operadores en $\mathcal{B}(H)$. En términos de tensores elementales, este producto interno resulta:

$$\kappa_x(w).\kappa_x(v) = -w \otimes v - \langle v, w \rangle x \otimes x - \langle w, x \rangle \langle v, x \rangle x \otimes x \tag{3.8}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_x &= -tr(\kappa_x(w).\kappa_x(v)) \\ &= \langle w, x \rangle \langle v, x \rangle tr(x \otimes x) + \mathrm{Re}\langle \mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle \mathrm{tr}(\mathrm{x} \otimes \mathrm{x}) + \mathrm{tr}(\mathrm{w} \otimes \mathrm{v}) \\ &= \langle w, x \rangle \langle v, x \rangle + 2\mathrm{Re}\langle \mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle. \end{aligned}$$

Para cada $x \in \mathcal{S}(H)$, gracias a la aplicación κ_x, obtenemos una distribución $\mathcal{H}$ de suplementos cerrados $\mathcal{H}^x := \mathfrak{g}_x^{\perp}$ definida por:

$$\mathcal{H}_u^x := u\mathcal{H}^x = \{g \in \mathcal{U}_2(H) : g = uz, z \in \mathcal{H}^x\}.$$

Los elementos de $\mathcal{H}^x$ se denominan vectores horizontales a u vía la acción dada por π_x. La distribución queda definida entonces por los espacios $\mathcal{H}_u = \mathcal{H}_u^x$ y $\mathcal{V}_u = u\mathfrak{g}_x$ tales que verifican:

- $\mathcal{H}$ es una distribución suave.
- $u\mathcal{U}_2(H) = (T\mathcal{U}_2(H))_1 = \mathcal{B}(H)_{ah} = \mathcal{V}_u \otimes \mathcal{H}_u, \forall u \in \mathcal{U}_2(H)$.
- $\mathcal{H}_{ug} = \mathcal{H}_u g, \forall g \in \mathfrak{g}_x, u \in \mathcal{U}_2(H)$.

Con lo cual, la variedad homogénea admite una estructura reductiva, con respecto a la descomposición dada.

Más aún, los productos internos en el espacio tangente definen una métrica de Riemann-Hilbert en $\mathcal{S}(H)$, ya que están asociadas al producto interno dado por la traza.

Observar que en el caso en que z sea un levantamiento de $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ entonces

$$\langle v, v\rangle_x = tr(\kappa_x(v)^2) = \|\kappa_x(v)\|_2^2 = \|\kappa_x(\delta_x(z))\|_2^2 = \|z\|_2^2 = \|v\|_x^2$$

con lo cual la métrica deducida por el producto interno coincide con la métrica cociente que estuvimos analizando en secciones anteriores.

3.5.1. La 1-forma $\mathcal{K}$, el trasporte paralelo y la ecuación de transporte.

Estamos en condiciones de definir la 1-forma de estructura asociada a la aplicación κ. Dado $x \in \mathcal{S}(H)$, definimos la aplicación:

$$\mathcal{K}(y) := ad_u \circ \kappa_x \circ (d\ell_u)^{-1} \qquad \text{si } \ell_u x = ux = y$$

donde $\mathcal{K} : (T\mathcal{S}(H))_y \to \mathcal{B}_2(H)_{ah}$. Con la ayuda de esta aplicación, podemos levantar curvas de $\mathcal{S}(H)$ en $\mathcal{U}_2(H)$ en el siguiente sentido: dada $\gamma(t) \subset \mathcal{S}(H)$ (con $t \in I$ entorno del 0; $\gamma(0) = x$), existe $\Gamma \subset \mathcal{U}_2(H)$ tal que verifica:

$$\ell_{\Gamma(t)} x = \Gamma(t)x = \gamma(t) \qquad , \qquad t \in I,$$

y en particular cumple $\pi_x(\Gamma(t)) = \gamma(t)$. Concretamente, la 1-forma viene dada por

$$\mathcal{K}(y)(v) := uw \otimes y - y \otimes uw - \langle w, x\rangle y \otimes y = \kappa_y(v) \qquad \text{si } d\ell_u w = uw = v.$$

Con respecto a la aplicación π_x, es claro que la curva Γ levanta a γ: $\pi_x(\Gamma(t)) = \gamma(t)$. En particular, estamos buscando curvas $\Gamma(t)$ con dato $\gamma(t)$ y condición inicial $\Gamma(0) = 1$ que verifiquen

$$\dot{\Gamma} = \kappa_{\gamma(t)}(\dot{\gamma(t)})\Gamma(t). \tag{3.9}$$

Esta ecuación se denomina ecuación de transporte paralelo del espacio homogéneo y sus soluciones permiten implementar el transporte paralelo de vectores en $S(H)$ sobre puntos de $\gamma(t)$. El levantamiento horizontal de una curva γ sobre $\mathcal{S}(H)$ resulta entonces ser la única curva Γ en $\mathcal{U}_2(H)$ tal que verifica la ecuación diferencial en $\mathcal{B}_2(H)$:

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}(t) = \kappa_\gamma(\dot{\gamma})\Gamma \\ \Gamma(0) = 1 \end{cases}.$$

En particular, si γ es suave entonces Γ verifica

$$\begin{aligned} &\Gamma(t) \in \mathcal{U}_2(H),\ t \in [0,1], \\ &\pi_\gamma(\Gamma) = \gamma \text{ (es levantamiento)}, \\ &\Gamma^*\Gamma \in \mathfrak{g}_\gamma \text{ (es horizontal)}. \end{aligned}$$

Consideremos para cada $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$, la curva suave $\gamma : [0,1] \to \mathcal{S}(H)$ dada por:

$$\gamma(t) := \cos(kt)x + \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k} v.$$

Observar que si $k = \|v\|$, γ es la curva geodésica Riemanniana que verifica $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = v$ con longitud Riemanniana dada por k. Mientras que si optamos por tomar $v = E_x(y-x)$ para algun $y \in \mathcal{S}(H)$, $y \neq -x$ y $k = \arccos\langle y, x\rangle \in [-\pi, \pi]$, entonces γ es el arco de un círculo maximal que une x con y y tiene longitud $|k|$. Notar que estas curvas son precisamente los círculos maximales (intersecciones de $\mathcal{S}(H)$ con 2-planos que atraviesan el origen) parametrizadas a velocidad constante.

Para encontrar el trasporte paralelo a lo largo de γ tengamos en cuenta los siguientes cálculos.

Por linealidad del producto tensorial resulta:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t)\otimes\gamma(t) &= k\cos(kt)\,\mathrm{sen}(kt)(x\otimes x)-\frac{\cos(kt)\,\mathrm{sen}(kt)}{k}(v\otimes v)\\
&\quad+\mathrm{sen}^2(kt)(x\otimes v)-\cos^2(kt)(v\otimes x)\\
\gamma(t)\otimes\dot{\gamma}(t) &= k\cos(kt)\,\mathrm{sen}(kt)(x\otimes x)-\frac{\cos(kt)\,\mathrm{sen}(kt)}{k}(v\otimes v)\\
&\quad-\cos^2(kt)x\otimes v+\mathrm{sen}^2(kt)(v\otimes x)\\
\langle\dot{\gamma}(t),\gamma(t)\rangle &= \|v\|\cos(kt)\,\mathrm{sen}(kt)\langle x,x\rangle-\frac{\cos(kt)\,\mathrm{sen}(kt)}{k}\langle v,v\rangle\\
&\quad+\mathrm{sen}^2(kt)\langle x,v\rangle-\cos^2(kt)\langle v,x\rangle\\
&= \langle x,v\rangle\\
\gamma(t)\otimes\gamma(t) &= \cos^2(kt)(x\otimes x)+\frac{\mathrm{sen}^2(kt)}{k^2}(v\otimes v)+\frac{\cos(kt)\,\mathrm{sen}(kt)}{k}[x\otimes v+v\otimes x]\\
&= \cos^2(kt)(x\otimes x)+\frac{\mathrm{sen}^2(kt)}{k^2}(v\otimes v)+\frac{\mathrm{sen}(2kt)}{2k}[x\otimes v+v\otimes x].
\end{aligned}$$

Usando estos resultados y la definición del operador κ_x dada en (3.7), obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) &= \dot{\gamma}(t)\otimes\gamma(t)-\gamma(t)\otimes\dot{\gamma}(t)-\langle\dot{\gamma}(t),\gamma(t)\rangle\gamma(t)\otimes\gamma(t)\\
&= x\otimes v-v\otimes x\\
&\quad+\langle x,v\rangle\left\{\cos^2(kt)(x\otimes x)+\frac{\mathrm{sen}^2(kt)}{k^2}(v\otimes v)+\frac{\mathrm{sen}(2kt)}{2k}[x\otimes v+v\otimes x]\right\}
\end{aligned}\tag{3.10}$$

Esta expresión nos permite deducir el siguiente resultado:

Proposición 3.4. *Sean $x\in\mathcal{S}(H)$, $v\in\langle x\rangle^{\perp}\subset(T\mathcal{S}(H))_x$ y $k=\|v\|$. Sea $\gamma:[0,1]\to\mathcal{S}(H)$ la curva que verifica $\gamma(0)=x,\dot{\gamma}(0)=v$ y está dada por*

$$\gamma(t):=\cos(kt)x+\frac{\mathrm{sen}(kt)}{k}v.$$

Entonces el transporte paralelo sobre la curva γ resulta estar dado por la ecuación

$$\begin{cases}\dot{\Gamma}(t)=\kappa_x(v)\Gamma\\ \Gamma(0)=1\end{cases}$$

cuya única solución es

$$\Gamma(t):=\exp(\kappa_x(v)t).$$

Demostración. La demostración se reduce de lo anterior, considerando (3.9) y las condiciones en (3.10), las cuales implican que

$$\kappa_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = \kappa_x(v)$$

para todo $t \in [0,1]$. $\square$

Proposición 3.5. *Sean $x,y \in \mathcal{S}(H)$ tales que $\langle y,x\rangle \in \mathbb{R}$. Sean $v = E_x(y-x)$ y $k = \langle y,x\rangle$. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathcal{S}(H)$ la curva que verifica $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ dada por*

$$\gamma(t) := \cos(kt)x + \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k}v.$$

Entonces el transporte paralelo sobre la curva γ resulta estar dado por la ecuación

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}(t) = \kappa_x(v)\Gamma \\ \Gamma(0) = 1 \end{cases}$$

cuya única solución es

$$\Gamma(t) := \exp(\kappa_x(v)t).$$

Demostración. Análogamente a la proposición anterior, basta ver que si $\langle y,x\rangle \in \mathbb{R}$ entonces $v = E_x(y-x) \in \langle x\rangle^{\perp}$:

$$\langle E_x(y-x),x\rangle = \langle E_x(y),x\rangle = \langle y - \langle y,x\rangle x, x\rangle = 0.$$

$\square$

3.5.2. Conexiones de la estructura reductiva y geodésicas.

A continuación vamos a definir dos conexiones naturales para este espacio homogéneo reductivo, siguiendo la descripción dada en [31]. Para ello, usaremos las siguientes fórmulas locales, sobre una curva $\beta(t) := (x_t, v_t)$ contenida en $T\mathcal{S}(H)$:

$$\kappa_{x_t}(v_t) := v_t \otimes x_t - x_t \otimes v_t - \langle v_t, x_t\rangle x_t \otimes x_t \tag{3.11}$$

$$\frac{d}{dt}\kappa_{x_t}(v_t) = \dot{v}_t \otimes x_t + v_t \otimes \dot{x}_t - \dot{x}_t \otimes v_t - x_t \otimes \dot{v}_t - [\langle \dot{v}_t, x_t\rangle + \langle v_t, \dot{x}_t\rangle] x_t \otimes x_t$$
$$+ \langle v_t, x_t\rangle (\dot{x}_t \otimes x_t + x_t \otimes \dot{x}_t). \tag{3.12}$$

La primera conexión ∇^r que calcularemos es la *conexión reductiva*. Si V es campo en $\mathcal{S}(H)$

y $w \in (T\mathcal{S}(H))_x$ entonces

$$\kappa_x(\nabla^r_w V(x)) := \kappa_x(w)(\kappa_x V(x)) + [\kappa_x(V(x)), \kappa_x(w)];$$

donde $Y(X)$ denota la derivada de X en la dirección de Y y $[X,Y]$ es el conmutador en $\mathcal{B}(H)$.

Proposición 3.6. *La conexión reductiva ∇^r es compatible con la métrica cociente en $\mathcal{S}(H)$. Dado $x \in \mathcal{S}(H)$, V campo tangente y $w \in (T\mathcal{S}(H))_x$, esta conexión esta dada por*

$$\nabla^r_w(V) = \dot{V}w - \langle V, x\rangle w + \big[\langle v, x\rangle\langle w, x\rangle - \langle w, v\rangle\big]x.$$

Demostración. Para $x \in \mathcal{S}(H)$ y $w \in (T\mathcal{S}(H))_x$, consideremos $\beta : I \to T\mathcal{S}(H)$ la curva $\beta(t) = (x_t, w_t)$ tal que $x_0 = x$ y $\dot{x}_0 = w$. Usando (3.8),(3.11) y (3.12) resulta que

$$\begin{aligned}
\kappa_x(w)(\kappa_x(V(x))) &= \frac{d}{dt}\kappa_{x_t}(V(x_t))\bigg|_{t=0} \\
&= \dot{\widehat{V(x_t)}} \otimes x_t + V(x_t) \otimes \dot{x}_t - \dot{x}_t \otimes V(x_t) - x_t \otimes \dot{\widehat{V(x_t)}}\bigg|_{t=0} \\
&- \left[\langle \dot{\widehat{V(x_t)}}, x_t\rangle + \langle V(x_t), \dot{x}_t\rangle\right] x_t \otimes x_t - \langle V(x_t), x_t\rangle(x_t \otimes \dot{x}_t + \dot{x}_t \otimes x_t)\bigg|_{t=0} \\
&= \dot{V}w \otimes x + V \otimes w - w \otimes V - x \otimes \dot{V}w \\
&- [\langle \dot{V}w, x\rangle + \langle V, w\rangle] x \otimes x - \langle V, x\rangle(x \otimes w + w \otimes x) \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

donde además abreviamos la notación $V(x_0) = V(x) =: V$ y $\dot{\widehat{V(x_t)}}|_{t=0} = DV(x_0)\dot{x}_0 =: \dot{V}w$. Más aún, la curva $\beta(t) \in T\mathcal{S}(H)$ verifica que $\dot{\beta}(t) = (x_t, V(x_t); \dot{x}_t, \dot{V}(x_t)) \in TT\mathcal{S}(H)$ y por lo tanto

$$Re\big(\langle \dot{V}w, x\rangle + \langle v, w\rangle\big) = 0. \qquad (3.14)$$

Por otro lado, el conmutador entre $\kappa_x(V)$ y $\kappa_x(w)$ resulta

$$\begin{aligned}
[\kappa_x(V), \kappa_x(w)] &= \kappa_x(V)\kappa_x(w) - \kappa_x(w)\kappa_x(V) \\
&= w \otimes V - V \otimes w + [\langle V, w\rangle - \langle w, V\rangle] x \otimes x. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Reagrupando nuevamente los tensores de (3.13) y (3.15) obtenemos localmente la expresión:

$$\kappa_x(\nabla^r_w(V))) = \dot{V}w \otimes x - x \otimes \dot{V}w - \langle V, x\rangle[w \otimes x + w \otimes x] - \big[\langle w, V\rangle + \langle \dot{V}w, x\rangle\big]\, x \otimes x.$$

No es difícil verificar que $z = k_x(\nabla^r_w(V_x))$ verifica que $z \in \mathfrak{g}_x^\perp$, o sea que $z = -z^*$ y $(1 - x \otimes x)z(1 - x \otimes x) = 0$ usando cálculo de tensores y la condición (3.14). Luego la conexión reductiva definida en $T\mathcal{S}(H)$ viene dada por:

$$\begin{aligned}
\nabla^r_w(V) &= \delta_x(\kappa_x(\nabla^r_w(V))) \\
&= \dot{V}w - \langle x, \dot{V}w\rangle x - \langle V, x\rangle\big[w + \langle x, w\rangle x\big] - \big[\langle w, v\rangle + \langle \dot{V}w, x\rangle\big]x \\
&= \dot{V}w - \langle V, x\rangle w + \big[\langle v, x\rangle\langle w, x\rangle - \langle w, v\rangle\big]x. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Como las aplicaciones κ_x son isométricas, la conexión reductiva es compatible con la métrica. $\square$

La segunda conexión se denomina *conexión clasificante* ∇^c. Siguiendo la misma notación anterior, esta conexión viene dada localmente por:

$$\begin{aligned}
\kappa_x(\nabla^c_w(V)) &= P^x_{\mathfrak{g}^\perp}(\kappa_x(w)(\kappa_x(V(x)))) \\
&= \kappa_x(w)(\kappa_x(V_x)) - (1 - x \otimes x)\kappa_x(w)(\kappa_x(V_x))(1 - x \otimes x) \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

para V campo en $\mathcal{S}(H)$ y $w \in (T\mathcal{S}(H))_x$.

Proposición 3.7. *La conexión clasificante ∇^c es compatible con la métrica cociente en $\mathcal{S}(H)$. Para cada $x \in \mathcal{S}(H)$, V un campo tangente y $\in (T\mathcal{S}(H))_x$, esta conexión viene dada por*

$$\nabla^c_w(V) = \dot{V}w + \big[\langle V, w\rangle - \langle w, x\rangle\langle V, x\rangle\big]x - \langle w, x\rangle V$$

Demostración. Con cálculos similares a la proposición anterior aplicados a 3.17, obtenemos

$$\kappa_x(\nabla^c_w(V)) = \dot{V}w \otimes x - x \otimes \dot{V}w - \langle w, x\rangle[V \otimes x + x \otimes V] - [\langle \dot{V}w, x\rangle + \langle V, w\rangle]x \otimes x.$$

Luego

$$\begin{aligned}\nabla^c_w(V) &= \delta_x(\kappa_x(\nabla^c_w(V)))\\ &= \dot{V}w - \langle x, \dot{V}w\rangle x\\ &- \langle w,x\rangle[V + \langle x,V\rangle x] - [\langle \dot{V}w, x\rangle + \langle V,w\rangle]x\\ &= \dot{V}w + \big[\langle V,w\rangle - \langle w,x\rangle\langle V,x\rangle\big]x - \langle w,x\rangle V.\end{aligned}$$

La compatibilidad de esta conexión con la métrica cociente fue probada en [31]. □

La conexión clasificante tiene las mismas geodésicas que la conexión reductiva. Además tienen torsiones opuestas (ver [31]). Definiendo entonces $\nabla = \frac{1}{2}(\nabla^r + \nabla^c)$, esta nueva conexión es simétrica, de torsión nula y mantiene las mismas geodésicas que ∇^r y ∇^c.

La siguiente proposición resume estos resultados:

Proposición 3.8. *Con las mismas notaciones e hipótesis de las proposiciones anteriores, la conexión de Levi-Civita para la métrica cociente está dada por*

$$\nabla_w(V) = \dot{V}w - \frac{1}{2}\big[\langle v,x\rangle w + \langle w,x\rangle v\big], \tag{3.18}$$

para $x \in \mathcal{S}(H)$ y $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$. La curva geodésica que comienza en x con velocidad v está dada por

$$\gamma(t) = \exp(\kappa_x(v)t)x$$

donde la aplicación exp *es la aplicación exponencial de la estructura homogénea de $\mathcal{S}(H)$.*

Demostración. La compatibilidad de la conexión $\nabla = \frac{1}{2}(\nabla^r + \nabla^c)$ con la métrica se debe a la compatibilidad de cada conexión. La expresión de las geodésicas ya fue probado en [31]. □

Notar que si Γ es una curva en $\mathcal{U}_p(H)$ tal que $\gamma(t) = \Gamma(t)x$ (levantamiento de γ geodésica) entonces Γ verifica el transporte paralelo:

$$\begin{cases}\dot{\Gamma}(t) = \kappa_x(v)\Gamma\\ \Gamma(0) = 1\end{cases}.$$

Esta condición junto con las Proposiciones 3.4 y 3.5 permiten demostrar fácilmente el siguiente teorema:

Teorema 3.4. *Sea $x \in \mathcal{S}(H)$.*

- *Dado $v \in (T\mathcal{S}(H))_x$ tal que $v \in \langle x \rangle^{\perp}$. Entonces la curva $\gamma : [0,1] \to \mathcal{S}(H)$ dada por*

  $$\gamma(t) := \cos(\|v\|t)x + \frac{\operatorname{sen}(\|v\|t)}{\|v\|}v$$

  es la curva geodésica de la estructura homogénea de $\mathcal{S}(H)$

  $$\gamma(t) = \exp(\kappa_x(v))x$$

  que verifica $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = v$.

- *Dado $y \in \mathcal{S}(H)$, $y \neq -x$ tal que $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$. Sea $v = E_x(y - x)$ y $k = \arccos(\langle y, x \rangle)$. Entonces la curva $\gamma : [0,1] \to \mathcal{S}(H)$ dada por*

  $$\gamma(t) := \cos(kt)x + \frac{\operatorname{sen}(kt)}{\|v\|}v$$

  es la curva geodésica de la estructura homogénea de $\mathcal{S}(H)$

  $$\gamma(t) = \exp(\kappa_x(v))x$$

  que verifica $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

En particular, en el caso de H espacio de Hilbert real, todas las geodésicas de la estructura reductiva vienen dadas por estas curvas.

Capítulo 4

Esferas en módulos de Hilbert y C*-álgebras.

En este capítulo, presentamos algunas ideas acerca de módulos de Hilbert, distinguiendo similitudes y diferencias de este estudio con el caso en que la esfera está definida sobre un espacio de Hilbert. Estos resultados pueden encontrarse con más detalle en [5]. Luego abordamos el caso particular donde el producto interno definido resulta asociado a un estado fiel de una C^*-álgebra. En este contexto, además se obtienen propiedades geométricas de la parte autoadjunta de esta esfera.

4.1. La esfera $\mathcal{S}(M)$ con M módulo de Hilbert

Sean $\mathcal{A}$ una C^*álgebra unital y M un $\mathcal{A}$- módulo de Hilbert. Denotemos $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interno sobre el módulo M y sea

$$\mathcal{S}(M) := \Big\{x \in M : \langle x,x\rangle = 1\Big\}.$$

Supongamos que existe al menos un elemento $e \in M$ tal que $\langle e,e\rangle = 1$. Esto último es posible si consideramos, por ejemplo, que el módulo es pleno.

Veamos algunos ejemplos de estas esferas. Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra unital, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$. Supongamos además que $1 \in \mathcal{B}$. Sea $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una esperanza condicional. Si E es fiel y tiene índice finito, entonces $\mathcal{A}$ es un $\mathcal{B}$-módulo de Hilbert con el producto interno $\langle x,y\rangle_{\mathcal{B}} = E(x^*y)$ (ver [5]). Además, $\mathcal{A}$ es en sí misma un $\mathcal{A}$-módulo de Hilbert con el producto

$\langle x,y\rangle_{\mathcal{A}} = x^*y$. Análogamente ocurre con $\mathcal{B}$. En este contexto, tenemos las siguientes esferas:

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}) &= \{x \in \mathcal{A} : x^*x = 1\} \\ S(\mathcal{B}) &= \{x \in \mathcal{B} : x^*x = 1\} = S_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \\ S_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) &= \{x \in \mathcal{A} : E(x^*x) = 1\} \end{aligned}$$

Es claro entonces que $S_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \subset S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \subset S_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$, pero estas inclusiones en general son inclusiones estrictas.

Por ejemplo, si consideramos en $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$ y la esperanza condicional de estas matrices de 2×2 en las matrices diagonales $\mathcal{B} = D_2(\mathbb{C})$, dada por:

$$E\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

En este caso, tenemos

$$S_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : |a|^2 + |b|^2 = 1, |c|^2 + |d|^2 = 1 \right\}$$

y $S(\mathcal{A})$ es el grupo de las matrices 2×2 ortogonales. Entonces

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in S_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \quad \text{pero} \qquad m \notin S(\mathcal{A}).$$

4.1.1. Estructura de $\mathcal{S}(M)$ como variedad diferenciable

Veamos las características de la estructura diferenciable de $\mathcal{S}(M)$ para M un $\mathcal{A}$-módulo de Hilbert pleno. Estos resultados fueron extraídos de [5].

Proposición 4.1. *La esfera $\mathcal{S}(M)$ de cualquier M módulo de Hilbert sobre una C^*-álgebra unital $\mathcal{A}$ es una variedad C^∞ diferenciable.*

Demostración. Sea $\mathcal{G}^+ = G(\mathcal{A})^+$ el conjunto de elementos inversibles y positivos de $\mathcal{A}$. Es claro que este conjunto es abierto y por lo tanto, es una variedad diferenciable. En particular, dado $a \in \mathcal{G}^+$, el espacio tangente de $\mathcal{G}^+$ en a resulta

$$(T\mathcal{G}^+)_a = \{v \in \mathcal{G}^+ : a = a^*\} = \mathcal{A}_h^+$$

Sea $N = \{x \in M : \langle x,x\rangle \in \mathcal{G}^+\}$. Este conjunto también es abierto en M ya que la aplicación $x \to \langle x,x\rangle$ es continua entre M y $\mathcal{A}^+$. Por lo cual, es una subvariedad de M con la estructura inducida como subespacio de M.

Sea $f : N \to \mathcal{G}^+$ dada por $f(x) := \langle x,x\rangle$. Esta aplicación es una sumersión entre estas variedades. Fijado $x_0 \in N$, entonces la aplicación $s : \mathcal{G}^+ \to N$ dada por

$$s(a) := x_0\langle x_0,x_0\rangle^{-1/2}a^{1/2}$$

es una sección suave de f (ie, $f \circ s = id$). Por lo cual, $\ker(f_{*x})$ parte a $(TN)_x$ y $f^{-1}(1) = \mathcal{S}(M)$ resulta una subvariedad sumergida cerrada de M. $\square$

Dado $x \in N$, la diferencial de f en x:

$$f_{*x} : (TN)_x \to T_{\langle x,x\rangle}\mathcal{G}^+ \simeq A_{ah} \qquad f_{*x}(v) = \langle x,v\rangle + \langle v,x\rangle$$

es un epimorfismo con sección $r : \mathcal{A}_{ah} \to TN$ dada por:

$$r(a) := \frac{1}{2}x\langle x,x\rangle^{-1}a$$

Esto permite caracterizar el espacio tangente a $\mathcal{S}(M)$ en $x \in M$ como:

$$(T\mathcal{S}(M))_x = \Big\{v \in M : \langle x,v\rangle = -\langle v,x\rangle\Big\}$$

Denotemos $(T\mathcal{S}(M))_x^0$ al conjunto de elementos $v \in T\mathcal{S}(M)$ tales que $\langle v,x\rangle = 0$.

Sea $\lambda_x(\bullet) := \langle \bullet,x\rangle$ la aplicación $\mathcal{A}$-lineal de M en $\mathcal{A}$. Notar que el núcleo de λ_x es $(T\mathcal{S}(M))_x$ y la preimagen de los elementos antihermitianos coincide con $(T\mathcal{S}(M))_x$ (pues $\lambda_x(v) = a = -a^* = -\langle x,v\rangle$ entonces $v \in (T\mathcal{S}(M))_x$).

Sea $x \in \mathcal{S}(M)$. Definimos $E_x : M \to M$ por:

$$E_x(w) := w - \frac{1}{2}\langle x,w\rangle x - \frac{1}{2}\langle w,x\rangle x$$

La aplicación es $\mathcal{A}_{ah}$-lineal con $\text{ran}(E_x) = (T\mathcal{S}(M))_x$ y $\ker(E_x) = \text{ran}(Id - E_x)$ que coincide con el complemento de $(T\mathcal{S}(M))_x$.

Por último, otra similitud con el caso de una esfera sobre un espacio de Hilbert a mencionar es que la condición sobre los elementos de $(T\mathcal{S}(M))_x$ generan una condición sobre los elementos de $TT\mathcal{S}(M)$ dada por:

$$TT\mathcal{S}(M)=\Big\{(x,v,u,w):x\in\mathcal{S}(M)\,;\,v,u\in(T\mathcal{S}(M))_x\,;\,w\in M\,;\,\langle w,x\rangle+\langle v,u\rangle+\langle x,w\rangle+\langle u,v\rangle=0\Big\} \tag{4.1}$$

4.1.2. Estructura de $\mathcal{S}(M)$ como variedad homogénea

Consideremos sobre $\mathcal{S}(M)$ la acción del grupo de operadores unitarios $\mathcal{U}_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M)}=\mathcal{U}(M)$ dada por:

$$\pi:\mathcal{U}(M)\times\mathcal{S}(M)\to\mathcal{S}(M);\qquad \pi(u,x):=ux.$$

Notar que esta acción deja invariante a $\mathcal{S}(M)$. Vamos a reducir la acción al subgrupo $\mathcal{U}(M)_c$.

$$\mathcal{U}(M)_c=\{u\in\mathcal{L}(M):u\text{ unitario y verifica }u-1\in\mathcal{F}(M)\}$$

Tenemos una manera de pensar los elementos de la esfera como operadores en $\mathcal{F}(M)$. Si $x,y\in M$ entonces el operador $x\otimes y:M\to\mathcal{M}$ dado por

$$x\otimes y(z):=x\langle y,z\rangle$$

está bien definido, es lineal y su imagen está contenida en $x\cdot\mathcal{A}$.

Proposición 4.2. *Si $x,x_0\in\mathcal{S}(M)$ satisfacen $\|x-x_0\|<1/2$ entonces existe $u\in\mathcal{U}(M)_c$ tal que $u(x_0)=x$.*

Demostración. Consideremos los proyectores $x\otimes x$ y $x_0\otimes x_0$. Notemos que si $\|x-x_0\|<1/2$ entonces

$$\begin{aligned}\|x\otimes x-x_0\otimes x_0\|&\le\|x\otimes x-x\otimes x_0\|+\|x\otimes x_0-x_0\otimes x_0\|\\&\le\|x\otimes(x-x_0)\|+\|(x-x_0)\otimes x_0\|\\&\le 2\|x-x_0\|\le 1\end{aligned}$$

Sea $t=(x\otimes x)(x_0\otimes x_0)+(1-x\otimes x)(1-x_0\otimes x_0)$ en $\mathcal{U}(M)_c$. Notar que t verifica

$$1-t^*t=1-tt^*=(x\otimes x-x_0\otimes x_0)^2.$$

Luego, por la desigualdad anterior, obtenemos que $\|1-t^*t\|\le 1$ y, por lo tanto, t es un operador inversible en $\mathcal{U}(M)_c$. Además,

$$t(x_0 \otimes x_0) = (x \otimes x)t \tag{4.2}$$
$$x_0 \otimes x_0 t^* = t^* x \otimes x. \tag{4.3}$$

Al ser inversible, t admite descomposición polar dada por $t = v|t|$ donde $v = t(t^*t)^{-1/2}$ es unitario y $|t| = t^*t$. Además, $v \in \mathcal{U}(M)_c$ (que es cerrado por adjunciones, composiciones e inversiones).

Por las ecuaciones (4.2) y (4.3), obtenemos que $|t|$ conmuta con $x_0 \otimes x_0$ y además que

$$x \otimes x = t(x_0 \otimes x_0)t^{-1}.$$

Luego

$$v(x_0 \otimes x_0)v^{-1} = t(t^*t)^{-1/2} x_0 \otimes x_0 (t^*t)^{1/2} t^{-1} = t(x_0 \otimes x_0)t^{-1} = x \otimes x.$$

En definitiva, $x \otimes x$ es unitariamente equivalente a $x_0 \otimes x_0$ en $\mathcal{L}(M)$. Definamos:

$$w = vx_0 \otimes x + 1 - x \otimes x.$$

No es difícil mostrar que este operador resulta unitario (ie, $ww^* = w^*w = 1$). Como, para cualquier $z \in M$, se verifica:

$$w(x \otimes z) = v(x_0 \otimes z)$$

resulta que $x \otimes z = (w^*v(x_0)) \otimes z$ para todo z. Esto implica que

$$w^*v(x_0) = x$$

con w^*v unitario perteneciente a $\mathcal{U}(M)_c$, como queríamos demostrar. $\square$

Usando la proposición anterior, podemos definir $\mu_{x_0} : \left\{x \in \mathcal{S}(M) : \|x - x_0\| \leq \frac{1}{2}\right\} \to \mathcal{U}(M)_c$ dada por

$$\mu_{x_0} := (v(x_0 \otimes x) + 1 - x \otimes x)^* v = x \otimes x_0 + v(1 - x_0 \otimes x_0)$$

donde

$$\begin{aligned} v &= t(t^*t)^{-1/2} \\ &= \big((x \otimes x)(x_0 \otimes x_0) + (1 - x \otimes x)(1 - x_0 \otimes x_0)\big)\left(1 - (x \otimes x - x_0 \otimes x_0)^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Además tenemos que si una curva suave y continua $\alpha : [0,1] \to M$ inicia en $\alpha(0) = x_0$ y está contenida en un entorno alrededor de x_0 (a menos de $\frac{1}{2}$), entonces $\Gamma(t) := \mu_{x_0}(\alpha(t))$ es una curva continua y suave en $\mathcal{U}(M)_c$ tal que $\Gamma(t)(x_0) = \alpha(t)$ para todo $t \in [0,1]$.

Proposición 4.3. *$\mathcal{S}(M)$ es un espacio homogéneo bajo la acción del grupo $\mathcal{U}(M)_c$ y los grupos de isotropía de la acción son los subgrupos $I_x = \{v \in \mathcal{U}(M)_c : vx = x\}$.*

La estructura reductiva de este espacio homogéneo está descripta en (sección 3, [5]). Aunque quedan definidas conexiones asociadas a las mismas y curvas geodésicas que respeten el transporte paralelo inducido por estas conexiones, se desconoce aún si tales curvas son minimales respecto a la métrica de Finsler inducida por la estructura.

4.2. La esfera S_φ de una C^*-álgebra con un estado φ fiel.

En esta sección, sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra unital con un estado $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ fiel que verifica $\varphi(1) = 1$. El producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ asociado a φ dado por $\langle x, y\rangle := \varphi(x^*y)$ genera sobre la C^*-álgebra $\mathcal{A}$ una estructura de pre-módulo de Hilbert, donde la norma asociada a este producto interno no es completa. Consideramos H_φ al espacio de Hilbert inducido al completar $\mathcal{A}$ para la norma inducida por φ .Denotamos la esfera de $\mathcal{A}$ asociada al estado φ por:

$$\mathcal{S}_\varphi = \{x \in \mathcal{A} : \varphi(x^*x) = 1\}.$$

Notar que si $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : x^*x = 1\}$, entonces $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}_\varphi$. Consideremos algunos ejemplos de estas esferas:

- Sea $\mathcal{A} = \ell^\infty(\mathbb{C})$ y $\varphi(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$, donde $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$ y $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$. Entonces

$$\mathcal{S}_\varphi = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^\infty(\mathbb{C}) : \sum_{n=1}^\infty a_n |x_n|^2 = 1\},$$

  es el elipsoide con radio $1/a_n$ sobre los ejes x_n-axis.

- Sea $\mathcal{A} = C([0,1])$ el álgebra de las funciones continuas con la norma del supremo en $[0,1]$ y el estado definido por $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$, $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continua. Entonces

$$\mathcal{S}_\varphi = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 |f(x)|^2 = 1 \right\},$$

  Aquí $f(x) = \sqrt{2}sen(\frac{\pi}{2}t)$ pertenece a la esfera $\mathcal{S}_\varphi$ pero no es un elemento en la esfera $S(\mathcal{A})$.

- Sea $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ y $p \in \mathcal{A}$ matriz positiva tal que $tr(p) = 1$ con tr la traza usual de matrices. Definimos el estado asociado a p como $\varphi(a) = tr(pa)$ y entonces

$$\mathcal{S}_\varphi = \{a \in M_n(\mathbb{C}) : tr(p\bar{a}^t a) = 1\}.$$

4.2.1. Acción del grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ sobre $\mathcal{S}_\varphi$

En esta sección, vamos a definir una estructura C^∞ homogénea, inducida sobre la esfera $\mathcal{S}_\varphi$ por la acción del grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$. Si $x \in \mathcal{S}_\varphi$ y $G \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ entonces la acción está dada por $\pi_G(x) = Gx$. Notar que esta acción está bien definida y $Gx \in \mathcal{S}_\varphi$ para todo $G \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$.

Los operadores en $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ pueden extenderse a operadores unitarios en $\mathcal{B}(\mathcal{L})$. Más aún, podemos considerar estos operadores como un subgrupo de operadores U unitarios que actúan en $\mathcal{L}$ y verifican $U(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Observación 4.1. Si $T \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_s$, resulta

$$e^{iT} \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}).$$

Análogamente si $T \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_{as}$ (es decir, tal que $\varphi(x^*Ty) = -\varphi((Tx)^*y)$) resulta que $iT \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_s$ y entonces

$$e^{-T} \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}).$$

Veamos a continuación dos lemas importantes que permitirán analizar la transitividad de la acción del grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$.

Lema 4.1. *Sea $z \in \mathcal{A}$ con $\varphi(z) = 0$ y sea $X = z \otimes 1 + 1 \otimes z$. Entonces*

$$e^{iX} = e^{i(z\otimes 1+1\otimes z)}(1) = \cos(\varphi(z^*z)^{1/2}) \cdot 1 + i\frac{\sin(\varphi(z^*z)^{1/2})}{\varphi(z^*z)^{1/2}} \cdot z.$$

Demostración. Usando que $z \otimes 1(z) = 0 = 1 \otimes z(1)$ y algunos cálculos elementales, es fácil mostrar que

$$(z \otimes 1 + 1 \otimes z)^{2n}(1) = \varphi(z^*z)^n \cdot 1$$
$$(z \otimes 1 + 1 \otimes z)^{2n+1}(1) = \varphi(z^*z)^n \cdot z.$$

Luego, considerando la definición de la exponencial:

$$e^{iT}(1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} T^{2n}(1) + i \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} T^{2n+1}(1)$$

y aplicando en $T = z\otimes 1 + 1\otimes z$, con lo obtenido anteriormente, se concluye el lema enunciado. $\square$

Observación 4.2. En el lema anterior, en términos matriciales (respecto a $P_0 = 1\otimes 1$) se obtiene:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1\otimes z \\ z\otimes 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$e^{iX} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(z^*z)^{1/2}) & i(1\otimes z)\mathrm{sinc}(\varphi(z^*z)^{1/2}) \\ i(z\otimes 1)\mathrm{sinc}(\varphi(z^*z)^{1/2}) & \cos(\varphi(z^*z)^{1/2}) \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}).$$

donde $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ es el seno cardinal, definido para $t \geq 0$.

Lema 4.2. *Sea $y \in \mathcal{S}_\varphi$, $y \notin \mathbb{C}$ y $\varphi(y) \neq 0$. Entonces $|\varphi(y)| < 1$ y*

$$z = -ie^{-i\theta} \frac{\cos^{-1}(|\varphi(y)|)}{(1-|\varphi(y)|^2)^{1/2}} \cdot (y - \varphi(y))$$

satisface

$$e^{i(z\otimes 1+1\otimes z)}(1) = e^{-i\theta} y,$$

donde $(-\pi,\pi) \ni \theta = \arg(\varphi(y))$.

Demostración. Como $\varphi(y^*y) = 1$, si $|\varphi(y)| = 1$ entonces, en la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$1 = |\varphi(y)| \leq \varphi(y^*y)^{1/2}\varphi(1)^{1/2} = 1$$

deberíamos tener una igualdad, lo cual implica $y = \lambda \cdot 1$. Luego $|\varphi(y)| < 1$.

Es claro que así definido $\varphi(z) = 0$. Luego, por el lema anterior,

$$e^{i(z\otimes 1+1\otimes z)}(1) = \cos(\varphi(z^*z)^{1/2}) \cdot 1 + i \frac{\sin(\varphi(z^*z)^{1/2})}{\varphi(z^*z)^{1/2}} \cdot z.$$

Observe que

$$z^*z = \frac{(\cos^{-1}(|\varphi(y)|)^2}{1-|\varphi(y)|^2}\varphi(y^* - \overline{\varphi(y)})(y-\varphi(y)),$$

y además

$$\varphi((y^* - \overline{\varphi(y)})(y-\varphi(y))) = 1-|\varphi(y)|^2.$$

Luego $\varphi(z^*z) = (\cos^{-1}(|\varphi(y)|))^2$. Por lo tanto

$$e^{i(z\otimes 1+1\otimes z)}(1) = |\varphi(y)| + e^{-i\arg(\varphi(y))}\frac{\sin(\cos^{-1}(|\varphi(y)|)}{(1-|\varphi(y)|^2)^{1/2}}(y-\varphi(y))$$

$$= |\varphi(y)|\cdot 1 + e^{-i\arg(\varphi(y))}(y-\varphi(y)) = e^{-i\arg(\varphi(y))}\cdot y.$$

□

Teorema 4.1. *La acción del grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ sobre $\mathcal{S}_\varphi$ es transitiva.*

Demostración. Para esta demostración será suficiente considerar los lemas anteriores.

Sea $y \in \mathcal{S}_\varphi$. Si $\varphi(y) \neq 0$ e $y \notin \mathbb{C}\cdot 1$, por el Lema 4.2 anterior, existe $z \in \mathcal{A}$ tal que

$$e^{i(z\otimes 1+1\otimes z)}(1) = e^{-i\theta}\cdot y,$$

i.e. $y = e^{i\theta}e^{i(z\otimes 1+1\otimes z)}(1) = e^{i(z\otimes 1+1\otimes z+\arg(\varphi(y))I)}(1)$, con

$$e^{i(z\otimes 1+1\otimes z+\arg(\varphi(y))I)} \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}).$$

Si $\varphi(y) = 0$ (o sea, y es φ-ortogonal a 1) por el Lema 4.1,

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1\otimes y+y\otimes 1)}(1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi(y^*y)^{1/2}\right)\cdot 1 + i\frac{\sin(\frac{\pi}{2}\varphi(y^*y)^{1/2})}{\frac{\pi}{2}\varphi(y^*y)^{1/2}}\cdot\frac{\pi}{2}y = iy,$$

y la prueba se sigue como antes. Finalmente, el caso $\varphi(y) \neq 0$ e $y = \lambda\cdot 1$ es trivial. □

En el resultado anterior, se muestra que los operadores inversibles en $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ que conectan 1 con cualquier $y \in \mathcal{S}_\varphi$ son exponenciales del grupo. La exponencial se aplica a elementos de la forma $F+\lambda I$ donde F es un operador en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ y $\lambda \in (-\pi,\pi)$.

Corolario 4.1. *La esfera $\mathcal{S}_\varphi$ es conexa.*

4.2.2. Estructura diferenciable de $\mathcal{S}_\varphi$

Para dotar a $\mathcal{S}_\varphi$ de estructura de subvariedad volveremos a usar el Lema 1.1.

Teorema 4.2. *La esfera $\mathcal{S}_\varphi$ es una C^∞ subvariedad complementada de $\mathcal{A}$, y un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$. Para todo $x_0 \in \mathcal{S}_\varphi$ fijo, la aplicación*

$$\pi_{x_0} : \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}_\varphi, \ \ \pi_{x_0}(U) = U(x_0)$$

es una sumersión C^∞ diferenciable.

Demostración. Primero, recordemos que por el Corolario 4.1 la aplicación π_{x_0} es un epimorfismo.

En el marco del Lema 1.1, consideremos $\mathcal{S}_\varphi \subset \mathcal{A}$ con la topología relativa, y fijemos un elemento $x_0 \in \mathcal{S}_\varphi$. Para probar que π_{x_0} es abierta, vamos a exhibir una sección continua cerca de x_0 (secciones locales en cualquier otro punto de $\mathcal{S}_\varphi$ se obtienen por traslaciones de las mismas por la acción del grupo). Por la Proposición 2.4, existe r_{x_0} tal que si $P \in \mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ satisface

$$\|P - x_0 \otimes x_0\|_{\mathbf{a}} < r_{x_0},$$

entonces existe $V_P \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$, que está en función (suave) de P y tal que

$$V_P(x_0 \otimes x_0)V_P^\sharp = V_P(x_0) \otimes V_P(x_0) = P$$

y $V_{x_0 \otimes x_0} = 1$.

Notar que si $a, b \in \mathcal{A}$, entonces (por la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$\|a \otimes b\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|\varphi(b^*x)a\|_\infty = \|a\|_\infty \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} |\varphi(b^*x)| \leq \|a\|_\infty \varphi(b^*b)^{1/2} \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \varphi(x^*x)^{1/2}$$

$$= \|a\|_\infty \|b\|_\varphi \|\varphi\| = \|a\|_\infty \|b\|_\varphi \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty.$$

Así en particular

$$\|a \otimes b\|_{\mathbf{a}} = \text{máx}\{\|a \otimes b\|, \|(a \otimes b)^\sharp\|\} = \text{máx}\{\|a \otimes b\|, \|b \otimes a\|\} \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty.$$

Más precisamente: $\|a \otimes b\|_{\mathbf{a}} \leq \text{máx}\{\|a\|_\infty \|b\|_\varphi, \|a\|_\varphi \|b\|_\infty\}$.

Si $y \in \mathcal{S}_\varphi$ satisface que $\|y - x_0\| < \frac{r_{x_0}}{2\|x_0\|_\infty + 1}$, entonces

$$\|y \otimes y - x_0 \otimes x_0\|_{\mathbf{a}} \leq \|y \otimes y - y \otimes x_0\|_{\mathbf{a}} + \|y \otimes x_0 - x_0 \otimes x_0\|_{\mathbf{a}} = \|y \otimes (y - x_0)\|_{\mathbf{a}} + \|(y - x_0) \otimes x_0\|_{\mathbf{a}}$$

$$\leq \|y\|_\infty \|y-x_0\|_\infty + \|y-x_0\|_\infty \|x_0\|_\infty.$$

Notar que como $\frac{r_{x_0}}{2\|x_0\|_\infty+1} \leq 1$, resulta que para cada y

$$\|y\|_\infty < \|y-x_0\|_\infty + \|x_0\|_\infty \leq 1 + \|x_0\|_\infty.$$

Entonces

$$\|y \otimes y - x_0 \otimes x_0\|_{\mathbf{a}} < \|y-x_0\|_\infty (1+2\|x_0\|_\infty) < r_{x_0}.$$

Luego por la Proposición 2.4, existe $V_y \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$, continuamente dependiente de $y \otimes y$ (y por lo tanto de y) tal que

$$V_y^\sharp(y) \otimes V_y^\sharp(y) = V_y^\sharp(y \otimes y) V_y = x_0 \otimes x_0,$$

i.e. $y' = V_y^\sharp(y)$ satisface $y' \otimes y' = x_0 \otimes x_0$. Denotemos $U_y = x_0 \otimes y' + 1 - x_0 \otimes x_0$. Notar que $U_y \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$. De hecho, como $y' \otimes x_0(1 - x_0 \otimes x_0) = (1 - x_0 \otimes x_0) y' \otimes x_0 = 0$,

$$U_y^\sharp U_y = (y' \otimes x_0 + 1 - x_0 \otimes x_0)(x_0 \otimes y' + 1 - x_0 \otimes x_0) = (y' \otimes x_0)(x_0 \otimes y') + 1 - x_0 \otimes x_0$$

$$= x_0 \otimes x_0 + 1 - x_0 \otimes x_0 = 1.$$

y similarmente $U_y U_y^\sharp = 1$. Además obtenemos que U_y depende continuamente de y. Mas aún

$$U_y^\sharp(x_0) = y' \otimes x_0(x_0) = y'.$$

Entonces μ_{x_0} definido sobre y tal que $\|y-x_0\|_\infty < \frac{r_{x_0}}{2\|x_0\|_\infty+1}$ por

$$\mu_{x_0}(y) = V_y U_y^\sharp \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$$

satisface $[\mu_{x_0}(y)](x_0) = V_y U_y^\sharp(x_0) = V_y(y') = y$, i.e. es una sección local continua de π_{x_0} definida cerca de x_0. Luego π_{x_0} es abierta.

La diferencial de π_{x_0} en $1 \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ (definida como una aplicación con valores en $\mathcal{A}$) es

$$\delta_{x_0} = d(\pi_{x_0})_1 : \mathcal{B}_{as}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A},\ \delta_{x_0}(A) = A(x_0).$$

Notar que $A \in \mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$ satisface $A(x_0) = 0$ si y solo si $A(x_0) \otimes x_0 = -x_0 \otimes A(x_0) = 0$, i.e. la matriz de A en términos de la proyección $x_0 \otimes x_0$ tiene sólo la entrada $2,2$ no nula. Luego el suplemento para $N(\delta_{x_0})$ en $\mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$ es el espacio de las matrices en términos de $x_0 \otimes x_0$ que tienen la entrada $2,2$ trivial, es decir, los elementos B de $\mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$ que verifican $(1 - x_0 \otimes x_0) B (1 - x_0 \otimes x_0) = 0$.

El rango de esta aplicación lineal es

$$\operatorname{ran}(\delta_{x_0}) = \{y \in \mathcal{A} : Re(\varphi(x_0^* y)) = 0\}.$$

De hecho, si $y = A(x_0)$ (donde $A^\sharp = -A$), entonces

$$\varphi(x_0^* y) = \varphi(x_0^* A(x_0)) = -\varphi(A(x_0)^* x_0) = -\varphi(y^* x_0) = -\overline{\varphi(x_0^* y)}.$$

Recíprocamente, si $Re(\varphi(x_0^* y)) = 0$, consideremos $A = y \otimes x_0 - x_0 \otimes y - \varphi(x_0^* y) x_0 \otimes x_0$. Es claro que $A \in \mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$, y

$$A(x_0) = y - \varphi(x_0^* y) x_0 - \varphi(y^* x_0) x_0 = y.$$

En particular, $\operatorname{ran}(\delta_{x_0})$ es el núcleo de la funcional lineal real en $\mathcal{A}$. Por lo tanto, es un subespacio (real) complementado de $\mathcal{A}$. Así, por el Lema 1.1, se sigue la demostración del teorema. □

Observación 4.3. En la demostración anterior se obtiene que el espacio tangente en un elemento $x_0 \in \mathcal{S}_\varphi$ dado está caracterizado por

$$(T\mathcal{S}_\varphi)_{x_0} = \{y \in \mathcal{A} : Re\ \varphi(x_0^* y) = 0\}.$$

De hecho, supongamos que $x(t)$, $t \in (-r, r)$ es una curva suave en $\mathcal{S}_\varphi$ tal que $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = y$. Como $\varphi(x^*(t)x(t)) = 1$, entonces

$$0 = \varphi(\dot{x}^*(t)x(t)) + \varphi(x^*(t)\dot{x}(t)),$$

y en $t = 0$,

$$0 = \varphi(y^* x_0) + \varphi(x_0^* y) = 2Re\ \varphi(x_0^* y).$$

Recíprocamente, si $y \in \mathcal{A}$ satisface $Re\ \varphi(x_0^* y) = 0$, entonces existe $A \in \mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$ tal que $A(x_0) = y$. En forma matricial (respecto a $x_0 \otimes x_0$):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda i x_0 & -(x_0 \otimes z) \\ z \otimes x_0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $z = y - \varphi(x_0^* y) x_0$ y $\lambda i = \varphi(x_0^* y)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Así

$$x(t) = e^{tA}(x_0) \in \mathcal{S}_\varphi$$

satisface $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = A(x_0) = y$, i.e. $y \in (T\mathcal{S}_\varphi)_{x_0}$.

4.2.3. La parte autoadjunta de $\mathcal{S}_\varphi$

Por la observación 4.3, el espacio tangente de $\mathcal{S}_\varphi$ en 1 es $\{x \in \mathcal{A} : Re\varphi(x) = 0\}$.

Lema 4.3. *El espacio tangente de $\mathcal{S}_\varphi$ en 1 se descompone naturalmente como la suma directa ($\mathbb{R}$-lineal)*

$$(T\mathcal{S}_\varphi)_1 = \mathcal{A}_{ah} \oplus N(\varphi)_s,$$

donde $\mathcal{A}_{ah}$ denota el espacio de elementos antihermitaneos de $\mathcal{A}$ y $N(\varphi)_s = N(\varphi) \cap \mathcal{A}_s$ son los elementos autoadjuntos en el núcleo de φ.

Demostración. Es claro que si $x \in (T\mathcal{S}_\varphi)_1$, entonces $x^* \in (T\mathcal{S}_\varphi)_1$. Luego $(T\mathcal{S}_\varphi)_1 = ((T\mathcal{S}_\varphi)_1 \cap A_{ah}) \oplus ((T\mathcal{S}_\varphi)_1 \cap \mathcal{A}_s)$.

Si $y \in A_{ah}$, entonces $0 = \varphi(y^*) + \varphi(y) = 2Re(\varphi(y))$ y así $(T\mathcal{S}_\varphi)_1 \cap A_{ah} = A_{ah}$.

Por el otro lado, si $y \in (T\mathcal{S}_\varphi)_1 \cap \mathcal{A}_s$, entonces $\varphi(y) = \varphi(y^*) = \overline{\varphi(y)}$ y así $\varphi(y) = 0$. De hecho, $(T\mathcal{S}_\varphi)_1 \cap \mathcal{A}_s = N(\varphi)_s$. □

Consideremos la aplicación

$$\mu : (T\mathcal{S}_\varphi)_1 = \mathcal{A}_{ah} \oplus N(\varphi)_s \to \mathcal{S}_\varphi, \;\; \mu(a,b) = e^a(e^{b\otimes 1 - 1\otimes b}(1)).$$

Notar que $b \otimes 1 - 1 \otimes b \in \mathcal{F}_{as}(\mathcal{A})$ y, por lo tanto, $e^{b\otimes 1-1\otimes b} \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ y $x_b = e^{b\otimes 1-1\otimes b}(1) \in \mathcal{S}_\varphi$. Luego

$$\varphi(\mu^*(a,b)\mu(a,b)) = \varphi(x_b^* x_b) = 1.$$

De hecho, μ es C$^\infty$-diferenciable. Por cálculos elementales similares a los realizados en el Lema 4.1, si $b \neq 0$ resulta que

$$x_b = \cos(\varphi(b^2)^{1/2})1 + \frac{1}{\varphi(b^2)^{1/2}}\sin(\varphi(b^2)^{1/2})b = \cos(\varphi(b^2)^{1/2})1 + \operatorname{sinc}(\varphi(b^2)^{1/2})b\ ,$$

que está bien definido incluso si $b = 0$. Notar que $e^a \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ y que x_b es un elemento autoadjunto (en $\mathcal{S}_\varphi$).

Sean $a(t)$, $b(t)$ curvas suaves en $\mathcal{A}_{ah}$ y $N(\varphi)_s$ con $a(0) = b(0) = 0$, $\dot{a}(0) = z$ y $\dot{b}(0) = y$, donde $x = z + y$ es un elemento arbitrario de $(T\mathcal{S}_\varphi)_1$. Entonces (usando que la diferencial de la exponencial en el origen es la aplicación identidad)

$$d\mu_0(x) = \frac{d}{dt}\mu(a(t),b(t))|_{t=0} = \dot{a}(0) + (\dot{b}(0)\otimes 1 - 1\otimes \dot{b}(0))(1) = z + y = x$$

pues $(\dot{b}(0)\otimes 1)(1) = \varphi(y)1 = 0$.

Por lo tanto, usando el teorema de la función inversa, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.4. *Existen bolas $B_{r_{as}}$ y B_{r_s} de radios r_{as} y r_s alrededor del origen en $\mathcal{A}_{ah}$ y $N(\varphi)_s$ respectivamente, y un conjunto abierto $\mathcal{V}$ en $\mathcal{S}_\varphi$ que contiene al 1, tal que*

$$\mu : B_{r_{as}} \oplus B_{r_s} \to \mathcal{V}$$

es un C^∞ difeomorfismo. En particular, todo elemento x en $\mathcal{V}$ se factoriza

$$x = ux_b$$

con u unitario y con x_b un elemento autoadjunto en $\mathcal{S}_\varphi$. La factorización es única si se verifica que u y x_b pertenecen a la exponencial de $B_{r_{as}}$ y B_{r_s}.

Observación 4.4. Sea $x \in \mathcal{S}_\varphi$. Entonces $|x| \in \mathcal{S}_\varphi$. De hecho,

$$\varphi(|x|^*|x|) = \varphi(|x|^2) = \varphi(x^*x) = 1.$$

Sin embargo, si $x = v|x|$ es la descomposición polar de x (suponiendo que la descomposición existe en $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ se encuentra en $\mathcal{A}$, i.e. $v \in \mathcal{A}$), entonces $v \in \mathcal{S}_\varphi$ si y sólo si v es una isometría: como $\|v\| = 1$ (y φ es fiel), $\varphi(v^*v) = 1$ es equivalente a $v^*v = 1$. Esto significa que $N(x)$ es trivial en $\mathcal{L}$. Por ejemplo, si φ es invertible, entonces $v \in \mathcal{A}$ y además $v \in \mathcal{S}_\varphi$. La descomposición polar difiere de la factorización local anterior: x_b no necesariamente debe ser un elemento positivo.

Es claro que el grupo unitario $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ es una subvariedad de $\mathcal{S}_\varphi$. Lo mismo ocurre con la parte autoadjunta $\mathcal{S}_{\varphi,s}$ de $\mathcal{S}_\varphi$,

$$\mathcal{S}_{\varphi,s} = \{x \in \mathcal{A}_s : \varphi(x^2) = 1\} = \mathcal{S}_\varphi \cap \mathcal{A}_s.$$

Proposición 4.5. *$\mathcal{S}_{\varphi,s}$ es una subvariedad de $\mathcal{A}$ y, por lo tanto, es subvariedad de $\mathcal{S}_\varphi$.*

Demostración. Consideremos la aplicación C^∞ diferenciable

$$q : \mathcal{A}_s \to \mathbb{R}_{>0}, \ \ q(a) = \varphi(a^2).$$

Es claro que es una retracción: $s : \mathbb{R}_{>0} \to \mathcal{A}_s$, $s(t) = t^{1/2} \cdot 1$ es una sección suave para q. En particular, q es una sumersión. Luego

$$\mathcal{S}_{\varphi,s} = q^{-1}(\{1\})$$

es una subvariedad de $\mathcal{A}_s$. □

Examinemos las propiedades de la restricción μ_s de la aplicación μ anterior,

$$\mu_s : N(\varphi)_s \to \mathcal{S}_{\varphi,s} \quad , \quad \mu_s(a) = e^{a\otimes 1 - 1\otimes a}(1) = \cos(\varphi(a^2)^{1/2}) \cdot 1 + \frac{\sin(\varphi(a^2)^{1/2})}{\varphi(a^2)^{1/2}} \cdot a \,.$$

Sea $x \in \mathcal{S}_{\varphi,s}$ y $a \in N(\varphi)$ tales que $\mu(a) = x$. Como $\varphi(\mu(a)) = \cos(\varphi(a^2)^{1/2}) = \varphi(x) \in [-1,1]$, entonces $\varphi(a^2)^{1/2} = \cos^{-1}(\varphi(x)) + 2n\pi$ o $-\cos^{-1}(\varphi(x)) + 2n\pi$. Por algunos cálculos elementales,

$$\mu_s(a) = \varphi(x) \cdot 1 + \frac{\sin(\varphi(a^2)^{1/2})}{\varphi(a^2)^{1/2}} \cdot a = x$$

$$\frac{\sin(\varphi(a^2)^{1/2})}{\varphi(a^2)^{1/2}} \cdot a = x - \varphi(x).$$

Esto implica que si $|\varphi(x)| \neq 1$, entonces

$$\mu_s^{-1}(x) = \left\{ a \in N(\varphi) : a = (x - \varphi(x)) \frac{\cos^{-1}(\varphi(x)) + 2n\pi}{(1 - \varphi(x)^2)^{1/2}}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Como $|\varphi(x)| = 1$ implica $x = 1$ o $x = -1$, se tiene que

$$\mu_s^{-1}(1) = \left\{ a \in N(\varphi) : \varphi(a^2)^{1/2} = 2n\pi \right\}$$
$$\mu_s^{-1}(-1) = \left\{ a \in N(\varphi) : \varphi(a^2)^{1/2} = (2n+1)\pi \right\}.$$

Estas son las fibras de la aplicación μ_s en cada $x \in \mathcal{S}_{\varphi,s}$.

Proposición 4.6. *La aplicación μ_s es sobreyectiva y tiene inversa a derecha suave definida sobre $\mathcal{S}_{\varphi,s} \setminus \{1,-1\}$. Mas áun, esta aplicación define un espacio recubridor.*

Demostración. La inversa a derecha está definida por

$$\theta(x) = \frac{\cos^{-1}(\varphi(x))}{(1 - \varphi(x)^2)^{1/2}}.(x - \varphi(x)).$$

Notar que como $\varphi(x^2) = 1$, $|\varphi(x)| \leq 1$. Además $\varphi(x)^2 = 1$ sólo si $x = 1, -1$: en la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$1 = |\varphi(x)| \leq \varphi(x^2)^{1/2} \varphi(1)^{1/2} = 1$$

se obtiene una igualdad, y así $x = \lambda 1$, con $\lambda^2 = 1$. Además θ esá bien definida y es suave en $\mathcal{S}_{\varphi,s} \setminus \{1,-1\}$. El hecho de que $\mu(\theta(x)) = x$ es otro cálculo elemental.

Para probar que μ_s es sobreyectiva, será suficiente encontrar elementos autoadjuntos a_1, a_2 con $\varphi(a_i) = 0$ tales que $\mu(a_1) = 1$ y $\mu(a_2) = -1$. Sea $a_1 = 0$. Tomemos $b^* = b$ tal que $b \neq \lambda 1$ y $\varphi(b) \neq 0$. Sea $b' = b - \varphi(b) \cdot 1$ y por ende $\varphi(b') = 0$. Supongamos que $\varphi(b'^2) \neq 0$. Entonces $a_2 = \frac{\pi}{\varphi(b'^2)^{1/2}} b'$ verifica $\mu(a_2) = -1$.

Probemos finalmente que $\mu_s : N(\varphi)_s \to \mathcal{S}_{\varphi,s}$ es un espacio recubridor. Tenemos que mostrar que para todo punto en $\mathcal{S}_{\varphi,s}$ hay un entorno abierto $\mathcal{V}$ tal que $\mu^{-1}(\mathcal{V}) = \bigcup U_\alpha$ donde U_α son subconjuntos abiertos disjuntos de $N(\varphi)_s$ y $\mu|_{U_\alpha}$ es un homeomorfismo de U_α sobre V. Es claro que esto se verifica en $x \neq 1$ o $x \neq -1$. Supongamos entonces que $a(t), t \in (-r, r)$ es una curva suave en $N(\varphi)_s$ con $a(0) = 0$ y $\dot{a}(0) = v$, donde $v \in N(\varphi)_s$. Entonces

$$D\mu_s(v) = \dot{\mu_s}(a(t))|_{t=0} = (\dot{a}(0) \otimes 1 - 1 \otimes \dot{a}(0))(1) = v.$$

Usando el teorema de la función inversa, existen una bola B_r de radio r alrededor del origen en $N(\varphi)$ y un conjunto abierto $\mathcal{V}$ en $\mathcal{S}_{\varphi,s}$, que contiene al 1, tal $\mu_s : B_r \to \mathcal{V}$ es un C^∞-difeomorfismo. Notar que este resultado es un caso particular de la Proposición 4.4.

Análogamente, si $a(t), t \in (-r, r)$ es una curva suave en $N(\varphi)_s$ con $a(0) = a_2$ y $\dot{a}(0) = v$, donde $v \in T(N(\varphi)_s)_{a_2}$ y a_2 verifica $\mu(a_2) = -1$. Por cálculos elementales similares a los realizados en el Lema 4.1, tenemos (en términos de $1 \otimes 1$)

$$e^{a_2 \otimes 1 - 1 \otimes a_2} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(a_2^2)^{1/2}) & -(1 \otimes a_2)\mathrm{sinc}(\varphi(a_2^2)^{1/2}) \\ -(a_2 \otimes 1)\mathrm{sinc}(\varphi(a_2^2)^{1/2}) & \cos(\varphi(a_2^2)^{1/2}) \end{pmatrix} = -Id_{T(N(\varphi)_s)_{a_2}}$$

y entonces

$$D\mu_s(v) = \dot{\mu_s}(a(t))|_{t=0} = -(\dot{a}(0) \otimes 1 - 1 \otimes \dot{a}(0))(1) = -v.$$

Luego, usando el teorema de la función inversa, existe una bola B_r de radio r alrededor de a_2 en $N(\varphi)_s$ y un conjunto abierto $\mathcal{V}'$ en $\mathcal{S}_{\varphi,s}$ que contiene al -1 tales que $\mu_s : B_{r'} \to \mathcal{V}'$ es un C^∞-difeomorfismo. En ambos casos, existe una bola V en $\mathcal{S}_{\varphi,s}$ tal que

$$B_r = \mu_s^{-1}(\mathcal{V}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ a \in N(\varphi) : \varphi(a^2)^{1/2} = \cos^{-1}(\varphi(x)) + 2n\pi, x \in \mathcal{V} \right\}.$$

$\square$

Capítulo 5

El espacio proyectivo de una C*álgebra con un estado fiel.

Sean $\mathcal{A}$ una C*-álgebra unital con un estado $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ fiel que verifica $\varphi(1) = 1$. Si la esfera de $\mathcal{A}$ asociada al estado φ es:

$$\mathcal{S}_\varphi = \Big\{ x \in \mathcal{A} : \varphi(x^* x) = 1 \Big\},$$

se define el espacio proyectivo de $\mathcal{A}$ como:

$$\mathbb{P}_\varphi = \mathcal{S}_\varphi / \mathbb{T} = \mathcal{S}_\varphi / \sim,$$

donde $x \sim x'$ si $x' = zx$ para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. A continuación analizamos la estructura $\mathbb{P}_\varphi$ como espacio homogéneo de este grupo $U_\varphi(\mathcal{A})$, definiendo una métrica compatible con la estructura y determinando algunas curvas minimales para dicha métrica.

5.1. Estructura homogénea y diferenciable de $\mathbb{P}_\varphi$

Tengamos en cuenta la aplicación sobre $\mathcal{A}$ dada por

$$\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{F}(\mathcal{A}); \qquad \Psi(x) := x \otimes x.$$

Esta aplicación restringida a la esfera $\mathcal{S}_\varphi$ genera una biyección entre $\mathbb{P}_\varphi$ y $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \varphi)$. Vamos a considerar $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \varphi)$ con la $\| \cdot \|_a$-topología y a $\mathbb{P}_\varphi$ con la topología inducida por el cociente de su definición.

Lema 5.1. *La biyección*

$$\mathbb{P}_\varphi \longleftrightarrow \mathcal{P}_1(\mathcal{A},\varphi)\ ,\ \ [x] \to x \otimes x\ ,\ \ (x \in \mathbb{S}_\varphi)$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Primero notemos que un elemento $x \in \mathcal{A}$ define una proyección $x \otimes x$ en $\mathcal{A}$ si y solo si $\varphi(x^*x) = 1$. Por lo tanto, es claro que la aplicación es una biyección. Además es continua: si $[x_n] \to [x]$ en $\mathbb{P}_\varphi$, entonces existe $z_n \in \mathbb{T}$ tal que $z_n x_n \to x$ en $\mathcal{A}$. Luego $x_n \otimes x_n = z_n x_n \otimes z_n x_n \to x \otimes x$ en $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. Suponiendo ahora que $x_n, x \in \mathbb{P}_\varphi$ satisface $x_n \otimes x_n \to x \otimes x$ en $\mathcal{B}_{\mathbf{a}}(\mathcal{A})$. Entonces

$$x_n \otimes x_n(x) = \varphi(x_n^* x)x_n \to x \otimes x(x) = x,$$

y

$$\langle x_n \otimes x_n(x), x\rangle_\varphi = |\varphi(x_n^* x)|^2 \to \langle x \otimes x(x), x\rangle_\varphi = |\varphi(x^* x)|^2 = 1,$$

i.e. $|\varphi(x_n^* x)| \to 1$. Entonces poniendo $z_n = \frac{\varphi(x_n^* x)}{|\varphi(x_n^* x)|} \in \mathbb{T}$, se obtiene que $z_n x_n \to x$ en $\mathcal{A}$. □

Varias de las cuestiones sobre la estructura homogénea y diferenciable del espacio proyectivo son consecuencias de las propiedades ya demostradas para $\mathcal{S}_\varphi$ en el capítulo anterior.

En particular, si $x \in \mathcal{S}_\varphi$, y $G \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$, entonces

$$Gx \in \mathcal{S}_\varphi \ \text{ y por lo tanto } \ [Gx] \in \mathbb{P}_\varphi.$$

Esto implica que existe una acción del grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ sobre $\mathbb{P}_\varphi$.

Teorema 5.1. *El espacio proyectivo $\mathbb{P}_\varphi$ es una variedad diferenciable y un espacio homogéneo del grupo $U_\varphi(\mathcal{A})$, con la topología cociente. Más aún, $\mathbb{P}_\varphi = \exp(\mathcal{F}(\mathcal{A}))$ y es conexo.*

Demostración. Por el Teorema 4.1, la acción del grupo $\mathcal{U}_\varphi$ es transitiva sobre $\mathbb{P}_\varphi$. Más aún, siguiendo el desarrollo de la demostración de este teorema, obtuvimos que:

- Si $y \in \mathcal{S}_\varphi$, $\varphi(y) = 0$
$$y = -ie^{i\frac{\pi}{2}(1\otimes y + y \otimes 1)}(1).$$

- Si $y \in \mathcal{S}_\varphi$, $\varphi(y) \neq 0$ e $y \notin \mathbb{C}\cdot 1$, existe $z \in \mathcal{A}$ tal que
$$y = e^{i\theta} e^{i(z\otimes 1 + 1 \otimes z)}(1)$$

Por lo tanto, considerando clases en $\mathbb{P}_\varphi$, obtenemos un representante en este cociente perteneciente al conjunto $exp(\mathcal{F}(\mathcal{A}))$.

El hecho que $\mathbb{P}_\varphi$ sea una variedad diferenciable con la topología cociente, y que la aplicación $\pi_{[x_0]}$ sea una sumersión para $[x_0] \in \mathbb{P}_\varphi$ son consecuencias del Teorema 4.2. Notar que aquí no afirmamos que $\mathbb{P}_\varphi$ sea subvariedad (ya que no está contenida en un espacio de Banach). De hecho, en la topología cociente, ya vimos que $\mathbb{P}_\varphi$ se identifica (por homeomorfismo) con $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \varphi)$ (Lema 5.1) la cual coincide con la $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$-órbita de $x_0 \otimes x_0$ para algún elemento $x_0 \in \mathcal{S}_\varphi$. $\square$

Por el Lema 5.1 anterior, podemos identificar $\mathbb{P}_\varphi \simeq \mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \varphi)$. Luego el espacio tangente de $\mathbb{P}_\varphi$ en $[x]$ resulta

$$(T\mathbb{P}_\varphi)_{[x]} \simeq \left\{ a \otimes x + x \otimes a : Re\varphi(x^* a) = 0 \right\} = (T\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \varphi))_{x\otimes x}.$$

Vamos a caracterizar el espacio tangente de $\mathbb{P}_\varphi$ como un espacio cociente.

Lema 5.2. *Sea $[x_0] \in \mathbb{P}_\varphi$. Entonces $(T\mathbb{P}_\varphi)_{[x_0]}$ es naturalmente isomorfo a*

$$\{a \in \mathcal{A} : \varphi(x_0^* a) \in i\mathbb{R}\}/i\mathbb{R} \cdot x_0, \tag{5.1}$$

i.e. dos elementos a, b definen el mismo vector tangente a $[x_0]$ si $\varphi(a^* x_0), \varphi(b^* x_0) \in i\mathbb{R}$ y $a - b = irx_0$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Decimos que es naturalmente isomorfo cuando: dado x_0' algún otro representante para $[x_0]$, i.e. $x_0' = wx_0$ con $w \in \mathbb{T}$, la aplicación

$$a' \mapsto \bar{w}a'$$

envía el conjunto $\left\{ a' \in \mathcal{A} : \varphi(x_0'^* a') \in i\mathbb{R} \right\}$ en $\left\{ a \in \mathcal{A} : \varphi(x_0^* a) \in i\mathbb{R} \right\}$ y $i\mathbb{R} \cdot x_0'$ en $i\mathbb{R} \cdot x_0$, y por lo tanto define un isomorfismo entre los cocientes.

Demostración. Supongamos que $x(t)$, $t \in (-r, r)$ es una curva suave en $\mathcal{S}_\varphi$ que verifica $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = a$. Por la observación 4.3, sabemos que $Re\ \varphi(x_0^* a) = 0$. Sea $y(t) = w(t)x(t)$ otra curva suave en $\mathcal{S}_\varphi$ equivalente a $x(t)$, i.e $w(t) \in \mathbb{T}$ (podemos suponer $w(0) = 1$ sin pérdida de generalidad). Denotemos $b = \dot{y}(0)$. Entonces diferenciando en $t = 0$ se obtiene

$$b = \dot{w}(0)x_0 + a.$$

Notemos que $\dot{w}(0) \in i\mathbb{R}$, por lo cual $b - a \in i\mathbb{R} \cdot x_0$. Por ende, el espacio tangente está contenido en el cociente (5.1).

Veamos ahora que cualquier elemento en este cociente define un vector velocidad de alguna curva. Tomemos $a \in \mathcal{A}$ con $\varphi(x_0^* a) \in i\mathbb{R}$. Note que $a - \varphi(x_0 a^*) \in (T\mathcal{S}_\varphi)_{x_0}$ y $[a - \varphi(x_0 a^*)]$ es la misma clase de a en el cociente (5.2). Además, usando nuevamente la observación 4.3, si $A = a \otimes x_0 - x_0 \otimes a$ en $\mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$ entonces $A(x_0) = a - \varphi(x_0 a^*)$ y

$$e^{t(a\otimes x_0 - x_0 \otimes a)} \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$$

es una curva suave. Luego $\gamma(t) = [e^{t(a\otimes x_0 - x_0\otimes a)}(x_0)]$ es una curva suave en $\mathbb{P}_\varphi$ con

$$\dot{\gamma}(0) = [A(x_0)] = [a].$$

□

5.2. Métrica pre-Hilbert-Riemann en $\mathbb{P}_\varphi$

Como $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\varphi) \subset \mathcal{P}_1(\mathcal{L})$, este conjunto tiene una estructura métrica de Hilbert-Riemann inducida por la norma de Frobenius (que analizaremos en la próxima sección). Hemos señalado anteriormente que $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\varphi)$ no es una subvariedad de $\mathcal{P}_1(\mathcal{L})$, ya que la estructura diferenciable de ambos espacios es diferente (sólo la inclusión es densa en la topología de $\mathcal{B}(\mathcal{L})$). Sin embargo esta inclusión tiene la propiedad de ser localmente *geodesicamente* completa: si dos elementos en $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\varphi)$ están suficientemente cerca, la geodésica minimal de $\mathcal{P}_1(\mathcal{L})$ que los une se encuentra contenida en $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\varphi)$. Esta propiedad podría sugerir considerar en $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\varphi)$ la métrica inducida por esta inclusión. Vamos a presentar una métrica intrínseca en $\mathbb{P}_\varphi$, y luego mostraremos que es (un múltiplo) de la métrica inducida por $\mathcal{P}_1(\mathcal{L})$.

Def 1. La métrica en el espacio tangente de $\mathbb{P}_\varphi$ se define de la siguiente manera: sea $[x_0] \in \mathbb{P}_\varphi$ y $[a]$ un vector tangente a $[x_0]$, entonces

$$|[a]|_{[x_0]} = \text{ínf}\left\{\|a - ir\cdot x_0\|_\varphi : r \in \mathbb{R}\right\},$$

i.e. la norma cociente en el espacio (5.2) inducida por la norma $\|\cdot\|_\varphi$ en $\mathcal{A}$.

Es claro que esta métrica está bien definida (no depende del representante de la clase $[x_0]$).

Notemos que, como $\mathcal{A}$ no es completa con la norma $\|\cdot\|_\varphi$, la norma cociente no es completa en $(T\mathbb{P}_\varphi)_{[x_0]}$. Además existe una proyección ortogonal

$$P : \left\{a \in \mathcal{A} : \varphi(x_0^* a) \in i\mathbb{R}\right\} \to i\mathbb{R}\cdot x_0$$

dada por el estado φ: $P(a) = \varphi(x_0^* a)x_0$. Por lo tanto, el ínfimo en la norma cociente es de hecho un mínimo, dado por

$$|[a]|_{[x_0]} = \|a - \varphi(x_0^* a)x_0\|_\varphi = \left\{\varphi(a^*a) - |\varphi(x_0^* a)|^2\right\}^{1/2}.$$

Esta cantidad es positiva pues: $\varphi(a^*a) = |\varphi(x_0^* a)|^2$ genera una igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\varphi(x_0^* a)| \leq \varphi(a^*a)^{1/2}\varphi(x_0^* x_0) = \varphi(a^*a)^{1/2},$$

y por lo tanto $a = \lambda x_0$. Luego $\varphi(x_0^* a) = \lambda \in i\mathbb{R}$ y entonces $[a] = 0$.

De estas observaciones, resulta que esta métrica coincide con (un múltiplo de) la norma de Hilbert-Schmidt en $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \varphi)$:

Teorema 5.2. *Sea $[x] \in \mathbb{P}_\varphi$ y $[a] \in (T\mathbb{P}_\varphi)_{[x]}$. Entonces*

$$|[a]|_{[x]} = \frac{1}{\sqrt{2}} Tr((a \otimes x + x \otimes a)^2)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|a \otimes x + x \otimes a\|_{HS},$$

donde Tr denota la traza usual en $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ y $\|\cdot\|_{HS}$ denota la norma de Hilbert-Schmidt.

Demostración. Con cálculos elementales, es fácil demostrar

$$(a \otimes x + x \otimes a)^2 = (\varphi(a^*x)x) \otimes a + (\varphi(a^*a)x) \otimes x + (\varphi(x^*x)a) \otimes a + (\varphi(x^*a)a) \otimes x.$$

Luego (usando que $Tr(b \otimes c) = \varphi(c^*b)$)

$$Tr((a \otimes x + x \otimes a)^2) = 2\varphi(a^*a) + \varphi(a^*x)^2 + \varphi(x^*a)^2.$$

Note que $\varphi(a^*x) = \overline{\varphi(x^*a)} \in i\mathbb{R}$, y así

$$\varphi(a^*x)^2 = \varphi(x^*a)^2 = -|\varphi(x^*a)|^2.$$

Por lo tanto

$$Tr((a \otimes x + x \otimes a)^2)^{1/2} = \sqrt{2}\{\varphi(a^*a) - |\varphi(x^*a)|^2\}^{1/2} = \sqrt{2}|[a]|_{[x]}.$$

□

5.3. Minimalidad de curvas geodésicas en $\mathbb{P}_\varphi$

En esta sección vamos a analizar la minimalidad de la longitud de las curvas $\delta(t) = [\alpha(t)]$, $\alpha(t) \in \mathcal{S}_\varphi$, que une dos puntos fijos.

Notemos que si $P_0 \in \mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ y $Z \in \mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$, entonces la geodésica $\delta(t) = e^{tZ}P_0e^{-tZ}$ está contenida en $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$. Decimos que estas curvas son geodésicas en $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$, aunque no hemos definido explícitamente una conexión lineal en $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$.

Def 2. Una curva $\delta(t) = e^{tZ}(x \otimes x)e^{-tZ}$, con $x \in \mathcal{S}_\varphi$ y $Z \in \mathcal{B}_{as}(\mathcal{A})$ se denomina **geodésica de** $\mathbb{P}_\varphi$.

Notemos además que si $\delta(t) = e^{tZ}P_0e^{-tZ}$ es una geodésica de $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ y $U \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$, entonces $U\delta(t)U^\sharp$ es también una geodésica, con exponente $UZU^\sharp$. Si $n = 1$, esto significa que $[Ue^{tZ}(x)]$ es una geodésica de $\mathbb{P}_\varphi$.

Def 3. La longitud de una curva $\delta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, está dada por:

$$long(\delta) = \int_0^1 |[\dot{\delta}(t)]|_{\delta(t)} dt$$

donde$|[v]|_{[\delta(t)]}$ denota la norma cociente definida en 1.

Diremos que una curva es **minimal** si su longitud es mínima entre todas las curvas que unen los mismos puntos.

La **distancia geodésica** entre dos elementos $[x]$ e $[y]$ está dada por

$$d([x],[y]) = \text{mín}\Big\{long(\delta) : \delta(t) \text{ es geodésica de } \mathbb{P}_\varphi \text{ y verifica } \delta(0) = [x], \delta(1) = [y]\Big\}$$

Observemos primero que los elementos P en $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ pueden extenderse a proyecciones ortogonales $\bar{P}$ en $\mathcal{L}$. Recíprocamente, toda proyección ortogonal E en $\mathcal{L}$ que deja invariante a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$, i.e. $E(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$, induce un elemento $E|_\mathcal{A}$ en $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$. Además, $\mathcal{P}_1(\mathcal{L}) \subset Gr(\mathcal{L})$ la variedad Grassmanniana del espacio de Hilbert $\mathcal{L}$, la cual coincide con el conjunto de proyecciones ortogonales de $\mathcal{L}$. Aplicaremos en esta situación varios de los resultados recopilados en el Teorema 2.1 de la sección 2.1.1.

En primer lugar, notemos que la métrica Riemanniana introducida en $\mathbb{P}_\varphi$ coincide con ($\frac{1}{\sqrt{2}}$-veces) la métrica de $\mathcal{P}_1(\mathcal{L})$.

Teorema 5.3. *Sea $[x] \in \mathbb{P}_\varphi$ y $[v] \in T\mathbb{P}_{[x]}$. La única geodésica $\delta : [0,1] \to \mathbb{P}_\varphi$ que satisface*

$$\delta(0) = [x] \qquad y \qquad \dot{\delta}(0) = [v]$$

está dada por

$$\delta(t) = [e^{t\tilde{v}}(x_0)].$$

La curva geodésica es minimal para $|[v]|_{[x]} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Demostración. Sea $P_0 = x \otimes x \in \mathcal{P}_1(\mathcal{L})$. Como $[v] \in T\mathbb{P}_{[x]}$, si tomamos $v \in T\mathcal{S}_\varphi$ (representante para $[v]$) entonces $V = v \otimes x + x \otimes v \in T\mathcal{P}_1(\mathcal{L})$. En forma matricial (respecto a P_0)

$$V = \begin{pmatrix} 0 & b^* \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

donde $b = v \otimes x - \varphi(x^* v) x \otimes x$. Consideremos entonces

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & -b^* \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que $Z^* = -Z$ y $Z(x) = v - \varphi(x^* y)x$. Entonces, por 2.1, la curva

$$\delta(t) = e^{tZ} x \otimes x e^{-tZ} = (e^{tZ}x) \otimes (e^{tZ}x), \tag{5.2}$$

es una geodésica de $\mathcal{P}_1(\mathcal{L})$ y satisface $\delta(0) = x \otimes x$ y$\dot{\delta}(0) = V$. Más aún, si $\|Z\| \leq \frac{\pi}{2}$, la curva es minimal entre todas las curvas contenidas en $Gr(\mathcal{L})$.

Notemos que $Z \in F(\mathcal{A})$ y $Z^\sharp = Z^* = -Z$. Luego (por 4.1) $e^{tZ} \in \mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ y, por lo tanto,

$$(e^{tZ}x) \otimes (e^{tZ}x) \subset \mathcal{P}_1(\mathcal{A}).$$

Entonces $\delta(t)$ es una geodésica de $\mathbb{P}_\varphi$. Como $\sqrt{2}|[v]|_{[x]} = \|V\| \leq \frac{\pi}{2}$, esta geodésica es una curva minimal para todo $t \in [-0, 1]$. ☐

Finalmente veamos como se caracterizan las curvas minimales en $\mathbb{P}_\varphi$ que unen dos puntos extremos dados.

Teorema 5.4. *Sea* $[x], [y] \in \mathbb{P}_\varphi$.

1. *Si* $\varphi(y^* x) \neq 0$, *entonces existe una única geodésica* $\delta(t) = [e^{it(z \otimes 1 + 1 \otimes z)}(1)]$ *en* $\mathbb{P}_\varphi$ *que une* $\delta(0) = [x]$ *y* $\delta(1) = [y]$, *la cual es minimal para todo* $t \in [0, 1]$. *El elemento* z *está dado por*

$$z = -ie^{-i\theta} \frac{\cos^{-1}(|\varphi(x^* y)|)}{(2 - 2|\varphi(x^* y)|^2)^{1/2}} (y - \varphi(x^* y)x).$$

La distancia geodésica entre $[x]$ e $[y]$ está dada por

$$d([x],[y]) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^{-1}(|\varphi(x^*y)|).$$

2. *Si $\varphi(x^*y) = 0$, entonces existen infinitas curvas geodésicas minimales en $\mathbb{P}_\varphi$ que unen $[x]$ con $[y]$. Estas son de la forma*

$$\delta(t) = [e^{it\frac{\pi}{2}(x\otimes y+y\otimes x)}(x)],$$

y tienen longitud $d([x],[y]) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Demostración. En primer lugar, la condición $\varphi(y^*x) \neq 0$ no depende de los representantes x e y considerados. Luego, como $\|x\|_\varphi = \|y\|_\varphi = 1$, esta condición implica que $|\varphi(y^*x)| < 1$. Supongamos que $x = 1$ (y entonces $0 < |\varphi(y)| < 1$). Gracias al Lema 4.2, el elemento z satisface

$$[e^{i(z\otimes 1+1\otimes z)}(1)] = [y],$$

o equivalentemente

$$e^{i(z\otimes 1+1\otimes z)}(1) \otimes e^{-i(z\otimes 1+1\otimes z)}(1) = y \otimes y.$$

Tenemos entonces que la curva

$$\delta(t) = e^{it(z\otimes 1+1\otimes z)}(1) \otimes e^{-it(z\otimes 1+1\otimes z)}(1)$$

es una geodésica de $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$, i.e. el exponente $z \otimes 1 + 1 \otimes z$ es co-diagonal con respecto a la proyección $1 \otimes 1$. Si $x = 1$, el elemento z anterior estará dado por

$$z = -ie^{-i\theta} \frac{\cos^{-1}(|\varphi(y)|)}{(1 - |\varphi(y)|^2)^{1/2}} \cdot (y - \varphi(y)) = \lambda(y - \varphi(y))$$

donde $\theta = arg(\varphi(y))$. Notemos que $\varphi(z) = 0$. Entonces

$$(z \otimes 1 + 1 \otimes z)1 \otimes 1 = z \otimes 1 \ \text{ y } 1 \otimes 1(z \otimes 1 + 1 \otimes z) = 1 \otimes z,$$

y así

$$z \otimes 1 + 1 \otimes z = (z \otimes 1 + 1 \otimes z)1 \otimes 1 + 1 \otimes 1(z \otimes 1 + 1 \otimes z),$$

lo cual implica que

$$1\otimes 1(z\otimes 1+1\otimes z)1\otimes 1=0=(1-1\otimes 1)(z\otimes 1+1\otimes z)(1-1\otimes 1).$$

En el caso general, para elementos arbitrarios $[x],[y]\in\mathbb{P}_\varphi$, como la acción del grupo $\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ es transitiva en $\mathbb{P}_\varphi$, existe $U\in\mathcal{U}_\varphi(\mathcal{A})$ tal que $x=U(1)$ e $y=U(y')$. Entonces

$$\varphi(y')=\varphi(y'1^*)\varphi(U(y)U(x)^*)=\varphi(yx^*)\neq 0.$$

El elemento z' dado en el exponente de la geodésica que une $[1]$ y$[y']$ es

$$z'=-ie^{-i\theta'}\frac{\cos^{-1}(|\varphi(y')|)}{(1-|\varphi(y')|^2)^{1/2}}\cdot(y'-\varphi(y'))$$

con $\theta'=arg(\varphi(y'))=arg(\varphi(x^*y))$. Notemos que $U(y'-\varphi(y')1)=y-\varphi(x^*y)x$. Luego

$$U(z')=-ie^{-i\theta}\frac{\cos^{-1}(|\varphi(x^*y)|)}{(2-2|\varphi(x^*y)|^2)^{1/2}}(y-\varphi(x^*y)x)=z.$$

Por lo tanto

$$[U(e^{it(z'\otimes 1+1\otimes z')}(1)]=[U(e^{it(z'\otimes 1+1\otimes z')}U^\sharp U(1)]=[e^{itU(z'\otimes 1+1\otimes z')U^\sharp}x]$$

$$=[e^{it(U(z')\otimes U(1)+U(1)\otimes U(z'))}(x)]=[e^{it(z\otimes x+x\otimes z)}(x)]$$

es una geodésica que une a x con y.

Mostremos que δ es minimal. Será suficiente considerar el caso $x=1$. Para probar que δ es minimal en el intervalo $[0,1]$, de acuerdo al Teorema 2.1, es necesario probar que la norma $\|z\otimes 1+1\otimes z\|$ del exponente es menor o igual que $\pi/2$. Como $z\otimes 1+1\otimes z$ es $1\otimes 1$ co-diagonal, entonces

$$\|z\otimes 1+1\otimes z\|=\|z\otimes 1\|=\|z\|_\varphi=\cos^{-1}(|\varphi(y)|)\frac{\|y-\varphi(y)\|_\varphi}{(1-|\varphi(y)|^2)^{1/2}}=\cos^{-1}(|\varphi(y)|)<\pi/2.$$

Ahora calculemos la distancia geodésica $d([x],[y])$, i.e. la longitud de la geodésica δ. Esta longitud viene dada por la norma

$$\sqrt{2}|[z]|_{[x]}=\|z-\varphi(z)\|_\varphi=\|z\|_\varphi=\cos^{-1}(|\varphi(x^*y)|)<\pi/2.$$

Para ver que esta curva es única, consideremos las proyecciones $x \otimes x$ e $y \otimes y$. Denotemos por $\mathcal{L}_x$ y $\mathcal{L}_y$ el subespacio unidimensional que resulta imagen de las extensiones de estas proyecciones ortogonales en $\mathcal{L}$. Luego,

$$\mathcal{L}_x \cap \mathcal{L}_y^{\perp} = \{0\} \ \text{ y } \ \mathcal{L}_x^{\perp} \cap \mathcal{L}_y = \{0\}$$

porque $< x, y >= \varphi(y^* x) \neq 0$. Se sigue entonces que existe una única geodésica en $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ que une $x \otimes x$ con $y \otimes y$. La geodésica δ de $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$ puede extenderse a una geodésica de $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ (al igual que cualquier geodésica de $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}$). Luego, esta curva es única.

Supongamos ahora que $\varphi(x^* y) = 0$. Otra vez podremos suponer que $x = 1$. Por el Teorema 4.1, tenemos que $e^{i\frac{\pi}{2}(y \otimes y + y \otimes 1)}(1) = iy$ y entonces

$$[e^{i\frac{\pi}{2}(y \otimes 1 + 1 \otimes y)}(1)] = [y].$$

Como antes, el hecho de que $\varphi(y) = 0$ implica que $y \otimes 1 + 1 \otimes y$ es $1 \otimes 1$ co-diagonal. Luego δ es una geodésica. Su longitud es

$$\frac{\pi}{2} \|y\|_{\varphi} = \pi/2.$$

Sean $\mathcal{L}_x$ y $\mathcal{L}_y$ las rectas generadas por x y por y en $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}_x \perp \mathcal{L}_y$,

$$\mathcal{L}_x \cap \mathcal{L}_y^{\perp} = \mathcal{L}_x \ \text{ y } \ \mathcal{L}_x^{\perp} \cap \mathcal{L}_y = \mathcal{L}_y.$$

Por lo tanto, existen infinitas curvas geodésicas que unen $[x]$ con $[y]$. $\square$

Bibliografía

[1] Andruchow, E.: *The Grassmann manifold of a Hilbert space.* Proceedings of the XIIth ”Dr.Antonio A. R. Monteiro” Congress,(2014) 41-55, Univ. Nac. Sur Dep. Mat. Inst. Mat., Bahía Blanca. 35.

[2] Andruchow, E.: *Operators which are the difference of two projections.* J. Math. Anal. Appl. 420 (2014), no. 2, 1634–1653.

[3] Andruchow, E. ; Antunez, A.: *Quotient $p-$Schatten metrics on spheres.* Rev. Un. Mat. Argentina 58 (2017), no. 1, 21-36.

[4] Andruchow, E.; Corach, G.; Mbekta, M.: *On the geometry of generalized inverse.* Math.Nacht 278 (2005) no.7-8, 776-770.

[5] Andruchow, E.; Corach, G.; Stojanoff, D.: *Geometry of the sphere of a Hilbert module.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (1999), Vol. 127, No. 02, pp. 295-315. Cambridge University Press.

[6] Andruchow, E.; Chiumento, E.; Larotonda, G.: *Homogeneous manifolds from noncommutative measure spaces*, J. Math. Anal. Appl. 365 (2010), no. 2, 541-558.

[7] Andruchow, E.; Larotonda, G.: *Hopf-Rinow theorem in the Sato Grassmannian.* J. Funct. Anal. 255 (2008), no. 7, 1692–1712.

[8] Andruchow, E.; Larotonda, G.: *The rectificable distance in the unitary Fredholm group*, Polish Academy of Sciences. Institute of Mathematics; Studia Mathematica 196 (2010), no. 2; 151-178

[9] Andruchow, E.; Larotonda, G.; Recht, L.: *Finsler geometry and actions of the p-Schatten unitary groups.*, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 1, 319–344.

[10] Andruchow, E.; Larotonda, G.; Recht, L.; Varela, A.: *A characterization of minimal Hermitian matrices.* Linear Algebra Appl. 436 (2012), no. 7, 2366–2374.

[11] Andruchow, E.; Recht, L.: *Grassmannians of a finite algebra in the strong operator topology.* Internat. J. Math. 17 (2006), no. 4, 477–491.

[12] Andruchow, E.; Recht, L.: *Geometry of unitaries in a finite algebra: variation formulas and convexity.* Internat. J. Math. 19 (2008), no. 10, 1223–1246.

[13] Andruchow, E.; Recht, L.; Varela, A.: *Metric geodesics of isometries in a Hilbert space and the extension problem.* Proceedings of the American Mathematical Society 135(8) (2007), 2527-2537.

[14] Andruchow, E.; Varela, A.: *Metric of the sphere of C^*-álgebra* Centr. Eur. J. Math. 5(4) (2007), 639-653.

[15] Antunez, A.: *Sphere and projective space of a C*-algebra with a faithful state.* Demonstratio Mathematica 52(1) (2019), pp. 410-427.

[16] Atkin, C. J.: *The Hopf-Rinow theorem is false in infinite dimensions*, Bull. London Math. Soc. 7 (1975), no. 3, 261-266

[17] Corach, G.; Porta, H.; Recht, L.: *The geometry of spaces of projections in C^*-algebras.* Adv. Math. 101 (1993), no. 1, 59–77.

[18] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis. 2. (German) [Fundamentals of modern analysis. 2]* Translated from the third French edition by Ludwig Boll and Horst Antelmann. Second edition. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1987), 420 pp.

[19] Durán, C. E.; Mata-Lorenzo, L. E.; Recht, L.: *Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a C^*-algebra. I. Minimal curves.* Adv. Math. 184 (2004), no. 2, 342–366.

[20] Durán, C. E.; Mata-Lorenzo, L. E.; Recht, L. *Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a C^*-algebra. II. Geodesics joining fixed endpoints.* Integral Equations Operator Theory 53 (2005), no. 1, 33–50.

[21] Gohberg, I. C.; Zambickii, M. K.: *On the theory of linear operators in spaces with two norms.* (Russian) Ukrain. Mat. Ž. 18 (1966), no. 1, 11–23.

[22] Grossman, N.: *Hilbert manifolds without epiconjugates points*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 1365-1371.

[23] Halmos, P. R.: *Two spaces.* Trans. Amer. Math. Soc 144 (1969), 381–389.

[24] Krein, M. G. *Compact linear operators on functional spaces with two norms.* Translated from the Ukranian. Dedicated to the memory of Mark Grigorievich Krein (1907–1989). Integral Equations Operator Theory 30 (1998), no. 2, 140–162.

[25] Lang, S.: *Differential and Riemannian manifolds*. Third edition. Graduate Texts in Mathematics 160 (1995). Springer-Verlag, New York.

[26] Larotonda, G.: *Estructura geométrica para las variedades de Banach.*. Colección Ciencia, innovación y desarrollo. Ediciones de la Univ. Nac. de Gral. Sarmiento (2010). Buenos Aires.

[27] Lance, E.: *Hilbert C^*-modules-a toolkit for operator algebrists.* London Math. Soc. Lecture Notes Series 210 (1995), Cambridge University Press, Cambridge.

[28] Lax, P. D.: *Symmetrizable linear transformations.* Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 633–647.

[29] Li, C.: *An Estimate for Lipschitz Constants of Metric Projections.* J. Math. Anal. Appl. 231 (1999), no. 1, 133-141.

[30] McAlpin, J: *Infinite dimensional manifolds and Morse theory.* Thesis (Ph.D.)–Columbia University (1965) ProQuest LLC, Ann Arbor, MI.

[31] Mata-Lorenzo, L. E.; Recht, L.: *Infinite-dimensional homogeneous reductive spaces.* Acta Cient. Venezolana 43 (1992), no. 2, 76–90.

[32] Porta, H.; Recht, L.: *Minimality of geodesics in Grassmann manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), no. 3, 464–466.

[33] Porta, H.; Recht, L. *Spaces of projections in a Banach algebra.* Acta Cient. Venezolana 38 (1988), no. 4, 408–426.

[34] Raeburn, I.: *The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space*, J. Funct. Anal. 25 (1977), no. 4, 366–390.