

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria
(CONEAU). *Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

Soluciones a una Ecuación No Local Discreta y No Lineal de Schrödinger

Trabajo de tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología de la Universidad
Nacional de General Sarmiento

Autor: **Roberto Ignacio Ben**

Director de tesis: Dr. Juan Pablo Borgna

Buenos Aires, 10 de diciembre de 2019.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). *Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

FORMULARIO "E" TESIS DE POSGRADO

Niveles de acceso al documento autorizados por el autor.

El autor de la tesis puede elegir entre las siguientes posibilidades para autorizar a la UNGS a difundir el contenido de la tesis: a

- a) Liberar el contenido de la tesis para acceso público.*
 - b) Liberar el contenido de la tesis solamente a la comunidad universitaria de la UNGS.*
 - c) Retener el contenido de la tesis por motivos de patentes, publicación y/o derechos de autor por un lapso de cinco años.*
- a. Título completo del trabajo de Tesis: Soluciones a una Ecuación No Local Discreta y No Lineal de Schrödinger.
 - b. Presentado por (Apellido/s y Nombres completos del autor): Ben, Roberto Ignacio.
 - c. E-mail del autor: benroberto@gmail.com.
 - d. Estudiante del Posgrado (consignar el nombre completo del Posgrado): Doctorado en Ciencia y Tecnología.
 - e. Institución o Instituciones que dictaron el Posgrado (consignar los nombres desarrollados y completos): Universidad Nacional de General Sarmiento.
 - f. Para recibir el título de (consignar completo):
 - a) Grado académico que se obtiene: Doctor.*
 - b) Nombre del grado académico: Doctor en Ciencia y Tecnología.*
 - g. Fecha de la defensa: / / .
 - h. Director de la Tesis (Apellidos y Nombres): Borgna, Juan Pablo.
 - i. Tutor de la Tesis (Apellidos y Nombres): Dratman, Ezequiel.

- j. Colaboradores con el trabajo de Tesis: Cisneros Ake, Luís; Minzoni, Antonmaría y Panayotaros, Panayotis.
- k. Descripción física del trabajo de Tesis (cantidad total de páginas, imágenes, planos, videos, archivos digitales, etc.):
- 96 páginas;
 - 13 figuras.
- l. Alcance geográfico y/o temporal de la Tesis: El alcance geográfico de la tesis es internacional, por las publicaciones realizadas, las ponencias en congresos y conferencias y la colaboración con grupos de investigación de otros países. El trabajo de investigación fue realizado entre agosto de 2014 y noviembre de 2020.
- m. Temas tratados en la Tesis (palabras claves): *Ecuación Discreta No Lineal de Schrödinger; No localidad de tipo Hartree; Sistemas Hamiltonianos; Breathers; Solitones discretos; Estados Fundamentales; Teorema de la Función Implícita; Métodos de Newton; Minimizadores de la energía; Análisis Espectral; Estabilidad; Aproximaciones Variacionales.*
- n. Resumen en español (hasta 1000 caracteres):
- Las ecuaciones discretas no lineales de tipo Schrödinger (DNLS) permiten modelar una amplia gama de fenómenos físicos con múltiples aplicaciones científico-tecnológicas, y surgen también de la discretización de ecuaciones de Schrödinger continuas.
- En este trabajo de tesis se estudia una ecuación discreta de Schrödinger con no linealidad no local. Se demuestra la existencia de distintos tipos de soluciones periódicas tipo breathers, que son continuaciones de soluciones explícitas halladas en el límite anticontinuo. Se presentan ejemplos numéricos y se estudian algunas propiedades que las distinguen de las soluciones a la DNLS cúbica. Se prueba la existencia de minimizadores de la energía que poseen propiedades de simetría y monotonidad. Se analiza el espectro del operador linealizado en torno a las soluciones halladas y se presentan resultados de estabilidad. Aplicando métodos variacionales se encuentran aproximaciones analíticas a las soluciones de un pico.
- ñ. Resumen en inglés (hasta 1000 caracteres):

The discrete nonlinear Schrödinger (DNLS) equations constitute a model to describe a wide range of physical phenomena with multiple scientific and technological applications, and in addition they arise from a discretization for the nonlinear Schrödinger equation.

In this thesis I study a discrete Schrödinger equation with a nonlocal nonlinearity. My work proves the existence of discrete breathers solutions as continuations of analytical solutions in the anti-continuum limit. I show numerical examples and study some properties that depart from what is seen in the cubic DNLS breathers. In addition, I show the existence of energy minimizing breathers with symmetry and monotonicity properties. Results on stability of the solutions and the spectrum of linearizations around studied breathers are analyzed. And I construct analytical approximations to one-peak breathers applying variational methods.

- o. Aprobado por (Apellidos y Nombres del Jurado):

Firma y aclaración de la firma del Presidente del Jurado:

Firma del autor de la tesis:

*Soluciones a una Ecuación No Local Discreta
y No Lineal de Schrödinger*

Publicaciones:

- R.I. BEN, L. CISNEROS AKE, A.A. MINZONI, P. PANAYOTAROS, Localized solutions for a nonlocal discrete NLS equation, *Phys. Lett. A* 379, 1705-1714 (2015).
- R.I. BEN, J.P. BORGNA, P. PANAYOTAROS, Properties of some breather solutions of a nonlocal discrete NLS equation, *Communications in Mathematical Sciences*, Vol. 15, N. 8, 2143–2175, (2017).

Aportes Originales:

(Especificar cuales son los aportes originales o innovadores conseguidos en la realización de esta tesis. Indicar donde se encuentran. Máximo una carilla)

En esta tesis se prueba la existencia de soluciones tipo breathers a una ecuación discreta no lineal de Schrödinger (DNLS), con no localidad de tipo Hartree. Se estudian ciertas propiedades de éstas que no han sido observadas en la DNLS cúbica (local). Se prueba la existencia de minimizadores de la energía que poseen propiedades de simetría y monotonicidad. Se analiza el espectro del operador asociado a la DNLS no local en torno a los breathers hallados y se estudia la estabilidad de estas soluciones.

En el Capítulo 3 se prueba la existencia de distintos tipos de soluciones tipo breathers a la DNLS no local bajo diferentes regímenes: casos autoenfocante (self-focusing) y desenfocante (defocusing), con interacción lineal entre nodos vecinos suficientemente pequeña y considerando distintos tipos de interacción no local. Se estudian propiedades de los breathers de un pico, de muchos picos consecutivos y con infinitos picos consecutivos formando un frente constante. Hallamos una propiedad de saltos en los picos de la interfaz entre los nodos donde la solución se anula y donde toma valores no nulos, que no está presente en las soluciones a la DNLS cúbica y es un fenómeno claramente asociado a la interacción no local.

En la última sección del Capítulo 3 se prueba la existencia de breathers que minimizan la energía en el caso enfocante. Estas soluciones poseen propiedades de simetría y decrecimiento respecto de su pico central que se corresponden con las que hemos hallado para los breathers de un pico cuando la interacción lineal es pequeña.

En el Capítulo 4 se presentan resultados sobre el espectro del operador linealizado en torno a los breathers tratados en el capítulo anterior, y resultados de estabilidad de dichas soluciones. Observamos la aparición de bandas de mayor densidad asociadas al espectro esencial del operador y un espectro puntual que se mantiene invariante por la cantidad de nodos. Otra propiedad que distingue a los breathers con finitos picos de los correspondientes a la DNLS cúbica local, es que en el caso no local la cantidad de modos internos varía en relación a la magnitud de la interacción no local, siendo siempre superior a $2 \times k - 2$ que es la cantidad de modos internos de una solución de la DNLS cúbica local con k picos.

En el Capítulo 5 se construyen aproximaciones analíticas para los breathers de un pico en el caso enfocante. Para aproximar a las soluciones numéricas proponemos ansatz con dos y tres parámetros. Aplicando métodos variacionales y resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange resultantes conseguimos expresiones analíticas que aproximan a los breathers tanto globalmente como en su decaimiento.

Quiero agradecer a Juan Pablo Borgna, mi director, por abrirme las puertas y guiarme en los apasionantes caminos de la investigación matemática, por impulsarme a buscar nuevos horizontes y por brindarse en todo momento.

A Luis Cisneros, a Antonmaría Minzoni (q.e.p.d.), y especialmente a Panayotis Panayotaros por su generosidad para compartir el conocimiento.

A Nino, que me ayudó a encontrar fuerza cuando más la necesité. A Eda, Vero, Gustavo, Nardo, Marcela, Julia, Tico, Mariano, Constanza, ... la lista es muy larga y espero me perdonen por los puntos suspensivos todos y todas mis compañeros y compañeras de la UNGS, de Exactas, del CBC y de la UNSAM que de una u otra forma me estuvieron acompañando en este proceso de formación.

A mis alumnos y alumnas, por seguir enseñándome lo que creía haber aprendido.

A César Hazaki y Maximiliano Nazar, dos grandes profesionales que me ayudaron a conjugar los verbos ser y estar en primera persona.

A mis amigos Poca, Fer D., Pablo, Richard, Javi y Fer R. por estar en las buenas, y en las malas mucho más.

A Armando y Mabel, por darme una hermosa compañera de vida y por su apoyo. A Anu y Vane, por su afecto y por tantas gratas conversaciones.

A mis queridos viejos, Herminia y Eduardo, por todo el esfuerzo, entrega y amor. A Pablo y a Die por ser además de hermanos, y cada uno a su manera, mis amigos, protectores y guías. A Leti, por su cariño, y a Manu y Lola, por llenarme de ternura el corazón.

A LAURA, por aprender juntos día a día a construir el amor y por su inconmesurable apoyo y paciencia. A FRANCISCA y FÉLIX por ser mi fuente inagotable de alegría y motivación.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Derivación del modelo	4
2. Preliminares	7
2.1. Fomulación Variacional	7
2.1.1. Lagrangiano	7
2.1.2. Estructura hamiltoniana	11
2.1.3. Conservación de la potencia	12
2.2. Estados estacionarios y Breathers	13
2.3. Breathers, solitones discretos y nematicones	14
2.4. Teorema de la Funcion Implicita	14
2.5. Método de Newton	15
2.6. Métodos variacionales	17
3. Breathers	21
3.1. Soluciones tipo breather a la ecuacion DNLS no local	22
3.2. Breathers con finitos picos	23
3.2.1. Caso Local	24
3.2.2. Caso no local	26
3.3. Breathers tipo Shelf	39
3.3.1. Caso local	40
3.3.2. Caso no local	41
3.4. Breathers que minimizan el hamiltoniano	48
4. Estabilidad de las soluciones y Análisis Espectral	59
4.1. Análisis espectral y estabilidad de breathers	60
4.2. Breathers de un pico	64

ÍNDICE GENERAL

4.2.1. No localidad $\kappa = 0,25$	64
4.2.2. No localidad $\kappa = 0,5$	67
4.2.3. Resultados generales	67
4.3. Breathers con finitos picos	70
4.4. Breathers con infinitos picos	71
5. Aproximaciones variacionales de breathers de un pico	77
5.1. Aproximaciones con dos parámetros	78
5.1.1. Decaimiento asintótico	79
5.1.2. Aproximación Global	81
5.2. Expresiones analíticas de un pico	83
A. Desigualdad de Young Discreta	87

Índice de figuras

3.1. Solución (positiva) definida en (3.20) para $S_{\pm} = \{116, \dots, 146\}$, $\gamma = -1$, $\kappa = 0,8$, $c = 31$	28
3.2. Los puntos grises representan la solución continuada a partir de la semilla de la Fig 3.1 (puntos unidos con línea roja en este gráfico). $N = 261$ (se muestran sólo los nodos 99 a 161), $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,05$ (caso enfocante). La potencia (norma ℓ^2) se mantiene constante: $c = 31$. La frecuencia computada es $\omega = 1,894097453080216$	32
3.3. Los puntos grises representan la solución continuada a partir de la semilla de la Fig 3.1 (puntos unidos con línea roja en este gráfico). $N = 261$ (se muestran sólo los nodos 99 a 161), $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = 0,05$ (caso desenfocante). La potencia (norma ℓ^2) se mantiene constante: $c = 31$, y la frecuencia computada es $\omega = 1,905888815933016$	33
3.4. En ambos gráficos se muestra en azul las soluciones continuadas a partir de una misma semilla de un sólo pico central $A_{33} = \sqrt{c}$ (en rojo en los gráficos). $N = 65$ (se muestran sólo los nodos 20 a 46), $\gamma = -1$, $\delta = -0,5$ (caso enfocante). La potencia (norma ℓ^2) se mantiene constante: $c = 32$. En el gráfico de la izquierda $\kappa = 0,25$ y en el de la derecha $\kappa = 0,5$ y las frecuencias calculadas son $\omega = 6,979128408684841$ y $\omega = 14,674997205380388$ respectivamente.	34
3.5. Breathers con infinitos picos no nulos consecutivos.	44
4.1. Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ (evaluado en el breather correspondiente a $\kappa = 0,25$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,5$), dispersión de las frecuencias asociadas al espectro continuo de JH , y autovectores correspondientes a los modos internos de menor y mayor frecuencia	65
4.2. Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather correspondiente a $\kappa = 0,5$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,5$; dispersión de las frecuencias asociadas al espectro continuo de JH ; y autovectores correspondientes a los modos internos de menor y mayor frecuencia.	68

ÍNDICE DE FIGURAS

4.3. Espectros de $J\tilde{\mathcal{H}}$ en los breathers presentados en las Figuras 3.3 y 3.2.	71
4.4. Modos internos de $J\tilde{\mathcal{H}}$ en el breather de la Figura 3.3. $N = 261$ (se muestran solo los nodos 100-161), $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = 0,05$ (defocalización), $\omega = 1,905888815933016$	72
4.5. Espectros de $J\tilde{\mathcal{H}}$ en los breathers presentados en las Figuras 3.3 y 3.2.	73
4.6. Modos internos de $J\tilde{\mathcal{H}}$ en el breather de la Figura 3.5b. $N = 261$ (en (a) se muestran solo los nodos 100-161), $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = 0,05$ (desenfocante), $\omega = 1,905888815933016$	74
5.1. Soluciones tipo breather de la Ec. (5.4) A_n vs. nodo (arriba) y $\log(A_n)$ vs. nodo (abajo) para $\kappa = 0,5$, $\delta = -0,5$, $\gamma = -1$, $\omega = 14,6749972$ (izquierda) y $\kappa = 0,25$, $\delta = -0,5$, $\gamma = -1$, $w = 6,97912841$ (derecha). Los triángulos negros corresponden a la solución exacta numérica, los círculos rojos a la aproximación con decaimiento asintótico y los asteriscos azules corresponden a la aproximación con parámetros variacionales para A y α	82
5.2. Soluciones tipo breathers de la Ec. (5.4) A_n vs. nodo (arriba) y $\log(A_n)$ vs. nodo (abajo) para $\kappa = 0,5$, $\delta = -0,5$, $\gamma = -1$, $\omega = 14,6749972$ (izquierda) y $\kappa = 0,25$, $\delta = -0,5$, $\gamma = -1$, $w = 6,97912841$ (derecha). Los triángulos negros corresponden a las soluciones exactas numéricas, los asteriscos magenta corresponden a la expresión analítica de pico “flotante”.	84

Capítulo 1

Introducción

La ecuación discreta no lineal de Schrödinger (DNLS) es un modelo de propagación de la luz en medios ópticos con estructura inhomogénea en las direcciones perpendiculares al eje óptico que ha sido ampliamente estudiado. También aparece en la literatura como discretización de la ecuación (continua) no lineal de Schrödinger (NLS) que modela la dinámica de átomos en condensados de Bose-Einstein [K09, PS11, PKF05].

Una forma de expresar la DNLS es la siguiente

$$i\dot{u}_n + \delta\Delta u_n + |u_n|^{2p} u_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, t > 0. \quad (1.1)$$

donde \dot{u}_n es la derivada de la variable de evolución, $\dot{u}_n = \frac{\partial u}{\partial t}$ cuando la variable de evolución es el tiempo, como en la dinámica de condensados de Bose-Einstein; y $\dot{u}_n = \frac{\partial u}{\partial z}$ en propagación de la luz, donde z representa el eje óptico. $\Delta u_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$ es el denominado *laplaciano discreto*, δ es la constante de acoplamiento entre nodos vecinos y $p \in \mathbb{N}$ la potencia de la no linealidad. Cuando el parámetro δ surge de la discretización del laplaciano en una ecuación de derivadas parciales, su valor es esperable que sea muy grande, por lo que cuando δ tiende a cero se denomina a esta ecuación como el límite anti-continuo. Cuando $p = 1$ la ecuación (1.1) es la denominada DNLS cúbica. Se han estudiado también variantes de ésta, con combinaciones de no linealidades, como la DNLS cúbica-quíntica [CTCM06].

En 2005 Fratolocchi y Assanto propusieron un modelo discreto para la propagación de la luz en un medio no local conformado por un sustrato de cristales líquidos nemáticos, que da lugar a la siguiente ecuación DNLS con no linealidad cúbica de tipo Hartree

$$i\dot{u}_n + \delta\Delta u_n + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 u_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, t > 0. \quad (1.2)$$

con $\kappa > 0$, $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$. $u_n(z)$ es una cantidad relativa a la intensidad del campo eléctrico en el nodo n , asociada a la propagación de un haz de luz láser sobre el eje óptico z . La magnitud de

la interacción no local entre nodos está asociado al parámetro κ y será tanto mayor cuanto más pequeño sea éste. Cuando κ tiende a infinito la Ecuación (1.2) se convierte en la DNLS cúbica (1.1), cuya no linealidad es local. El parámetro δ representa la magnitud de la interacción lineal entre nodos vecinos. Cuando δ es grande se puede interpretar como una discretización de la NLS continua, de ahí que llamaremos *límite anti-continuo* al caso en que δ es cercano a cero. Cuando δ y γ tienen el mismo signo se lo denomina caso *auto-enfocante* (self-focusing) y cuando sus signos son opuestos es el caso *desenfocante* (defocusing).

En esta tesis se encuentran soluciones explícitas a la DNLS no local bajo determinados regímenes, se prueba la existencia de soluciones como continuaciones de las soluciones halladas explícitamente, se presentan soluciones numéricas y se analizan algunas propiedades que no han sido observadas en la DNLS cúbica. Se prueba la existencia de minimizadores de la energía con propiedades de simetría y decrecimiento que se corresponden con las soluciones de un pico y se hallan aproximaciones analíticas para este tipo de soluciones. Se analizan los espectros de la linealización del operador asociado a esta ecuación en torno a las soluciones estudiadas y se realiza un análisis de estabilidad de dichas soluciones.

En este capítulo esbozaremos el camino a seguir para una derivación del modelo dado por la Ecuación (1.2) partiendo de las ecuaciones de Maxwell siguiendo las referencias principales en el tema [BPRS18, VP19, FA05].

En el capítulo 2 se presentan los conceptos y enfoques metodológicos que se utilizarán a lo largo de la tesis. Allí se deduce la formulación variacional del lagrangiano y el hamiltoniano asociados a la Ecuación (1.2). Se prueba que el hamiltoniano y la norma ℓ_2 de una solución son cantidades conservadas. Se define la noción de estados estacionarios y soluciones tipo breathers. Para probar la existencia de este tipo de soluciones en el Capítulo 3 se utiliza el Teorema de la Función Implícita que es presentado aquí en su formulación general para funcionales definidas sobre espacios de Banach. No es posible hallar soluciones exactas en forma explícita, en términos de funciones elementales, por lo que haremos una breve referencia a los métodos de Newton y de Newton-Krylov que se aplican en los códigos que hemos implementado para hallar soluciones numéricas. En el caso de los breathers de un pico hemos hallado aproximaciones analíticas a las soluciones numéricas exactas aplicando un enfoque variacional que será presentado esquemáticamente en este capítulo.

En el capítulo 3 se prueba la existencia de soluciones tipo breathers a la Ecuación (1.2). Los breathers discretos son soluciones periódicas en el tiempo (o eje óptico), espacialmente localizadas, y cuyo perfil conserva su forma [MT89]. En primer lugar hallamos soluciones explícitas con una cantidad finita de picos (consecutivos) en el límite anti-continuo y local. Mediante argumen-

tos basados en el teorema de la función implícita demostramos, para δ suficientemente pequeño y κ suficientemente grande, la existencia de breathers que son continuaciones de las soluciones halladas de forma explícita y dependen unívocamente de la constante de acoplamiento con los nodos vecinos y de la interacción no local. A este régimen lo denominamos *caso local* por su aproximación a la DNLS cúbica. Posteriormente analizamos el *caso no local*, esto es, con una interacción no local κ arbitraria. Para las soluciones con muchos picos consecutivos hallamos una propiedad de saltos en los picos de la interfaz entre los nodos donde la solución se anula y donde la solución toma valores no nulos. Esta propiedad no está presente en las soluciones a la DNLS cúbica y es un fenómeno claramente asociado a la interacción no local.

Otro tipo de soluciones que presentamos en este capítulo son los breathers con un frente constante que decaen a cero en un único sentido. Estas soluciones, que aquí hemos llamado breathers tipo *estante*¹, pueden pensarse como extensiones de las soluciones con finitos picos. Son acotadas pero no están en $\ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, por lo que los argumentos utilizados previamente, tanto para demostrar la existencia como para hallarlas numéricamente, no son extensibles de manera directa a este tipo de soluciones. Para acotar la convolución del operador asociada a la interacción no local hemos utilizado una versión discreta de la desigualdad de Young que no hemos encontrado en la literatura (damos una demostración en el Apéndice A). En la interfaz de estas soluciones encontramos un comportamiento similar al observado en la interfaz de los breathers con finitos picos.

En la última sección del Capítulo 3 se prueba la existencia de breathers que minimizan el hamiltoniano en el caso enfocante, cuando la constante de acoplamiento entre sitios vecinos es arbitraria. Estas soluciones son positivas (en caso de ser complejas son una rotación de una solución positiva) y tienen propiedades de simetría y decrecimiento respecto de su pico central que se corresponden con las halladas para los breathers de un pico para δ suficientemente pequeño.

En el Capítulo 4 se presentan resultados sobre el espectro del operador linealizado en torno a los breathers presentados en el capítulo anterior, y resultados de estabilidad de dichas soluciones. Mediante una discretización finita del problema estudiamos computacionalmente el espectro y la estabilidad de las soluciones numéricas. Explicamos algunas propiedades de simetría de los modos internos en el caso de los breathers con finitos picos, que se pierden en los breathers con infinitos picos. Estudiamos la estabilidad de los breathers de un pico en el caso enfocante para distintos tipos de interacción no local analizando el espectro del operador en torno a estas soluciones. Observamos la aparición de bandas de mayor densidad asociadas al espectro esencial

¹No hay una nomenclatura extendida para este tipo de soluciones, en inglés las hemos denominado *shelf-type breathers* [BBP17]. Otras denominaciones que se encuentran en la literatura para breathers discretos y solitones continuos con esta forma son *kink* y *front-like* [CMR99]

del operador y una cantidad de autovalores (espectro puntual) que se mantiene invariante por la cantidad de nodos. La estabilidad de las soluciones en el caso general (soluciones con más de un pico) está asociada a la relación entre los signos de las interacciones no locales lineal y no lineal: estable en el caso desenfocante e inestable en el caso enfocante.

Otro resultado que distingue a estos breathers con finitos picos de los correspondientes a la DNLS cúbica local, es que en el caso no local la cantidad de modos internos varía en relación a la magnitud de la interacción no local, siendo siempre superior a $2 \times k - 2$ que es la cantidad de modos internos de una solución de la DNLS cúbica local con k picos [PKF05].

En el Capítulo 5 construimos aproximaciones analíticas para los breathers de un pico en el caso enfocante. Para aproximar a las soluciones numéricas proponemos expresiones (ansatz) con dos y tres parámetros. Uno de los parámetros está asociado al decaimiento de la solución y el otro a la amplitud, en el caso de las aproximaciones con dos parámetros, y el tercero agrega un grado de libertad en el pico central del breather. El enfoque variacional consiste en resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange que surgen de restringir el problema de optimización al lagrangiano efectivo calculado para cada ansatz. Aplicando este método obtenemos los parámetros asociados a la amplitud y al pico central del breather. El parámetro asociado al decaimiento de la solución lo hemos aproximado por dos caminos: con las ecuaciones de Euler-Lagrange y planteando el problema lineal asociado a la DNLS. El primer camino provee una mejor aproximación global, con la desventaja de aumentar la complejidad del sistema de ecuaciones a resolver; mientras que el segundo camino provee una muy buena aproximación al decaimiento exacto de la solución. Por lo que, aplicando este segundo camino al ansatz de tres parámetros, conseguimos una expresión que aproxima a la solución tanto globalmente como en su decaimiento.

1.1. Derivación del modelo

En esta sección presentamos esquemáticamente la derivación de la ecuación no local discreta no lineal de Schrödinger con la que trabajaremos en los sucesivos capítulos, siguiendo esencialmente el camino delineado en [VP19] y [BPRS18].

Si un conjunto de moléculas de cristales líquidos que ocupan cierto dominio tridimensional es sometido a la acción de campos eléctricos que las orientan macroscópicamente en determinada dirección, este fenómeno es usualmente descrito por un sistema de ecuaciones en el que las ecuaciones de Oseen-Frank, que describen la energía elástica de las moléculas de cristales líquidos, están acopladas con las ecuaciones de Maxwell, que describen los campos eléctricos. La complejidad del sistema resultante de ecuaciones acopladas depende principalmente de la geometría de las moléculas de cristales líquidos, de la geometría del dominio en el que éstas se

encuentran y de los campos eléctricos que actúan sobre el conjunto.

En el apéndice de [BPRS18], se considera el caso de un material homogéneo de moléculas de cristales líquidos nemáticos atrapadas entre dos placas planas y paralelas sobre las que se aplica un campo eléctrico externo, perpendicular a las placas, que es periódico en una dirección y constante en la otra. Este tipo de moléculas presentan una geometría elipsoidal con simetría alrededor de un eje principal sobre el que son más alargadas. Y el dispositivo diseñado presenta una geometría que permite simplificar el problema a uno bidimensional (plano $y - z$). Sobre este dispositivo actúa también un campo eléctrico asociado a los haces de luz que son aplicados en la dirección en que el campo eléctrico externo es constante, llamada eje óptico (eje z), y se estudia su propagación a lo largo de dicho eje desde una posición inicial ($z = 0$). Bajo estas condiciones, el sistema acoplado de ecuaciones de Maxwell-Oseen-Frank puede traducirse en el siguiente sistema acoplado de ecuaciones de tipo Schrödinger no lineales, ver [BPRS18]:

$$\begin{cases} \partial_z u &= \frac{1}{2}i\Delta u + \frac{1}{2}i\gamma (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0) u, \\ \nu\Delta\theta &= -\frac{1}{2}\gamma (E_0^2 + |u|^2) \sin 2\theta. \end{cases} \quad (1.3)$$

Aquí γ y ν son constantes positivas y $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. La variable z corresponde al eje óptico y tiene un tratamiento análogo al que usualmente se le da al tiempo en las ecuaciones no lineales de Schrödinger, por ejemplo en la dinámica de condensados de Bose-Einstein (BEC). Físicamente u representa la amplitud del campo eléctrico de un haz de luz de un láser que se propaga a lo largo del eje óptico z ; en tanto que θ representa macroscópicamente el promedio local del campo de ángulos que describen la orientación de las moléculas de cristales líquidos nemáticos. Se asume que este ángulo θ es paralelo al plano $x - z$. E_0 y θ_0 son funciones que se suponen conocidas, E_0 representa el campo eléctrico externo aplicado sobre el sustrato de moléculas de cristales líquidos para producir sobre éstas la orientación del ángulo θ_0 (cuando aún no se ha aplicado ningún láser).

Llamando $\theta = \theta_0 + \psi$, la segunda ecuación de (1.3) permite establecer la dependencia de θ_0 respecto de E_0 (ya que bajo estas condiciones se tiene $\theta = \theta_0$ y $u = 0$, más las condiciones de borde necesarias, ver [BPRS18]). Asumiendo que ψ es pequeño, tomando aproximaciones de Taylor de primer orden en la variable ψ , considerando que las placas metálicas (paralelas al plano $y - z$) entre las cuales se alojan las moléculas están separadas por una distancia que es relativamente muy pequeña en comparación con la extensión del material en las otras direcciones y realizando ciertos reescalamientos y simplificaciones del problema (ver detalles en [VP19]) se llega al siguiente sistema simplificado:

$$\begin{cases} \partial_z u = \frac{1}{2}i\partial_y u + \frac{1}{2}i\beta\psi u, \\ -\partial_y^2 \psi + V(y)\psi + g^2\psi = \alpha |u|^2. \end{cases} \quad (1.4)$$

donde g^2 , α y β son constantes positivas y $V(y)$ representa un potencial asociado a las funciones θ_0 y E_0 . Resolver el sistema (1.4) implica hallar ψ y u conociendo $\psi(0) = \psi_0$ y $u(0) = u_0$. Aquí ψ representa el ángulo que se desplazan las moléculas de cristales líquidos desde el ángulo θ_0 prefijado por el campo eléctrico externo E_0 .

Podría intentarse simplificar el sistema de ecuaciones (1.4) buscando la inversa del operador $-\partial_y + V + g^2$ para reducirlo a una única ecuación en la variable u , sin embargo este camino no resulta conveniente para computar la solución, como se muestra en [VP19]. Vélez-Pérez y Panayotaros presentan en ese mismo artículo un enfoque centrado en el uso de las funciones de Wannier, que discretiza de forma general el problema (1.4). La ecuación que trabajamos en esta tesis es un caso particular de dicha discretización.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos y enfoques metodológicos que se utilizarán a lo largo de la tesis. Comenzamos deduciendo la formulación variacional del lagrangiano y el hamiltoniano asociados a la ecuación (1.2). Se prueba que el hamiltoniano y la norma ℓ_2 de una solución son cantidades conservadas. Se define la noción de estados estacionarios y soluciones tipo breathers. Para probar la existencia de este tipo de soluciones en el Capítulo 3 se utiliza el Teorema de la Función Implícita que es presentado aquí en su formulación general para funcionales definidas sobre espacios de Banach. No es posible hallar soluciones exactas en forma explícita, en términos de funciones elementales, por lo que haremos una breve referencia a los métodos de Newton y de Newton-Krylov que se aplican en los códigos que hemos implementado para hallar soluciones numéricas. En el caso de los breathers de un pico hemos hallado aproximaciones analíticas a las soluciones numéricas exactas aplicando un enfoque variacional que será presentado esquemáticamente en este capítulo.

2.1. Fomulación Variacional

En esta sección se presenta la estructura lagrangiana y hamiltoniana de la ecuación discreta no-linal de Schrödinger que es el objeto de estudio de esta tesis. Probaremos también algunas leyes de conservación. Seguiremos la línea argumentativa de Sulem-Sulem ([SS99]), adaptada al caso discreto.

2.1.1. Lagrangiano

A continuación obtendremos el lagrangiano para la ecuación no local de Schrödinger con no linealidad cúbica de tipo Hartree

$$i\dot{u}_n + \delta\Delta u_n + c \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 u_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, t > 0. \quad (2.1)$$

donde $c = 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2}$, $\kappa > 0$, $\delta > 0$ y $\Delta u_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$.

Fijado κ definimos $\rho \in l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ dado por sus componentes $\rho_n = e^{-\kappa n} \forall n \in \mathbb{Z}$, y definimos la función $f_\kappa : l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \rightarrow l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $f_\kappa(x) = \rho * x$, esto es, $(\rho * x)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} x_m \forall n \in \mathbb{Z}$. De esta forma, la ecuación (2.1) puede reescribirse como

$$i\dot{u}_n + \delta\Delta u_n + c(f_\kappa(|u|^2))_n u_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, t > 0.$$

Asociada a la ecuación (2.1) se puede definir una función densidad del lagrangiano \mathcal{L} que puede pensarse en términos de las partes reales e imaginarias de u o, equivalentemente, en términos de u y u^* pensadas como variables independientes:

$$\mathcal{L}_n = \frac{i}{2} (\dot{u}_n u_n^* - u_n \dot{u}_n^*) - \delta |\nabla u_n|^2 + \frac{c}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 |u_n|^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

donde $\nabla u_n = u_{n+1} - u_n$.

De igual manera llamamos lagrangiano al funcional

$$L(u, u^*) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_n, \quad (2.2)$$

y definimos la acción S

$$S(u, u^*) = \int_{t_0}^{t_1} L(u, u^*) dt.$$

Buscamos la condición que debe satisfacer una tal u para realizar el mínimo de S . Se puede chequear que la acción S es Frêchet diferenciable y, por lo tanto, Gâteaux diferenciable. Por lo que alcanzará con ver que su derivada de Gateaux se anula (ver e.g. [C01]). Verifiquemos esto formalmente:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} S(u + \varepsilon\varphi) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}_n(u + \varepsilon\varphi) \, dt \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{i}{2} [(\dot{u}_n + \varepsilon\dot{\varphi}_n)(u_n^* + \varepsilon\varphi_n^*) - (u_n + \varepsilon\varphi_n)(\dot{u}_n^* + \varepsilon\dot{\varphi}_n^*)] - \right. \\
 &\quad \left. - \delta [(\nabla u_n + \varepsilon\nabla\varphi_n)(\nabla u_n^* + \varepsilon\nabla\varphi_n^*)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{c}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} (u_m + \varepsilon\varphi_m)(u_m^* + \varepsilon\varphi_m^*)(u_n + \varepsilon\varphi_n)(u_n^* + \varepsilon\varphi_n^*) \right] dt \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i}{2} [(\dot{\varphi}_n u_n^* + \dot{u}_n \varphi_n^*) - (\varphi_n \dot{u}_n^* + u_n \dot{\varphi}_n^*)] - \delta [\nabla\varphi_n \nabla u_n^* + \nabla u_n \nabla\varphi_n^*] + \\
 &\quad + \frac{c}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} [(\varphi_m u_m^* + u_m \varphi_m^*) |u_n|^2 + |u_m|^2 (\varphi_n u_n^* + u_n \varphi_n^*)] dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{i}{2} [\dot{u}_n \varphi_n^* - \varphi_n \dot{u}_n^*] + \frac{i}{2} [\dot{\varphi}_n u_n^* - u_n \dot{\varphi}_n^*] \right. \\
 &\quad \left. - \delta [\nabla\varphi_n \nabla u_n^* + \nabla u_n \nabla\varphi_n^*] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{c}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} (\varphi_m u_m^* + u_m \varphi_m^*) |u_n|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{c}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 (\varphi_n u_n^* + u_n \varphi_n^*) \right] dt.
 \end{aligned}$$

Para simplificar el cálculo dividamos esta integral en tres partes

a) Usando que

$$\frac{i}{2} [\dot{u}_n \varphi_n^* - \varphi_n \dot{u}_n^*] = \frac{i}{2} [2i \operatorname{Im}(\dot{u}_n \varphi_n^*)] = -\operatorname{Im}(\dot{u}_n \varphi_n^*) = \operatorname{Re}(i \dot{u}_n \varphi_n^*)$$

de donde

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i}{2} [\dot{u}_n \varphi_n^* - \varphi_n \dot{u}_n^*] dt = \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} i \dot{u}_n \varphi_n^* dt \right)$$

Análogamente

$$\frac{i}{2} [\dot{\varphi}_n u_n^* - u_n \dot{\varphi}_n^*] = -\operatorname{Re}(i u_n \dot{\varphi}_n^*)$$

de donde, usando Fubini e integración por partes en t , tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i}{2} [\dot{\varphi}_n u_n^* - u_n \dot{\varphi}_n^*] dt &= -\operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} i u_n \dot{\varphi}_n^* dt \right) \\
&= -\operatorname{Re} \left(i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{t_0}^{t_1} u_n \dot{\varphi}_n^* dt \right) \\
&= -\operatorname{Re} \left(i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{t_0}^{t_1} -(\dot{u}_n \varphi_n^*) dt \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} i \dot{u}_n \varphi_n^* dt \right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en definitiva la integral de los primeros términos resulta

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i}{2} [\dot{u}_n \varphi_n^* - \varphi_n \dot{u}_n^*] + \frac{i}{2} [\dot{\varphi}_n u_n^* - u_n \dot{\varphi}_n^*] dt &= \\
2 \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} i \dot{u}_n \varphi_n^* dt \right) & \quad (2.3)
\end{aligned}$$

b) Usando que

$$\nabla \varphi_n \nabla u_n^* + \nabla u_n \nabla \varphi_n^* = 2 \operatorname{Re} (\nabla u_n \nabla \varphi_n^*)$$

entonces, usando partes

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\delta [\nabla \varphi_n \nabla u_n^* + \nabla u_n \nabla \varphi_n^*] dt &= \\
-2 \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta \nabla u_n \nabla \varphi_n^* dt \right) &= 2 \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta \Delta u_n \varphi_n^* dt \right) \quad (2.4)
\end{aligned}$$

c) Usando que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} (\varphi_m u_m^* + u_m \varphi_m^*) |u_n|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} 2 \operatorname{Re} (u_m \varphi_m^*) |u_n|^2$$

y análogamente que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 (\varphi_n u_n^* + u_n \varphi_n^*) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 2 \operatorname{Re} (u_n \varphi_n^*)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} \left[(\varphi_m u_m^* + u_m \varphi_m^*) |u_n|^2 + |u_m|^2 (\varphi_n u_n^* + u_n \varphi_n^*) \right] dt = \\
 & \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} \left[2 \operatorname{Re} (u_m \varphi_m^*) |u_n|^2 + |u_m|^2 2 \operatorname{Re} (u_n \varphi_n^*) \right] dt = \\
 & \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} (u_m \varphi_m^*) |u_n|^2 \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 (u_n \varphi_n^*) \right) \right] dt = \\
 & = 2 \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} c \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 u_n \varphi_n^* dt \right)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Volviendo a la cuenta variacional junto con los cálculos (2.3), (2.4) y (2.5), tenemos

$$\begin{aligned}
 0 & = 2 \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} i \dot{u}_n \varphi_n^* dt \right) + 2 \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta \Delta u_n \varphi_n^* dt \right) + \\
 & + 2 \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} c \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 u_n \varphi_n^* dt \right) \\
 & = 2 \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(i \dot{u}_n + \delta \Delta u_n + c \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 u_n \right) \varphi_n^* dt \right)
 \end{aligned}$$

Como esto vale para toda $\varphi \in Y$ resulta que la suma de los tres términos en el paréntesis interior a la sumatoria, debe anularse. Y así recuperamos que una solución que minimice la acción S debe cumplir la ecuación (2.1).

2.1.2. Estructura hamiltoniana

La estructura hamiltoniana usualmente se deduce de la estructura lagrangiana planteando una relación de dependencia entre las densidades que definen a los funcionales correspondientes. Así, la densidad hamiltoniana puede definirse formalmente como

$$\mathcal{H}_n = \frac{i}{2} (\dot{u}_n u_n^* - u_n \dot{u}_n^*) - \mathcal{L}_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

de donde resulta

$$\mathcal{H}_n = \delta |u_{n+1} - u_n|^2 - \frac{c}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 |u_n|^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

y así podemos definir al hamiltoniano $H = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$, esto es:

$$H = \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_{n+1} - u_n|^2 - \gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m|^2 e^{-\kappa|m-n|} |u_n|^2.$$

Se puede verificar además que de la estructura hamiltoniana

$$\dot{u}_n = -i \frac{\partial H}{\partial u_n^*}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

se deduce nuevamente la ecuación DNLS

$$\dot{u}_n = \delta i \Delta u_n + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} i \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t > 0.$$

Además, se puede verificar que la derivada del hamiltoniano respecto del tiempo se anula, i. e., $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, por lo que resulta una cantidad conservada.

2.1.3. Conservación de la potencia

Como es usual en este tipo de ecuaciones con estructura hamiltoniana, la norma ℓ^2 de toda solución al sistema de ecuaciones 2.1 es una cantidad conservada. En óptica no lineal a esta cantidad se la denomina potencia, mientras que en materia condensada se la denomina carga.

Es sencillo chequear que esta cantidad se mantiene constante en el tiempo observando que la derivada se anula.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_2^2 &= \frac{d}{dt} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n u_n^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\dot{u}_n u_n^* + u_n \dot{u}_n^*) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\dot{u}_n u_n^* + (\dot{u}_n u_n^*)^*) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\dot{u}_n u_n^*) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\delta i \Delta u_n + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} i \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 u_n \right) u_n^* \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\delta i \nabla u_n \nabla u_n^* + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} i \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 |u_n|^2 \right) \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta |\nabla u_n|^2 + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 |u_n|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple dado que todos los términos de la sumatoria son reales puros.

Por lo tanto

$$\|u\|_2^2 = \text{cte.}$$

2.2. Estados estacionarios y Breathers

Uno de los objetivos que trataremos en esta tesis es hallar estados estacionarios de la ecuación (2.1). Dada una ecuación de evolución de la forma

$$\dot{u} = F(u, u_x, u_{xx}, \dots),$$

donde \dot{u} denota la derivada respecto de la variable de evolución (e. g. t si es la evolución de una función de onda en el tiempo, z si es la evolución de un pulso en el eje óptico). Eventualmente u y F pueden ser complejas y F puede depender también de ciertos parámetros. Una solución u es estacionaria si no varía en la variable de evolución, i. e., si $u_t = 0$. A estas soluciones se las denomina *estados estacionarios* y el problema de encontrarlas se reduce a hallar ceros de la función F .

En nuestro caso estamos trabajando con el conjunto de ecuaciones

$$i\dot{u}_n = -\delta\Delta u_n - c \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, t > 0. \quad (2.6)$$

con $c = 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2}$, $\kappa > 0$, $\delta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\Delta u_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$.

Por la estructura de la Ec. (2.6), la variación en la variable de evolución produce un cambio en la fase de la solución. Por lo que resulta conveniente plantear que las soluciones toman la forma $u_n = e^{-i\omega t} v_n$, con ω real. Sustituyendo en (2.6) tenemos que

$$i\dot{v}_n - \omega v_n = -\delta\Delta v_n - c \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |v_m|^2 v_n, \quad n \in \mathbb{Z}, t > 0. \quad (2.7)$$

Por lo que los estados estacionarios $\dot{v}_n = 0$ son soluciones de la ecuación (2.7) de la forma $v = A$ con $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ independiente del tiempo. Tales A satisfacen

$$-\omega A_n = \delta(\Delta A)_n + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |A_m|^2 \right) A_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Llamaremos soluciones tipo *breathers* a las soluciones de la ecuación (2.1) de la forma $u_n = e^{-i\omega t} A_n$, con $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ independiente del tiempo, solución de la ecuación (2.8). En el Capítulo 3 desarrollaremos tres caminos en la búsqueda de soluciones tipo breathers. Un camino teórico consiste en hallar soluciones exactas a la ecuación (2.8), que sólo es posible explicitarlas para ciertos valores de los parámetros (e. g. para $\delta = 0$ y el resto de los parámetros fijos), y luego probar la existencia de continuaciones de estas soluciones en un entorno de los valores considerados. Para ello utilizamos una idea que fue introducida por MacKay y Aubry en 1994 [MA94] y se basa en aplicaciones del teorema de la función implícita (Sección 2.4).

Por otra parte estudiaremos soluciones numéricas a la ecuación (2.8), para lo cual aplicaremos métodos de Newton (Sección 2.5) para hallar ceros de la función que define esta ecuación. Y por último, apoyándonos en la estructura hamiltoniana de la ecuación (2.1), probaremos la existencia de soluciones tipo breathers que minimizan el hamiltoniano y cumplan ciertas propiedades de simetría y decaimiento. Para esto nos apoyamos en el Lema de Lions [L84].

2.3. Breathers, solitones discretos y nematicones

Un solitón u onda solitaria, es una onda que se propaga sin deformarse en un medio no lineal. Esta propagación puede darse en el tiempo, *solitón temporal*, o en el espacio, *solitón espacial*. En la literatura los términos breathers y solitones discretos se utilizan muchas veces de manera indistinta. En [A13] (p. 44) se denomina *breather* a una solución localizada que oscila periódicamente versus la propagación (espacial o temporal). Los breathers se caracterizan por su no expansión (en este sentido son localizados) y por sus oscilaciones de área total nula ([MT89]).

En la literatura se encuentra tanto la denominación de breathers como la de solitones discretos (u ondas solitarias discretas) para el tipo de soluciones que aquí presentamos. Aunque este último uso es el más extendido, aquí nos inclinamos por llamarlos breathers considerando la distinción entre una y otra denominación que hace Assanto ([A13]): “parecen un par de gemelos nacidos en diversos sistemas físicos no lineales [...] pero son físicamente distintos: en el solitón, la difracción (o dispersión) está exactamente balanceada por la no-linealidad, mientras que en el breather, la difracción (o dispersión) solo está parcialmente balanceada por la no-linealidad.”

Por su parte Frattalochi y Assanto [APC03] acuñaron el término *nematicon*, para referirse particularmente a un solitón espacial en un sustrato de cristales líquidos nemáticos. El uso de este término es extendido en óptica no lineal.

2.4. Teorema de la Función Implícita

Una de las principales tesis del teorema de la función implícita (TFI) nos permitirá probar, en el Capítulo 3, la existencia de continuaciones de soluciones a partir de una solución hallada analíticamente. Aquí presentamos esquemáticamente este teorema. Para más detalles ver e. g. [Z86] o [C01].

Dados dos espacios de Banach \mathbf{X} y \mathbf{Y} y una función $F : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$, supongamos que conocemos $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ tal que $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$, y queremos resolver la ecuación

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \tag{2.9}$$

en un entorno de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. Por *resolver* entendemos: hallar una función $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x})$ definida en un entorno de \mathbf{x}_0 , tal que $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ y $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = 0$, para todo x en dicho entorno.

Para cada $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ consideramos $g(\mathbf{x}) := F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Si g es diferenciable definimos la *derivada parcial* de F con respecto a la “primera” variable: $D_1F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := g'(\mathbf{x})$.

El TFI nos provee la existencia y unicidad de soluciones $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ a la ecuación (2.9).

Teorema 2.4.1 (Teorema de la Función Implícita) *Sea $U(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ un entorno abierto de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ y $F : U(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \rightarrow \mathbf{X}$ tal que $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$. Si se cumple simultáneamente que:*

- i) F es continua en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$,*
- ii) existe D_1F en $U(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ y es continua en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$,*
- iii) $D_1F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ es un isomorfismo lineal de \mathbf{X} .*

Entonces existen δ_0 y δ positivos tales que: para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ tal que $\|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq \delta_0$ existe un único $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in \mathbf{Y}$ para el cual $\|(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)\| \leq \delta$ y $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = 0$.

En 1994 MacKay y Aubry [MA94] utilizaron el teorema de la función implícita para probar la existencia de soluciones periódicas en el tiempo y espacialmente localizadas a ecuaciones discretas de osciladores débilmente acoplados, reversibles en el tiempo o que se correspondan a un sistema hamiltoniano. Un ejemplo prototípico viene dado por la ecuación

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + V'(x_n) = \alpha(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}), \quad V'(0) = 0, V''(0) = \omega_0^2 > 0.$$

2.5. Método de Newton

El método de Newton permite aproximar numéricamente, aplicando iteraciones, soluciones de funciones o ecuaciones no lineales. El sistema de infinitas ecuaciones definido por (2.8) se puede expresar como $\hat{F} = 0$, en términos de cierta función \hat{F} cuyo dominio y codominio dependerán de la forma en que consideremos el sistema de ecuaciones no lineales a resolver, dependiente de ciertos parámetros (e. g. $\delta, \gamma, \kappa, \omega$). En cualquier caso este es un problema de dimensión infinita. Para hallar soluciones numéricas en la máquina, necesariamente debemos restringir este sistema a un problema finito

$$F(x) = 0$$

con $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ (N ecuaciones y N incógnitas). La forma en que adoptaremos la restricción F en cada caso será estudiada en el Capítulo 3, aquí presentamos de forma general el método de Newton para una función F ya definida, que cumple con ciertas condiciones de regularidad.

La aproximación de Taylor de primer orden establece que si F es una función de clase C^2 en un abierto $U \subset \mathbb{R}^N$ y $x_0 \in U$, entonces

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + r(x, x_0), \quad (2.10)$$

con $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|r(x, x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$. En particular, si x^* es un cero de F y x_0 está suficientemente cerca de x^* , se tiene que

$$0 \approx F(x_0) + F'(x_0)(x^* - x_0).$$

Aquí, $F'(x)$ representa la matriz jacobiana de F en x , $F'(x)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$, para $1 \leq i, j \leq n$.

Por lo que tiene sentido quedarnos con la aproximación lineal de (2.10) y definir la siguiente sucesión recursiva partiendo del dato inicial x_0

$$0 = F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

donde x_{n+1} está definido de forma unívoca, siempre que $F'(x_n)$ sea no singular, por la sucesión de Newton

$$x_{n+1} = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n). \quad (2.11)$$

El método de Newton consiste en los siguiente pasos:

- a) Determinar el dato inicial x_0 .
- b) Aproximar una solución de $F'(x_n)s = -F(x_n)$, para obtener el paso de Newton s .
- c) Construir recursivamente $x_{n+1} = x_n + s$.
- d) Evaluar $F(x_{n+1})$ y realizar un test que decida si la iteración ha concluido (i. e., si x_{n+1} está suficientemente cerca de ser un cero de F).

Observar que el costo computacional de calcular la inversa del jacobiano en la ecuación (2.11) en general es muy elevado, de ahí que se implementen los pasos (b) y (c), donde (b) puede ser resuelto por métodos computacionales más eficientes (factorización lu , qr , etc.).

Existen una gran variedad de códigos que aplican el método de Newton (ver e. g. [Kelley03]). Principalmente difieren en la forma en que aproximan el paso de Newton s en la solución al paso (b) que, como recién expresamos, es computacionalmente el cálculo más costoso. También algunos métodos introducen una variante en el paso (c), construyendo recursivamente $x_{n+1} = x_n + \lambda s$, eligiendo λ para garantizar el decrecimiento de $\|F\|$.

En las aproximaciones numéricas realizadas en el Capítulo 3 hemos utilizado el paquete *nsoli.m* desarrollado por Kelley para MATLAB[®] [Kelley03] y adaptaciones de códigos desarrollados por Carretero-González [CK19].

Para asegurar la convergencia del método se requiere el cumplimiento de varias condiciones, típicamente: que exista una solución al problema $F(x) = 0$; que F' sea Lipchitz continua en un entorno de x^* y que $F'(x^*)$ sea no singular. En cada caso que hemos aplicado el método de Newton, hemos comprobando que estas condiciones se cumplen, no para F , sino para la función \hat{F} determinada por la ecuación (2.8) en el problema de dimensión infinita.

Otra condición necesaria es que el dato inicial (o semilla) esté suficientemente cerca de la solución x^* . Bajo estas condiciones, llamando $e_n = x_n - x_{n-1}$, se tiene el siguiente teorema que afirma que la iteración de Newton converge con orden cuadrático.

Teorema 2.5.1 *Si x^* es una solución de $F(x) = 0$, F' es Lipchitz continua en un entorno de x^* , $F'(x^*)$ es no singular y x_0 está suficientemente cerca de x^* , entonces la iteración de Newton está bien definida, converge a x^* y existe $K > 0$ tal que*

$$\|e_{n+1}\| \leq K \|e_n\|^2$$

para n suficientemente grande.

El paquete *nsoli.m* que hemos implementado utiliza una variante basada en métodos llamados de Newton-Krylov. Esta variante aproxima el jacobiano de F con diferencias finitas de tipo forward y resuelve el sistema de ecuaciones lineales resultantes que define el paso de Newton aplicando métodos iterativos lineales que utilizan subespacios de Krylov, terminando la iteración cuando se cumple, para un $\eta > 0$ dado, la *condición inexacta de Newton*

$$\|F'(x_n)s + F(x_n)\| \leq \eta \|F(x_n)\|.$$

Hemos optado por utilizar este paquete porque, al ser de dimensión infinita el problema que queremos resolver, la restricción a un problema de dimensión finita de tamaño N necesariamente implicará que N sea grande. Esto influye en el costo de evaluar F y F' , sumado a que en general F' no es una matriz esparsa (no tiene muchos ceros). El paquete *nsoli.m* implementa una combinación de métodos de Newton-Krylov que son los indicados para este tipo de problemas.

2.6. Métodos variacionales

Usualmente las soluciones exactas a las ecuaciones de tipo Schrödinger No Lineales, tanto en el caso continuo (NLS) como en el caso discreto (DNLS), no pueden expresarse en forma

analítica. Esto ha motivado el estudio de aproximaciones analíticas a las soluciones exactas que provean información importante acerca de la solución exacta. Por caso: la amplitud y el ancho del perfil, en el caso de un bright soliton que es solución de la NLS, ajustable por ejemplo por una distribución gaussiana; o la amplitud y el decaimiento, en el caso de breathers de un pico que son solución de la DNLS, como los que trataremos en esta tesis. Por supuesto, estas aproximaciones pueden perder información relevante sobre las soluciones exactas, pero en muchas ocasiones han sido útiles para una mejor comprensión del fenómeno físico y del modelo matemático que se está estudiando.

Este enfoque fue presentado por primera vez en 1983 por Anderson [A83], para estudiar la propagación de un pulso no lineal en fibra óptica, modelizado por la ecuación NLS cúbica

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} = \alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \kappa|\psi|^2\psi. \quad (2.12)$$

Y posteriormente fue desarrollado en un artículo de 1988, por Anderson, Lisak y Reichel [ALR88], que según Malomed [M02] se convirtió en la base de los métodos analíticos basados en un enfoque variacional, en óptica no lineal. A continuación damos una idea esquemática de este método para la NLS siguiendo la presentación que se hace en los tres artículos citados.

La idea fundamental consiste en elegir una función de prueba adecuada que permita estudiar características que a priori se sabe que son propias de la evolución de un pulso en fibra óptica. A esta elección se la denomina comúnmente con el vocablo alemán *ansatz*, que puede traducirse como *planteamiento*.

Un *ansatz* utilizado frecuentemente es el siguiente

$$\Psi(z, x) = Ae^{\left(-\frac{x^2}{2a^2} + ibx^2\right)}, \quad (2.13)$$

donde $A = A(z)$, $a = a(z)$ y $b = b(z)$ son parámetros variacionales que dependen de la variable asociada a la evolución (en óptica no lineal el eje óptico z , el tiempo t en condensados de Bose-Einstein). Estos parámetros permiten estudiar la variación de la amplitud $|A|$, el ancho del pulso a , la frecuencia b (llamada *chirp*), y el desplazamiento de la fase $\arg(A)$.

La ecuación (2.12) puede reformularse en forma variacional en términos de la densidad del lagrangiano \mathcal{L} definida por

$$\mathcal{L} := \frac{i}{2} \left[\psi \frac{\partial\psi^*}{\partial z} - \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial z} \right] - \alpha \left| \frac{\partial\psi}{\partial x} \right|^2 + \frac{\kappa}{2} |\psi|^4. \quad (2.14)$$

donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\psi, \psi^*, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi^*}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial z}, \frac{\partial\psi^*}{\partial z}\right)$. Se define además el lagrangiano $L = \int \mathcal{L} dx$ y la acción $S = \int L dz$. Y (2.12) se deduce del principio variacional $\frac{\delta S}{\delta u^*} = 0$.

Insertando el ansatz (2.13) en la densidad del lagrangiano (2.14) se obtiene una densidad efectiva del lagrangiano, \mathcal{L}_{ef} , e integrando en todo el espacio en la variable x , se obtiene el lagrangiano efectivo

$$L_{ef} := \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{ef} dx. \quad (2.15)$$

que, en tanto pueda calcularse analíticamente, dependerá de los parámetros A , a y b y de sus derivadas con respecto a la variable de evolución. Es la necesidad de poder calcular analíticamente esta integral (2.15) lo que impone muchas de las condiciones sobre la elección de la función de prueba.

Otro ansatz que cumple estas condiciones y frecuentemente aparece en la literatura viene dado por la secante hiperbólica

$$\psi(z, x) = A \left(\operatorname{sech} \frac{x}{a} \right) e^{i\phi + ibx^2}. \quad (2.16)$$

con A , a , ϕ y b dependientes de la variable de evolución z .

El principio variacional $\frac{\delta S}{\delta u^*} = 0$ aplicado al lagrangiano efectivo, restringe el problema de optimización al “subespacio” de los parámetros libres dando lugar a las siguientes *ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L_{ef}}{\partial p'_j} - \frac{\partial L_{ef}}{\partial p_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.17)$$

donde $\{p_j(z) : 1 \leq j \leq n\}$ representa el conjunto de parámetros libres del ansatz y $p'_j = \frac{\partial p_j}{\partial z}$. Por ejemplo, en (2.16), $p_1 \equiv A$, $p_2 \equiv a$, $p_3 \equiv \phi$ y $p_4 \equiv b$. Y el sistema de ecuaciones (2.17) resulta ser, en este caso, un sistema acoplado de 4 ecuaciones ordinarias. Hallar aproximaciones analíticas a un solitón de la ecuación (2.12) equivale a hallar un punto fijo (una solución estacionaria, $p'_j = 0$, $1 \leq j \leq n$) del sistema de ecuaciones (2.17). Aquí reside la segunda dificultad de este método, un ansatz demasiado complicado podría dar lugar a un sistema de EDO's imposible de resolver.

Este enfoque variacional no es un método matemático riguroso, en general el planteamiento de una buena función de prueba reside principalmente en una buena intuición física del fenómeno modelado.

Es también muy extendida la aplicación de este método a ecuaciones de Schrödinger no lineales discretas (ver e. g. [CTCM06], [CCMK11]). En [K09] (Capítulo 2) y [MW96] se utiliza este enfoque para hallar estados estacionarios en el caso de la DNLS local con no linealidad de potencia σ . El problema estacionario se reduce a la ecuación

$$-\omega u_n = \delta \Delta u_n + u_n^{2\sigma+1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t > 0. \quad (2.18)$$

Para $\sigma = 1$ (2.18) es el problema estacionario de la DNLS cúbica, equivalente al problema estacionario de (2.1) cuando $\kappa \rightarrow \infty$, que trataremos de forma general en el Capítulo 3 para κ

arbitrario. Esta ecuación puede derivarse del lagrangiano

$$L = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\delta (u_{n+1} + u_{n-1}) u_n + (\omega - 2\delta) u_n^2 + \frac{1}{\sigma + 1} u_n^{2(\sigma+1)} \right]. \quad (2.19)$$

Sustituyendo el ansatz $u_n = A e^{-\alpha|n|}$ en el lagrangiano (2.19) y calculando la suma infinita se obtiene el lagrangiano efectivo

$$L_{ef} = 2\delta A^2 \operatorname{csch} \alpha - (\omega + 2\delta) A^2 \coth \alpha + \frac{A^{2(\sigma+1)}}{\sigma + 1} \coth((\sigma + 1)\alpha).$$

Dado que aquí estamos tratando con el problema estacionario, las derivadas respecto de la variable de evolución en las ecuaciones de Euler Lagrange (2.17) se anulan. Dando lugar a las ecuaciones $\frac{\partial L_{ef}}{\partial A} = \frac{\partial L_{ef}}{\partial \alpha} = 0$. Además, se tiene que el cuadrado de la norma ℓ^2 (o potencia) de la aproximación está dado por

$$P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^2 = A^2 \coth \alpha.$$

Juntando esta ecuación con las de Euler-Lagrange se obtienen relaciones para A , α y ω , que conectan la amplitud del pulso, con su ancho y con la frecuencia. Las raíces de las ecuaciones resultantes se pueden hallar con cualquier software numérico y/o simbólico (Matlab, Octave, Mathematica, Maple, etc.).

En el Capítulo 5 utilizaremos este enfoque para hallar aproximaciones a soluciones estacionarias de la ecuación DNLS no local (2.1).

Capítulo 3

Breathers

En este capítulo se presentan soluciones a una ecuación discreta no lineal de Schrödinger (DNLS) con un potencial no local cúbico (de tipo Hartree) que modela la propagación de un haz de luz láser en una sucesión de guías de ondas que forman un campo eléctrico que orienta las moléculas en un sustrato de cristales líquidos nemáticos.

En la Sección 3.1 se muestran los tipos de soluciones que buscamos a la ecuación DNLS presentada en el capítulo anterior, que dan lugar a una ecuación independiente del tiempo (o del eje óptico). La existencia de este tipo de soluciones, llamadas breathers, es estudiada bajo diferentes regímenes dependientes de dos parámetros: el parámetro δ asociado a la interacción lineal acoplada con los nodos vecinos; y κ , correspondiente a las interacciones no locales.

En la Sección 3.2 se prueba la existencia de breathers con una cantidad finita de picos, en el límite “anticontinuo” y local, esto es, δ suficientemente pequeño y κ suficientemente grande; para ello se utiliza el teorema de la función implícita. Se prueba también la existencia de este tipo de breathers en el caso no local (κ arbitrario) y se presentan algunos ejemplos para analizar ciertas propiedades de estas soluciones. Entre ellas, la aparición de saltos en la interfaz cuando se tienen breathers con una cantidad finita de picos (Figs. 3.1-3.3) y la variación en la amplitud en los breathers de un pico en función de la interacción no local. Estas propiedades distinguen a estas soluciones de las que se obtienen para la DNLS cúbica (cf. [PKF05] y referencias allí).

En la Sección 3.3 volvemos a analizar los regímenes tratados en la segunda sección, pero probando la existencia de breathers que hemos denominado tipo meseta: soluciones con una cantidad infinita de picos, con forma de frente constante con un máximo en la interfaz. Para probar la existencia de este tipo de soluciones deben abordarse dos dificultades que no están presentes en el caso de los breathers con finitos picos. Por un lado, estos breathers “infinitos” no pertenecen a $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, y por otro, la interacción no local con infinitos nodos no permite extender

de manera directa los argumentos de acotación utilizados en la sección anterior. Se presentan dos ejemplos que permiten comparar a estos breathers infinitos con los de finitos picos analizados en la sección anterior y observar que esencialmente tienen el mismo comportamiento en la interfaz.

Por último, en la Sección 3.4, se prueba la existencia de breathers que minimizan la energía restringida a bolas de ℓ^2 de norma 2 constante (Teorema 3.4.1), utilizando el principio de concentración-compacidad de Lions [L84] adaptado al caso discreto. Se prueba también (Teorema 3.4.2) que todo minimizador restringido a una bola es (salvo cambios en la fase) real, positivo, simétrico y que decrece a derecha e izquierda desde su pico central.

3.1. Soluciones tipo breather a la ecuación DNLS no local

Consideramos la ecuación no lineal de Schrödinger discreta (DNLS)

$$i\dot{u}_n = -\delta(\Delta u)_n - 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 \right) u_n \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

donde δ , γ , κ son constantes reales, $\kappa > 0$, y $(\Delta u)_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$. Este modelo fue propuesto por Frattalochi y Assanto [FA05].

Como vimos en el capítulo 2 la ecuación (3.1) es formalmente un sistema hamiltoniano, esto es:

$$\dot{u}_n = -i \frac{\partial H}{\partial u_n^*}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{con} \quad (3.2)$$

$$H = \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_{n+1} - u_n|^2 - \gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m|^2 e^{-\kappa|m-n|} |u_n|^2. \quad (3.3)$$

La *potencia* (también denominada *carga total* cuando refiere a modelización de dinámica de átomos, e. g. en condensados de Bose-Einstein) está dada por la cantidad $P = \|u\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2$ y es una cantidad conservada.

Consideramos ahora soluciones a la ecuación (3.1) que hemos denominado breathers. Estas son soluciones de la forma: $u_n = e^{-i\omega t} A_n$, con ω real, y $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ independiente de t . Tales A satisfacen

$$-\omega A_n = \delta(\Delta A)_n + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |A_m|^2 \right) A_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

En el Teorema 3.2.1 se prueba la existencia de soluciones $A \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ en el límite “anticontinuo” y local (i. e. para $|\delta|$ suficientemente pequeño, y κ suficientemente grande). Los breathers que hallamos en el límite $\kappa \rightarrow \infty$, $\delta = 0$, son los correspondientes a los breathers $\delta = 0$ “anticontinuos” de la ecuación DNLS local cúbica estudiada por [MA94] y ampliamente tratada por otros autores (ver [PKF05] y referencias allí). En el segundo resultado de existencia, Teorema 3.2.2,

se muestran continuaciones de soluciones del problema $\delta = 0$ no local, esto es, con κ fijo pero arbitrario. Tomando una discretización finita de (3.4) con condiciones de tipo Dirichlet en los bordes y aplicando un método de Newton-Raphson se muestran algunos ejemplos que permiten observar las propiedades mencionadas al comienzo de este capítulo: variación en la amplitud del pico central en función de la interacción no local κ , en el caso de los breathers de un pico; y saltos en las interfaces de las soluciones con una cantidad finita de picos.

En los Teoremas 3.3.1 y 3.3.2 se prueba la existencia de soluciones $A \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ a la Ec. (3.4), con infinitos valores no nulos, analizando como antes los casos local (κ pequeño) y no local (κ arbitrario) respectivamente. Para ello se utilizan argumentos de continuación sobre perturbaciones $B \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ en torno a las soluciones exactas halladas para $\delta = 0$. Tomando nuevamente una discretización finita y aplicando un método de Newton-Raphson adaptando las condiciones de bordes se muestran dos ejemplos de breathers con “infinitos” picos¹ que permiten realizar comparaciones con los breathers finitos estudiados previamente y observar que presentan el mismo comportamiento en la interfaz.

3.2. Breathers con finitos picos

Sea $X = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ el espacio de Banach de sucesiones a valores reales f definidas sobre \mathbb{Z} , con la norma $\|f\|_X := (\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2)^{1/2}$. Además llamaremos $\{\hat{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a la base canónica de X .

Sean $\gamma \in \mathbb{R}$ y $c > 0$, Para $A \in X$, $\omega \in \mathbb{R}$, y δ, μ reales, con $\mu \neq 0$, definimos F_n , $n \in \mathbb{Z}$, como

$$F_n(A, \omega, \delta, \mu) := \delta(\Delta A)_n + 2\gamma \tanh \frac{1}{2\mu^2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{|m-n|}{\mu^2}} A_m^2 \right) A_n + \omega A_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

donde hemos sustituido el parámetro de interacción no local κ (presente en (3.4)) por μ^{-2} . La razón de esta sustitución es que nos interesa hallar ceros de F_n en un entorno de $\delta = \mu = 0$. Esta elección resulta más conveniente que, por ejemplo, $\kappa = \mu^{-1}$, como se verá en la Observación 3.2.1. Así definida F_n , hallar soluciones a la ecuación (3.4) equivale a hallar ceros de (3.5).

Hemos definido F_n para $\mu \neq 0$. Sin embargo, $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \tanh \frac{\kappa}{2} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \tanh \frac{1}{2\mu^2} = 1$ y, además, $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} e^{-\kappa|m-n|} = \lim_{\mu \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2\mu^2}|m-n|} = \delta_{m,n}$; donde $\delta_{m,n}$ es la delta de Kronecker, esto es, $\delta_{m,n} = 0$ si $n \neq m$ y $\delta_{m,n} = 1$ si $n = m$. Por lo que tiene sentido definir a F_n de la siguiente manera cuando $\mu = 0$, para $A \in X$, ω y $\delta \in \mathbb{R}$,

$$F_n(A, \omega, \delta, 0) := \delta(\Delta A)_n + 2\gamma A_n^3 + \omega A_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

¹En rigor, tratándose de soluciones de una discretización finita de (3.4), necesariamente tendrán una cantidad finita de picos; pero representan aproximaciones finitas de las soluciones con infinitos picos.

En particular, tenemos que

$$F_n(A, \omega, 0, 0) = 2\gamma A_n^3 + \omega A_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.7)$$

Dado que las soluciones de la ecuación (3.4) deben conservar su norma, definimos también, para $A \in X$, ω , δ y μ reales, a F_+ como

$$F_+(A, \omega, \delta, \mu) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n^2 - c. \quad (3.8)$$

La dependencia de F_+ con respecto a c no está hecha explícita en la notación previa, los resultados que probaremos en esta sección son válidos para todo $c > 0$.

A continuación expresamos algunas notaciones que nos permitirán abreviar la escritura. Llamaremos $\mathbf{X} := X \times \mathbb{R}$ con la norma $\|(a, b)\|_{\mathbf{X}} = (|a|^2 + |b|^2)^{1/2}$, y $\mathbf{Y} = \mathbb{R}^2$ con la norma euclídea. \mathbf{X} , \mathbf{Y} son espacios de Banach reales. Además notaremos con $B_{\mathbf{Z}}(z, r)$ a la bola de radio r alrededor del punto z de un espacio de Banach \mathbf{Z} . Se puede chequear que

$$F(A, \omega, \delta, \mu) := (\{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}(A, \omega, \delta, \mu), F_+(A, \omega, \delta, \mu)), \quad (3.9)$$

con F_n , F_+ definidas como en (3.5), (3.6) y (3.8), define una función $F : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$. Omitimos aquí esta demostración dado que, mutatis mutandis, repite las acotaciones realizadas en el Lema 3.2.1 para probar la continuidad de F .

3.2.1. Caso local

Nuestro interés es hallar soluciones a la ecuación (3.4). En esta sección comenzaremos considerando δ y μ cercanos a cero. Llamamos a este caso *local* porque, al ser pequeño el parámetro μ , la interacción no local entre los distintos nodos tiende a ser local (la convolución en la Ec. (3.4) se “parece” al término cúbico en la Ec. (3.7)). Para conseguir este objetivo buscaremos soluciones exactas a la ecuación $F(A, \omega, 0, 0) = 0$ y las extenderemos a otros valores de δ y μ aplicando el teorema de la función implícita. Comencemos fijando $c > 0$ y consideremos una solución no trivial de $F(A, \omega, 0, 0) = 0$, esto es, tomemos $(\tilde{A}, \tilde{\omega}) \in \mathbf{X}$, no nulo, tal que $F(\tilde{A}, \tilde{\omega}, 0, 0) = 0$.

Por (3.7), (3.8), y el hecho de que $\tilde{A} \in X$, vemos que dicha solución está determinada por $\alpha > 0$ y dos subconjuntos finitos disjuntos S_+ , S_- de \mathbb{Z} de tal forma que

$$\tilde{\omega} = -2\gamma\alpha^2, \quad \tilde{A}_n = \pm\alpha, \quad n \in S_{\pm}, \quad \tilde{A}_n = 0, \quad n \notin S_+ \cup S_-. \quad (3.10)$$

Además estos conjuntos y α deben cumplir la condición $(|S_+| + |S_-|)\alpha^2 = c$, donde $|\cdot|$ denota el cardinal del conjunto.

A continuación probaremos el principio de prolongación continua para este tipo de soluciones en función de los parámetros δ y μ .

Teorema 3.2.1 *Sea $c > 0$ y $(\tilde{A}, \tilde{\omega}) \in \mathbf{X}$ una solución no trivial de $F(A, \omega, 0, 0) = 0$, definida como en (3.10). Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ y una única función continua $(A, \omega) : B_{\mathbf{Y}}(0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbf{X}$, que satisface $(A(0, 0), \omega(0, 0)) = (\tilde{A}, \tilde{\omega})$, y $F(A(\delta, \mu), \omega(\delta, \mu), \delta, \mu) = 0, \forall (\delta, \mu) \in B_{\mathbf{Y}}(0, \epsilon_0)$.*

Observación 3.2.1 *La unicidad de la continuación de las ramas y el hecho de que hayamos tomado $\kappa = \mu^{-2}$, implica que las soluciones $(A(\delta, \mu))$ y $(A(\delta, -\mu))$ de (3.5) coinciden. Además, con esta sustitución, el exponente de $e^{-\kappa}$ se mantiene positivo en todo entorno de $\mu = 0$, de ahí que hayamos optado por esta elección y no por $\kappa = \mu^{-1}$.*

Demostración: Para probar este resultado utilizaremos el Teorema 2.4.1 (TFI) alrededor de una solución $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ de la ecuación $F = 0$, donde $\mathbf{x}_0 = (\tilde{A}, \tilde{\omega})$, $\tilde{A}, \tilde{\omega}$ como en (3.10), y $\mathbf{y}_0 = (\delta_0, \mu_0) = (0, 0)$.

Debemos chequear que $D_1F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ existe y es un isomorfismo lineal de \mathbf{X} , y que tanto F como D_1F son continuas en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

Comenzaremos calculando D_1F en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ partiendo de la ecuación (3.7) y tomando derivadas parciales de $F_n, n \in \mathbb{Z}, F_+$ con respecto a $A_n, n \in \mathbb{Z}$, y con respecto a ω ,

$$\frac{\partial F_n}{\partial A_n} = \tilde{\omega} + 6\gamma\tilde{A}_n^2, \quad \frac{\partial F_n}{\partial A_l} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}. \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial \omega} = \tilde{A}_n, \quad \frac{\partial F_+}{\partial A_n} = 2\tilde{A}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\partial F_+}{\partial \omega} = 0. \quad (3.12)$$

Se puede chequear que la matriz infinita de derivadas parciales resultante es la derivada parcial D_1F en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

Llamemos $S_0 := \mathbb{Z} \setminus (S_+ \cup S_-)$. Para chequear la biyectividad de D_1F en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, consideramos las entradas de la matriz D_1F como sigue. Las componentes de F las enumeramos en el orden $F_{\nu_+(j)}, j \in S_+; F_{\nu_-(j)}, j \in S_-; F_+; F_{\nu_0(j)}, j \in S_0$, donde ν_{\pm}, ν_0 refieren a los elementos de S_{\pm}, S_0 respectivamente. Y las variables las enumeramos según el orden $A_{\nu_+(j)}, j \in S_+; A_{\nu_-(j)}, j \in S_-; \omega; A_{\nu_0(j)}, j \in S_0$. De esta manera $D_1F(\tilde{A}, \tilde{\omega}, 0, 0)$ tiene la forma diagonal

$$D_1F(\tilde{A}, \tilde{\omega}, 0, 0) = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

donde $M_1 \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$, $m = |S_+| + |S_-|$, y $M_2 = -2\gamma\alpha^2\tilde{I}_0$, con \tilde{I}_0 la identidad en \tilde{X}_0 , el subespacio generado por los vectores $\hat{e}_n, n \in S_0$.

Dado que M_2 es múltiplo de la matriz identidad, para mostrar que $D_1F(\tilde{A}, \tilde{\omega}, 0, 0)$ es inversible alcanza con probar que M_1 es una matriz no singular. Describimos a la matriz M_1 en forma de bloque

$$M_1 = \begin{bmatrix} A_{\pm} & C \\ 2C^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

siendo $A_{\pm} = 4\gamma\alpha^2 I_m$, I_m la identidad en $\mathbb{R}^{m \times m}$, $C = [C_1, \dots, C_m]^T$, con $C_j = 2\alpha$, si $j = 1, \dots, |S_+|$, $C_j = -2\alpha$, si $j = |S_+| + 1, \dots, |S_+| + |S_-|$. Buscamos la factorización LU de M_1 , con L triangular inferior unitaria y U triangular superior, obteniendo:

$$U = \begin{bmatrix} A_{\pm} & \tilde{c} \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

donde $\rho = 1/2(|S_+| + |S_-|) \neq 0$. De donde se deduce que M_1 es no singular y por lo tanto D_1F es inversible.

La continuidad de F en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ se demuestra en el Lema 3.2.1.

Para probar la continuidad de D_1F en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ será necesario calcular primero las derivadas parciales de F en $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}_0$, partiendo de (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_n}{\partial A_n} &= -2\delta + \omega + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} A_m^2 + 2A_n^2 \right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\partial F_n}{\partial A_l} &= \delta + 4\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} e^{-\kappa|l-n|} A_l A_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad l \in \{n-1, n+1\}, \\ \frac{\partial F_n}{\partial A_l} &= 4\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} e^{-\kappa|l-n|} A_l A_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{n-1, n, n+1\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial \omega} = A_n, \quad \frac{\partial F_+}{\partial A_n} = 2A_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\partial F_+}{\partial A_+} = 0. \quad (3.17)$$

Se puede chequear que la matriz infinita de derivadas parciales es efectivamente la derivada D_1F . Para finalizar la demostración resta probar la continuidad de D_1F en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, lo que haremos en el Lema 3.2.2. ■

Hemos probado así la existencia de soluciones cuando δ y μ son cercanos a $(0, 0)$. Una pregunta que nos queda por responder es ¿cuán cercanos? Por el momento tan sólo podemos afirmar que hay existencia de soluciones suficientemente localizadas (con poca interacción no local).

3.2.2. Caso no local

Ahora consideraremos soluciones reales a la ecuación (3.4) para el caso $\delta = 0$, para un valor de $\kappa > 0$ fijo, pero arbitrario. En este caso la interacción no local comienza a jugar un rol importante. Dado $c > 0$ consideramos una solución no trivial (A, ω) de $F = 0$, con F definida como en (3.5) y (3.8). Buscamos soluciones de la forma $A = \{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in X$, con $A_n \neq 0$ para $n \in S_A$, S_A un conjunto finito, y $A_n = 0$, $\forall n \in S_0 = \mathbb{Z} \setminus S_A$. De esta manera, para hallar soluciones a la ecuación $F(A, \omega, 0, \mu) = 0$, con F_n, F_+ como en (3.5) y (3.8), debemos resolver

$$-2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in S_A} e^{-\kappa|m-n|} A_m^2 \right) = \omega, \quad \forall n \in S_A. \quad (3.18)$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales en las componentes $J_m := A_m^2$, $m \in S_A$, del vector $J \in \mathbb{R}^{|S_A|}$, y podemos escribirlo en forma matricial como

$$\mathcal{M}J = (-2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2})^{-1} \omega \mathcal{E}, \quad (3.19)$$

con $\mathcal{E} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{|S_A|}$. La matriz \mathcal{M} está definida de forma explícita en las ecuaciones (3.18), (3.19), y se puede chequear fácilmente que es simétrica y que todas sus entradas son positivas (potencias de $e^{-\kappa}$). De las ecuaciones (3.18) deducimos que ω y γ deben tener signos opuestos para que el sistema tenga solución.

Si \mathcal{M} es no singular, y $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{E}$ tiene todas sus coordenadas positivas, entonces las soluciones de $F_n = 0$, $F_+ = 0$, F_n , F_+ como en (3.5), (3.8) son de la forma $(A, \omega) = (\tilde{A}, \tilde{\omega})$, con

$$\tilde{\omega} = -2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} c \left[\sum_{m \in S_A} (\mathcal{M}^{-1}\mathcal{E})_m \right]^{-1}, \quad \tilde{A}_n = \pm \sqrt{\tilde{J}_n}, \quad n \in S_{\pm}, \quad \tilde{A}_n = 0, \quad n \in S_0, \quad (3.20)$$

donde

$$\tilde{J} = c \left[\sum_{m \in S_A} (\mathcal{M}^{-1}\mathcal{E})_m \right]^{-1} \mathcal{M}^{-1}\mathcal{E}, \quad (3.21)$$

y S_+ , S_- son subconjuntos disjuntos de S_A que satisfacen $S_A = S_+ \cup S_-$.

Obsérvese que el sistema (3.19) puede tener solución incluso en el caso en que \mathcal{M} sea singular. Sin embargo, en los casos que aquí consideramos mostraremos que \mathcal{M} resulta inversible. Más aún, aunque no trataremos aquí el caso general, conjeturamos que \mathcal{M} es no singular cualquiera sea la elección del conjunto finito S_A .

Veamos un primer ejemplo. Consideremos la elección $S_A = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + m\}$, i.e. $m + 1$ nodos consecutivos. En este caso \mathcal{M} resulta ser una matriz simétrica en $\mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$ de tipo Toeplitz, cuya primera fila es $[1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^m]$, $\rho = e^{-\kappa}$. Para $m = 0, 1$, la inversibilidad de \mathcal{M} es inmediata. Para $m \geq 2$, \mathcal{M}^{-1} resulta ser la matriz tridiagonal simétrica definida por su diagonal principal

$$\text{diag}(\mathcal{M}^{-1}) = ((1 - \rho^2)^{-1}, (1 - \rho^2)^{-1}(1 + \rho^2)), \dots, (1 - \rho^2)^{-1}(1 + \rho^2), (1 - \rho^2)^{-1}), \quad (3.22)$$

y su diagonal adyacente inferior igual a la adyacente superior

$$(\mathcal{M}^{-1})_{k, k+1} = -(1 - \rho^2)^{-1} \rho, \quad \forall k = 1, \dots, m. \quad (3.23)$$

De donde se deduce que

$$\mathcal{M}^{-1}\mathcal{E} = \frac{1}{1 + \rho} [1, 1 - \rho, \dots, 1 - \rho, 1]^T. \quad (3.24)$$

Observación 3.2.2 De las ecuaciones (3.20), (3.21) se desprende que el vector $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{E}$ determina, multiplicando por los escalares correspondientes, la amplitud del perfil en los nodos $n_0, \dots, n_0 + m$. Dado que $1 - \rho < 1$, la amplitud resulta ser mayor en los extremos n_0 y $n_0 + m$ de S_A (para $m \geq 2$), mientras que en el resto de los nodos la amplitud es constante (ver Fig. 3.1). Este fenómeno de picos en los extremos no se observa en el caso de las soluciones localizadas estudiadas en el Teorema 3.2.1 y está claramente asociado a las interacciones no locales.

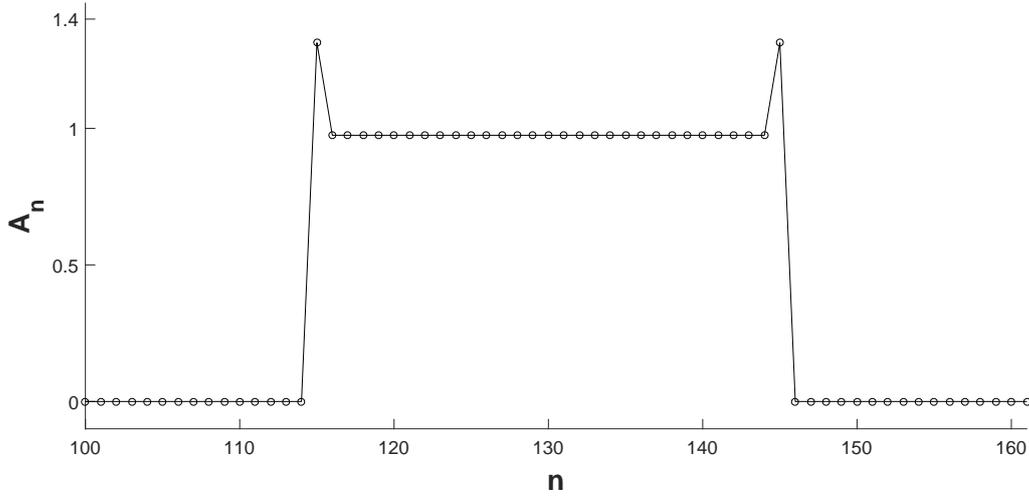


Figura 3.1: Solución (positiva) definida en (3.20) para $S_{\pm} = \{116, \dots, 146\}$, $\gamma = -1$, $\kappa = 0,8$, $c = 31$.

Para aplicar argumentos de continuación como lo hicimos para los breathers presentados más arriba, debemos restringir la definición de la función F fijando κ . Utilizaremos una notación similar a la del Teorema 3.2.1. Sean $c > 0$, y $\kappa \neq 0$ fijo, Para $A \in X$, $\omega \in \mathbb{R}$, y δ real, definimos G_n , $n \in \mathbb{Z}$ como

$$G_n(A, \omega, \delta) = \delta(A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n) + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} A_m^2 \right) A_n + \omega A_n. \quad (3.25)$$

Y definimos G_+ como

$$G_+(A, \omega, \delta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n^2 - c. \quad (3.26)$$

Sea $\mathbf{X} = X \times \mathbb{R}$ con la norma $\|(a, b)\|_{\mathbf{X}} = (\|a\|^2 + |b|^2)^{1/2}$, y sea $\mathbf{Y} = \mathbb{R}$ con la norma euclídea. \mathbf{X} , \mathbf{Y} son espacios de Banach sobre el cuerpo de los reales. Sea $B_{\mathbf{Z}}(z, r)$ la bola de radio r alrededor del punto z del espacio de Banach \mathbf{Z} . Se puede chequear que

$$G(A, \omega, \delta) := (\{G_n\}_{n \in \mathbb{Z}}(A, \omega, \delta), G_+(A, \omega, \delta)), \quad (3.27)$$

con G_n y G_+ como en (3.25), (3.26), define una función $G : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$. En la notación utilizada no se hace explícita la dependencia de G en función de c y κ , y los resultados que siguen son válidos para todo $c, \kappa > 0$.

Teorema 3.2.2 *Sean $c > 0$ y $\kappa > 0$. Dados un entero positivo m y una solución no trivial $(A, \omega) = (\tilde{A}, \tilde{\omega})$ de $G(A, \omega, 0) = 0$ como en (3.20), (3.21), con $S_A = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + m\}$. Entonces existe $\delta_0 > 0$, y una única familia uniparamétrica continua $(A, \omega) : B_{\mathbf{Y}}(0, \delta_0) \rightarrow \mathbf{X}$, que satisface $(A(0, 0), \omega(0)) = (\tilde{A}, \tilde{\omega})$, y $G(A(\delta), \omega(\delta), \delta) = 0, \forall \delta \in B_{\mathbf{Y}}(0, \delta_0)$.*

Demostración: Aplicaremos el Teorema 2.4.1 (Teorema de la Función Implícita) alrededor de la solución $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ de $G = 0$, donde $\mathbf{x}_0 = (\tilde{A}, \tilde{\omega})$, $\tilde{A}, \tilde{\omega}$ como en (3.20), (3.21), y $\mathbf{y}_0 = \delta = 0$ of $G = 0$. Debemos probar que (i) $D_1G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ existe y es un isomorfismo lineal de \mathbf{X} , y que (ii) G y D_1G son continuas en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ y D_1G está definida en un entorno de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. La demostración de (ii) la trataremos posteriormente en los Lemas 3.2.3 y 3.2.4.

Para chequear la inversibilidad de D_1G en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, es conveniente enumerar las entradas de D_1G como sigue. Las componentes de G son ordenadas como $G_{\nu_A(j)}, j \in S_A, G_+, G_{\nu_0(j)}, j \in S_0$, donde ν_A, ν_0 se corresponden con los elementos de S_A, S_0 respectivamente, y $\nu_A(j) = j - n_0 + 1, j = 1, \dots, m + 1$. Las variables las enumeramos según el orden $A_{\nu_A(j)}, j \in S_A, \omega, A_{\nu_0(j)}, j \in S_0$.

Por (3.16), (3.17) y (3.20), (3.21) la matriz de derivadas parciales (se puede chequear que es la derivada) $D_1G(\tilde{A}, \tilde{\omega}, 0, 0)$ tiene la forma diagonal

$$D_1G(\tilde{A}, \tilde{\omega}, 0) = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

donde $M_1 \in \mathbb{R}^{(m+2) \times (m+2)}$, $|S_A| = m + 1$, y M_2 es diagonal, con entradas

$$M_2(n, n) = \frac{\partial F_n}{\partial A_n}(\tilde{A}, \tilde{\omega}) = \begin{cases} \tilde{\omega}(1 - e^{\kappa|n-n_0|}), & \text{si } n < n_0 \\ \tilde{\omega}(1 - e^{\kappa|n-(n_0+m)|}), & \text{si } n > n_0 + m. \end{cases} \quad (3.29)$$

M_2 es entonces un isomorfismo en \tilde{X}_0 , el espacio generado por los vectores $\hat{e}_n, n \in S_0$. Por lo tanto, para mostrar que $D_1G(\tilde{A}, \tilde{\omega}, 0)$ es inversible alcanza con chequear que M_1 no es singular.

La matriz M_1 es de la forma

$$M_1 = \begin{bmatrix} M_{+,+} & C \\ 2C^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

donde $C = [C_1, \dots, C_{m+1}]^T$, con $C_j = \tilde{A}_{n_0+j-1}, \tilde{A}_j$ como en (3.20). Más aún

$$M_{+,+} = 4\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} c \left[\sum_{m \in S_A} (\mathcal{M}^{-1} \mathcal{E})_m \right]^{-1} \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \tilde{M}, \quad \rho = e^{-\kappa}, \quad (3.31)$$

donde $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$ es una matriz simétrica. Para $m \geq 3$, \tilde{M} tiene la siguiente estructura:

La primera fila r_1 de \tilde{M} es

$$r_1 = \left[\frac{1}{1-\rho}, \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho}}, \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho}}, \dots, \frac{\rho^{m-1}}{\sqrt{1-\rho}}, \frac{\rho^m}{1-\rho} \right], \quad (3.32)$$

y las $m+1$ -ésima columna C_{m+1} de \tilde{M} es

$$C_{m+1} = \left[\frac{\rho^m}{1-\rho}, \frac{\rho^{m-1}}{\sqrt{1-\rho}}, \dots, \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho}}, \frac{1}{1-\rho} \right]^T. \quad (3.33)$$

Por simetría r_1 y C_{m+1} también definen la primera columna de C_1 , y $m+1$ -ésima fila r_{m+1} de \tilde{M} respectivamente. Las entradas restantes $\tilde{M}_{i,j}$ con $i, j \in \{2, \dots, m\}$ forman una matriz simétrica de tipo Toeplitz en $\mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}$ con primera fila \tilde{r} definida por

$$\tilde{r} = [1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{m-2}]. \quad (3.34)$$

Los casos $m = 1, 2$ son tratados separadamente y se puede ver fácilmente que $M_{+,+}$ es inversible.

Para $m \geq 3$, \tilde{M} tiene una inversa tridiagonal simétrica \tilde{M}^{-1} con entradas en la diagonal principal

$$\text{diag} \tilde{M}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} [1-\rho, 1+\rho^2, 1+\rho^2, \dots, 1+\rho^2, 1-\rho], \quad (3.35)$$

y entradas en la subdiagonal

$$\tilde{M}^{-1}(1, 2) = \tilde{M}^{-1}(m, m+1) = -\frac{\rho}{1-\rho^2} \sqrt{1-\rho}, \quad (3.36)$$

$$\tilde{M}^{-1}(j, j+1) = \tilde{M}^{-1}(m, m+1) = -\frac{\rho}{1-\rho^2}, \quad j = 2, \dots, m-1. \quad (3.37)$$

Por (3.31) la matriz $M_{+,+}$ resulta ser inversible. Para chequear que M_1 también es inversible utilizamos el hecho de que, por (3.30),

$$\det(M_1) = (-2C^T M_{+,+}^{-1} C) \det(M_{+,+}), \quad (3.38)$$

ver e.g. [B09]. Calculando a partir de las expresiones que definen a $M_{+,+}^{-1}$, C se puede comprobar que

$$-2C^T M_{+,+}^{-1} C = -\frac{2 + (m-1)(1-\rho)}{2\gamma(1+\rho) \tanh \frac{\kappa}{2}}, \quad (3.39)$$

de donde se deduce que el determinante de M_1 nunca se anula (recordar que $\rho = e^{-\kappa}$ es positivo, y $\gamma \neq 0$ de lo contrario no habría interacción entre los átomos y no existiría solución no trivial).

■

Observación 3.2.3 *La continuación de solitones con varios picos consecutivos tratada hasta aquí es esperable que pueda extenderse a cualquier clase de breathers con una cantidad finita de picos, dado que el análisis de los bloques correspondientes a S_+ , S_0 es análogo al realizado en la demostración previa.*

Presentamos dos ejemplos de continuaciones conseguidas numéricamente, una en el caso enfocante y la otra en el desenfocante, aplicando un método de Newton-Raphson desarrollado por C. T. Kelley [Kelley03]. En ambos casos tomamos la potencia $c = 31$, el parámetro de interacción no local $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$ y utilizamos como semilla cuando $\delta = 0$ la solución presentada en la Fig. 3.1, para continuarla hasta $\delta = -0,05$ en el caso enfocante y hasta $\delta = 0,05$ en el caso desenfocante. Como resultado al aplicar el método de Newton obtenemos los breathers A_n de las Figuras 3.2 y 3.3 con sus correspondientes frecuencias computadas: $\omega = 1,894097453080216$ y $\omega = 1,905888815933016$ respectivamente.

Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones $G_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $G_+ = 0$ en (3.25) y (3.26), hemos restringido el conjunto de infinitas “más una” ecuaciones a $N + 1$ ecuaciones, con $N = 261$, y hemos considerado soluciones finitas definidas en los nodos A_n , con $n \in \{1, \dots, 261\}$. Dado que las soluciones pertenecen a $\ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ hemos considerado $A_1 = A_{261} = 0$ (en las figuras mostramos sólo los nodos 100 a 161). Hemos utilizado doble precisión y en los dos ejemplos presentados hemos verificado que al evaluar en G_n , $n \in \{1, \dots, 261\}$ y G_+ las funciones se anulan (con un error de orden 10^{-16} , la unidad de redondeo de máquina). En el Capítulo 4 estudiaremos la estabilidad en torno a estas soluciones analizando el espectro asociado al operador que define la ecuación (3.1).

En la Figura 3.2 se observa que, en el caso enfocante (γ y δ de igual signo), se presenta un aumento en la interfaz en los extremos entre los valores nulos y los valores no nulos, con un decaimiento exponencial hacia el infinito y la aparición de “vibraciones” en los bordes de la concentración de la solución. Este comportamiento hacia el interior de los extremos presenta una dificultad importante para la búsqueda de aproximaciones analíticas aplicando métodos variacionales, tales como las que encontramos para los breathers de un pico en el Capítulo 5.

En la Figura 3.3, en cambio, se observa que en el caso desenfocante (γ y δ con signo distinto), se presenta una disminución en la interfaz en los extremos entre los valores nulos y los valores no nulos. En este caso se produce un decaimiento exponencial hacia los valores constantes no nulos donde se concentra la solución y se observan vibraciones con alternancia en el signo hacia el exterior de la solución, con un rápido decaimiento en módulo. Aquí es el comportamiento hacia el exterior de los extremos el que dificulta la búsqueda de aproximaciones analíticas aplicando métodos variacionales.

Numéricamente hemos observado que estos comportamientos (vibraciones y aumento o disminución en la interfaz) se profundizan a medida que aumenta el valor absoluto de δ en las continuaciones. No hemos encontrado aún una cota para δ_0 en el Teorema 3.2.2 que nos permita decir hasta dónde puede “alejarse” δ y seguir encontrando una familia uniparamétrica de solucio-

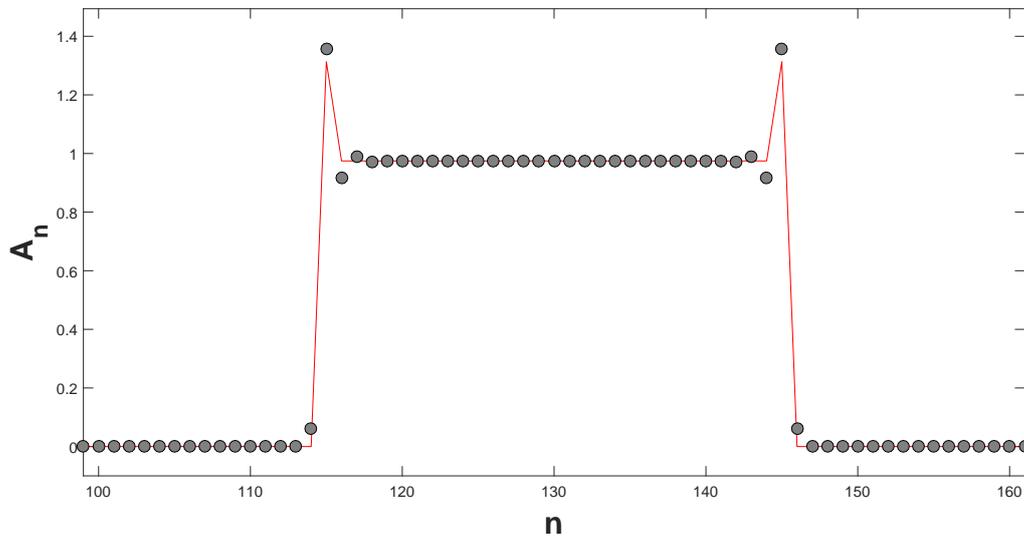


Figura 3.2: Los puntos grises representan la solución continuada a partir de la semilla de la Fig 3.1 (puntos unidos con línea roja en este gráfico). $N = 261$ (se muestran sólo los nodos 99 a 161), $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,05$ (caso enfocante). La potencia (norma ℓ^2) se mantiene constante: $c = 31$. La frecuencia computada es $\omega = 1,894097453080216$

nes, sin embargo numéricamente conjeturamos que esto no ocurre para todo δ . Por ejemplo, para las continuaciones consideradas a partir de la solución de la Fig. 3.1, en el caso desenfocante, observamos que aproximadamente a partir de $\delta = 0,25$ dejamos de hallar soluciones numéricas mediante el método de Newton utilizado.

Como último ejemplo presentamos en la Figura 3.4 dos breathers que son ejemplos de lo que llamaremos en adelante breathers *de un pico*, ya que se obtienen continuando una misma semilla (en rojo en la figura) que se anula en todas partes excepto en su nodo central (A_{33} en la figura), valor que queda determinado por la potencia ($c = 32$), esto es

$$A_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 33 \\ \sqrt{c}, & \text{si } n = 33 \end{cases} . \quad (3.40)$$

Estas continuaciones poseen un pico central, en el mismo nodo que la semilla utilizada, y un decaimiento exponencial desde dicho pico en ambas direcciones. Este comportamiento lo explicaremos en el Capítulo 5, donde se estudiarán aproximaciones a estas soluciones basadas en variaciones con dos y tres grados de libertad sobre parámetros que representan la amplitud, el decaimiento y la altura del pico central.

Consideramos aquí el caso enfocante $\gamma = -1$ y $\delta = -0,5$ para dos valores distintos de

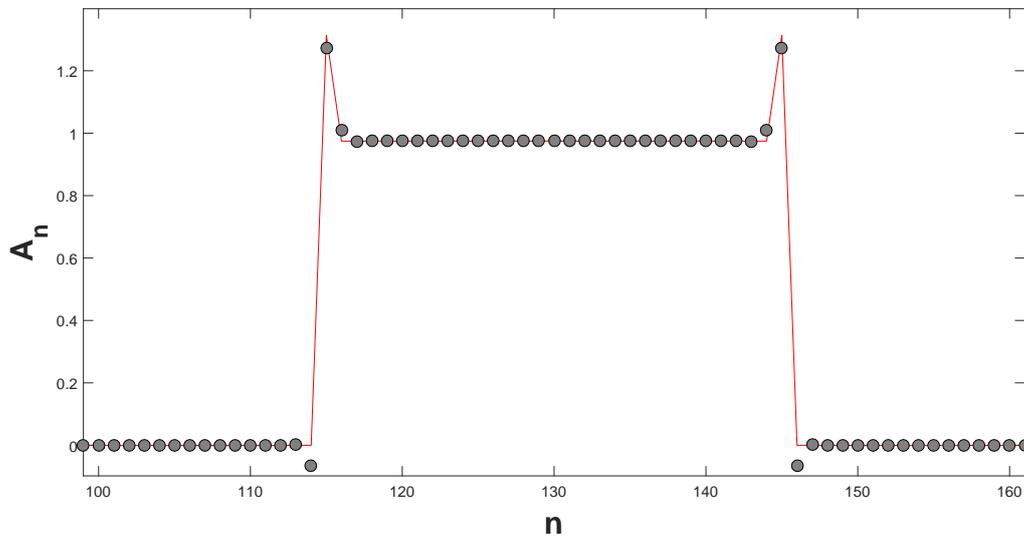


Figura 3.3: Los puntos grises representan la solución continuada a partir de la semilla de la Fig 3.1 (puntos unidos con línea roja en este gráfico). $N = 261$ (se muestran sólo los nodos 99 a 161), $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = 0,05$ (caso desenfocante). La potencia (norma ℓ^2) se mantiene constante: $c = 31$, y la frecuencia computada es $\omega = 1,905888815933016$.

κ : $\kappa_I = 0,25$ en el gráfico de la izquierda y $\kappa_D = 0,5$ en el de la derecha. Y aplicando el método de Newton descrito para los ejemplos anteriores obtenemos los correspondientes valores $\omega_I = 6,979128408684841$ y $\omega_D = 14,674997205380388$ para los breathers en las figuras de la izquierda y derecha respectivamente. Se observa en el gráfico que cuanto menor es la interacción no local (i. e. cuanto mayor es κ) más localizada es la solución.

Numéricamente observamos que, fijado κ , se pueden encontrar breathers de un pico como continuaciones de esta semilla para δ arbitrario de igual signo que γ , lo cual se condice con los resultados teóricos que presentaremos en la siguiente sección. Además observamos que estos breathers, obtenidos como soluciones numéricas exactas, tienen un decaimiento exponencial desde su pico central. Este comportamiento nos permitirá hallar aproximaciones analíticas aplicando métodos variacionales (Capítulo 5). En el Capítulo 4 mostraremos que estas soluciones son estables y analizaremos su espectro y los modos internos.

Para terminar con la demostración del Teorema 3.2.2 en los siguientes lemas probaremos la continuidad de las funciones F , G y de sus derivadas en las soluciones continuadas.

Lema 3.2.1 Sea $c > 0$ y $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ una solución de $F(x, y) = 0$, con $\mathbf{x}_0 = (\tilde{A}, \tilde{\omega})$, $\mathbf{y}_0 = (\delta, \mu) = (0, 0)$, como en (3.10). Entonces F es continua en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$

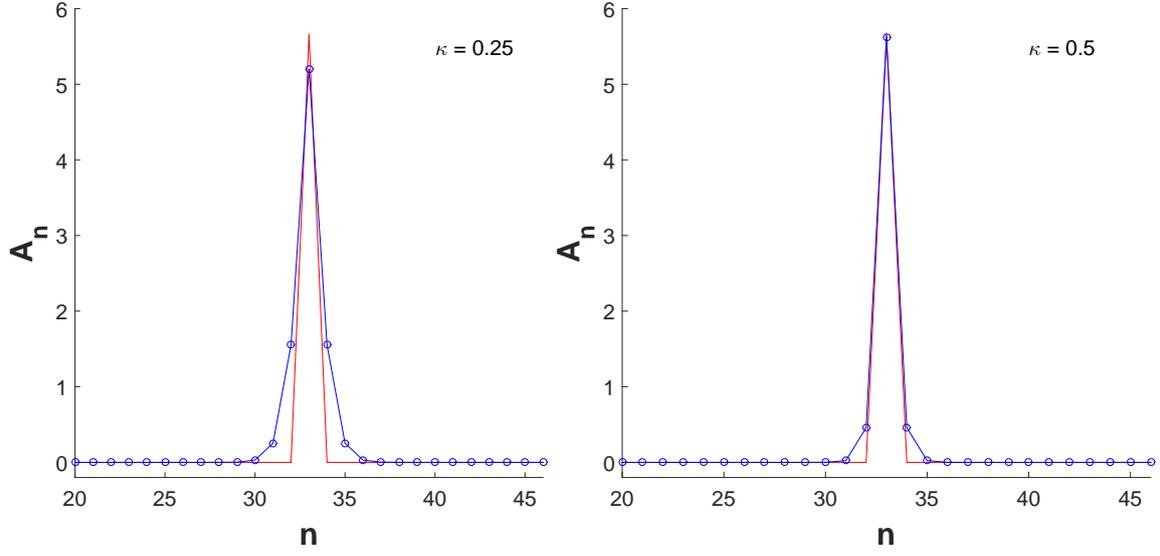


Figura 3.4: En ambos gráficos se muestra en azul las soluciones continuadas a partir de una misma semilla de un sólo pico central $A_{33} = \sqrt{c}$ (en rojo en los gráficos). $N = 65$ (se muestran sólo los nodos 20 a 46), $\gamma = -1$, $\delta = -0,5$ (caso enfocante). La potencia (norma ℓ^2) se mantiene constante: $c = 32$. En el gráfico de la **izquierda** $\kappa = 0,25$ y en el de la **derecha** $\kappa = 0,5$ y las frecuencias calculadas son $\omega = 6,979128408684841$ y $\omega = 14,674997205380388$ respectivamente.

Demostración: Para chequear la continuidad de F en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ examinaremos $\|F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\|$ cuando $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A, \omega, \delta, \mu)$ tiende a $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ en $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Evaluamos $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a partir de las ecuaciones (3.5), (3.8), excepto en el caso $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$, en el que utilizamos (3.7). Así tenemos que

$$F_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F_+(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \|A\|_X^2 - \|\tilde{A}\|_X^2 \rightarrow 0 \quad (3.41)$$

cuando $\|A - \tilde{A}\|_X \rightarrow 0$. También, para $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}_0$, $n \in \mathbb{Z}$

$$F_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \delta(\Delta A)_n + \omega A_n - \tilde{\omega} \tilde{A}_n + 2B_n, \quad (3.42)$$

con

$$B_n = \gamma \tanh \frac{2}{\mu} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{\mu}|m-n|} A_m^2 \right) A_n - \gamma \tilde{A}_n^3. \quad (3.43)$$

Para abreviar la escritura, notemos $B = \{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, entonces tenemos

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |F_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)|^2 \right)^{1/2} \leq |\delta| \|\Delta\|_{X,X} \|A\| + |\omega| \|A - \tilde{A}\| + |\omega - \tilde{\omega}| \|\tilde{A}\| + 2\|B\|. \quad (3.44)$$

Los primeros tres términos se anulan cuando $A \rightarrow \tilde{A}$ en X , y $|\delta| \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$. Para estimar $\|B\|$, sea

$$g_n(A, \mu) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{\mu}|m-n|} A_m^2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.45)$$

y notemos

$$\begin{aligned} B &= \gamma(K + L + M), \quad \text{con} \quad K_n = \left(\tanh \frac{2}{\mu} - 1\right) g_n(A, \mu) A_n, \\ L_n &= (g_n(A, \mu) - A_n^2) A_n, \quad M_n = A_n^3 - \tilde{A}_n^3, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Por (3.45), tenemos que $g_n(A, \mu) \leq \|A\|_X^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, luego

$$\|K\|^2 \leq \left| \tanh \frac{2}{\mu} - 1 \right| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n(A, \mu)|^2 A_n^2 \leq \left| \tanh \frac{2}{\mu} - 1 \right| \|A\|^6. \quad (3.47)$$

Además,

$$\|M\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (A_n^2 + A_n \tilde{A}_n + \tilde{A}_n^2)^2 |A_n - \tilde{A}_n|^2 \leq C(\|A\|, \|\tilde{A}\|) \|A - \tilde{A}\|^2, \quad (3.48)$$

con C una constante que depende de $\|A\|$, $\|\tilde{A}\|$, y

$$\|L\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} e^{-k|m-n|} A_m^2 \right)^2 |A_n|^2 \leq e^{-2k} \|A\|^6. \quad (3.49)$$

De (3.47), (3.48), (3.48), y (3.46), deducimos que $\|B\|$ también tiende a cero cuando $\mu \rightarrow 0$, $A \rightarrow \tilde{A}$ en X , como se quería demostrar. ■

Lema 3.2.2 *Dado $c > 0$ consideremos $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ solución de $F = 0$, con $\mathbf{x}_0 = (\tilde{A}, \tilde{\omega})$, $\mathbf{y}_0 = (\delta, \mu) = (0, 0)$, como en (3.10). Entonces $D_1 F$ es continua en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.*

Demostración: Para probar la continuidad de $D_1 F$ en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, debemos mostrar que

$$\|[D_1 F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - D_1 F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)]v\| \leq \beta \|v\|, \quad \forall v \in X, \quad (3.50)$$

con β independiente de v , que satisfaga $\beta \rightarrow 0$ cuando $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ en $X \times Y$.

Sea $v = (\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, v_+)$, $w = (\{w_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, w_+)$, donde

$$w = Mv, \quad M = [D_1 F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - D_1 F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)]. \quad (3.51)$$

Entonces, por (3.11), (3.12), (3.16), (3.17), y $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}_0$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} M_{n,m} v_m + M_{n,+} v_+ \\ &= \delta(\Delta v)_n + (\omega - \tilde{\omega})v_n + 2\gamma \left[\tanh \frac{\kappa}{2} (3A_n^2 + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} e^{-\kappa|m-n|} A_m^2) - 3\tilde{A}_n^2 \right] v_n \\ &\quad + 4\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} e^{-\kappa|m-n|} A_m v_m \right) A_n, \\ &= \delta(\Delta v)_n + (\omega - \tilde{\omega})v_n + 2\gamma(J'_n + K'_n + L'_n), \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde

$$\begin{aligned} J'_n &= 3 \tanh \frac{\kappa}{2} A_n^2 - 3 \tilde{A}_n^2, \quad K'_n = \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} e^{-\kappa|m-n|} A_m^2 \right) v_n, \\ L'_n &= 2 \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} e^{-\kappa|m-n|} A_m v_m \right) A_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Entonces

$$|K'_n| \leq \left| \tanh \frac{\kappa}{2} \right| \|A\|^2 |v_n|, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.54)$$

de donde se deduce que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |K'_n|^2 \leq \left| \tanh \frac{\kappa}{2} \right|^2 \|A\|^4 \|v\|^2. \quad (3.55)$$

De manera similar, por (3.53),

$$J'_n = 3 \left[\left(\tanh \frac{\kappa}{2} - 1 \right) A_n^2 + (A_n^2 - \tilde{A}_n^2) \right], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.56)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |J'_n|^2 &\leq 18 \left[\left(\tanh \frac{\kappa}{2} - 1 \right)^2 \sup_{n \in \mathbb{Z}} |A_n|^4 + \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{A}_n^2 - A_n^2|^2 \right] \|v\|^2 \\ &\leq 18 \left[\left(\tanh \frac{\kappa}{2} - 1 \right)^2 \|A\|^4 + 2 \|A - \tilde{A}\|^2 (\|A\|^2 + \|\tilde{A}\|^2) \right] \|v\|^2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Además, por (3.53),

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |L'_n|^2 &\leq 4 \left| \tanh \frac{\kappa}{2} \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} e^{-\kappa|m-n|} A_m v_m \right|^2 A_n^2 \\ &\leq 4 \left| \tanh \frac{\kappa}{2} \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} e^{-2\kappa|m-n|} A_m^2 \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} v_m^2 \right) A_n^2 \\ &\leq 4 \left| \tanh \frac{\kappa}{2} \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\kappa} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} A_m^2 \right) \|v\|^2 A_n^2 \\ &\leq 4 \left| \tanh \frac{\kappa}{2} \right|^2 e^{-2\kappa} \|A\|^4 \|v\|^2. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Y también,

$$w_+ = \sum_{m \in \mathbb{Z}} M_{+,m} v_n + M_{+,+} v_+ = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} (A_m - \tilde{A}_m) v_m, \quad (3.59)$$

por lo cual

$$w_+^2 \leq 4 \|A - \tilde{A}\|^2 \|v\|^2. \quad (3.60)$$

Combinando los resultados (3.52), (3.55), (3.57), (3.58), (3.60),

$$\|w\|_{\mathbf{X}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n|^2 + |w_+|^2 \leq \beta^2 \|v\|^2, \quad (3.61)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta^2 \leq & 40(\delta\|\Delta\|_{X,X} + (\omega - \tilde{\omega})^2 + \|A - \tilde{A}\|^2 + \gamma^2 |\tanh \frac{\kappa}{2}|^2 \|A\|^4 \\ & + 18[\gamma^2 (\tanh \frac{\kappa}{2} - 1)^2 \|A\|^4 + 2\|A - \tilde{A}\|^2 (\|A\|^2 + \|\tilde{A}\|^2)] + \\ & + 4\gamma^2 |\tanh \frac{\kappa}{2}|^2 e^{-2k} \|A\|^4. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Luego $\beta \rightarrow 0$ cuando $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, que es la condición requerida en (3.50). ■

Lema 3.2.3 Sean $c > 0$, y $\kappa > 0$. Entonces $G : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$, definida como en (3.27) es continua en $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Demostración: Para aplicar el teorema de la función implícita en la demostración del Teorema 3.2.2 sólo se requiere probar la continuidad de G en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (\tilde{A}, \tilde{\omega}, 0)$, con \tilde{A} , $\tilde{\omega}$ definidos como en (3.20) con $S_A = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + m\}$, que es lo que probaremos aquí. Sin embargo, los argumentos que exponaremos pueden extenderse a cualquier $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Analicemos qué sucede con $\|G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\|$ cuando $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A, \omega, \delta)$ tiende a $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ in $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Por un lado tenemos que

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_+(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \|A\|_X^2 - \|\tilde{A}\|_X^2 \rightarrow 0 \quad (3.63)$$

cuando $\|A - \tilde{A}\|_X \rightarrow 0$. Por otra parte, para $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}_0$, $n \in \mathbb{Z}$

$$G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \delta(\Delta A)_n + \omega A_n - \tilde{\omega} \tilde{A}_n + 2|\gamma| \tanh \frac{\kappa}{2} \tilde{B}_n, \quad (3.64)$$

donde

$$\tilde{B}_n = g_n(A)A_n - g_n(\tilde{A})\tilde{A}_n, \quad g_n(A) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} A_m^2. \quad (3.65)$$

Llamando $\tilde{B} = \{\tilde{B}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, tenemos que

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)|^2 \right)^{1/2} \leq |\delta| \|\Delta\|_{X,X} \|A\| + |\omega| \|A - \tilde{A}\| + |\omega - \tilde{\omega}| \|\tilde{A}\| + 2|\gamma| \tanh \frac{\kappa}{2} \|\tilde{B}\|. \quad (3.66)$$

Los tres primeros términos se anulan cuando $A \rightarrow \tilde{A}$ en X , y $|\delta| \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$. Para estudiar lo que ocurre con $\|\tilde{B}\|$, es conveniente reescribir (3.65) en la forma

$$\tilde{B}_n = g_n(A)(A_n - \tilde{A}_n) + (g_n(A) - g_n(\tilde{A}))\tilde{A}_n. \quad (3.67)$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} |\tilde{B}_n| & \leq |g_n(A)| |A_n - \tilde{A}_n| + |g_n(A) - g_n(\tilde{A})| |\tilde{A}_n| \\ & \leq \|A\|^2 |A_n - \tilde{A}_n| + |\tilde{A}_n| \sum_{m \in \mathbb{Z}} |A_m^2 - \tilde{A}_m^2|. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Además,

$$\begin{aligned}
\sum_{m \in \mathbf{Z}} |A_m^2 - \tilde{A}_m^2| &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} |A_m - \tilde{A}_m| |A_m + \tilde{A}_m| \\
&\leq \|A - \tilde{A}\| \left(\sum_{m \in \mathbf{Z}} |A_m + \tilde{A}_m|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2} (\|A\| + \|\tilde{A}\|) \|A - \tilde{A}\|.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Combinando (3.68), (3.69)

$$\|\tilde{B}\|^2 \leq \|A\|^4 \|A - \tilde{A}\|^2 + 2(\|A\| + \|\tilde{A}\|)^2 \|\tilde{A}\|^2 \|A - \tilde{A}\|^2, \tag{3.70}$$

por lo tanto $\|\tilde{B}\| \rightarrow 0$ cuando $\|A - \tilde{A}\| \rightarrow 0$, como queríamos ver. ■

Lema 3.2.4 Sean $c, \kappa > 0$ y $G : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$, definida como en (3.25), (3.26), Entonces D_1G es continua en $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Demostración: Al igual que en la demostración anterior, probaremos sólo la continuidad de D_1G en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (\tilde{A}, \tilde{\omega}, \tilde{\delta})$, con $\tilde{A}, \tilde{\omega}$ como en (3.20) con $S_A = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + m\}$, $\tilde{\delta} = 0$. Esto es lo que necesitamos para aplicar el teorema de la función implícita en el Teorema 3.2.2, sin embargo la demostración que aquí se presenta puede extenderse a un $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ arbitrario.

Para probar la continuidad de D_1G en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, debemos mostrar que

$$\|[D_1G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - D_1G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)]v\| \leq \beta \|v\|, \quad \forall v \in X, \tag{3.71}$$

con β independiente de v , que satisfaga $\beta \rightarrow 0$ cuando $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ en $X \times Y$.

Sea $v = (\{v_n\}_{n \in \mathbf{Z}}, v_+)$, $w = (\{w_n\}_{n \in \mathbf{Z}}, w_+)$, donde

$$w = Mv, \quad M = [D_1G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - D_1G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)]. \tag{3.72}$$

De cómo hemos definido F , y G , en (3.5), (3.8), y (3.25), (3.26) respectivamente, se deduce que $D_1F(A, \omega, \delta, \mu) = D_1G(A, \omega, \delta)$ para todo $\mu = \kappa^{-1}$, i.e. $\mu \neq 0$. Por lo que podemos utilizar (3.16), (3.17) para calcular D_1G . Entonces

$$\begin{aligned}
w_n &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} M_{n,m} v_m + M_{n,+} v_+ \\
&= (\delta - \tilde{\delta})(\Delta v)_n + (\omega - \tilde{\omega})v_n + 2\gamma [\tanh \frac{\kappa}{2} [(g_n(A) - g_n(\tilde{A})) + 2A_n^2 - 2\tilde{A}_n^2] v_n \\
&\quad + 4\gamma [\tanh \frac{\kappa}{2} \left[\left(\sum_{m \in \mathbf{Z}} A_m v_m \right) A_n - \left(\sum_{m \in \mathbf{Z}} \tilde{A}_m v_m \right) \tilde{A}_n \right] \\
&= (\delta - \tilde{\delta})(\Delta v)_n + (\omega - \tilde{\omega})v_n + 2\gamma [\tanh \frac{\kappa}{2} (\tilde{I}_n + \tilde{K}_n + \tilde{L}_n),
\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_n &= (A_n^2 - \tilde{A}_n^2)v_n, & \tilde{K}_n &= \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{-\kappa|m-n|} A_m^2 - e^{-\kappa|m-n|} \tilde{A}_m^2) \right) v_n, \\
 \tilde{L}_n &= \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} e^{-\kappa|m-n|} A_m v_m A_n - \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} e^{-\kappa|m-n|} \tilde{A}_m v_m \tilde{A}_n
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$. Argumentando como en (3.68)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |I_n|^2 \leq 2(\|A\|^2 + \|\tilde{A}\|^2) \|A - \tilde{A}\|^2 \|v\|^2. \tag{3.75}$$

Similarmente

$$|\tilde{K}_n| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |A_m^2 - \tilde{A}_m^2| |v_n|, \tag{3.76}$$

por lo cual, al igual que en (3.68), tenemos que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{K}_n|^2 \leq 2(\|A\|^2 + \|\tilde{A}\|^2) \|A - \tilde{A}\|^2 \|v\|^2. \tag{3.77}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 |\tilde{L}_n| &\leq \left| \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} (A_m - \tilde{A}_m) v_m \|A_n\| \right| + \left| \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} \tilde{A}_m v_m \|A_n - \tilde{A}_n\| \right| \\
 &\leq \|A - \tilde{A}\| \|v\| \|A_n\| + \|\tilde{A}\| \|v\| \|A_n - \tilde{A}_n\|.
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Por lo que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{L}_n|^2 \leq (\|A\|^2 + \|\tilde{A}\|^2) \|A - \tilde{A}\|^2 \|v\|^2. \tag{3.79}$$

Combinando (3.75), (3.77), (3.79), concluimos que

$$\|w\|_{\mathbf{X}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n|^2 + |w_+|^2 \leq \tilde{\beta}^2 \|v\|^2, \tag{3.80}$$

donde

$$\tilde{\beta} \leq |(\delta - \tilde{\delta})| |\Delta|_{X,X} + |\omega - \tilde{\omega}| + 132|\gamma| \tanh \frac{\kappa}{2} (\|A\| + \|\tilde{A}\|)^{1/2} \|A - \tilde{A}\|. \tag{3.81}$$

Por lo tanto $\beta \rightarrow 0$ cuando $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, como queríamos demostrar. ■

3.3. Breathers tipo Shelf

En esta sección mostramos la existencia de breathers con infinitos picos no nulos, que son solución de la ecuación (3.128) para $|\delta| \neq 0$ suficientemente pequeño. En la literatura se utilizan diversas denominaciones para este tipo de breathers, entre ellas *kink solutions* y *front-like*

solutions, en referencia a que poseen un frente no monótono en una dirección con un salto en la interfaz con la dirección en que la solución decae a cero. Aquí hemos optado por la denominación breathers tipo *estante* (shelf-type breathers) que es la que utilizamos en [BBP17].

Consideraremos dos casos dependiendo del tipo de interacción entre sitios asociada con el término no lineal de (3.1): el caso local y el caso no-local, correspondientes a “ $\kappa = \infty$ ” y $\kappa > 0$ arbitrario, respectivamente. En el Teorema 3.3.1 mostraremos la continuación de shelf-type breathers de (3.128) con $\delta = 0$ en el caso en que la interacción es local. En el Teorema 3.3.2 trataremos la continuación de soluciones shelf-type para el caso en que $\kappa > 0$ toma un valor prefijado, i. e. el caso no local.

3.3.1. Caso local

Sea $\omega \in \mathbb{R}$. Para $A \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $\delta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ definimos $F_n : \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_n(A, \delta) = \delta (\Delta A)_n + 2\gamma A_n^3 + \omega A_n, \quad (3.82)$$

donde $(\Delta A)_n = A_{n-1} - 2A_n + A_{n+1}$.

Dado $\alpha > 0$ consideramos los subconjuntos de números enteros $S_0 = \{n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots\} \subset \mathbb{Z}$ y $S_A = \mathbb{Z} \setminus S_0$; y una solución no trivial $A = \tilde{A}$ de $F_n(A, 0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, de forma tal que $A_n \neq 0$ para $n \in S_A$ y $A_n = 0$ para $n \in S_0$. Cuando $\delta = 0$, la ecuación $F_n = 0$ se transforma en

$$-2\gamma|A_n|^2 = \omega, \quad \forall n \in S_A. \quad (3.83)$$

De esta ecuación se deduce que γ y ω deben tener signos opuestos. Una posible solución que cumple con las condiciones anteriores viene dada por

$$\tilde{A}_n = \begin{cases} 0, & \text{if } n \in S_0, \\ \alpha, & \text{if } n \in S_A, \end{cases} \quad (3.84)$$

con $\alpha = \sqrt{-\frac{\omega}{2\gamma}}$.

Observación 3.3.1 *Podemos obtener más soluciones no triviales tomando $A_n < 0$ para todo $n \in S_A$. Más aún, podemos elegir $A_n \neq 0$ para $n \in S_A := S_+ \cup S_-$, con $A_n > 0$ para $n \in S_+$ y $A_n < 0$ para $n \in S_-$ siempre que S_+ sea finito or S_- sea finito. Los argumentos que siguen aplican también a estas soluciones.*

Sea $X = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Y denotemos por $\|\cdot\|_{Z,Y}$ al operador norma aplicado a un operador lineal de Z en Y , siendo ambos espacios de Banach.

Definimos $G : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ como

$$G(B, \delta) = \{G_n(B, \delta)\}_{n \in \mathbb{Z}} = F_n(B + \tilde{A}, \delta), \quad (3.85)$$

con F_n definida en (3.82). Se puede probar que G está bien definida, i.e. si $B \in X$, $\delta \in \mathbb{R}$, entonces $G(B, \delta) \in X$.

Teorema 3.3.1 *Sea G como en (3.85), consideramos la solución $(x_0, y_0) = (0, 0)$ de $G(B, \delta) = 0$. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ y una única función continua $B : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow X$ que satisface $B(0) = 0$ y $G(B(\delta), \delta) = 0$ para todo $\delta \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$.*

La demostración de este teorema se basa, como en la Sección 3.2, en la aplicación del teorema de la función implícita (Teorema 2.4.1), aunque envuelve una dificultad extra que impide extender los argumentos utilizados en los resultados anteriores: en este caso estamos considerando soluciones con infinitos sitios no nulos. Sin embargo decidimos omitirla aquí ya que es esencialmente una simplificación de la que presentaremos para el caso no local en la próxima subsección.

3.3.2. Caso no local

En esta subsección presentaremos resultados de existencia para $\kappa > 0$ arbitrario y $|\delta|$ suficientemente pequeño. Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y $\kappa > 0$. Para $A \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ y $\delta \in \mathbb{R}$ definimos F_n , $n \in \mathbb{Z}$ como

$$F_n(A, \delta) = \delta(\Delta A_n) + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |A_m|^2 \right) A_n + \omega A_n. \quad (3.86)$$

Consideraremos, como antes, una solución no trivial $A = \tilde{A}$ de $F_n(A, 0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, determinada por $\alpha > 0$, y tomamos $S_0 = \{n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots\} \subset \mathbb{Z}$, $S_A = \mathbb{Z} \setminus S_0$, tales que $A_n > 0$ si $n \in S_A$, y $A_n = 0$ si $n \in S_0$. Para $\delta = 0$ en (3.86), la ecuación $F_n = 0$ se transforma en

$$-2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{m \in S_A} e^{-\kappa|m-n|} |A_m|^2 = \omega, \quad \forall n \in S_A. \quad (3.87)$$

Este sistema de infinitas ecuaciones podemos reescribirlo en la forma matricial

$$MJ = \left(-2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \right)^{-1} \omega \varepsilon, \quad (3.88)$$

donde $J_m = A_m^2$, $\varepsilon = [\dots, 1, 1, 1]^T \in \mathbb{R}^{|S_A|}$ y M está implícitamente definida por las ecuaciones (3.87). Llamando $\rho = e^{-\kappa}$ podemos escribir explícitamente a M y su inversa M^{-1} como

$$M = \begin{bmatrix} \dots & & & & \dots \\ & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ & \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ & \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \dots & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \dots & & & & \dots \\ & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 \\ & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ \dots & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.89)$$

El cálculo de M^{-1} utiliza el hecho de que M es Toeplitz. De (3.89) se deduce también que M^{-1} es acotada en X . Luego, podemos calcular al vector J explícitamente como

$$J = \left(-2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2}\right)^{-1} \omega M^{-1} \varepsilon, \quad \text{donde} \quad M^{-1} \varepsilon = \frac{1-\rho}{1+\rho} \left[\dots, 1, 1, 1, \frac{1}{1-\rho}\right]^T.$$

Tomando $\alpha > 0$ tal que $\alpha^2 = \left(-2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2}\right)^{-1} \omega \frac{1-\rho}{1+\rho}$, la solución \tilde{A} a (3.87) resulta ser

$$\tilde{A}_n = \begin{cases} \alpha, & \text{if } n \in S_A, n < n_0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1-\rho}}, & \text{if } n \in S_A, n = n_0, \\ 0, & \text{if } n \in S_0. \end{cases} \quad (3.90)$$

De manera similar, podemos encontrar soluciones no triviales tales que $A_n < 0$ para todo $n \in S_A$. Más aún, como en la Observación 3.3.1, podemos hallar soluciones no triviales tales que $A_n \neq 0$ para $n \in S_A := S_+ \cup S_-$, con $A_n > 0$ para $n \in S_+$ y $A_n < 0$ para $n \in S_-$ siempre que S_+ sea finito o S_- sea finito. Los argumentos que siguen aplican también a estas soluciones.

Ahora definimos $G : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que

$$G(B, \delta) = \{G_n(B, \delta)\}_{n \in \mathbb{Z}} := \{F_n(B + \tilde{A}, \delta)\}_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (3.91)$$

El hecho de que G está bien definida se sigue de los argumentos expresados en la demostración del Lema 3.3.1 que veremos posteriormente.

Teorema 3.3.2 *Sea G como en (3.91) y dados $\omega \in \mathbb{R}$ y $\kappa > 0$. Sea n_0 un entero positivo y $(\tilde{A}, 0)$ of $G(B, \delta) = 0$ una solución no trivial con $S_A = \{\dots, n_0 - 2, n_0 - 1, n_0\}$. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ y una única función continua $B : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow X$ que satisface $B(0) = 0$ y $G(B(\delta), \delta) = 0$ para todo $\delta \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$.*

Demostración: Aplicamos el teorema de la función implícita, como en los teoremas anteriores, alrededor de una solución $(\tilde{A}, 0)$ de $G(B, \delta) = 0$. A continuación precisamos cuál es la derivada

(de Fréchet) de $D_1G(0,0)$ y mostramos que es un isomorfismo lineal de X . La continuidad de G y D_1G en $(0,0)$ la probaremos más adelante en los Lemas 3.3.1 y 3.3.2. Tenemos que

$$D_1G(0,0) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, \quad (3.92)$$

con

$$M_1 = 2c\alpha^2 \begin{bmatrix} \dots & & & & \dots \\ & 1 & \rho & \rho^2 & \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho}} \\ & \rho & 1 & \rho & \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho}} \\ & \rho^2 & \rho & 1 & \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho}} \\ \dots & \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho}} & \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho}} & \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho}} & \frac{1}{1-\rho} \end{bmatrix}, \quad M_2 = \omega \begin{bmatrix} 1-\rho & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-\rho^2 & 0 & \\ 0 & 0 & 1-\rho^3 & \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix},$$

y $\rho = e^{-\kappa}$, $c = 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2}$.

Como M_2 es una matriz diagonal infinita con $1 - \rho \leq M_2(n, n) < 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, para probar que D_1G es un isomorfismo lineal en X alcanza con mostrar que M_1 es inversible. Calculamos explícitamente su inversa

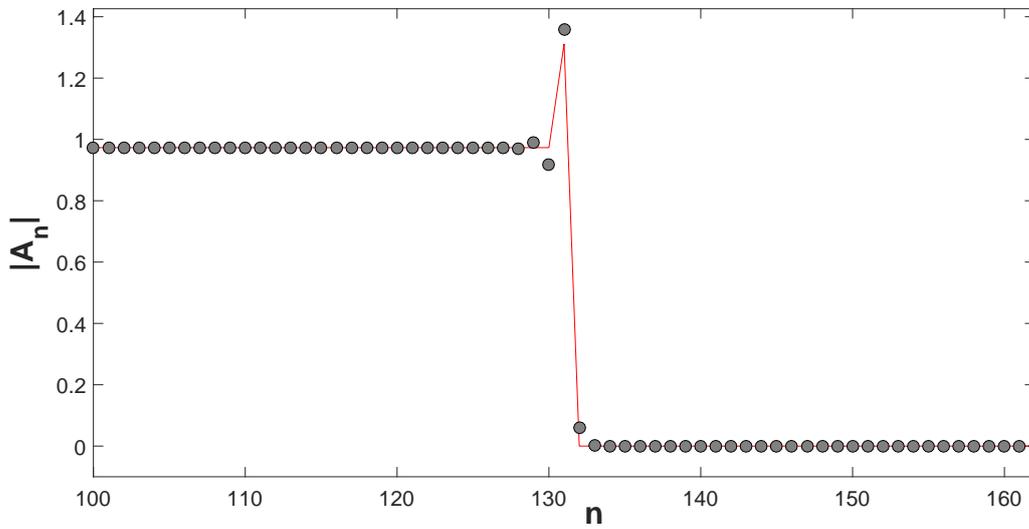
$$M_1^{-1} = \frac{1}{(c\alpha^2)(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} \dots & & & & \dots \\ & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 \\ & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho}} \\ \dots & 0 & 0 & \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho}} & 1-\rho \end{bmatrix},$$

con M_1^{-1} claramente acotada en X . ■

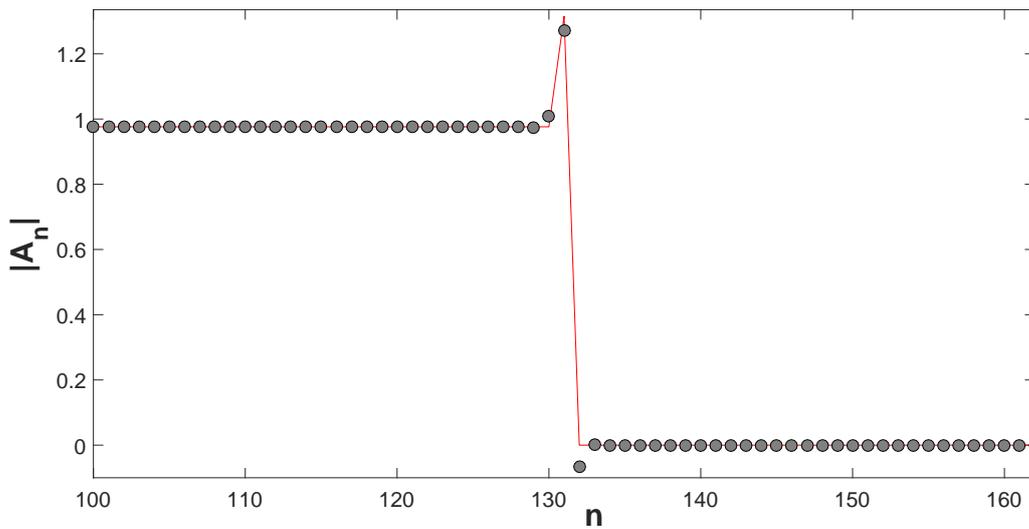
Observación 3.3.2 Hemos omitido la demostración del Teorema 3.3.1 pero remarcamos aquí que el caso no local tiende al caso local cuando $\kappa \rightarrow \infty$, y $\rho = e^{-\kappa} \rightarrow 0$.

Observación 3.3.3 Observmos que [FCET13] propone una ecuación de difusión no lineal discreta cuyas soluciones estáticas satisfacen (3.87) con el término $(1-\omega)A_n + A_n^2$ sumado al miembro derecho de la ecuación (uno puede asumir $A_n > 0$ para todo $n \in S_A$). Los resultados numéricos de [FCET13] sugieren que esta variante de (3.87) también tiene una solución con un máximo en la interfaz.

En la Figura 3.5 presentamos dos ejemplos calculados numéricamente considerando una discretización con 261 nodos ($N=261$), interacción no local dada por $\kappa = 0,8$, acomplamiento lineal $\delta = -0,05$ y $\gamma = -1$ (caso enfocante) y frecuencia $\omega = 1,894097453080216$. Es importante



(a) Los puntos grises representan la solución continuada a partir de la semilla correspondiente calculada para $\delta = 0$ (puntos unidos con línea roja). $N = 261$, $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,05$ (caso enfocante) y $\omega = 1,894097453080216$.



(b) Los puntos grises representan la solución continuada a partir de la semilla correspondiente calculada para $\delta = 0$ (puntos unidos con línea roja). $N = 261$, $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = 0,05$ (caso desenfocante) y $\omega = 1,905888815933016$.

Figura 3.5: Breathers con infinitos picos no nulos consecutivos.

remarcar que aquí el valor de ω está prefijado, a diferencia de lo que ocurría para los breathers con finitos picos calculados en la Sección 3.1 donde era un resultado de aplicar el método de

Newton. Sin embargo, hemos optado por conservar los valores de ω computados en los ejemplos finitos para poder compararlos con aquellos. En la figura se muestran sólo los 63 nodos centrales, encontramos que el comportamiento en la interfaz que se presenta en soluciones de este tipo es análogo al que veíamos en la interfaz de la derecha para soluciones con finitos picos (cf. Figuras 3.2 y 3.3).

Para calcular numéricamente estos breathers hemos aplicado un método de Newton para hallar ceros de G restringiendo la función $G(B, \delta) = \{G_n(B, \delta)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definida en (3.91) al conjunto finito $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$, con $B \in \mathbb{R}^N$. Aquí volvemos a asumir condiciones de Dirichlet, es decir, que B se anula en los bordes. Pero a diferencia de los ejemplos considerados en la Sección 3.2 (donde los breathers presentaban un rápido decaimiento en módulo en sus “colas”), esto implica considerar $A_n + B_n = A_1 \forall n \leq 0$. De donde la discretización finita de (3.86) y (3.91) se convierte, para $n \in \mathcal{I}$, en

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n(B, \delta) &:= \delta(\Delta(\tilde{A}_n + B_n)) + 2 \tanh \frac{\kappa}{2} \frac{e^{-\kappa n}}{1 - e^{-\kappa}} \left| \tilde{A}_1 \right|^2 + & (3.93) \\ &+ 2 \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathcal{I}} e^{-\kappa|m-n|} \left| \tilde{A}_m + B_m \right|^2 \right) (\tilde{A}_n + B_n) + \omega (\tilde{A}_n + B_n). & (3.94) \end{aligned}$$

El segundo término del miembro de la derecha en (3.93) es el que conserva la participación en la interacción no local de los infinitos picos no nulos que descartamos al restringir la función G y la solución $\tilde{A} + B$ a un conjunto finito.

Para terminar con la demostración del Teorema 3.3.2 debemos probar la continuidad de G y $D_1 G$ en $(0, 0)$. Para esto necesitaremos utilizar una versión discreta de la desigualdad de Young. La desigualdad de Young sobre espacios de Banach L^p se encuentra en muchos textos clásicos (e. g. [LL01], cap. 4), sin embargo no es común que aparezca formulada en su versión discreta sobre espacios de Banach ℓ^p y menos aún sobre $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, por lo que hemos añadido su demostración en el Apéndice A.

Teorema 3.3.3 (Desigualdad de Young Discreta)

Sean $p, q, r \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Entonces $u \in \ell^p$, $y \in \ell^q$ implican que $u * v \in \ell^r$ y se cumple que

$$\|u * v\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q. \quad (3.95)$$

Lema 3.3.1 *Dados ω , and $\kappa > 0$, sea G como en (3.91). Entonces G es continua en $(0, 0) \in X \times \mathbb{R}$.*

Demostración: Sea $(B, \delta) \in X \times \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \|G(B, \delta) - G(0, 0)\|_X^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |F_n(B + \tilde{A}, \delta) - F_n(\tilde{A}, 0)|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \delta \Delta(B_n + \tilde{A}_n) + c_{\gamma, \kappa}(B_n + \tilde{A}_n) \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |B_m + \tilde{A}_m|^2 \right. \\ &\quad \left. + \omega(B_n + \tilde{A}_n) - c_{\gamma, \kappa} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} \tilde{A}_m^2 \right) \tilde{A}_n - \omega \tilde{A}_n \right|^2, \end{aligned} \quad (3.96)$$

con $c_{\gamma, \kappa} = 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2}$, y

$$C_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} \left(|B_m + \tilde{A}_m|^2 (B_n + \tilde{A}_n) - \tilde{A}_m^2 \tilde{A}_n \right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.97)$$

Luego

$$\|G(B, \delta) - G(0, 0)\|_X^2 \leq 6 \left(|\delta|^2 \|\Delta\|_{X, X}^2 \|B\|_X^2 + |\omega| \|B\|_X^2 + 2|\gamma| \tanh \frac{\kappa}{2} \|C\|_X^2 \right). \quad (3.98)$$

El primer y segundo término en la última desigualdad tienden a cero cuando $\delta \rightarrow 0$ y $B \rightarrow 0 \in X$.

Por lo tanto basta probar que $\|C\|_X$ tiende a cero cuando $\delta \rightarrow 0$ y $B \rightarrow 0 \in X$. Tenemos que

$$\|C\|_X^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \left(|B_m + \tilde{A}_m|^2 (B_n + \tilde{A}_n) - \tilde{A}_m^2 \tilde{A}_n \right) \right|^2 \quad (3.99)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} |B_m + \tilde{A}_m|^2 B_n + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \left(|B_m + \tilde{A}_m|^2 - \tilde{A}_m^2 \right) \tilde{A}_n \right|^2 \quad (3.100)$$

$$\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} |B_m + \tilde{A}_m|^2 B_n + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} B_m (B_m + 2\tilde{A}_m) \tilde{A}_n \right|^2 \quad (3.101)$$

$$\leq \Gamma(\|B\|, \|A\|_\infty) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} B_n + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} B_m \right|^2, \quad (3.102)$$

con

$$\Gamma(\|B\|, \|A\|_\infty) = 4(\|B\|^2 + \|A\|_\infty^2)^2 + \|A\|_\infty^2 (2\|B\|^2 + 4\|A\|_\infty^2). \quad (3.103)$$

Por lo tanto

$$\|C\|_X^2 \leq 2\Gamma(\|B\|, \|A\|_\infty) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |B_n|^2 \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \right|^2 + \sum_{n \in S_A} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} B_m \right|^2 \right) \quad (3.104)$$

$$\leq 2\Gamma(\|B\|, \|A\|_\infty) \left(\|B\|_X + \left\| \rho^{|\cdot|} * B \right\|_X \right) \quad (3.105)$$

$$\leq 2\Gamma(\|B\|, \|A\|_\infty) \left(\|B\|_X + \left\| \rho^{|\cdot|} \right\|_1 \|B\|_X \right). \quad (3.106)$$

La última desigualdad se sigue de la desigualdad de Young (3.95) con $u = \rho^{|\cdot|}$, $v = B$, $r = 2$, $p = 1$ y $q = 2$. Por (3.103), (3.106) $\|C\|_X$ tiende a cero si $\|B\|_X$ tiende a cero. ■

Lema 3.3.2 Sean ω y $\kappa > 0$. Consideramos la función $G : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ definida en (3.91). Entonces D_1G es continua en $(\tilde{A}, 0)$.

Demostración: Debemos probar que existe β tal que

$$\| [D_1G(B, \delta) - D_1G(0, 0)] v \| \leq \beta \|v\|, \quad \forall v \in X, \quad (3.107)$$

y $\beta \rightarrow 0$ cuando $(B, \delta) \rightarrow 0 \in X \times \mathbb{R}$. Ya hemos determinado $D_1G(0, 0)$ en la prueba del Teorema 3.3.2. Ahora calcularemos $D_1G(B, \delta)$ con $B \neq 0$, y $\delta \neq 0$, la cual (hemos chequeado) está dada por sus derivadas parciales. Para $n \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\frac{\partial G_n}{\partial B_n}(B, \delta) = -2\delta + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{-|m-n|} |B_m + \tilde{A}_m|^2 + 2(B_n + \tilde{A}_n)^2 \right) + \omega, \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial B_m}(B, \delta) = \delta + 4\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\rho^{|m-n|} |B_m + \tilde{A}_m| \right) (B_n + \tilde{A}_n), \quad m \in \{(n-1), (n+1)\}, \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial B_m}(B, \delta) = 4\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\rho^{|m-n|} |B_m + \tilde{A}_m| \right) (B_n + \tilde{A}_n), \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{(n-1), n, (n+1)\}. \quad (3.110)$$

Sea $v \in X$, llamamos $M = D_1G(B, \delta) - D_1G(0, 0)$ y $w = Mv$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$w_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} M_{n,m} v_m = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial G_n}{\partial B_m}(B, \delta) - \frac{\partial G_n}{\partial B_m}(0, 0) \right) v_m \quad (3.111)$$

$$= \delta (\Delta v)_n + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \left(|B_m + \tilde{A}_m|^2 - |\tilde{A}_m|^2 \right) v_n \quad (3.112)$$

$$+ 4\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \left(|B_m + \tilde{A}_m| (B_n + \tilde{A}_n) - |\tilde{A}_m| \tilde{A}_n \right) v_m \quad (3.113)$$

$$= \delta (\Delta v)_n + 2|\gamma| \tanh \frac{\kappa}{2} (K_n + 2J_n), \quad (3.114)$$

donde

$$K_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \left(|B_m + \tilde{A}_m|^2 - |\tilde{A}_m|^2 \right) v_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.115)$$

$$J_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \left(|B_m + \tilde{A}_m| (B_n + \tilde{A}_n) - |\tilde{A}_m| \tilde{A}_n \right) v_m, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.116)$$

Entonces

$$\|w\|_X \leq |\delta| \|\Delta\|_{X \times X} \|v\|_X + 2|\gamma| \tanh \frac{\kappa}{2} \|K\|_X + 4|\gamma| \tanh \frac{\kappa}{2} \|J\|_X. \quad (3.117)$$

Observar que por (3.115)

$$|K_n| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \left(B_m^2 + 2|B_m| |\tilde{A}_m| \right) |v_n|,$$

por lo que

$$\|K\|_X^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \left(B_m^2 + 2|B_m| |\tilde{A}_m| \right) |v_n| \right|^2 \quad (3.118)$$

$$\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|B\|_\infty (\|B\|_\infty + \|\tilde{A}\|_\infty) \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} |v_n| \right|^2 \quad (3.119)$$

$$\leq \|B\|_\infty (\|B\|_\infty + \|\tilde{A}\|_\infty) \left\| \rho^{|\cdot|} \right\|_1^2 \|v\|_X^2, \quad (3.120)$$

usando la desigualdad de Young (3.95) con $u = \rho^{|\cdot|}$, $r = 2$, $p = 1$ y $q = 2$. Por otra parte, de (3.116) se deduce que

$$|J_n| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \left(|B_m| |B_n| + |B_m| |\tilde{A}_n| + |B_n| |\tilde{A}_m| \right) |v_m|, \quad (3.121)$$

por lo que

$$\|J\|_X^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} \left(|B_m| |B_n| + |B_m| |\tilde{A}_n| + |B_n| |\tilde{A}_m| \right) |v_m| \right|^2 \quad (3.122)$$

$$\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|B\|_\infty (\|B\|_\infty + 2\|\tilde{A}\|_\infty) \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho^{|m-n|} |v_m| \right|^2 \quad (3.123)$$

$$\leq \|B\|_\infty (\|B\|_\infty + 2\|\tilde{A}\|_\infty) \left\| \rho^{|\cdot|} \right\|_1^2 \|v\|_X^2, \quad (3.124)$$

utilizando una vez más la desigualdad de Young.

Reemplazando (3.118) y (3.123) en (3.117) tenemos que

$$\|w\| \leq \left(|\delta| \|\Delta\|_{X \times X} + 6|\gamma| \tanh \frac{\kappa}{2} \|B\| (\|B\| + 2\|\tilde{A}\|_\infty) \left\| \rho^{|\cdot|} \right\|_1 \right) \|v\|. \quad (3.125)$$

De (3.112), (3.125) concluimos que (3.107) con β tendiendo a cero cuando $(B, \delta) \rightarrow 0 \in X \times \mathbb{R}$, como se quería demostrar. ■

3.4. Breathers que minimizan el hamiltoniano

En las secciones previas hemos probado la existencia de breathers para δ suficientemente pequeño. En esta sección se prueba la existencia de breathers para δ y γ arbitrarios de igual signo (caso enfocante) utilizando argumentos de minimización del hamiltoniano.

Recordemos la ecuación DNLS con la que estamos trabajando

$$i\ddot{u}_n = -\delta(\Delta u)_n - 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 \right) u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.126)$$

con δ, γ, κ constantes reales, $\kappa > 0$.

Recordemos además que esta ecuación puede derivarse formalmente del hamiltoniano

$$H = \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_{n+1} - u_n|^2 - \gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m|^2 e^{-\kappa|m-n|} |u_n|^2. \quad (3.127)$$

y que la potencia $P(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2$ es una cantidad conservada.

Consideramos nuevamente soluciones de la ecuación (3.126) de tipo breather $u_n = e^{-i\omega t} A_n$, con ω real, y $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ independiente de t . Como hemos visto anteriormente, tal A satisface

$$-\omega A_n = \delta(A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n) + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |A_m|^2 \right) A_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.128)$$

Sea $\|\cdot\|_p$ la norma usual de ℓ^p para funciones en \mathbb{Z} a valores complejos. Denotemos $Y = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ con la norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

Sea $\{\hat{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la base canónica en Y .

Dado $\lambda > 0$ definimos

$$I_\lambda := \inf\{H(v) : v \in Y, P(v) = \lambda\}. \quad (3.129)$$

Una configuración $A_* \in Y$, $P(A_*) = \lambda$, que satisface $H(A_*) = I_\lambda$ es llamada *minimizador* o *estado fundamental* (de H con potencia $P = \lambda$). Llamamos \mathcal{M}_λ al conjunto de todos los minimizadores de H con potencia λ . Para $q \in \mathbb{Z}$, $\tau_q A$ representa una *traslación* de A en q nodos, i.e. $(\tau_q A)_n := A_{n-q}$. La operación de multiplicar $A \in Y$ por un escalar $e^{i\phi}$, $\phi \in \mathbb{R}$, es lo que llamaremos un *cambio global de fase*. Se puede chequear fácilmente que las traslaciones y los cambios globales de fase dejan invariantes la potencia P y el hamiltoniano H .

Teorema 3.4.1 *Sean $\delta, \gamma > 0$. Para cada $\lambda > 0$, el conjunto \mathcal{M}_λ es no vacío, y si $A \in \mathcal{M}_\lambda$ entonces A satisface la ecuación (3.128).*

Demostración: Presentaremos sólo un bosquejo de la demostración. Para probar que el conjunto \mathcal{M}_λ es no vacío utilizamos una versión discreta del principio de concentración-compacidad de Lions, siguiendo [S07], [P05], [M05], [W99]. El funcional H tiene la forma $H = \delta H_2 - \gamma V$, con H_2, V funcionales homogéneos cuadrático y cuártico respectivamente, esto es: $H_2(\alpha u) = \alpha^2 H_2(u)$ y $V(\alpha u) = \alpha^4 V(u)$. Además ambos son positivos para todo $u \neq 0$ en X . Además, dado que $H_2(u) \geq 0$ y que $V(u) \leq \tanh \frac{\kappa}{2} \|u\|_2^4$, resulta que $H(u) \geq -\gamma \tanh \left(\frac{\kappa}{2}\right) \lambda^2$, por lo que H está acotado inferiormente.

La versión discreta del lema de concentración-compacidad, ver [P05], secciones 3 y 4, afirma que existen tres únicas posibilidades mutuamente excluyentes: separación (splitting), anulación

(vanishing), y convergencia (bajo traslaciones), indicada por el número Γ en [P05], (3.13). El objetivo es mostrar que hay convergencia para todo $\lambda > 0$, probando que los otros dos escenarios no son posibles. Para descartar el caso de separación se utiliza la propiedad subaditiva (Lemma 4.3, [P05]), y un lema discreto análogo al Lema 4.4 de [PM14]. Estos argumentos son válidos para todo $\lambda > 0$. Para descartar el caso de anulación para un $\lambda > 0$ dado, alcanza con encontrar una función test $f \in X$, con $P(f) = \lambda$ y $H(f) < 0$. Utilizaremos las funciones

$$f = Cg, \quad g \in X, \quad C = \sqrt{\lambda} \|g\|^{-1}. \quad (3.130)$$

Entonces $P(f) = \lambda$, y la condición $H(f) < 0$ se transforma en

$$\frac{\delta \|Dg\|^2 \|g\|^2}{\gamma V(g)} < \lambda, \quad (3.131)$$

donde $(Dg)_n = g_{n+1} - g_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Utilizamos las funciones $(g)_n = e^{-\alpha|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$, con $\alpha > 0$ (como en [W99]) para ver que

$$\|Dg\|^2 \|g\|^2 = 2 + O(\alpha), \quad V(g) \geq \|g\|_4^4 = \frac{1}{2\alpha} + O(1), \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (3.132)$$

Entonces, dado $\lambda > 0$, el miembro izquierdo de la inecuación (3.131) puede hacerse tan chico como se desee tomando $\alpha > 0$ suficientemente pequeño. Consecuentemente, una secuencia de funciones minimizantes convergerá (bajo traslaciones y cambios de fases) al ínfimo y, por lo tanto, \mathcal{M}_λ resulta no vacío para todo $\lambda > 0$.

Se puede chequear que $H : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 y que $H'(A) - \omega P'(A) = 0$ implica que A es solución de (3.128). ■

A continuación introducimos las definiciones de tres propiedades que veremos que (bajo traslaciones y cambios de fase) cumplen los minimizadores de la energía. Decimos que $A \in Y$ es *real y positiva* si $A_n \in \mathbb{R}$ y $A_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si se cumple que $\forall n \in \mathbb{Z}, A_{-n} = A_n$ diremos que A es *reflexivamente simétrica*. Y si $A_a \geq A_b$, para todo par de números naturales tales que $a < b$, diremos que A es *no creciente* (sobre \mathbb{N}).

Teorema 3.4.2 *Sean δ y $\gamma > 0$. Para cada $\lambda > 0$ si $A \in \mathcal{M}_\lambda$ entonces existe $\phi \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Z}$ tales que $A = e^{i\phi} \tau_q \bar{A}$, con \bar{A} real y positiva, reflexivamente simétrica y no creciente.*

En primer lugar definiremos una operación de *simetrización* que transforma a cualquier sucesión $u \in Y = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ en otra $w \in Y$ que es real, no negativa y simétrica con respecto al origen. Además esta operación preserva la norma ℓ^2 y disminuye el valor de H , i. e., $H(v) \geq H(w)$.

Siguiendo la teoría de series de Fourier, para $f \in Y$ definimos $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.133)$$

Así definida \tilde{f} resulta ser una función 2π -periódica. Además, llamando S^1 al intervalo $[0, 2\pi]$ e identificando a 0 y 2π , se puede chequear fácilmente que $\tilde{f} \in L^2(S^1, \mathbb{C})$ aplicando la identidad de Parseval,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} |\tilde{f}(x)|^2 dx. \quad (3.134)$$

Más aún, la ecuación (3.133) define un isomorfismo entre Y y $L^2(S^1, \mathbb{C})$. La inversa de este isomorfismo está dada por

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.135)$$

i.e. \tilde{f} es la transformada inversa de Fourier de f .

Sea $u \in Y$, con \tilde{u} como en (3.133), definimos v y w

$$v_n := \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} |\tilde{u}(x)| e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.136)$$

y

$$w_n := |v_n|, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.137)$$

De la identidad de Parseval (3.134) se sigue que $\|w\| = \|v\| = \|u\|$, por lo que v y $w \in Y$.

Además, dado que $e^{-inx} = (e^{inx})^*$, de (3.136) se desprende que $v_{-n} = v_n^*$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Y en consecuencia, por (3.137) tenemos que

$$w_{-n} = w_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.138)$$

Así, a partir de $u \in Y$ hallamos $w \in Y$ que es real, positiva y reflexivamente simétrica, con $\|w\| = \|u\|$. El siguiente lema muestra que las sucesiones que hemos definido disminuyen el valor de H .

Lema 3.4.1 *Dada $u \in Y$, podemos construir $v, w \in Y$ definidas como en (3.136), (3.137), que verifican $H(w) \leq H(v) \leq H(u)$.*

Demostración: Analicemos primero la parte cuártica de H , que hemos llamado V . Sea $g_n = e^{-\kappa|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$, su antitransformada viene dada por

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|n|} e^{inx} = \frac{1 - e^{-2\kappa}}{1 - 2e^{-\kappa} \cos x + e^{-2\kappa}}. \quad (3.139)$$

Observemos que $|\tilde{g}(x)| = \tilde{g}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (recordar que $\kappa > 0$).

Además,

$$V(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 g_{n-m} |u_m|^2 \quad (3.140)$$

$$= \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(x) \tilde{u}(y) \tilde{u}^*(y+x) \tilde{u}(z) \tilde{u}^*(z-x) dx dy dz \quad (3.141)$$

$$\leq \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(x) |\tilde{u}(y)| |\tilde{u}^*(y+x)| |\tilde{u}(z)| |\tilde{u}^*(z-x)| dx dy dz. \quad (3.142)$$

De la definición de v en (3.136) y el isomorfismo entre Y y $L^2(S^1, \mathbb{C})$ se deduce que $|\tilde{u}(x)| = \tilde{v}(x)$, en casi todo punto (c.t.p.) $x \in S^1$, de esta forma el miembro de la derecha de (3.142) es $V(v)$.

Por lo tanto

$$V(u) \leq V(v). \quad (3.143)$$

Por otra parte, por cómo definimos w en (3.137), tenemos que $V(v) = V(w)$, por lo que

$$V(u) \leq V(v) \leq V(w). \quad (3.144)$$

Analicemos ahora la parte cuadrática de H , que hemos llamado H_2 , tenemos que

$$u_{n+1} - un = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(x) (e^{-ix} - 1) e^{-inx} dx \quad (3.145)$$

de donde aplicando Parseval (3.134) e identidades trigonométricas resulta

$$H_2(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{2} |\tilde{u}(x)|^2 dx = H_2(v), \quad (3.146)$$

la última igualdad es válida ya que $|\tilde{u}(x)| = \tilde{v}(x)$, c.t.p. $x \in S^1$. Además utilizando la definición de w en (3.137), tenemos que

$$H_2(v) = \sum_{n \in \mathbb{R}} |v_{n+1} - v_n|^2 \geq \sum_{n \in \mathbb{R}} ||v_{n+1}| - |v_n||^2 = H_2(w), \quad (3.147)$$

Combinando (3.146) con las inecuaciones (3.144) y (3.147) concluimos que $H(u) \geq H(v) \geq H(w)$, como se quería demostrar. ■

Por cómo definimos v en (3.136) se tiene que

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(x)| dx \geq 0; \quad |v_n| \leq v_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.148)$$

Combinando con la definición de w en (3.137) se obtiene

$$w_n \leq w_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (3.149)$$

es decir que w alcanza su máximo en el origen.

La segunda operación que reduce H conservando invariante la norma ℓ^2 se realiza reemplazando $u \in Y$ por un reacomodamiento no creciente. Para establecer esta operación es útil definir al siguiente conjunto.

Definición 3.4.1 *Llamamos \mathcal{S} al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen simultáneamente:*

- (i) $f_{-n} = f_n, \forall n > 0$,
- (ii) $f_0 > 0$,
- (iii) $f_0 \geq f_n \geq 0, \forall n > 0$, y
- (iv) $f_n \rightarrow 0$ cuando $|n| \rightarrow \infty$.

Observemos que \mathcal{S} es unión disjunta de sus subconjuntos \mathcal{S}^+ , \mathcal{S}^0 , y \mathcal{S}^F , donde $f \in \mathcal{S}^+$ si $f_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}$; $f \in \mathcal{S}^0$ si existe n tal que $f_n = 0$ y $f_n \neq 0$ para infinitos valores de $n \in \mathbb{Z}$, y $f \in \mathcal{S}^F$ si el conjunto de los n para los cuales $f_n \neq 0$ es finito.

Dada $f \in \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^0$, sea f^j el j -ésimo valor más grande de f , comenzando desde $j = 1$, i.e. $f^1 = f_0$, y $j \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$. Este reordenamiento puede extenderse a toda $f \in \mathcal{S}$. En particular si $f \in \mathcal{S}^F$, entonces f toma un número finito $\mathcal{T}(f)$ de valores positivos; por lo que $f^j, j \leq \mathcal{T}(f)$ es el j -ésimo valor más grande que toma f , comenzando desde $j = 1$, y consideramos $f^j = 0$, para todo $j > \mathcal{T}(f)$.

Dado un subconjunto $J \subset \mathbb{Z}$, llamaremos χ_J a la función característica de J . Utilizaremos también la notación abreviada $\chi_{f \geq a}$ para representar a la función característica del conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : f_n \geq a\}$. Se puede observar que el soporte de la función $\chi_{f \geq f^j}$ es finito, para toda $f \in \mathcal{S}$, y $j \geq 1$. En lo que sigue $\text{sop}\chi_J$ denota al soporte de la función χ_J y $\chi_J(n)$ representa el valor que toma en el lugar n . Será útil también establecer algunas nomenclaturas que necesitaremos en lo sucesivo.

Definición 3.4.2 *Sea \mathcal{I}^S la familia de conjuntos finitos $I \subset \mathbb{Z}$ que satisfacen que $0 \in I$, y que si $n \in I$ entonces $-n \in I$. Sea m tal que $|I| = 2m + 1$, llamamos \bar{I} al conjunto de $2m + 1$ enteros consecutivos desde $-m$ a m .*

Dada $f \in \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^F$, fijamos $f^j > 0$ y consideramos $I = \{n \in \mathbb{Z} : f_n \geq f^j\} = \text{sop}\chi_{f \geq f^j}$. Entonces $I \in \mathcal{I}^S$ y definimos $\bar{\chi}_{f \geq f^j} := \chi_{\bar{I}}$.

Para cada $f \in \mathcal{S}$ definimos su *reacomodamiento simétrico no creciente* como la función $\bar{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^{\infty} (f^j - f^{j+1}) \bar{\chi}_{f \geq f^j}. \quad (3.150)$$

Es fácil ver que $\bar{f} \in \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^F$, y que $\bar{f}_m \leq \bar{f}_n$ para todo $m > n \geq 0$. Además vale la siguiente proposición.

Proposición 3.4.1 *Si $f \in \mathcal{S}$ entonces*

$$g_n = \sum_{j=1}^{\infty} (f^j - f^{j+1}) \chi_{f \geq f^j}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.151)$$

coincide con f , i.e. $g_n = f_n, \forall n \in \mathbb{Z}$. Si además $f \in \mathcal{S} \cap \ell^1$, entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{f}_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n. \quad (3.152)$$

Demostración: Sea $n \in \mathbb{Z}$.

Si $f_n = 0$ entonces todos los términos de la serie (3.152) que define a g_n se anulan, ya que se anula alguno de los dos factores en (3.151). En efecto, para los j tales que $f^j > 0$, n no está en el soporte de la función característica $\chi_{f \geq f^j}$ y, para los j tales que $f^j = 0$, dado que la sucesión $\{f^j\}_{j \geq 1}$ es no-negativa y decreciente, resulta $f^j - f^{j+1} = 0$. Luego $g_n = 0 = f_n$.

Por otra parte, si $f_n = f^m > 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\chi_{f \geq f^j}(n) = 1$ si $j \geq m$, y $\chi_{f \geq f^j}(n) = 0$ si $j < m$ y, dado que $f^j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$, resulta

$$g_n = \sum_{j=m}^{\infty} (f^j - f^{j+1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (f^m - f^N) = f^m = f_n. \quad (3.153)$$

Para probar la segunda afirmación consideramos primero el caso $f \in \mathcal{S}^+$. Para cada $j \in \mathbb{Z}^+$, definimos $\mathcal{N}(f^j) = \{n \in \mathbb{Z} : f_n = f^j\}$. Estos conjuntos $\mathcal{N}(f^j)$ son finitos, disjuntos, y su unión es \mathbb{Z} . Más aún el conjunto de valores $f^j, j \in \mathbb{Z}^+$, es el conjunto de todos los valores que toma f , y se cumple que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n = \sum_{j=1}^{\infty} f^j |\mathcal{N}(f^j)|. \quad (3.154)$$

Además $\mathcal{N}(f^j) = \text{sop} \chi_{f \geq f^j}$. Por lo que de (3.154) se deduce que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n = \sum_{j=1}^{\infty} f^j |\chi_{f \geq f^j}| = \sum_{j=1}^{\infty} f^j |\bar{\chi}_{f \geq f^j}|, \quad (3.155)$$

dado que el soporte de $\chi_{f \geq f^j}$ pertenece a \mathcal{I}^S . Se puede chequear que $\bar{f}^j = f^j$, y que $\bar{\chi}_{f \geq f^j} = \chi_{\bar{f} \geq \bar{f}^j}, \forall j \in \mathbb{Z}^+$. Luego (3.155) implica que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{f}^j |\chi_{\bar{f} \geq \bar{f}^j}| = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{f}^j \mathcal{N}(\bar{f}^j) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{f}_n. \quad (3.156)$$

El caso $f \in \mathcal{S}^0$ es similar. Observamos en este caso que el conjunto de enteros n tales que $f_n = 0$ no está incluido en la sumatoria de (3.154), ya que solo sumamos sobre los valores positivos de f . El conjunto de valores positivos de f es, en este caso, precisamente el conjunto de los f^j , con $j \in \mathbb{Z}^+$, por lo que se puede aplicar los mismos razonamientos ya que los conjuntos $\mathcal{N}(f^j)$ satisfacen las mismas propiedades.

Por último, si $f \in \mathcal{S}^F$ solo sumamos sobre los valores f^j , $j \leq \mathcal{T}(f)$ en (3.154). Es decir que se trata de una suma finita. Pero nuevamente aplican los mismos razonamientos ya que los conjuntos $\mathcal{N}(f^j)$, $1 \leq j \leq \mathcal{T}(f)$, satisfacen las mismas propiedades. ■

Corolario 3.4.1 *Para toda $h \in \mathcal{S} \cap \ell^p$, $p > 0$, se cumple que $\|\bar{h}\|_p = \|h\|_p$.*

Demostración: Se sigue de la segunda conclusión de la Proposición 3.4.1, reemplazando $f_n = (h_n)^p$. ■

Por cómo hemos definido a la sucesión $w \in Y$ a partir de $u \in Y$ en (3.136), (3.137), y por las propiedades que hemos demostrado que cumple, es claro que $w \in \mathcal{S} \cap \ell^2$, y podemos aplicarle la operación que transforma esta sucesión en otra simétrica y no creciente, que llamaremos \bar{w} , y que satisface $\|\bar{w}\|_2 = \|w\|_2$. Nuestro objetivo ahora es probar que $H(\bar{w}) \leq H(w)$, para lo cual necesitaremos demostrar primero el Lema 3.4.2 sobre reordenamientos de formas cuadráticas. Este lema es un caso particular (en versión discreta) de la desigualdad del reordenamiento de Riez, ver por ejemplo [LL01] (pág. 84).

Sea $k \in \mathbb{N}$ y sean I, J dos subconjuntos finitos de \mathbb{Z} . Definimos

$$Q(I, k, J) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \chi_I(n) \mathcal{H}_k(m - n) \chi_J(m), \quad (3.157)$$

donde $\mathcal{H}_k(n) = 1$ si $|n| \leq k$, y se anula en otro caso.

Observar que por cómo está definida \mathcal{H} es de esperar que, para un k fijo, $Q(I, k, J)$ sea más grande cuanto menos distanciados se encuentren los elementos de los conjuntos I y J ; lo que nos conduce al siguiente lema.

Lema 3.4.2 *Dados $I, J \in \mathcal{I}^S$, consideramos los correspondientes \bar{I}, \bar{J} , como en la Definición 3.4.2. Supongamos además que $I \subseteq J$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$*

$$Q(\bar{I}, k, \bar{J}) \geq Q(I, k, J). \quad (3.158)$$

Además, fijados I y J , la desigualdad es estricta para al menos un valor de k , excepto que $\bar{I} = I$ y $\bar{J} = J$.

Demostración: Sea $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos primero el caso $I = J$. Sean $1 \leq j_1 < j_2, \dots, < j_m$ los números positivos que componen a J . Entonces $|J| = 2m + 1$. Una *rendija* G de J es un conjunto simétrico de valores consecutivos $j \in \mathbb{Z}$ que no están en J y que satisfacen $0 < j_\lambda < j < j_{\lambda+1}$ o bien $-j_{\lambda+1} < j < -j_\lambda$ para un par de números positivos $j_\lambda < j_{\lambda+1}$ en J . Esta definición implica que $g = j_{\lambda+1} - j_\lambda > 1$ y que G consiste de $2g > 0$ elementos. Una rendija queda determinada por un par de valores $j_\lambda, j_{\lambda+1}$, a los que en lo sucesivo llamaremos *bordes* (positivos).

Si $J = \bar{J}$, entonces J no tiene rendijas. Probaremos primero que quitando las rendijas en I y J simultáneamente aumenta Q . Luego generalizaremos al caso $I \subset J$.

Dada una rendija G determinada por los valores $j_\lambda, j_{\lambda+1}$ de J , consideremos el conjunto $J_{\text{sub}G} \in \mathcal{I}^S$ (que resulta de eliminar de J la rendija G) cuyos elementos positivos son todos los $j \in J$ que satisfacen $j \leq j_\lambda$, y todos los $j - g, j \in J$ que satisfacen $j \geq j_\lambda + g + 1$. Es fácil ver que $Q(J_{\text{sub}G}, k, J_{\text{sub}G}) \geq Q(J, k, J)$. Repitiendo sucesivamente la eliminación de rendijas obtenemos $Q(\bar{J}, k, \bar{J}) \geq Q(J, k, J)$.

En el caso en que $I \subseteq J$ pero no son iguales, utilizamos la misma definición de rendija. Primero eliminamos las rendijas de J cuyos valores positivos son mayores que el máximo de I . Llamamos J_1 al conjunto resultante, y se comprueba fácilmente que $Q(I, k, J_1) \geq Q(I, k, J)$. Además $I \subseteq J_1$, más aún, el resto de las rendijas de J_1 son también rendijas de I , de lo contrario habría elementos de I que no estarían en J_1 . Eliminando ahora todas las rendijas de J_1 de ambos conjuntos: I y J_1 obtenemos los conjuntos que llamaremos I_2 , y J_2 respectivamente. Así tenemos $J_2 = \bar{J}$, y fácilmente se comprueba que $Q(I_2, k, \bar{J}) \geq Q(I_2, k, J_1)$. Además $I_2 \subseteq \bar{J}$. Si $I_2 \neq \bar{J}$, entonces I_2 todavía tiene rendijas y las eliminaremos hasta obtener \bar{I} . Nuevamente se puede chequear que $Q(\bar{I}, k, \bar{J}) \geq Q(I_2, k, \bar{J})$.

Por último, como lo realizado hasta aquí vale para cada $k \in \mathbb{N}$, se puede chequear fácilmente que en cada uno de los pasos realizados en los párrafos previos, la eliminación de una rendija conduce a una desigualdad estricta para cualquier valor de $k \geq 1$. Por caso, la relación $I \subseteq J$ implica que en cada etapa de eliminación de las rendijas con elementos comunes, al achicarse la distancia entre los elementos, crecerá para cada i en el conjunto más chico la cantidad de j 's en el conjunto más grande que satisfacen la desigualdad $|i - j| \leq k$. Este incremento será estricto para los elementos en los bordes de la rendija, para todo $k \geq 1$. ■

Lema 3.4.3 *Dada una sucesión $w \in \mathcal{S} \cap Y$ y su correspondiente simetrización no creciente $\bar{w} \in Y$, se cumple que $H(\bar{w}) \leq H(w)$. Además la desigualdad es estricta, excepto que $w = \bar{w}$.*

Demostración: Primero consideramos la parte cuártica V . Consideramos las sucesiones $f_n = w_n^2$ y $\bar{f}_n = \bar{w}_n^2, \forall n \in \mathbb{Z}$, i.e. $f, \bar{f} \in \mathcal{S} \cap \ell^1$ y la función $g(n) = e^{-\kappa|n|}, \forall n \in \mathbb{Z}$. Utilizando la

proposición 3.4.1 y la definición de \mathcal{H}_k que sigue a (3.157) podemos escribir $g = \sum_{j=1}^{\infty} (g^j - g^{j+1})\mathcal{H}_j$. Entonces,

$$V(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_n g(n-m) f_m \quad (3.159)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{j_1=1}^{\infty} a_{j_1} \chi_{f \geq f^{j_1}}(n) \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} b_j \mathcal{H}_j(m-n) \right] \left[\sum_{j_2=1}^{\infty} a_{j_2} \chi_{f \geq f^{j_2}}(m) \right], \quad (3.160)$$

con $a_j = f^j - f^{j+1}$, $b_j = g^j - g^{j+1}$.

Dado que w es sumable en ℓ^2 y que la convolución con g define un operador acotado en Y , podemos intercambiar el orden en las sumas.

Por lo tanto tenemos

$$V(w) = \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{\infty} a_{j_1} b_j a_{j_2} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \chi_{f \geq f^{j_1}}(n) \mathcal{H}_j(m-n) \chi_{f \geq f^{j_2}}(m) \right] \quad (3.161)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{\infty} a_{j_1} b_j a_{j_2} Q(\text{supp} \chi_{f \geq f^{j_1}}, j, \text{supp} \chi_{f \geq f^{j_2}}). \quad (3.162)$$

Además, dado que $\text{supp} \chi_{f \geq f^j} \subseteq \text{supp} \chi_{f \geq f^{j'}}$ si $f^j \geq f^{j'}$, podemos aplicar el Lema (3.4.2) a los soportes de $\chi_{f \geq f^j}$ y de esa forma obtenemos de (3.162) que

$$V(w) \geq \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{\infty} a_{j_1} b_j a_{j_2} Q(\text{supp} \bar{\chi}_{f \geq f^{j_1}}, j, \text{supp} \bar{\chi}_{f \geq f^{j_2}}) \quad (3.163)$$

$$= V(\bar{w}). \quad (3.164)$$

Como afirma el mencionado lema la desigualdad es estricta excepto que se cumpla

$$Q(\text{supp} \chi_{f \geq f^{j_1}}, j, \text{supp} \chi_{f \geq f^{j_2}}) = Q(\text{supp} \bar{\chi}_{f \geq f^{j_1}}, j, \text{supp} \bar{\chi}_{f \geq f^{j_2}}), \quad (3.165)$$

para todo j_1, j_2 . En cuyo caso se tiene que $\bar{w} = w$.

La parte cuadrática H_2 puede reescribirse como

$$H_2(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (w_{n+1}^2 + w_n^2 - 2w_n w_{n+1}) = 2 \|w\|^2 - 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n w_{n+1}, \quad (3.166)$$

Y definimos H_2^+ como

$$H_2^+(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (w_{n+1}^2 + w_n^2 + 2w_n w_{n+1}) = 2 \|w\|^2 + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n w_{n+1}. \quad (3.167)$$

Para probar que $H_2(\bar{w}) \leq H_2(w)$ alcanza con mostrar que $H_2^+(\bar{w}) \geq H_2^+(w)$. Reescribimos

$$H_2^+(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} w_n M(n-m) w_m, \quad (3.168)$$

con $M(0) = 2$, $M(\pm 1) = 1$ y $M(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. M es simétrico y decreciente en \mathbb{Z}^+ y podemos entonces seguir el argumento utilizado anteriormente con V para ver que $H_2^+(\bar{w}) \geq H_2^+(w)$. De donde se deduce que $H(\bar{w}) = H_2(\bar{w}) - V(\bar{w}) \leq H_2(w) - V(w) = H(w)$, y que la desigualdad es estricta si $\bar{w} \neq w$, como queríamos demostrar. ■

Con esto concluimos la demostración del Teorema (3.4.2).

Es esperable que para $\delta, \gamma > 0$, δ suficientemente pequeños, los breather de un pico que se obtienen mediante las continuaciones dadas por el Teorema 3.2.2 coincidan con los minimizadores aquí tratados. Por el momento, en [BBP17] se ha probado la siguiente afirmación que es un poco más débil.

Proposición 3.4.2 Sean $\lambda > 0$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$. Consideremos la curva continua uniparamétrica $A(\delta) \in X$, $\delta \in [0, \delta_0]$, de soluciones de (3.128) con $A(0)$ la solución de un único pico en $n = n_0$, y $\|A(\delta)\| = \lambda$, $\forall \delta \in [0, \delta_0]$. Entonces existe una sucesión $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset [0, \delta_0]$, que converge a $\delta = 0$, tal que $A(\delta_m)$ minimiza la energía H definida en (3.127) sobre todas las sucesiones $u \in X$ con $P(u) = \lambda$.

Observación 3.4.1 En el caso $\delta, \gamma < 0$ se tiene un resultado similar para el maximizador de H , aplicando el teorema al minimizador de $-H$.

Observación 3.4.2 Para $\delta > 0$ y $\gamma < 0$, dado $\lambda > 0$ se tiene que $I_\lambda = 0$. Esto se puede probar considerando las funciones g^N , $N \in \mathbb{Z}^+$, donde $g_n^N = \sqrt{\lambda} / \sqrt{(2N+1)}$ si $-N \leq n \leq N$ y se anula en otro caso. Por lo tanto no se alcanza el ínfimo y no podemos utilizar la minimización para encontrar puntos críticos. En el caso de δ suficientemente pequeño hemos presentado puntos críticos en las secciones previas aplicando argumentos de continuación con el teorema de la función implícita.

Observación 3.4.3 Los argumentos de simetrización y reordenamiento presentados aquí también pueden aplicarse a breathers que minimizan la energía de la DNLS cúbica en \mathbb{Z} , donde se minimiza $H_q = \delta H_2 - \gamma H_4$, $H_4(u) = \|u\|_{\ell^4}^4$, sobre sucesiones $u \in Y$ con $P(u) = \lambda > 0$. En [W99] se demuestra la existencia de un minimizador para $\lambda > 0$ arbitrario. El lema 3.4.1 también se cumple para H_4 , utilizando el límite $k \rightarrow \infty$, $\tilde{g}(x) = 1 \forall x$, in (3.139). El lema 3.4.3 claramente se aplica también a H_q .

Capítulo 4

Estabilidad de las soluciones y Análisis Espectral

En este capítulo se presentan resultados sobre el espectro del operador asociado a la ecuación (2.1) linealizado alrededor de las soluciones tipo breathers presentadas en el Capítulo 3. Y resultados de estabilidad de dichas soluciones. También se analizan propiedades de simetría de los modos internos asociados al espectro puntual de estas linealizaciones.

Realizamos dos tipos de análisis: el primero es un estudio de aspectos numéricos, basado en una discretización finita del problema, que nos permitirá estudiar computacionalmente el espectro, la estabilidad de las soluciones numéricas exactas y las propiedades de simetría de los modos internos; y un análisis teórico, basado en los resultados que se presentan en [BBP17] para las continuaciones exactas dadas por los teoremas de continuación del Capítulo 3. En cada caso consideraremos primero el análisis numérico y luego lo compararemos con el exacto verificando la coherencia entre ambos.

Comenzamos presentando, en la Sección 4.1, el enfoque general que nos permitirá estudiar el espectro y la estabilidad de los breathers, tanto en el caso numérico como en el exacto. En la Sección 4.2 consideraremos los breathers de un pico analizados en el Capítulo 3 como caso particular de los breathers de finitos picos y en el contexto de los minimizadores de la energía (Sección 3.4). Numéricamente trabajaremos con los dos ejemplos presentados en la Figura 3.4, correspondientes a distintos tipos de no localidades ($\kappa = 0,25$ y $\kappa = 0,5$) en el caso enfocante ($\gamma, \delta < 0$).

En la Sección 4.3 se estudian numericamente los espectros de dos breathers con finitos picos observándose que la estabilidad de estas soluciones está relacionada con el signo de la no linealidad, siendo estable en el caso desenfocante e inestable en el caso enfocante. Para estos

ejemplos no se presentan resultados generales, pero se observa que los resultados que se obtienen para el espectro de las soluciones numéricas guarda relación con los resultados generales que se obtendrán en la sección siguiente para los breather de infinitos picos.

Por último, en la Sección 4.4, se estudia la estabilidad y el espectro alrededor de las soluciones tipo meseta (con infinitos picos) tratadas en la Sección 3.3. Se analizan numéricamente las soluciones que se corresponden (en un sentido que será precisado) con las soluciones de finitos picos tratadas en la sección previa y se presentan resultados generales para dos regímenes distintos: el caso local, cuando la no linealidad es la potencia cúbica (DNLS cúbica); y el caso no local, cuando la interacción no local κ es arbitraria.

4.1. Análisis espectral y estabilidad de breathers

Recordemos la ecuación de Schrödinger no lineal discreta (3.1) con la que estamos trabajando.

$$i\dot{u}_n = -\delta(\Delta u)_n - 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 \right) u_n \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

Hemos visto, en el Capítulo 2, que tiene una estructura hamiltoniana

$$\dot{u}_n = -i \frac{\partial H}{\partial u_n^*}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{con} \quad (4.2)$$

$$H = \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_{n+1} - u_n|^2 - \gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m|^2 e^{-\kappa|m-n|} |u_n|^2. \quad (4.3)$$

Y que tanto el hamiltoniano como la potencia P son cantidades conservadas, donde

$$P = \|u\|_2^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m|^2. \quad (4.4)$$

El análisis de estabilidad lineal se basa en que las soluciones tipo breathers son puntos de equilibrio relativo de la ecuación 4.1 con respecto a la acción de cambio de fase global. Por lo que resulta conveniente definir a la solución en función de dicho cambio de fase. Para ello llamamos v a la variable definida por $u(t) = e^{-i\omega t} v(t)$, y tenemos que

$$\dot{v} = e^{-i\omega t} \dot{v} - i\omega e^{-i\omega t} v, \quad (4.5)$$

por lo que la ecuación hamiltoniana (4.2) se transforma en

$$\dot{v}_n = -i \frac{\partial H_\omega}{\partial v_n^*}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{con} \quad H_\omega = H - \omega P, \quad (4.6)$$

considerando a $H = H(u, u^*)$ y $P = P(u, u^*)$ como operadores sobre $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. En el Capítulo 3 hemos denominado breathers a las soluciones de (4.1) de la forma $u = e^{-i\omega t} A$ con $A \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$

no dependiente del tiempo, o $A \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ en el caso de soluciones con infinitos picos. Es evidente que un breather es un punto de equilibrio $\dot{v}_n = 0$ de (4.6), con $v = A$ independiente del tiempo. Para analizar la estabilidad redefinimos esta ecuación sobre espacios de Banach reales de la siguiente manera: $q_n = \operatorname{Re}(v_n)$, $p_n = \operatorname{Im}(v_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $X = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ y $z = [q, p]^T \in X \times X$, con $z_n = [q_n, p_n]^T$. Así, podemos reconsiderar formalmente a los operadores H y P como $H = H(q_n, p_n)$ y $P = P(q_n, p_n)$ y redefinir a H_ω sobre $X \times X$, reescribiendo la ecuación (4.6) en $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ como la siguiente ecuación en $X \times X$

$$\dot{z} = J\nabla h_\omega, \quad \text{con} \quad h_\omega = \frac{1}{2}H_\omega, \quad (4.7)$$

donde $(Jz)_n = [-p_n, q_n]^T$, i.e. J es el operador simpléctico estándar en $X \times X$.

Entonces la linealización en un punto de equilibrio dado A de (4.6) está dada por

$$\dot{z} = J\mathcal{H}z, \quad \text{con} \quad \mathcal{H} = \nabla^2 h_\omega(A), \quad (4.8)$$

i.e. \mathcal{H} es el Hessiano de h_ω evaluado en A .

Sin perder generalidad en los resultados de esta sección, consideraremos $\gamma = -1$ para simplificar la notación.

Se puede calcular $J\mathcal{H}$ explícitamente como

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} L_+ & 0 \\ 0 & L_- \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

donde

$$L_- = -\omega I - \delta\Delta + 2\mathcal{A}, \quad L_+ = -\omega I - \delta\Delta + 2\mathcal{A} + 4\mathcal{M}, \quad (4.10)$$

y \mathcal{A} , \mathcal{M} son operadores lineales en X definidos por

$$\mathcal{A}(n, k) = \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} A_m^2 \right) \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{M}(n, k) = \tanh \frac{\kappa}{2} e^{-\kappa|n-k|} A_k A_n, \quad n, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.12)$$

con $\delta_{n,k}$ la función delta de Kronecker.

Tomando el límite $\kappa \rightarrow \infty$ en (4.11), (4.12) se obtiene la linealización alrededor de breathers de la DNLS cúbica local.

En el caso en que $A \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, los operadores \mathcal{A} , \mathcal{M} , L_- , L_+ son acotados en X , y los operadores J , \mathcal{H} , y $J\mathcal{H}$ son acotados en $X \times X$. También se puede observar que L_- , L_+ y \mathcal{H} son operadores simétricos. Afirmaciones análogas pueden extenderse al caso local.

Nos interesa estudiar el espectro de estos operadores en torno a los breathers tratados en el capítulo anterior. Para lo cual estudiaremos numéricamente las restricciones de estos operadores

sobre espacios de dimensión finita y compararemos estos resultados con los que se han obtenido para el caso de dimensión infinita (ver [BBP17]). Consideremos como hasta aquí $X = \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ con el producto interno usual $(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v_n$. Y la norma asociada a este producto interno $\|\cdot\|$. Sea X_c la *complejificación* de X , con el producto interno $(u, v)_c = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v_n^*$ (ver e. g. [S08]).

Consideremos además a $Y = \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ visto como espacio vectorial real con el producto interno (real) $\langle u, v \rangle = \sum_{\mathbb{Z}}[(\operatorname{Re}u_n)(\operatorname{Re}v_n) + (\operatorname{Im}u_n)(\operatorname{Im}v_n)]$. Sea $Y_c = \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ la complejificación de Y con el producto interno (complejo) $\langle u, v \rangle_c = \sum_{\mathbb{Z}}[(\operatorname{Re}u_n)(\operatorname{Re}v_n)^* + (\operatorname{Im}u_n)(\operatorname{Im}v_n)^*]$. Observemos que $Y = X \times X$, y $Y_c = X_c \times X_c$.

Sea M un operador acotado en Y_c o X_c . El *conjunto resolvente* de M , que denotamos por $\rho(M)$, está formado por todos los números complejos $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que: $\lambda\mathcal{I} - M$ es invertible y $(\lambda\mathcal{I} - M)$ es un operador lineal acotado, donde \mathcal{I} representa el operador identidad en el espacio correspondiente. El *espectro* de M , $\sigma(M)$, es el complemento del conjunto resolvente: $\sigma(M) = \mathbb{C} - \rho(M)$.

Definimos el espectro esencial $\sigma_e(M)$ de M como en [KP13], p.29, esto es $\lambda \in \sigma(M)$ pertenece a $\sigma_e(M)$ si $M - \lambda I$ no es un operador Fredholm, o es Fredholm con índice distinto de cero. La definición de [Kato95], p.243, requiere una condición más débil: que $M - \lambda I$ no sea semi-Fredholm. Un operador \mathcal{L} es *Fredholm* si su núcleo $\ker(\mathcal{L})$ tiene dimensión finita y su rango $\mathbf{R}(\mathcal{L})$ es cerrado y de codimensión finita. El índice de Fredholm de un operador está definido por

$$\operatorname{ind}(\mathcal{L}) = \dim(\ker(\mathcal{L})) - \operatorname{codim}(\mathbf{R}(\mathcal{L})).$$

La ventaja de la definición que aquí adoptamos para el espectro esencial es que el espectro restante, que llamaremos *espectro puntual*, $\sigma_{pt}(M) = \sigma(M) - \sigma_e(M)$, es un conjunto discreto conformado por todos los autovalores de M (ver [KP13]).

Sea \mathbf{X} un espacio de Hilbert real o complejo, con norma $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$, y sea $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ una base ortonormal de \mathbf{X} . Un operador acotado $T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ es *Hilbert-Schmidt* en \mathbf{X} si $\sum_{j=1}^{\infty} \|T\varepsilon_j\|_{\mathbf{X}}^2 < \infty$ (esto es independiente de la elección de la base). Un teorema del análisis funcional establece que todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto (ver e. g. [RS80]).

Para el estudio numérico del espectro y la estabilidad consideramos una restricción finita de los operadores definidos en (4.8)-(4.12) restringiendo las ecuaciones sobre \mathbb{Z} a las N ecuaciones definidas sobre el conjunto finito $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$ y consideramos $Y^f = \mathbb{R}^{2N}$ y $Y_c^f = \mathbb{C}^{2N}$. Para definir la restricción de Δ en los nodos 1 y N imponemos el análogo discreto a las condiciones de borde de Dirichlet, como en [P11]. Llamaremos $J\tilde{\mathcal{H}}$ a la matriz en Y^f que obtenemos a partir de la restricción finita del operador $J\mathcal{H}$.

La siguiente proposición acerca del espectro puntual de $J\tilde{\mathcal{H}}$ es bien conocida (ver e. g. [KP13]) y nos permitirá situar algunos resultados que presentaremos en este capítulo.

Proposición 4.1.1 *Si λ es un autovalor real o imaginario puro de $J\tilde{\mathcal{H}}$, entonces $-\lambda$ también lo será.*

Demostración: Supongamos que $\lambda \in \sigma_{pt}(J\tilde{\mathcal{H}})$ es imaginario puro y que v es su autovector asociado. Dado que todas las entradas del operador $J\tilde{\mathcal{H}}$ son reales, tenemos que

$$J\tilde{\mathcal{H}}v = \lambda v \implies J\tilde{\mathcal{H}}v^* = \lambda^*v^*, \quad (4.13)$$

donde $*$ denota el complejo conjugado. Por lo tanto $\lambda^* = -\lambda \in \sigma_{pt}(J\tilde{\mathcal{H}})$.

Por otra parte, si $\lambda \in \sigma_{pt}(J\tilde{\mathcal{H}})$ es real y v es su autovector asociado, utilizando el hecho de que $J^t = -J = J^{-1}$, tenemos que $(J\tilde{\mathcal{H}})^t = -\tilde{\mathcal{H}}J$. De donde se deduce que

$$J\tilde{\mathcal{H}}v = \lambda v \implies -\tilde{\mathcal{H}}J(J^{-1}v) = (-\lambda)J^{-1}v, \quad (4.14)$$

y así resulta que $-\lambda \in \sigma_{pt}((J\tilde{\mathcal{H}})^t)$. Pero toda matriz A satisface que $\sigma_{pt}(A) = (\sigma_{pt}(A^t))^*$, por lo tanto $-\lambda \in \sigma_{pt}(J\tilde{\mathcal{H}})$ ■

En los ejemplos que aquí trataremos el espectro estará siempre incluido en los ejes real o imaginario, de ahí que utilicemos este resultado. Sin embargo la Proposición 4.1.1 puede presentarse en su forma más general. Con una demostración muy similar se prueba que el espectro puntual es simétrico respecto de los ejes real e imaginario del plano complejo, i. e., si $\lambda \in \mathbb{C}$ está en el espectro puntual $\sigma_{pt}(J\tilde{\mathcal{H}})$ entonces $\pm\lambda$ y $\pm\lambda^*$ también serán autovalores de $J\tilde{\mathcal{H}}$.

En el caso de operadores infinitos la demostración presenta un problema ya que, si A^* representa el operador adjunto de A , no necesariamente se cumple que $\sigma_{pt}(A) = (\sigma_{pt}(A^*))^*$ (un ejemplo sencillo lo provee el operador shift sobre $\ell^2(N)$, ver [B14]). Sin embargo, para el caso de linealizaciones en torno de un punto crítico de sistemas de ecuaciones diferenciales con estructura hamiltoniana, sí puede recuperarse este resultado (ver Prop. 7.0.1 en [KP13]).

Proposición 4.1.2 *Sea $J\mathcal{H}$ la linealización definida en (4.8) en un punto fijo A de (4.7). El espectro puntual $\sigma_{pt}(J\mathcal{H})$ es simétrico con respecto a los ejes real e imaginario. Esto es, si $\lambda \in \sigma_{pt}(J\mathcal{H})$ entonces $\{\pm\lambda, \pm\lambda^*\} \subset \sigma_{pt}(J\mathcal{H})$.*

En lo que sigue estudiaremos el espectro de los operadores $J\mathcal{H}$ y de sus restricciones finitas $J\tilde{\mathcal{H}}$ en torno a los breathers tratados en el Capítulo 3 y veremos que la verificación de las proposiciones anteriores se da sobre ciertos intervalos acotados sobre los ejes real e imaginario. Más aún, la propiedad de simetría que cumple el espectro puntual en la Proposición 4.1.2 es extensible al espectro esencial.

4.2. Breathers de un pico

En la Sección 3.2 hemos presentado dos breathers de un pico tomando los parámetros $\delta = -0,5$ y $\gamma = -1$ (caso enfocante) con una discretización finita de $N = 65$ nodos. Estos picos los hemos encontrado realizando continuaciones mediante un método de Newton-Raphson partiendo de la solución explícita (3.40) con un sólo nodo no nulo, hallada para $\delta = 0$.

Los dos ejemplos presentados en la Figura 3.4 corresponden a dos tipos distintos de no localidades: $\kappa = 0,25$ y $\kappa = 0,5$. Aquí presentamos los respectivos espectros de $J\tilde{\mathcal{H}}$ para estos breathers considerando una discretización finita de N nodos. En ambos casos encontramos que los autovalores aparecen de a pares $\pm i\lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, lo cual indica estabilidad lineal.

Como explicamos en la Sección 4.1, para el cálculo del espectro de los operadores restringidos a un dominio finito consideramos $J\tilde{\mathcal{H}}$ definido como $J\mathcal{H}$ en (4.9) con

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} L_+ & 0 \\ 0 & L_- \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$L_- = -\omega I - \delta\Delta + 2\mathcal{A}, \quad L_+ = -\omega I - \delta\Delta + 2\mathcal{A} + 4\mathcal{M}, \quad (4.16)$$

donde I es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{N \times N}$ y Δ , \mathcal{A} , $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ definidos por

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{A}(n, k) = \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathcal{I}} e^{-\kappa|m-n|} A_m^2 \right) \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}, \quad (4.18)$$

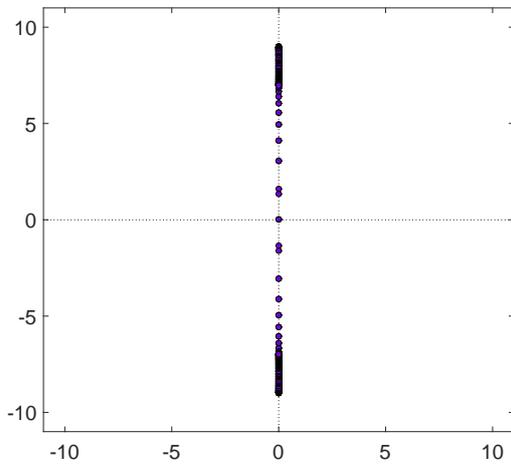
$$\mathcal{M}(n, k) = \tanh \frac{\kappa}{2} e^{-\kappa|n-k|} A_k A_n, \quad n, k \in \mathcal{I}, \quad (4.19)$$

con $\delta_{n,k}$ la función delta de Kronecker y A una de las dos soluciones numéricas que se obtuvieron en la Sección 4.3 (Fig. 3.4) como continuaciones de la semilla definida en (3.40) para $\delta = 0$.

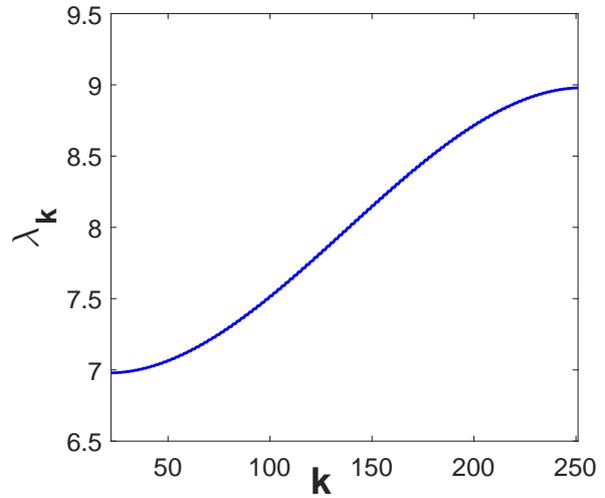
A continuación presentamos los resultados obtenidos al calcular los autovalores de $J\tilde{\mathcal{H}}$ y sus correspondientes autovectores y los comparamos con los resultados generales sobre el espectro de $J\mathcal{H}$ publicados en [BBP17].

4.2.1. No localidad $\kappa = 0,25$

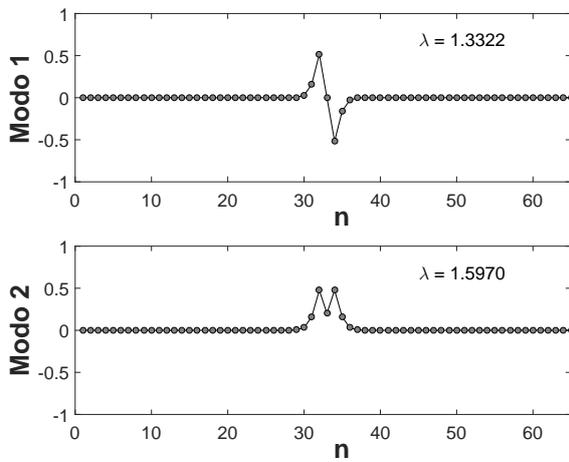
En la Figura 4.1 presentamos los resultados hallados para el breather correspondiente a la no localidad $\kappa = 0,25$, con los parámetros $\delta = 0,5$, $\gamma = -1$ (caso enfocante con menor localización)



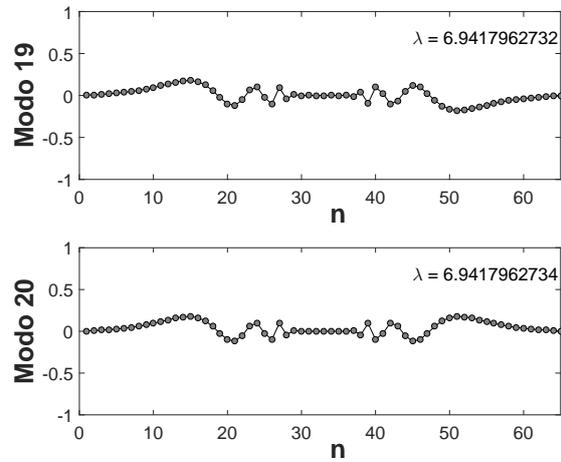
(a) Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather computado para $\kappa = 0,25$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,5$ con $N = 65$. Se observan dos bandas de mayor densidad que se corresponden con el espectro continuo.



(b) Relación de dispersión entre λ_k y k , donde k enumera las frecuencias asociadas al espectro continuo de $J\mathcal{H}$ en el breather correspondiente a la figura de la izquierda. Calculado para $N = 251$.



(c) Parte real de los autovectores de $J\tilde{\mathcal{H}}$ correspondientes a los autovalores $\pm i\lambda_1 = \pm i1,332235686938075$ (modo 1, simetría impar) y $\pm i\lambda_2 = \pm i1,596968238652803$ (modo 2, simetría par).



(d) Parte real de los autovectores de $J\tilde{\mathcal{H}}$ correspondientes a los autovalores $\pm i\lambda_1 \approx \pm i6,9417962732$ (modo 19, simetría impar) y $\pm i\lambda_2 \approx \pm i6,9417962734$ (modo 20, simetría par). Estos autovectores corresponden a los modos internos de frecuencia más alta.

Figura 4.1: Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ (evaluado en el breather correspondiente a $\kappa = 0,25$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,5$), dispersión de las frecuencias asociadas al espectro continuo de $J\mathcal{H}$, y autovectores correspondientes a los modos internos de menor y mayor frecuencia

y una frecuencia computada $\omega = 6,979128408684841$. Hemos vuelto a calcular el breather de la Figura 3.4 aumentando la cantidad de nodos (e. g. de $N = 65$ a $N = 251$ y $N = 523$) y hemos encontrado siempre el mismo breather en los 65 nodos que comparten con el de la Sección 3.2 (salvo error del orden de la unidad de redondeo). Una inspección de los resultados numéricos al calcular el espectro variando la cantidad de nodos nos permite conjeturar que hay 20 pares de autovalores de $J\tilde{\mathcal{H}}$, $\pm i\lambda_k$ (contados con su multiplicidad), que se mantienen invariantes por la cantidad de nodos; numéricamente la precisión es de orden 10^{-15} excepto para los pares 19 y 20 que la precisión es de 10^{-10} . Además estos autovalores pertenecen al intervalo $[1,332235686938075; 6,941796273423071]$; mientras que el resto de los autovalores se agrupan con densidad relativa a la cantidad de nodos (mayor densidad cuanto mayor cantidad de nodos) en un intervalo que varía convergiendo a $[\omega; \omega - 4\delta]$ cuando N tiende a infinito (ver Fig. 4.1a).

Por ejemplo, cuando $N = 65$ los autovalores distribuidos densamente se agrupan en el intervalo $[6,989788706408597; 8,943643539885873]$. Aumentando la cantidad de nodos encontramos que para $N = 523$ pertenecen al intervalo $[6,979254363240037; 8,979039234967235]$. Observamos además que $\omega = 6,979128408684842$ y $\omega - 4\delta = 8,979128408684842$. Estos resultados numéricos nos han hecho suponer en un primer momento, en [BCMP15], que el operador $J\mathcal{H}$ tiene un espectro discreto y un espectro continuo dado por el intervalo $[\omega; \omega - 4\delta]$. Posteriormente hemos corroborado esta intuición en [BBP17], con la Proposición 4.2.1 que veremos más adelante.

En la Figura 4.1b se muestra, para $N = 251$, la dispersión del conjunto de autovalores con parte imaginaria positiva $i\lambda_k$, en el intervalo que se distribuyen con mayor densidad, en función de su ubicación k al ordenarlos de menor a mayor. Vemos que se agrupan más densamente en los extremos del intervalo. La forma del gráfico de la dispersión es similar a la de la ecuación discreta libre $\dot{u} = i\delta\Delta u$, desplazada por ω , la frecuencia del breather.

En las Figuras 4.1c y 4.1d se grafican los modos internos correspondientes a autovalores de menor frecuencia (modos 1 y 2) y mayor frecuencia (modos 19 y 20, llamamos *modos internos* a los autovectores correspondientes a autovalores de $J\tilde{\mathcal{H}}$ que conforman el espectro discreto de $J\mathcal{H}$). Los modos 1 y 2 graficados alcanzan su máximo en los nodos adyacentes al pico central del breather. En general, los modos internos de menor frecuencia presentan mayor amplitud en las cercanías del pico del breather y un rápido decaimiento (en módulo) en las colas; mientras que, a medida que aumenta la frecuencia, la amplitud alcanza sus máximo alejándose del pico central y los autovectores presentan un decaimiento más lento en las colas, como se puede observar en los modos 19 y 20 que son los de frecuencia más alta. La restricción finita $J\tilde{\mathcal{H}}$ de $J\mathcal{H}$ está en $\mathbb{R}^{2N \times 2N}$, pero los autovalores son complejos (en este caso imaginarios puros) y sus autovectores

asociados (que representan las componentes $\{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de la Ec. (4.8), restringidas a \mathcal{I}) pertenecen a $\mathbb{C}^{2N \times 2N}$. Aquí graficamos sólo la parte real de los autovectores, pero observamos un comportamiento análogo en la parte imaginaria. Los autovalores de los modos internos en el semieje imaginario positivo aparecen de a pares consecutivos $i\lambda_{2j-1}, i\lambda_{2j} \in i\mathbb{R}^+$, $j = 1, \dots, 10$ que corresponden a un autovector con simetría impar y otro con simetría par, respectivamente (esta aparición de a pares también se observa en los autovalores asociados al espectro continuo). El hecho de que los autovalores aparezcan de a pares se debe a la simetría de los breathers respecto de su pico central, el mismo comportamiento observamos para los breathers con una cantidad finita de picos con simetría respecto de un pico central (Sección 4.3).

Análogamente, todo lo que hemos desarrollado se repite para los autovalores en el semieje imaginario negativo.

4.2.2. No localidad $\kappa = 0,5$

Cuando $\kappa = 0,5$ la interacción no local es menor. Manteniendo los mismos valores que en el caso anterior para los parámetros δ y γ , vemos que esencialmente se mantienen las propiedades observadas (cf. Fig. 4.2).

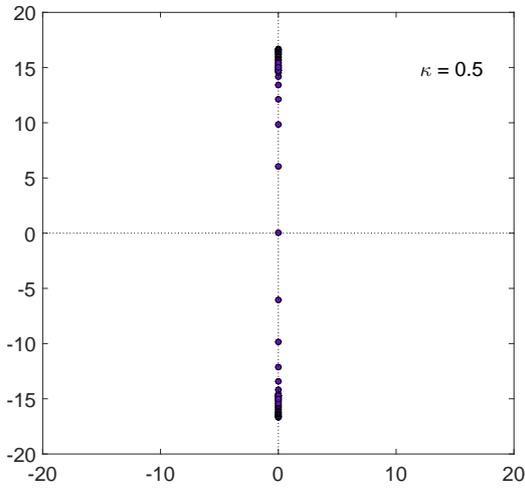
En este caso, los autovalores $i\lambda_{2j-1}, i\lambda_{2j}$, también aparecen de a pares. Observamos además, que al aumentar κ decrece la cantidad de modos internos: para $\kappa = 0,5$ son 12 pares en lugar de los 20 que obteníamos para $\kappa = 0,25$. Y los autovalores agrupados densamente que representan al espectro continuo de $J\mathcal{H}$ se alejan del origen dado que aumentó la frecuencia ($\omega = 14,674997205380388$), conservando la aparente convergencia al intervalo $[\omega; \omega - 4\delta]$ al aumentar la cantidad de nodos N (Figs. 4.2a y 4.2b).

Por su parte los autovectores conservan las propiedades gráficas de simetría par/impar y amplitud variable respecto del pico central.

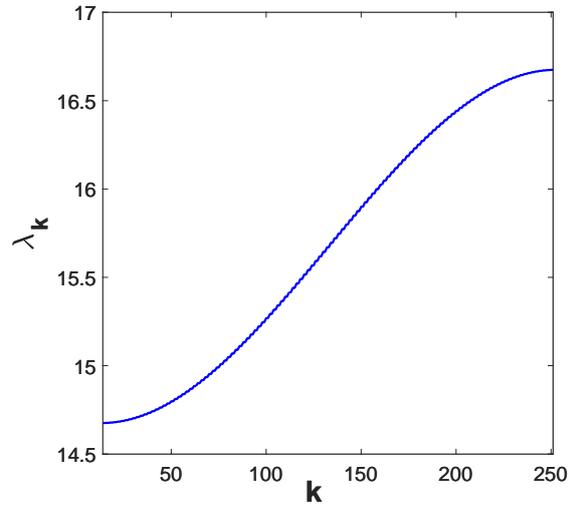
4.2.3. Resultados generales

Ahora analizaremos la estabilidad de los breathers de un pico en el caso general. Sea $A \in X$ una solución de la ecuación (3.4), con $\delta = 0$ y $\kappa > 0$ fijo, que satisface $A_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}$, y $A_{n_0} > 0$. Dicha solución es única (en el sentido de que no existen dos posibles valores para $A_{n_0} > 0$) y, por el Teorema 3.2.2 puede continuarse de forma unívoca como una familia continua de soluciones $A(\delta)$, $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, de la ecuación (3.4). Estas soluciones son las que hemos denominado *breathers de un pico*. En la Sección 3.2 hemos presentado dos ejemplos numéricos con su respectivo análisis espectral en el comienzo de esta Sección 4.2

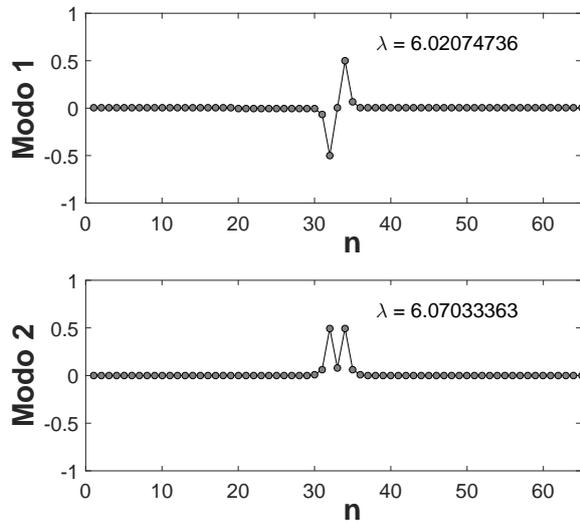
Es necesario observar que las continuaciones que brinda el Teorema 3.2.2 son soluciones con



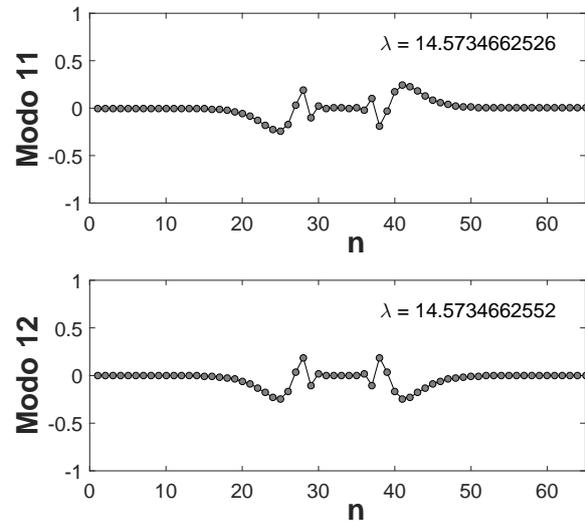
(a) Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather computado para $\kappa = 0,5$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,5$ con $N = 65$. Se observan dos bandas de mayor densidad que se corresponden con el espectro continuo.



(b) Relación de dispersión entre λ_k y k , donde k enumera las frecuencias asociadas al espectro continuo de $J\mathcal{H}$ en el breather correspondiente a la figura de la izquierda. Calculado para $N = 251$.



(c) Parte real de los autovectores de $J\tilde{\mathcal{H}}$ correspondientes a los autovalores $\pm i\lambda_1 = \pm i6,020747360483170$ (modo 1, simetría impar) y $\pm i\lambda_2 = \pm i6,070333626702846$ (modo 2, simetría par).



(d) Parte real de los autovectores de $J\tilde{\mathcal{H}}$ correspondientes a los autovalores $\pm i\lambda_1 \approx \pm i14,573466252558458$ (modo 11, simetría impar) y $\pm i\lambda_2 \approx \pm i14,573466255192995$ (modo 12, simetría par). Estos autovectores corresponden a los modos internos de frecuencia más alta.

Figura 4.2: Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather correspondiente a $\kappa = 0,5$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,5$; dispersión de las frecuencias asociadas al espectro continuo de $J\mathcal{H}$; y autovectores correspondientes a los modos internos de menor y mayor frecuencia.

norma $\|A(\delta)\|_X$ fija, y que la frecuencia ω resulta ser una función de δ que no es conocida a priori. El resultado de continuaciones para ω fijo tiene una prueba muy similar, de hecho se puede aplicar la demostración del Teorema 3.3.2 pero simplificada, ya que en ese teorema se consideran soluciones con infinitos valores no nulos.

Para el breather $A(0)$ correspondiente a $\delta = 0$, $J\mathcal{H}$ es diagonal por bloques, con bloques de 2×2 , cada bloque correspondiente a un número $k \in \mathbb{Z}$. El bloque correspondiente a $k = n_0$ tiene un autovalor doble $\lambda_{n_0} = 0$. Los otros bloques tienen autovalores

$$\pm\lambda_k = \pm i\omega(1 - e^{\kappa|k-n_0|}), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}, \quad (4.20)$$

con sus correspondientes autovectores $w_k^\pm \in Y_c$, dados por

$$w_k^\pm(n) = \delta_{k,n}[1, \mp i]^T, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.21)$$

Por lo tanto el espectro $\sigma(J\mathcal{H})$ está formado por un autovalor nulo doble, una cantidad infinita de pares de autovalores imaginarios $\pm\lambda_k$, $k > n_0$, de multiplicidad 2, y sus puntos de acumulación $\pm i\omega$ (pertenecientes a $\sigma_e(J\mathcal{H})$).

Consideremos ahora el operador linealizado $J\mathcal{H}$ en el breather de un pico $A(\delta)$. Lo llamaremos $J\mathcal{H}(\delta)$, para $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, donde δ_0 define un intervalo en el que existen las continuaciones dadas por el Teorema 3.2.2. Definimos el operador \mathcal{H}_0

$$\mathcal{H}_0 = \begin{bmatrix} -\omega I & -\delta\Delta & 0 \\ 0 & & -\omega I - \delta\Delta \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

que es un operador acotado en Y_c . En [BBP17] se prueba que $(J\mathcal{H}(\delta) - J\mathcal{H}_0)$ es un operador de Hilbert-Schmidt, por lo que $J\mathcal{H}_0$ resulta ser una perturbación compacta de $J\mathcal{H}(\delta)$. Y de allí se deduce que sus espectros esenciales son iguales. La ventaja que presenta trabajar con el operador definido en la Ec. (4.22) es que posibilita calcular explícitamente el espectro de $J\mathcal{H}_0$. Con lo que se consigue el siguiente resultado acerca del espectro esencial (ver [BBP17]).

Proposición 4.2.1 *Sea $A \in X$ y sea $J\mathcal{H}(\delta) : Y \rightarrow Y$ como en (4.9)-(4.12). Entonces (i) $\sigma_e(J\mathcal{H}(\delta)) = \sigma_e(J\mathcal{H}_0)$, y (ii) $\sigma_e(J\mathcal{H}_0)$ está formado por los $z \in \mathbf{C}$ con $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z \in [-\omega, -\omega + 4\delta] \cup [\omega - 4\delta, \omega]$, en el caso $\delta > 0$, y $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z \in [-\omega + 4\delta, -\omega] \cup [\omega, \omega - 4\delta]$, si $\delta < 0$.*

Este resultado es análogo al que se obtiene en [K09] para el espectro continuo de la DNLS cúbica. Por otra parte, en [BBP17] se prueba, para $\delta \neq 0$, la persistencia del autovalor nulo con multiplicidad dos y de los autovalores λ_k de (4.20). Resultado que queda expresado en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.2 *Sea $k > n_0$, consideremos el par de autovalores imaginarios $\pm\lambda = \pm\lambda_k$ de $J\mathcal{H}(0)$, como en (4.20). Entonces existe $\delta_{0,k} > 0$ para el cual los operadores $J\mathcal{H}(\delta) : Y \rightarrow Y$, $\delta \in (-\delta_{0,k}, \delta_{0,k})$, tienen dos autovalores $\pm\lambda_j(\delta) \in i\mathbb{R}$, $j = 1, 2$. Las familias $\pm\lambda_j(\delta)$, $j = 1, 2$ son continuas en δ y satisfacen $\pm\lambda_j(0) = \pm\lambda$.*

De esta manera las predicciones numéricas son confirmadas por los resultados teóricos y, recíprocamente, nos sirven de verificación de éstos.

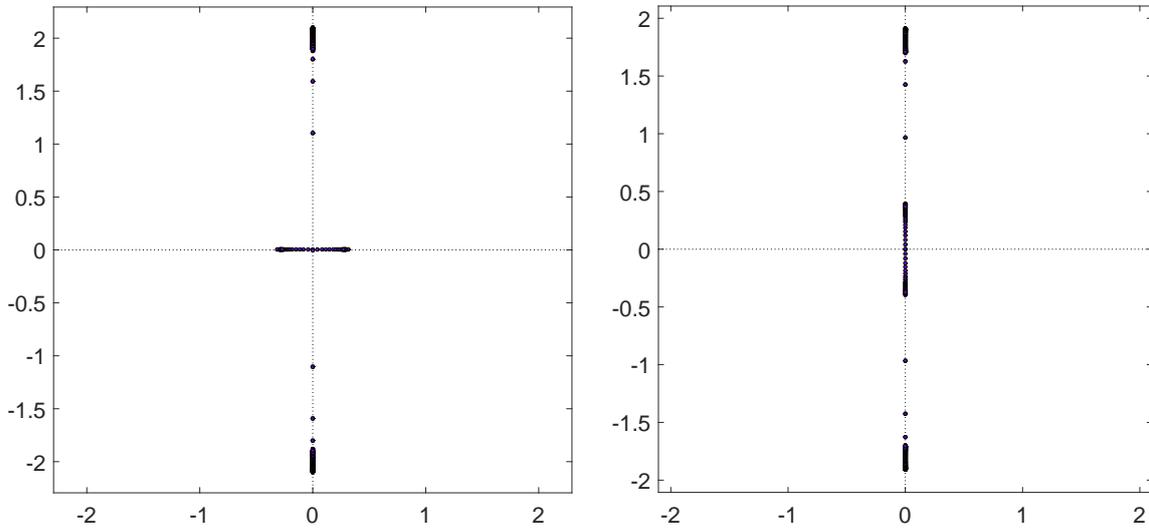
4.3. Breathers con finitos picos

Ahora analizaremos el espectro en torno a dos breathers con una cantidad finita de picos. En la Figura 4.3 se muestran los espectros de $J\tilde{\mathcal{H}}$ alrededor de los breather con una cantidad finita de picos presentados en la Sección 3.2. $J\tilde{\mathcal{H}}$ se define como en las Ec. (4.15)-(4.19), con A los breathers de las Figuras 3.2 y 3.3. En ambos casos consideramos $N = 261$ nodos, una potencia fija $c = 31$, parámetro de interacción no local $\kappa = 0,8$ y no linealidad $\gamma = -1$. En la Figura 4.3a consideramos $\delta = -0,05$, que es el caso enfocante correspondiente al breather de la Figura 3.2, con 31 nodos no nulos consecutivos. Mientras que en la Figura 4.3b tomamos $\delta = 0,05$, que es el caso desenfocante correspondiente al breather de la Figura 3.3, también con 31 nodos consecutivos no nulos. Los gráficos de estas figuras sugieren que hay inestabilidad y estabilidad lineal respectivamente de los breathers correspondientes. Se puede observar que se verifican las propiedades de simetría respecto de los ejes real e imaginario dadas por la Proposición 4.1.1.

Además, como en la Sección 4.2, una inspección numérica nos permite conjeturar en ambos casos la existencia de dos bandas imaginarias puras (una positiva y otra negativa) que están asociadas al espectro continuo de $J\mathcal{H}$. Observamos también en ambos casos que, aumentando la cantidad de nodos N , estos extremos convergen a $\pm i\omega$ y $\pm i(\omega - 4\delta)$ variando el orden de los mismos, en uno y otro ejemplo, en función del signo de δ .

Encontramos también la presencia de modos internos. Las bandas centrales de las Figuras 4.3a y 4.3b corresponden a autovalores de estos modos internos, su cantidad no varía con N sino que depende de la cantidad de picos del breather y del parámetro κ . En torno a los breathers con finitos picos de la DNLS cúbica (con no linealidad local) también se presentan modos internos, pero, en ese caso, la cantidad hallada es $2 \times k - 2$, siendo k la cantidad de picos (ver [PKF05]), mientras que aquí hemos encontrado una cantidad mayor (que varía en relación a la interacción no local).

Para el caso de breathers con una cantidad finita de picos no nulos no tenemos aún resultados generales que nos permitan confirmar las conjeturas relativas al espectro esencial de $J\mathcal{H}$. Sin



(a) Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather de la Figura 3.2, computado para $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,05$ (caso enfocante) con $N = 261$.

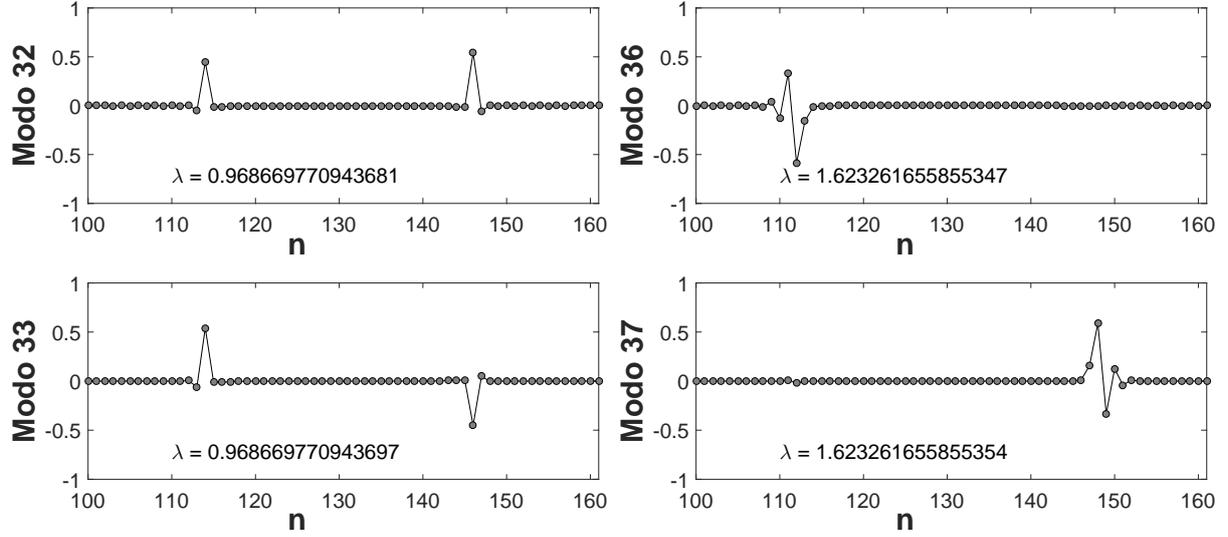
(b) Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather de la Figura 3.3, computado para $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = 0,05$ (caso desenfocante) con $N = 261$.

Figura 4.3: Espectros de $J\tilde{\mathcal{H}}$ en los breathers presentados en las Figuras 3.3 y 3.2.

embargo, observamos un comportamiento numérico que guarda similitud tanto con los resultados generales para los breathers de un pico, en lo relativo a las bandas densas en los intervalos de extremos $\pm i\omega$ y $\pm i(\omega - 4\delta)$; como con los resultados generales para los breathers de infinitos picos, en lo relativo a estas mismas bandas y también a las bandas centrales, que en el caso de los breathers infinitos están asociadas a vibraciones en los picos de la meseta, como veremos en la próxima sección.

4.4. Breathers con infinitos picos

Por último, consideramos las linealizaciones $J\mathcal{H}$ en torno a los breathers infinitos calculados en la Sección 3.3. En este caso la restricción $J\tilde{\mathcal{H}}$ de $J\mathcal{H}$ presenta algunas diferencias con las definidas para los breathers con finitos picos. Definimos a $J\tilde{\mathcal{H}}$ con J y $\tilde{\mathcal{H}}$ como en (4.15), L_- y



(a) Parte real de los autovectores de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather de la Fig. 3.3 correspondientes a los autovalores $\pm i\lambda_{32} = \pm i0,968669770943681$ (modo 32, simetría par) y $\pm i\lambda_{33} = \pm i0,968669770943697$ (modo 33, simetría par).

(b) Parte real de los autovectores de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather de la Fig. 3.3 correspondientes a los autovalores $\pm i\lambda_{36} = \pm i1,623261655855347$ (modo 36, oscilación en la interfase izquierda) y $\pm i\lambda_{37} = \pm i1,623261655855354$ (modo 37, oscilación en la interfase derecha).

Figura 4.4: Modos internos de $J\tilde{\mathcal{H}}$ en el breather de la Figura 3.3. $N = 261$ (se muestran solo los nodos 100-161), $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = 0,05$ (defocalización), $\omega = 1,905888815933016$.

L_+ como en (4.16), \mathcal{M} como en (4.19), pero las matrices Δ y $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ están definidas por

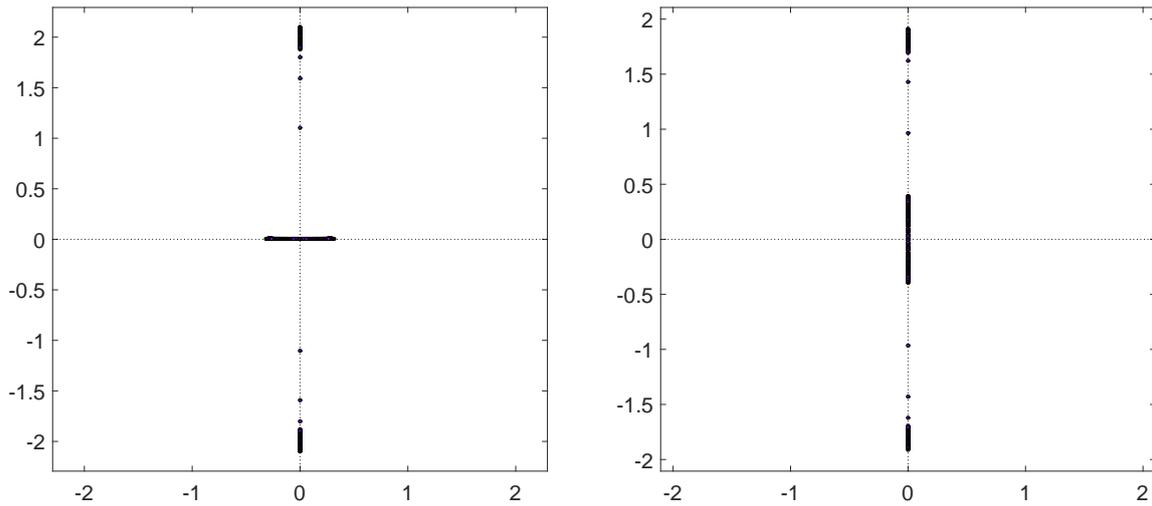
$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\mathcal{A}(n, k) = \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\rho^n}{1 - \rho} A_1^2 + \sum_{m \in \mathcal{I}} e^{-\kappa|m-n|} A_m^2 \right) \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}, \quad (4.24)$$

con $\rho = e^{-\kappa}$, $\delta_{n,k}$ la función delta de Kronecker y A una de las dos soluciones numéricas que se obtuvieron en la Sección 3.3 (Fig. 3.5).

La razón de las modificaciones en las ecuaciones (4.23) y (4.24) es que aquí estamos restringiendo al conjunto finito \mathcal{I} a la solución A , que no se anula en ningún sitio A_n , $n < 0$. Sin embargo, dado que las fluctuaciones de A se dan en torno al pico central, en la interfaz entre el

frente “constante” tipo meseta (a izquierda) y la cola del breather con decaimiento a cero (a derecha), podemos considerar $A_n = A_1$ para todo $n < 0$. Esto nos permite calcular explícitamente la serie geométrica definida en (4.11) para los enteros negativos, que da lugar al primer término del miembro de la derecha de (4.24).



(a) Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather de la Figura 3.5a, computado para $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,05$ (caso enfocante) y $\omega = 1,894097453080216$, con $N = 261$.

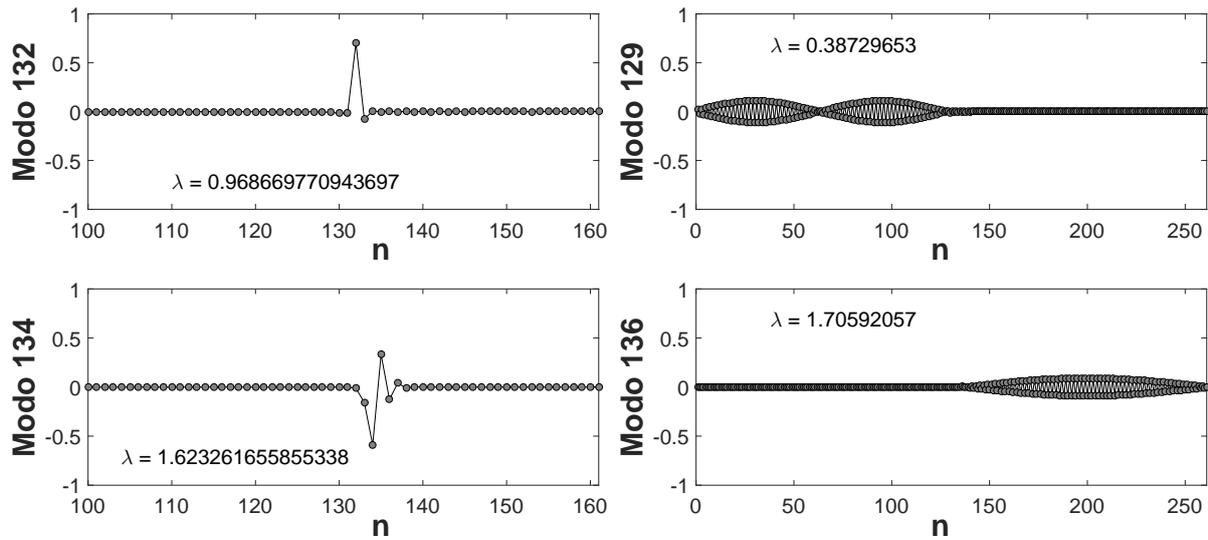
(b) Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather de la Figura 3.5b, computado para $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = 0,05$ (caso desenfocante) y $\omega = 1,905888815933016$, con $N = 261$.

Figura 4.5: Espectros de $J\tilde{\mathcal{H}}$ en los breathers presentados en las Figuras 3.3 y 3.2.

Para poder comparar con los resultados de la sección anterior hemos tomado los mismos parámetros para δ , γ y κ . En la Figura 4.5 observamos que el comportamiento de los espectros hallados es muy similar a los de la Figura 4.3, pero con algunas diferencias cualitativas. En los espectros de $J\tilde{\mathcal{H}}$ alrededor de los breathers infinitos se pierde la aparición de pares de autovalores que encontramos en los casos anteriores, tanto de los asociados a los modos internos como de los asociados al espectro esencial de $J\mathcal{H}$, y esto se debe a que los breathers infinitos rompen la simetría presente en los breathers con finitos picos.

Otra propiedad presente en los espectros aquí calculados es la aparición de bandas de autovalores en torno al origen -con valores reales en el caso enfocante (inestabilidad) e imaginarios puros en el desenfocante (estabilidad)- cuya densidad aumenta proporcionalmente con la cantidad de nodos. Estas bandas se corresponden con el espectro esencial de $J\mathcal{H}$ y están asociadas a oscilaciones en la meseta del breather.

Comparando los modos internos de las Figuras 4.4 y 4.6 observamos que los autovalores de breathers infinitos (y sus autovectores asociados) se corresponden casi idénticamente con un modo interno asociado al pico correspondiente del breather finito (modo 33 de la Fig. 4.4a con modo 132 de la Fig. 4.6a y modo 37 de la Fig. 4.4b con modo 132 de la Fig. 4.6a). En el caso de los autovalores el error está en el orden de 10^{-15} mientras que, en el caso de los autovectores, su diferencia (calculada en norma ℓ^2) está en el orden de 10^{-5} .



(a) Parte real de los autovectores de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather de la Fig. 3.5b correspondientes a los autovalores $\pm i\lambda_{132} = \pm i0,968669770943697$ (modo 132) y $\pm i\lambda_{134} = \pm i1,623261655855338$ (modo 134).

(b) Parte real de los autovectores de $J\tilde{\mathcal{H}}$ evaluado en el breather de la Fig. 3.5b correspondientes a los autovalores $\pm i\lambda_{132} = \pm i0,968669770943697$ (modo 129) y $\pm i\lambda_{37} = \pm i1,623261655855338$ (modo 136), que forman parte del espectro esencial de $J\mathcal{H}$.

Figura 4.6: Modos internos de $J\tilde{\mathcal{H}}$ en el breather de la Figura 3.5b. $N = 261$ (en (a) se muestran solo los nodos 100-161), $\kappa = 0,8$, $\gamma = -1$, $\delta = 0,05$ (desenfocante), $\omega = 1,905888815933016$.

Resultados generales

En lo que sigue presentaremos algunos resultados generales respecto del espectro de $J\mathcal{H}$ en torno a soluciones de tipo breathers con infinitos picos que se han obtenido en [BBP17] tanto para el caso local como para el caso no local. Remitimos a la fuente para las demostraciones.

En primer lugar nos centraremos en el caso local, esto es, cuando la no linealidad del sistema corresponde a la potencia cúbica. De acuerdo con lo visto en la Sección 3.3.1 se pueden obtener

soluciones continuando a partir del breather correspondiente a $\delta = 0$

$$\tilde{A}_n = \begin{cases} \alpha, & \text{if } n \leq 0, \\ 0, & \text{if } n \geq 1, \end{cases} \quad (4.25)$$

con $\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2}}$. Este es un caso particular del tipo de soluciones definidas en (3.84), pero los resultados que se presentarán a continuación son también válidos para el caso general.

Fijado ω , sea B_n , $n \in \mathbb{Z}$, una solución dada por el Teorema 3.3.1 y sea

$$A_n = \tilde{A}_n + B_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.26)$$

Definimos $\mathcal{L}_{\infty, \delta} := J\mathcal{H}$, con $J\mathcal{H}$ como en (4.9), L_-, L_+ como en (4.10), \mathcal{A}, \mathcal{M} como en (4.11), (4.12) con A_n como en (4.26), \tilde{A}_n como en (4.25), $\forall n \in \mathbb{Z}$. Así definido, el operador $\mathcal{L}_{\infty, \delta}$ resulta ser la linealización alrededor de la solución tipo meseta dada por el Teorema 3.3.1.

Definamos también $\mathcal{L} := J\mathcal{H}$, con $J\mathcal{H}$ como en (4.9), con L_-, L_+ como en (4.10), y

$$\mathcal{A}(n, k) = \mathcal{A}_0(n, k) = \tilde{A}_n^2 \delta_{n,k}, \quad \mathcal{M}(n, k) = \mathcal{M}_0(n, k) = \tilde{A}_n^2 \delta_{n,k}, \quad (4.27)$$

donde \tilde{A}_n es la solución para $\delta = 0$ dada por (4.25).

Definimos los siguiente conjuntos:

$$B_1 = \left\{ -(\omega - 4\delta \sin^2 \frac{k}{2})^2 : k \in \mathbb{R} \right\}, \quad (4.28)$$

$$B_2 = \left\{ -4\delta \sin^2 \frac{k}{2} (2\omega + 4\delta \sin^2 \frac{k}{2}) : k \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.29)$$

Para δ suficientemente pequeño, a partir de las definiciones (4.28) y (4.29), se puede observar que B_1 y B_2 son disjuntos. Asumiendo que se cumple esta condición se tienen los siguientes resultados respecto del espectro de $J\mathcal{H}$ en torno a los breathers locales

Teorema 4.4.1 *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\lambda^2 \notin B_1 \cup B_2$ entonces o bien λ pertenece al conjunto de residuos de $\mathcal{L} : Y \rightarrow Y$, o es un autovalor de \mathcal{L} de multiplicidad finita.*

Teorema 4.4.2 *El espectro esencial de los operadores \mathcal{L} y $\mathcal{L}_{\infty, \delta}$ en Y está formado por los $\lambda \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\lambda^2 \in B_1 \cup B_2$.*

La demostración, como en el caso de los breathers de un pico, se basa en el hecho de que \mathcal{L} es una perturbación compacta $\mathcal{L}_{\infty, \delta}$

Ahora trataremos los resultados sobre el espectro esencial para las linealizaciones alrededor de los breathers tipo meseta en el caso no local, dados por el teorema 3.3.2.

Consideramos soluciones de la forma

$$\tilde{A}_n = \begin{cases} \alpha, & \text{si } n < 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1-\rho}}, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n > 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

con $\alpha = \sqrt{-\frac{\omega}{2\gamma} \frac{1-\rho}{1+r\theta}}$, $\rho = e^{-\kappa}$. Este es un caso especial del tipo de soluciones con infinitos picos no nulos, dadas por (3.90). Sean $\omega, \kappa \in \mathbb{R}_{\geq \omega}$, sean $B_n, n \in \mathbb{Z}$, la solución continuada dada por el Teorema 3.3.2 y

$$A_n = \tilde{A}_n + B_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.31)$$

con \tilde{A} como en (4.30).

La linealización alrededor de esta solución A_n está dada por el operador $\mathcal{L}_{\kappa,\delta} := J\mathcal{H}$ con $J\mathcal{H}$ como en (4.9), L_-, L_+ como en (4.10), \mathcal{A}, \mathcal{M} como en (4.11), (4.12), evaluando a estos operadores en A_n como en (4.31).

Para calcular el espectro esencial de $\mathcal{L}_{\kappa,\delta}$ se utiliza una perturbación (compacta) $\bar{\mathcal{L}}_2 := J\bar{\mathcal{H}}$, donde $J\bar{\mathcal{H}}$ está definido como en (4.9) con L_-, L_+ como en (4.10), y \mathcal{A}, \mathcal{M} definidos por

$$\mathcal{A}(n, k) = \bar{\mathcal{A}}_2(n, k) = \tanh \frac{\kappa}{2} A_n^2 \delta_{n,k}, \quad \mathcal{M}(n, k) = \bar{\mathcal{M}}_2(n, k) = \tanh \frac{\kappa}{2} A_n A_m e^{-\kappa|m-n|} \delta_{n,k}, \quad (4.32)$$

para cada $k, n \in \mathbb{Z}$, donde $A_n = \alpha, \forall n \leq 0$, y $A_n = 0, \forall n > 0$, es la solución para $\delta = 0$.

Con los argumentos que se utilizan en [BBP17] (Lema 4.5 y Teorema 4.2) se prueba que $\bar{\mathcal{L}}_2$ es una perturbación compacta de $\mathcal{L}_{\kappa,\delta}$ y por lo tanto poseen el mismo espectro esencial, el cual incluye los $\lambda \in \mathbb{C}$ especificados en el siguiente resultado

Teorema 4.4.3 *El espectro esencial de los operadores $\bar{\mathcal{L}}_2$ y $\mathcal{L}_{\delta,\kappa}$ in Y incluye al conjunto de números $\lambda \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\lambda^2 \in B_1 \cup B_{2,\kappa}$.*

donde B_1 es el conjunto definido en (4.28) y, para $\kappa > 0, \rho = e^{-\kappa}$, $B_{2,\kappa}$ se define como

$$B_{2,\kappa} = \left\{ -4\delta \sin^2 \frac{k}{2} \left(2\omega \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos k + \rho^2} + 4\delta \sin^2 \frac{k}{2} \right) : k \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.33)$$

Notar que, como es de esperarse y, dado $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \rho = 0$, se tiene que $B_{2,\kappa}$ tiende a B_2 cuando $\kappa \rightarrow \infty$.

Capítulo 5

Aproximaciones variacionales de breathers de un pico

En este capítulo construimos aproximaciones analíticas para los breathers de un pico de la ecuación de Schrödinger no lineal discreta tratados en el capítulo 3. Para obtener estas aproximaciones utilizamos métodos variacionales que son de uso extendido en la literatura. En [A83] y [M02], se presenta una descripción general del método que hemos introducido en el Capítulo 2. En [CTCM06] y [CCMK11] se presentan aplicaciones de estos métodos para hallar aproximaciones de solitones discretos de la ecuación de Schrödinger discreta con no linealidad cúbica-quíntica.

Las soluciones tipo breathers de un pico, que son puntos críticos del hamiltoniano evaluado sobre configuraciones con norma $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ fija, fueron tratadas en el capítulo 3. Hemos visto que pueden considerarse reales, positivas, simétricas respecto del origen y decrecientes en ambas direcciones desde su pico máximo, i. e., $A_n > 0$, $A_{-n} = A_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ y $A_m \geq A_k$ si $k \geq m$, $\forall k, m \in \mathbb{N}$.

La ecuación (3.1) que estamos tratando no posee soluciones explícitas que puedan expresarse en términos de funciones elementales. Nuestro objetivo es hallar una expresión analítica expresable en función de parámetros adecuados, que se encuentre lo suficientemente próxima a las soluciones tipo breathers de la Ec. (3.1). Para ello, basándonos en el comportamiento de las soluciones de un pico estudiadas previamente y en las soluciones al problema lineal, proponemos expresiones con decaimiento exponencial desde su pico máximo. Planteamos tres tipos de expresiones, la primera está basada en un decaimiento asintótico en la cola del breather. Esta expresión se obtiene hallando de forma exacta el decaimiento de las soluciones al problema lineal y aproximando variacionalmente la amplitud mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La segunda expresión propuesta la hallamos resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange

asociadas al lagrangiano efectivo que se obtiene considerando tanto a la amplitud como al decaimiento como parámetros variacionales. Este sistema reducido dependiente de dos parámetros (amplitud y decaimiento) provee una aproximación global a los breathers de un pico mejor que el anterior, pero pierde exactitud en el decaimiento del breather, que deja de ser asintótico.

En tercer lugar consideramos, además del parámetro asociado a la amplitud, un parámetro variacional que agrega un grado de libertad en el pico central del breather, y conservamos el decaimiento exacto provisto por la linealización del problema. Así presentamos una aproximación explícita a la solución al problema que mejora la precisión global sin perder exactitud en el decaimiento asintótico.

Las aproximaciones analíticas propuestas son comparadas con las soluciones de un pico halladas numéricamente en el capítulo 3. Este tratamiento analítico basado en métodos variacionales permite predecir que no es esperable que existan fenómenos de biestabilidad en las soluciones tipo breathers a la ecuación DNLS con no linealidad no local cúbica de tipo Hartree, a diferencia de lo que ocurre en el caso de la DNLS cúbica-quintica (cf. [CTCM06]). E

Otra ventaja de este enfoque es que nos provee de expresiones explícitas que pueden ser utilizadas como puntos de partida para hallar soluciones numéricas mediante métodos de Newton y para estudiar la dinámica en la evolución de las soluciones a la DNLS. En el Capítulo 3, para hallar soluciones numéricas tipo breathers de un pico, realizábamos continuaciones partiendo de la solución exacta de un único pico no nulo calculada de forma explícita para $\delta = 0$. Para ello necesitábamos aplicar sucesivamente métodos de Newton en etapas incrementando paulatinamente el valor de δ . Con este enfoque las aproximaciones propuestas pueden utilizarse como punto de partida del método de Newton independientemente del valor de δ .

5.1. Aproximaciones con dos parámetros

Recordemos la ecuación DNLS no local con la que estamos trabajando:

$$\dot{u}_n = \delta i (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} i \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, t > 0. \quad (5.1)$$

donde δ y γ son reales y $\kappa > 0$. El caso físicamente relevante es cuando δ y γ tienen el mismo signo (caso enfocante), en los ejemplos analizados consideraremos δ y γ negativas.

La ecuación (5.1) vimos que puede expresarse formalmente como un sistema hamiltoniano

$$\dot{u}_n = -i \frac{\partial H}{\partial u_n^*}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.2)$$

con

$$H = \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_{n+1} - u_n|^2 - \gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} |u_m|^2 e^{-\kappa|m-n|} |u_n|^2. \quad (5.3)$$

En el Capítulo 3 hallamos soluciones de tipo breather de la ecuación (5.1) sustituyendo la expresión $v_n = A_n e^{-i\omega t}$ (a saber: todos los nodos oscilan sincronizadamente). Entonces la solución estacionaria A_n debe cumplir la ecuación de recurrencia

$$-\omega A_n = \delta(A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n) + 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |A_m|^2 A_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.4)$$

Estas ecuaciones estacionarias se derivan formalmente del lagrangiano

$$L = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega |A_n|^2 - \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} |A_{n+1} - A_n|^2 + \gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} |A_m|^2 e^{-\kappa|m-n|} |A_n|^2. \quad (5.5)$$

Para hallar aproximaciones a las soluciones de tipo breather a la ecuación (5.1) proponemos expresiones con decaimiento exponencial $A_n = A e^{-\alpha|n|}$ con $\alpha > 0$. Reemplazando esta expresión en el lagrangiano (5.5) obtenemos el lagrangiano efectivo

$$L_{\text{eff}}(A, \alpha) = A^2 ((\omega - 2\delta) \coth \alpha + 2\delta \operatorname{csch} \alpha) + \gamma A^4 \tanh \frac{\kappa}{2} \frac{\coth(\frac{\kappa}{2} + \alpha) \sinh 2\alpha - \coth 2\alpha \sinh \kappa}{\cosh 2\alpha - \cosh \kappa}. \quad (5.6)$$

Resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al lagrangiano efectivo (5.6) pueden obtenerse aproximaciones analíticas a las soluciones exactas a la ecuación (5.1). A continuación seguiremos dos caminos para aproximar soluciones con decaimiento exponencial para la expresión que aquí estamos considerando. En la Sección 5.1.1 utilizamos un valor de α determinado por la solución exacta al problema lineal asociado a la ecuación (5.4); en la sección 5.1.2 resolvemos el sistema de Euler-Lagrange para ambos parámetros variacionales A y α de la ecuación (5.6).

5.1.1. Decaimiento asintótico

En [K09] (Cap. 11) se analiza la DNLS cúbica, cuya ecuación estacionaria se corresponde con la ecuación (5.4) considerando $\kappa = \infty$. Allí se presenta un enfoque que consiste en traducir la ecuación en un mapeo bidimensional y estudiar las propiedades de las órbitas definidas por dicho mapeo. En nuestro caso este enfoque no es pertinente para κ arbitrario, debido a la interacción no local que da lugar a la convolución en el miembro de la derecha de (5.4). Sin embargo, podemos tomar parte de este análisis para aproximar el decaimiento de la solución exacta.

Observando el término no lineal de la ecuación (5.4) vemos que la contribución de la convolución (la interacción no local de orden cúbico) decrece cuanto más se aleja A_n del pico máximo del breather. Por lo tanto, para obtener una aproximación del decaimiento de la cola del breather podemos considerar el problema lineal asociado a la ecuación (5.4), que se corresponde con la ecuación de Schrödinger lineal discreta, y de esta manera obtener una relación de recurrencia entre amplitudes consecutivas. Más precisamente, despreciando el término no lineal, la ecuación (5.4) se convierte en el sistema

$$\begin{cases} A_{n+1} &= (2 - \frac{\omega}{\delta}) A_n - B_n, \\ B_{n+1} &= A_n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.7)$$

La matriz asociada al sistema (5.7) es

$$M = \begin{bmatrix} 2 - \frac{\omega}{\delta} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

y sus autovalores están dados por

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1} \quad \text{and} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad (5.9)$$

donde $a = 2 - \omega/\delta$.

Dado que estamos interesados en hallar el decaimiento exponencial lineal exacto para breathers de un pico, consideramos $A_n = A\lambda^{-|n|} = Ae^{-\alpha|n|}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, de donde obtenemos

$$\alpha = \ln \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1} \right). \quad (5.10)$$

Observación 5.1.1 *Observamos de la ecuación (5.9) que una condición necesaria para la existencia de una aproximación con este decaimiento es que $\omega\delta < 0$. Recordemos además, de las Ecuaciones (3.10) y (3.18), que $\omega\gamma < 0$. Por lo que será posible hallar soluciones con decaimiento exponencial sólo en el caso $\gamma\delta > 0$ (caso enfocante). En el caso desenfocante las soluciones de un pico presentan oscilaciones alternando el signo en cada sitio. En la Sección 3.2 hemos observado este comportamiento en la cola de los breathers con una cantidad finita de picos (Fig. 3.3).*

El valor de α dado por la ecuación (5.10) provee el correcto decaimiento asintótico del breather y la aproximación será tanto más precisa cuanto más localizada sea la solución (cf. Fig. 5.1) Por otra parte, la amplitud A puede hallarse como un parámetro variacional resolviendo las

ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas a partir del lagrangiano efectivo en la ecuación (5.6), $\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial A} = 0$. Descartando la solución trivial $A = 0$, obtenemos la siguiente ecuación:

$$(\omega - 2\delta) \coth \alpha + 2\delta \operatorname{csch} \alpha + A^2 2\gamma \tanh \frac{\kappa \coth \left(\frac{\kappa}{2} + \alpha\right) \sinh 2\alpha - \coth 2\alpha \sinh \kappa}{\cosh 2\alpha - \cosh \kappa} = 0. \quad (5.11)$$

Bajo la condición $\omega\delta < 0$ planteada previamente, se puede chequear que la ecuación (5.11) cuadrática en A tiene solución (única salvo signo) si $\gamma\delta > 0$. Y esta última condición se corresponde justamente con lo que hemos planteado en la Observación 5.1.1.

En la figura 5.1 la comparación, en escala semilogarítmica, entre la solución numérica exacta (triángulos negros) y la aproximación que surge de considerar el decaimiento del problema lineal (círculos rojos), pone de manifiesto el decaimiento asintótico en la cola del breather y permite observar que globalmente la aproximación es más precisa cuanto más localizada está la solución, i. e., cuanto más grande es κ . Los breathers que aquí graficamos son los de un pico presentados en el Capítulo 3 (Fig. 3.4).

En el gráfico de la izquierda se representa el breather computado numéricamente para $\kappa = 0,5$, $\delta = -0,5$, $\gamma = -1$ (caso enfocante) y $\omega = 14,6749972$. En el gráfico de la derecha presentamos el breather calculado para $\kappa = 0,25$, $\delta = -0,5$, $\gamma = -1$ y $\omega = 6,97912841$. En ambos casos se puede observar, por simple inspección visual de los picos adyacentes al pico central, que la aproximación global no es buena. Sin embargo, el decaimiento conserva con muy buena precisión la pendiente logarítmica de la solución numérica exacta. Por aproximación global nos referimos a la distancia $\|u - u_{ap}\|$ en una norma dada, entre la solución numérica exacta u y su aproximación analítica u_{ap} . Por ejemplo, en norma ℓ_2 está en el orden de 0.4 para el gráfico de la izquierda y 1.7 para el de la derecha. Este es un error relativo global que está en torno al 7% y 31% respectivamente. Sin embargo el error relativo en la amplitud del pico central es significativamente menor, en torno al 0,44% y 8% respectivamente.

5.1.2. Aproximación Global

Ahora consideramos A y α como parámetros variacionales y hallamos los valores que pueden tomar resolviendo el sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtiene a partir del lagrangiano efectivo (5.6)

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial A} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \alpha} = 0. \quad (5.12)$$

Descartando la solución trivial $A = 0$, el sistema resultante está dado por las ecuaciones

$$(\omega - 2\delta) \coth \alpha + 2\delta \operatorname{csch} \alpha + A^2 2\gamma \tanh \frac{\kappa \coth \left(\frac{\kappa}{2} + \alpha\right) \sinh 2\alpha - \coth 2\alpha \sinh \kappa}{\cosh 2\alpha - \cosh \kappa} = 0, \quad (5.13)$$

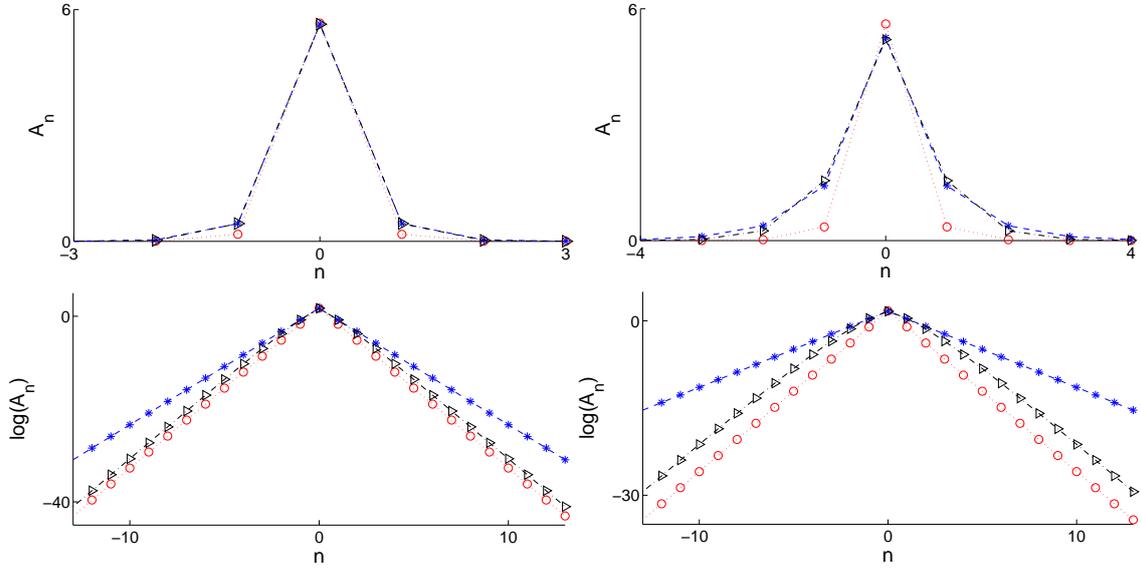


Figura 5.1: Soluciones tipo breather de la Ec. (5.4) A_n vs. nodo (arriba) y $\log(A_n)$ vs. nodo (abajo) para $\kappa = 0,5$, $\delta = -0,5$, $\gamma = -1$, $\omega = 14,6749972$ (izquierda) y $\kappa = 0,25$, $\delta = -0,5$, $\gamma = -1$, $w = 6,97912841$ (derecha). Los triángulos negros corresponden a la solución exacta numérica, los círculos rojos a la aproximación con decaimiento asintótico y los asteriscos azules corresponden a la aproximación con parámetros variacionales para A y α .

$$(\omega - 2\delta)(1 - \coth \alpha)^2 - 2\delta \operatorname{csch} \alpha \coth \alpha + \gamma A^2 \tanh \frac{\kappa \mathcal{T}'_1(\alpha, \kappa) \mathcal{T}_2(\alpha, \kappa) - \mathcal{T}_1(\alpha, \kappa) \mathcal{T}'_2(\alpha, \kappa)}{2(\cosh 2\alpha - \cosh \kappa)^2} = 0, \quad (5.14)$$

con \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 el numerador y denominador de la fracción en el segundo miembro del lagrangiano efectivo, Ec. (5.13), respectivamente. Y \mathcal{T}'_1 y \mathcal{T}'_2 sus derivadas con respecto a α .

$$\mathcal{T}_1(\alpha, \kappa) := \coth \left(\frac{\kappa}{2} + \alpha \right) \sinh 2\alpha - \coth 2\alpha \sinh \kappa, \quad (5.15)$$

$$\mathcal{T}'_1(\alpha, \kappa) = \left(1 - \coth \left(\frac{\kappa}{2} + \alpha \right) \right)^2 \sinh 2\alpha + 2 \coth \left(\frac{\kappa}{2} + \alpha \right) \cosh 2\alpha - 2(1 - \coth 2\alpha)^2 \sinh \kappa, \quad (5.16)$$

$$\mathcal{T}_2(\alpha, \kappa) := \cosh 2\alpha - \cosh \kappa, \quad \mathcal{T}'_2(\alpha, \kappa) = 2 \sinh 2\alpha. \quad (5.17)$$

La ecuación (5.13) es la misma que hemos calculado para el decaimiento asintótico (Ec. (5.11)). El sistema dado por las ecuaciones (5.13) y (5.14) lo hemos resuelto numéricamente, fijando valores para κ , ω , δ y γ . Las comparaciones presentadas en la figura Fig. 5.1 entre estas aproximaciones basadas en los parámetros variacionales y las soluciones numéricas exactas muestran que la aproximación global es más precisa que en el caso de la aproximación con

decaimiento asintótico. El error global absoluto $\|u - u_{ap}\|_2$ entre la solución numérica exacta y su aproximación analítica está ahora en el orden de 0.02 para el gráfico de la izquierda y 0.29 para el de la derecha, mejorando significativamente los valores hallados previamente, con un error relativo del orden de 0,0035 y 0,05, respectivamente. El error relativo en el pico central es del orden de 4×10^{-5} y 0,01 respectivamente, observándose nuevamente que la aproximación mejora significativamente con la localización de la solución.

Sin embargo, dado que este enfoque nos devuelve los parámetros que mejor aproximan globalmente a la solución y que la solución está localizada en torno a su pico central, es de esperar que estas aproximaciones no preserven el decaimiento asintótico, tal como se puede observar en las colas de los gráficos semilogarítmicos (asteriscos azules en la Figura 5.1).

A continuación veremos cómo hallar una aproximación analítica que mejore la aproximación global sin perder la precisión en el decaimiento.

Puede chequearse aquí también que, bajo las mismas condiciones de la subsección anterior ($\omega\delta < 0$ y $\delta\gamma > 0$), la ecuación (5.11) cuadrática en A tiene una única raíz positiva para cada $\alpha > 0$. Esto indica que no es esperable que coexistan dos breathers distintos en las soluciones de la DNLS no local con no-linealidad cúbica de tipo Hartree, como sí ocurre en el caso de la DNLS cúbica-quíntica (cf. Ref. [CTCM06]).

5.2. Expresiones analíticas de un pico

La aproximación variacional puede mejorarse añadiendo un parámetro, tomando una expresión analítica con un pico “flotante” dado por el parámetro β , como se muestra a continuación,

$$A_n = \begin{cases} \beta A & \text{si } n = 0 \\ Ae^{-\alpha|n|} & \text{si } |n| > 0 \end{cases}. \quad (5.18)$$

Reemplazando (5.18) en el lagrangiano (5.5), obtenemos que el lagrangiano efectivo para esta expresión está dado por

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}}(A, \beta, \alpha) = & A^2 \left(\omega (\beta^2 + e^{-\alpha} \operatorname{csch} \alpha) - \delta \left(e^{-\alpha} (e^{-\alpha} - 1)^2 \operatorname{csch} \alpha + 2 (\beta - e^{-\alpha})^2 \right) \right) \\ & + A^4 \gamma \tanh \frac{\kappa}{2} N(A, \beta, \alpha), \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde

$$\begin{aligned} N(A, \beta, \alpha) = & \beta^4 + 2\beta^2 e^{-\alpha - \frac{\kappa}{2}} \operatorname{csch} \left(\alpha + \frac{\kappa}{2} \right) \\ & + \frac{e^{-\alpha - \frac{\kappa}{2}} (\cosh \kappa - e^{-2\alpha}) \operatorname{csch} \left(\alpha + \frac{\kappa}{2} \right) - e^{-2\alpha} \operatorname{csch} 2\alpha \sinh \kappa}{\cosh 2\alpha - \cosh \kappa}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

El parámetro β asociado al pico flotante y la amplitud A son tratados aquí como parámetros variacionales, mientras que para el decaimiento de la cola del breather utilizamos el valor de

α que surge de resolver de manera exacta el problema lineal (Ec. (5.10)), como se mostró en la Subsección 5.1.1. Aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange: $\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial A} = 0$, $\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \beta} = 0$. y, descartando la solución trivial $A = 0$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\omega (\beta^2 + e^{-\alpha} \operatorname{csch} \alpha) - \delta \left(e^{-\alpha} (e^{-\alpha} - 1)^2 \operatorname{csch} \alpha + 2 (\beta - e^{-\alpha})^2 \right) + 2A^2 \gamma \tanh \frac{\kappa}{2} N(A, \beta, \alpha) = 0, \quad (5.21)$$

$$(\omega \beta - 2\delta (\beta - e^{-\alpha})) + 2A^2 \gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\beta^3 + \beta e^{-\alpha - \frac{\kappa}{2}} \operatorname{csch} \left(\alpha + \frac{\kappa}{2} \right) \right) = 0. \quad (5.22)$$

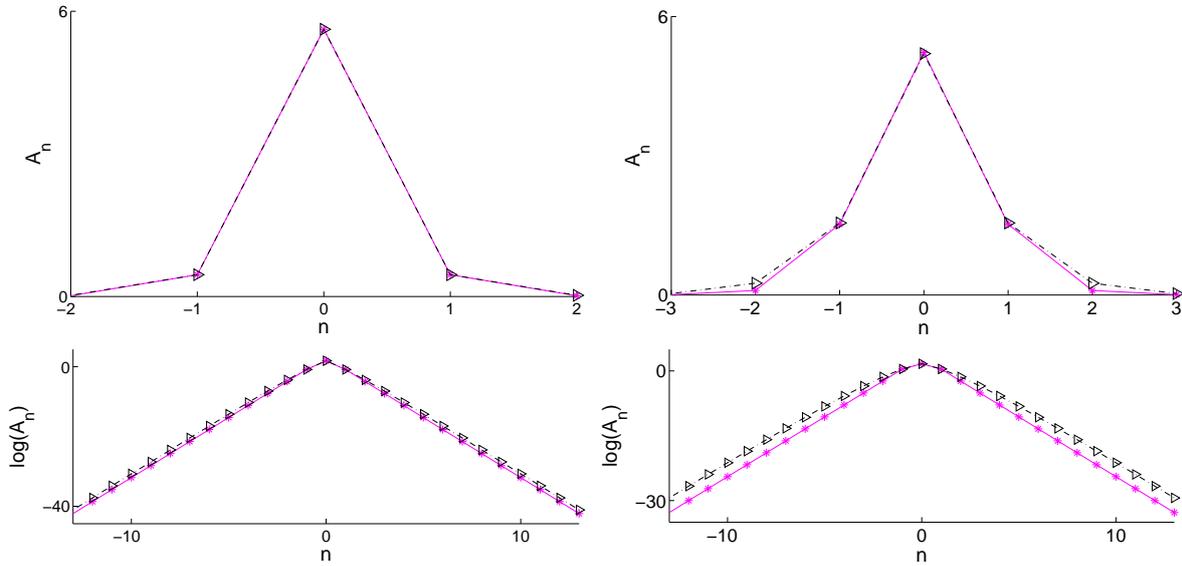


Figura 5.2: Soluciones tipo breathers de la Ec. (5.4) A_n vs. nodo (arriba) y $\log(A_n)$ vs. nodo (abajo) para $\kappa = 0,5$, $\delta = -0,5$, $\gamma = -1$, $\omega = 14,6749972$ (izquierda) y $\kappa = 0,25$, $\delta = -0,5$, $\gamma = -1$, $w = 6,97912841$ (derecha). Los triángulos negros corresponden a las soluciones exactas numéricas, los asteriscos magenta corresponden a la expresión analítica de pico “flotante”.

Al resolver numéricamente este sistema de ecuaciones, fijados κ , δ , γ y ω , obtenemos 8 soluciones para el par $\{A, \beta\}$. De estas soluciones, 4 son de la forma $\{\bar{z}, w\}$, $\{-\bar{z}, w\}$, $\{z, \bar{w}\}$, $\{-z, \bar{w}\}$, con z y w complejos puros; y las 4 restantes son de la forma $\{a, b\}$, $\{-a, b\}$, $\{\hat{a}, -\hat{b}\}$, $\{-\hat{a}, -\hat{b}\}$, con a , b , \hat{a} y \hat{b} reales positivos. Por lo que, considerando β y A reales positivos, el sistema tiene solución única. En la Figura 5.2 mostramos los gráficos de las aproximaciones halladas para los valores de A y β reales positivos y de las respectivas soluciones numéricas exactas.

Como en las aproximaciones previas, se observa que la precisión mejora con la localización de la solución (incremento del parámetro κ). Sin embargo con estas aproximaciones de 3 parámetros

hemos conseguido mejorar la aproximación global sin perder precisión en el decaimiento. Los errores absolutos $\|u - u_{ap}\|_2$ entre la solución numérica exacta y su aproximación de 3 parámetros son ahora del orden de 5×10^{-3} y 0,2 para los gráficos de la izquierda y la derecha respectivamente, con errores relativos del orden de 9×10^{-4} y 0,035 respectivamente. Y los errores relativos para la amplitud son del orden de 4×10^{-5} y 0,01 respectivamente. Observamos que el error en la amplitud no ha mejorado con respecto al caso anterior en que tomamos a la amplitud y el decaimiento como parámetros variacionales, sin embargo sí ha mejorado el error global. Esto se debe a que mejoró la aproximación en los picos adyacentes al pico central.

Se puede conseguir expresiones explícitas que aproximen a las soluciones exactas con mayor precisión agregando parámetros variacionales que sumen grados de libertad en las cercanías del pico. Por supuesto, cuanto más grados de libertad mejor es la aproximación, a expensas de tener que resolver sistemas de ecuaciones de Euler-Lagrange cada vez más complicados.

Estas aproximaciones analíticas pueden ser utilizadas como semillas para hallar soluciones mediante el método de Newton, para valores prefijados de δ , γ , ω y κ , sin necesidad de realizar continuaciones desde una solución explícita para $\delta = 0$, como hacíamos en el Capítulo 3. También pueden ser utilizadas como puntos de partida para estudiar la dinámica cercana a los breathers de un pico.

Queda pendiente un estudio de aproximaciones analíticas para los breathers con una cantidad finita de picos consecutivos y con una cantidad infinita de picos, estudiados en el capítulo anterior. Estos breathers presentan una dificultad mayor a la hora de aproximarlos con expresiones analíticas, debido a las vibraciones que presentan en la interfaz entre la meseta y la(s) cola(s). Creemos que para los breathers de infinitos picos hay una manera de emular el comportamiento de sistemas dinámicos discretos similar a la que nos permitió hallar el decaimiento asintótico en el caso de breathers de un pico (Ec. 5.7), pero con recurrencias que involucran 4 variables en lugar de 2. Esto forma parte de un futuro trabajo.

Apéndice A

Desigualdad de Young Discreta

En este apéndice se prueba la desigualdad de Young discreta (Teorema 3.3.3) que hemos utilizado en la Sección 3.3 para probar la existencia de breathers con infinitos picos y en el Capítulo 4 para estudiar la estabilidad de las soluciones analizando los operadores involucrados. La desigualdad de Young en su versión continua aparece en muchos textos clásicos (e. g. [LL01]), sin embargo no hemos encontrado un texto clásico en el que se utilice en su versión discreta por lo que decidimos presentar aquí una demostración que, en rigor, es una adaptación al caso discreto de la demostración clásica para el caso continuo.

Dado $p \geq 1$, consideramos el espacio de Banach $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ de todas las sucesiones a valores complejos sobre \mathbb{Z} , con la norma $\|\cdot\|_p$ definida como es usual, esto es, dado $u \in \ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$$\|u\|_p := \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{A.1})$$

Para abreviar, notaremos a este espacio como ℓ^p .

Dados $u \in \ell^p$ y $v \in \ell^q$ definimos el *producto de convolución* de estas sucesiones como la nueva sucesión cuyo término en el lugar j -ésimo se define como

$$(u * v)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{j-k} v_k, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.2})$$

Eventualmente esta suma podría ser infinita, por lo que el producto de convolución no está definido para todo p y $q \geq 1$. El siguiente teorema nos provee información sobre los espacios de Banach en los que está bien definida la convolución.

Teorema A.0.1 (Desigualdad de Young Discreta) *Sean p y $q \geq 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ y sea $r > 0$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Si $u \in \ell^p$ y $v \in \ell^q$ entonces $u * v \in \ell^r$ y vale la desigualdad*

$$\|u * v\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q. \quad (\text{A.3})$$

Demostración: Separamos en casos:

1) Si $p = q = 1$:

En este caso tenemos que $r = 1$ y la desigualdad se reduce a

$$\|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1. \quad (\text{A.4})$$

Dado que u y $v \in \ell^1$, tenemos que

$$\|u * v\|_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{j-k} v_k \right| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_{j-k}| |v_k| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v_k| \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j-k}| = \|v\|_1 \|u\|_1. \quad (\text{A.5})$$

2) Si $p > 1$ ó $q > 1$:

Sabemos que $u \in \ell^p$ y $v \in \ell^q$ y que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, por lo que nos será útil la siguiente descomposición:

$$|u_{j-k}| |v_k| = (|u_{j-k}|^p |v_k|^q)^{1/r} (|u_{j-k}|^p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} (|v_k|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \quad (\text{A.6})$$

de aquí concluimos que para cada $j \in \mathbb{Z}$

$$|(u * v)_j| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_{j-k}| |v_k| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[(|u_{j-k}|^p |v_k|^q)^{1/r} (|u_{j-k}|^p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} (|v_k|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \right] \quad (\text{A.7})$$

$$\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_{j-k}|^p |v_k|^q \right)^{1/r} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_{j-k}|^p \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |v_k|^q \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \quad (\text{A.8})$$

$$= (|u|^p * |v|^q)_j^{1/r} \|u\|_{\ell^p}^{1 - \frac{p}{r}} \|v\|_{\ell^q}^{1 - \frac{q}{r}}. \quad (\text{A.9})$$

En la desigualdad A.8 utilizamos la desigualdad generalizada discreta de Hölder.

Notar que si $p = 1$ ó $q = 1$ (pero no simultáneamente, que es el caso previamente analizado) se anulan algunos exponentes, pero las igualdades y desigualdades siguen siendo válidas.

Utilizando la acotación obtenida, concluimos que para todo $j \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$|(u * v)_j|^r \leq (|u|^p * |v|^q)_j \|u\|_p^{r-p} \|v\|_q^{r-q}. \quad (\text{A.10})$$

Ahora estamos en condiciones de acotar a la convolución en norma r :

$$\|u * v\|_r^r = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |(u * v)_j|^r \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} (|u|^p * |v|^q)_j \|u\|_p^{r-p} \|v\|_q^{r-q} \quad (\text{A.11})$$

$$= \|u\|_p^{r-p} \|v\|_q^{r-q} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (|u|^p * |v|^q)_j = \|u\|_p^{r-p} \|v\|_q^{r-q} \| |u|^p * |v|^q \|_1 \quad (\text{A.12})$$

$$\leq \|u\|_p^{r-p} \|v\|_q^{r-q} \| |u|^p \|_1 \| |v|^q \|_1 \quad (\text{A.13})$$

$$= \|u\|_p^{r-p} \|v\|_q^{r-q} \|u\|_p^p \|v\|_q^q = \|u\|_p^r \|v\|_q^r \quad (\text{A.14})$$

en (A.13) usamos la desigualdad probada en el caso anterior: $\|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1$

Con esto hemos probado la desigualdad discreta de Young:

$$\|u * v\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

■

Observación A.0.1 *Si $p = r = 2$ y $q = 1$, tenemos que*

$$\|u * v\|_1 \leq \|u\|_2 \|v\|_1$$

siendo éste el caso que hemos utilizado con más frecuencia para las acotaciones que nos dieron la continuidad en las demostraciones de los lemas de la Sección 3.3 y que nos permitieron estudiar a los operadores considerados en el Capítulo 4.

Bibliografía

- [A83] D. ANDERSON, Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers, *Physical Review A*, Vol. 27, N. 6, 3135–3145, (1983).
- [ALR88] D. ANDERSON, M. LISAK AND T. REICHEL, Approximate analytical approaches to nonlinear pulse propagation in optical fibers: A comparison, *Physical Review A*, Vol. 38, N. 3, 1618–1620, (1988).
- [A13] G. ASSANTO, *Nematicons: spatial optical solitons in nematic liquid crystals*, Series in pure and applied optics, Wiley, 2013.
- [APC03] G. ASSANTO, M. PECCIANI, C. CONTI, Nematicons: Optical Spatial Solitons in Nematic Liquid Crystals. *Opt. Photon. News*. 14 (2): 44–48, (2003).
- [B14] JOHAN BALKARE, Shift Operator in ℓ^2 Space, *KTH, School of Engineering Sciences (SCI), Mathematics (Dept.)*, urn:nbn:se:kth:diva-147599, (2014).
- [BBP17] R.I. BEN, J.P. BORGNA, P. PANAYOTAROS, Properties of some breather solutions of a nonlocal discrete NLS equation, *Communications in Mathematical Sciences*, Vol. 15, N. 8, 2143–2175, (2017).
- [BCMP15] R.I. BEN, L. CISNEROS AKE, A.A. MINZONI, P. PANAYOTAROS, Localized solutions for a nonlocal discrete NLS equation, *Phys. Lett. A* 379, 1705-1714 (2015).
- [B09] D.S. BERNSTEIN, *Matrix Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2009.
- [BPRS18] J. P. BORGNA, P. PANAYOTAROS, D. RIAL, C. SÁNCHEZ DE LA VEGA, Optical solitons in nematic liquid crystals: model with saturation effects. *Nonlinearity* 31(4): 1535 (2018).
- [CK19] R. CARRETERO-GONZÁLEZ, P. KEVREKIDIS, *Nonlinear Waves & Hamiltonian Systems: From One To Many Degrees of Freedom, From Discrete To Continuum*, en preparación.

- [CTCM06] R. CARRETERO-GONZÁLEZ, J.D. TALLEY, C. CHONG, B.A. MALOMED, Multistable solitons in the cubic-quintic discrete nonlinear Schrödinger equation, *Physica D* 216, pp. 77-89, (2006).
- [C01] W. CHENEY, *Analysis for Applied Mathematics*, Springer, 2001.
- [CCMK11] C. CHONG, R. CARRETERO-GONZÁLEZ, B.A. MALOMED, P.G. KEVREKIDIS, Variational approximations in discrete nonlinear Schrödinger equations with next-nearest-neighbor couplings, *Physica D* 240, pp. 1205-1212, (2011).
- [CMR99] J. C. COMTE, P. MARQUIÉ, M. REMOISSENET, Dissipative lattice model with exact traveling discrete kink-soliton solutions: Discrete breather generation and reaction diffusion regime, *Phys. Rev. E*, Vol. 60, 7484-7489, (1999).
- [CPA03] C. CONTI, M. PECCIANI, G. ASSANTO, Route to nonlocality and observation of accessible solitons, *Phys. Rev. Lett.* 91, 073901 (2003).
- [FCET13] C. FERNANDEZ-OTO, M.G. CLERC, D. ESCAFF, M. TLIDI, Strong nonlocal coupling stabilizes localized structures: An analysis based on front dynamics, *Phys. Rev. Lett.* 110, 174101 (2013).
- [FA05] A. FRATALOCCHI, G. ASSANTO, Discrete light localization in one-dimensional nonlinear lattices with arbitrary nonlocality, *Phys. Rev. E* 72, 066608 (2005).
- [KP13] T. KAPITULA, K. PROMISLOW, *Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves*, Springer, 2013.
- [Kato95] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators, 2nd. Ed.*, Springer, 1995.
- [Kelley03] C. T. KELLEY, *Solving Nonlinear Equations with Newton's Methods*, SIAM, 2003.
- [K09] P. KEVREKIDIS, *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation. Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives*, STMP 232 Springer, Berlin, Heidelberg 2009. DOI 10.1007/ 978-3-540-89199-4
- [LL01] E.H. LIEB, M. LOSS, *Analysis, 2nd. Ed.*, AMS, Providence, 2001.
- [L84] P. L. LIONS, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1 *Annales de l'I. H. P., section C, tome 1, no2*, p. 109-145, (1984).

- [MA94] R.S. MACKAY, S. AUBRY, Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators, *Nonlinearity* 7, 1623-1643 (1994).
- [MSA14] J.M.L. MACNEIL, N.F. SMYTH, G. ASSANTO, Exact and approximate solutions for optical solitary waves in nematic liquid crystals, *Physica D* 284, 1-15 (2014).
- [M02] B. MALOMED, Chapter 2 Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields, *Progress in Optics Vol. 43*, 71-193 (2002).
- [MW96] B. MALOMED, M. WEINSTEIN, Soliton dynamics in the discrete nonlinear Schrödinger equation, *Physics Letters A* 220, 91-96 (1996).
- [MT89] R. MICHALSKA-TRAUTMAN, Formation of an optical breather, *J. Opt. Soc. Am. B/Vol. 6, No. 1*, 36-44 (1989).
- [M05] J.T. MOESER, Diffraction managed solitons: asymptotic validity and excitation thresholds, *Nonlinearity* 18, 2275-2297 (2005).
- [P05] P. PANAYOTAROS, Breather solutions in the diffraction managed NLS equation, *Physica D* 206, 213-231 (2005).
- [P11] P. PANAYOTAROS, Continuation and bifurcation of breathers in a finite discrete NLS equation, *Disc. Cont. Dyn. Syst. S* 4, 5, 1227 - 1245 (2011).
- [PM14] P. PANAYOTAROS, T. MARCHANT, Solitary waves in nematic liquid crystals, *Physica D* 268, 106-117 (2014).
- [PP08] P. PANAYOTAROS, D.E. PELINOVSKY, Periodic oscillations of discrete NLS solitons in the presence of diffraction management, *Nonlinearity* 21, 1265-1279 (2008).
- [PA12] M. PECCIANI, G. ASSANTO, Nematicons, *Phys. Rep.* 516, 147-210 (2012).
- [PKF05] D.E. PELINOVSKY, P.G. KEVREKIDIS, D.J. FRANTZESKAKIS, Stability of discrete solitons in nonlinear Schrödinger lattices, *Physica D* 212, 1-19 (2005).
- [RS80] M. REED, B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol I: Functional Analysis* Academic Press, Inc., 1980.
- [PS11] A. SAKOVICH, D. PELINOVSKY, Internal modes for discrete solitons near the anti-continuum limit of the dNLS equation, *Physica D* 240, 265-281 (2011).

- [S07] M. STANISLAVOVA, Diffraction managed solitons with zero mean diffraction, *J. Dyn. Diff. Eq.* 19, 295-307 (2007).
- [S08] R. STEVEN, *Advanced Linear Algebra, 3rd. Ed.*, Springer Sciences+Business Media, 2008.
- [SS99] C. SULEM, P. SULEM, *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*, Springer, 1999.
- [VP19] J. A. VÉLEZ-PÉREZ, P. PANAYOTAROS, Wannier functions and discrete NLS equations for nematicons, *Mathematics in Engineering*, 1(2), 309-326, (2019).
- [W99] M.I. WEINSTEIN, Excitation thresholds for nonlinear localized modes on lattices, *Nonlinearity* 12, 673-691 (1999).
- [Z86] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications I*, Springer Verlag, New York, 1986