

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

---

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

---

*Ecuaciones de reacción difusión fraccionarias en espacios infinitos*

---

Trabajo de tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología de la Universidad  
Nacional de General Sarmiento

Autor: **Agustín Tomás Besteiro**

Director: Constanza Sanchez Fernandez de la Vega

Marzo 2020

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

### FORMULARIO "E" TESIS DE POSGRADO

Niveles de acceso al documento autorizados por el autor

**El autor de la tesis puede elegir entre las siguientes posibilidades para autorizar a la UNGS a difundir el contenido de la tesis: a)**

- a) *Liberar el contenido de la tesis para acceso público.*
- b) *Liberar el contenido de la tesis solamente a la comunidad universitaria de la UNGS:*
- c) *Retener el contenido de la tesis por motivos de patentes, publicación y/o derechos de autor por un lapso de cinco años.*

- a. Título completo del trabajo de Tesis: Ecuaciones de reacción difusión fraccionarias en espacios infinitos.
- b. Presentado por: Besteiro, Agustín Tomás
- c. E-mail del autor: agustinbesteiro@gmail.com
- d. Estudiante del Posgrado: Doctorado en Ciencia y Tecnología
- e. Institución o Instituciones que dictaron el Posgrado: Universidad Nacional de General Sarmiento, Instituto de Ciencias
- f. Para recibir el título de:
  - a) Grado académico que se obtiene: Doctor
  - b) Nombre del grado académico: Doctor en Ciencia y Tecnología
- g. Fecha de la defensa:     /     /  
                                  día    mes    año
- h. Director de la Tesis: Constanza Sanchez Fernandez de la Vega
- i. Tutor de la Tesis: Alberto Déboli
- j. Colaboradores con el trabajo de Tesis: Diego Fernando Rial
- k. Descripción física del trabajo de Tesis: 76 paginas, 8 imágenes.
- l. Alcance geográfico y/o temporal de la Tesis: Internacional (publicado parcialmente en revistas internacionales con referato).
- m. Temas tratados en la Tesis (palabras claves): Ecuaciones de reacción difusión fraccionarias, Métodos de Lie-Trotter, Existencia local y global de soluciones.

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

n. Resumen en español:

En esta tesis, estudiaremos las ecuaciones de reacción difusión no autónomas fraccionarias, en espacios de dimensión infinita. Es decir, estudiamos el sistema no autónomo

$$\partial_t u + \sigma(-\Delta)^\beta u = F(t, u),$$

donde  $u(t, x) \in Z$  para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  y  $0 < \beta \leq 1$ ,  $F: \mathbb{R} \times Z \rightarrow Z$  una función continua y  $Z$  un espacio Banach. Consideramos el problema de valores iniciales  $u(x, 0) = u_0(x)$ . El objetivo de nuestro trabajo es desarrollar un nuevo método para obtener resultados sobre el comportamiento de la ecuación de reacción difusión fraccionaria, utilizando técnicas recientes de splitting numérico introducidas para otros fines. Los principales resultados de esta tesis son obtener condiciones generales para un buen planteo de la ecuación de reacción-difusión fraccionaria en espacios de Banach mediante métodos de Splitting de tipo Lie-Trotter y mostrar ejemplos en donde podemos aplicar los resultados.

o. Resumen en portugués:

Nesta tese, estudaremos as equações da reação difusão não autônoma fracionárias, em espaços de dimensão infinita. Ou seja, estudamos o sistema não autônomo

$$\partial_t u + \sigma(-\Delta)^\beta u = F(t, u),$$

onde  $u(t, x) \in Z$  para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  y  $0 < \beta \leq 1$ ,  $F: \mathbb{R} \times Z \rightarrow Z$  é uma função contínua e  $Z$  é um espaço de Banach. Consideramos o problema de valores iniciais  $u(x, 0) = u_0(x)$ . O objetivo do nosso trabalho é desenvolver um novo método para obter resultados sobre o comportamento da equação da reação difusão fracionária, utilizando técnicas recentes de Splitting numérico introduzidas para outros fins. Os principais resultados desta tese são obter condições gerais para a existência de soluções na equação de reação-difusão fracionária em espaços de Banach usando métodos de Splitting do tipo Lie-Trotter e mostrar exemplos em que podemos aplicar os resultados.

p. Resumen en inglés:

In this thesis, we study non-autonomous reaction-diffusion equations, in infinite dimensional spaces. That is, we study the non-autonomous system

$$\partial_t u + \sigma(-\Delta)^\beta u = F(t, u),$$

where  $u(t, x) \in Z$  for  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  and  $0 < \beta \leq 1$ ,  $F: \mathbb{R} \times Z \rightarrow Z$  a continuous function and  $Z$  a Banach space. We consider the initial value problem  $u(x, 0) = u_0(x)$ . The aim of our work is to develop a new method to obtain results concerning the behavior of the fractional reaction diffusion equation, using recent numerical splitting techniques introduced for other purposes. The main results of this thesis are to obtain general conditions for well-posedness of the fractional reaction-diffusion equation in Banach spaces using Lie-Trotter type Splitting methods and expose examples where we can apply the results.

## **DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA**

---

Evaluable y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

q. Aprobado por: Julio Rossi, Ariel Lombardi, Damián Pinasco.

Firma y aclaración de la firma del Presidente del Jurado:

Firma del autor de la tesis:

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

---

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

---

### *Ecuaciones de reacción difusión fraccionarias en espacios infinitos*

---

#### Publicaciones:

- Besteiro, Agustín; Rial, Diego. *Existence of Peregrine type solutions in fractional reaction–diffusion equations*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations Vol.9, Pag. 1-9, 2019.
- Besteiro, Agustín; Rial, Diego. *Global existence for vector valued fractional reaction-diffusion equations*. arXiv preprint arXiv:1805.09985, 2018.

#### Aportes Originales:

En esta tesis desarrollamos un método de splitting (Capítulo 2) para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales parabólicas, que tengan un término que evoluciona por medio de un semigrupo fuertemente continuo, y otro término no lineal de tipo Lipschitz. Adicionalmente, el método permite que el espacio a considerar sea uno de dimensión infinita. En el capítulo 3, aplicamos este método a la ecuación de reacción difusión fraccionaria, obteniendo existencia global de soluciones para funciones uniformemente continuas en espacios de Banach. En el capítulo 4, aplicamos el splitting a un ejemplo concreto, el de un modelo de dinámica poblacional, en el cual utilizamos todas las hipótesis permitidas por el método, para demostrar existencia global de soluciones. En el capítulo 5, aplicamos el método para probar una característica distinta, que es el comportamiento asintótico de soluciones para ecuaciones de reacción difusión fraccionarias. En el capítulo 6, demostramos la existencia de soluciones de tipo Peregrine, que tienen dos características principales, son suma directa de una función periódica y otra que tiende a cero. Además exhibimos una solución explícita del problema.

UNIVERSIDAD DE GENERAL SARMIENTO

INSTITUTO DE CIENCIAS

ECUACIONES DE REACCIÓN DIFUSIÓN  
FRACCIONARIAS EN ESPACIOS  
INFINITOS

TESIS PRESENTADA POR AGUSTÍN TOMÁS BESTEIRO  
PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DIRECTORA: CONSTANZA SANCHEZ DE LA VEGA

2020

---

# Agradecimientos

A mis padres por hacerme la persona que soy hoy, aunque no estén son mi esencia.

A mis hermanos por acompañarme en estos cinco años, sobre todo los últimos, los mas difíciles.

A mi novia, también por acompañarme en los momentos buenos y los malos.

A Diego por su paciencia y didáctica para formarme como investigador matemático. Cuando sea grande quiero ser como él.

A Constanza por ayudarme en estos cinco años cada vez que lo necesité.

A Mariano, Juan Pablo y el resto del grupo por aceptarme y ayudarme en este camino.

A Nicolas, Mabel, Cristina, Lorena y los Profesores de la UAI por ser parte importantísima de mi formación como licenciado, si logré terminar esta tesis es en gran parte, gracias a su formación.

A Lucas, Fede y Tomas, mis amigos de toda la vida, por estar siempre en todas, pase lo que pase.

A mis amigos físicos de la UBA, Leonardo, Jose, Andres y Norberto, demostrando que se puede ser genio, humilde y de la UBA al mismo tiempo.

A mis compañeros de Tenis, Nacho, Mancu, Pablo y Mati, también por haber estado siempre en este largo camino.

A Darío, Sergio y los ex-compañeros de la UAI, todo eso que vivimos en la licenciatura sigue valiendo hasta hoy.

A todos aquellos que estuvieron virtualmente, también fueron una parte importante de este camino.

A todos los que me estoy olvidando, si es necesario, me lo harán saber y les agradeceré personalmente.

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>2</b>
<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1. Notación y preliminares</b>	<b>10</b>
1.1. Laplaciano fraccionario . . . . .	13
1.2. Semigrupo de la ecuación del calor . . . . .	14
1.3. Semigrupo fraccionario . . . . .	16
1.4. Ecuación fraccionaria no lineal . . . . .	21
1.5. Buen planteo local . . . . .	23
<b>2. Lie-Trotter en dimensión infinita</b>	<b>24</b>
2.1. Propagadores . . . . .	24
2.2. Soluciones aproximadas . . . . .	28
<b>3. Buen planteo global de la ecuación de reacción difusión fraccionaria</b>	<b>38</b>
3.1. Buen planteo global en espacios de Banach . . . . .	39
3.1.1. Ecuación de Ginzburg-Landau compleja . . . . .	42
3.1.2. Ecuación de Fisher–Kolmogorov . . . . .	42
3.1.3. Ecuación de Liénard . . . . .	43
3.2. Buen planteo global para productos de espacios de Banach . . . . .	46
3.2.1. Ecuación de FitzHugh-Nagumo . . . . .	47
<b>4. Modelo de Dinámica poblacional con una variable continua</b>	<b>48</b>

<b>5. Comportamiento asintótico</b>	<b>55</b>
<b>6. Funciones Periódicas</b>	<b>59</b>
6.1. Ejemplo de soluciones de tipo Peregrine para la ecuación de reacción- difusión . . . . .	63
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

---

# Introducción

## Ecuaciones de reacción difusión fraccionarias

En esta tesis, estudiaremos las ecuaciones de reacción difusión no autónomas fraccionarias, en espacios de dimensión infinita. Es decir, estudiamos el sistema no autónomo

$$\partial_t u + \sigma(-\Delta)^\beta u = F(t, u), \quad (0.1)$$

donde  $u(t, x) \in Z$  para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  y  $0 < \beta \leq 1$ ,  $F : \mathbb{R} \times Z \rightarrow Z$  una función continua y  $Z$  un espacio Banach. Consideramos el problema de valores iniciales  $u(x, 0) = u_0(x)$ . El objetivo de nuestro trabajo es desarrollar un nuevo método para obtener resultados sobre el comportamiento de la ecuación de reacción difusión fraccionaria, utilizando técnicas recientes de splitting numérico (ver [10] y [27]) introducidas para otros fines. Los principales resultados de esta tesis son obtener condiciones generales para un buen planteo de la ecuación de reacción-difusión fraccionaria en espacios de Banach mediante métodos de Splitting de tipo Lie-Trotter y mostrar ejemplos en donde podemos aplicar los resultados.

Las ecuaciones de reacción-difusión fraccionarias se usan comúnmente en muchas aplicaciones, como modelos biológicos, modelos de dinámica de poblaciones, modelos de reactores nucleares, solo por nombrar algunas (para referencias a ejemplos ver [6]). La diferencia entre la difusión clásica y la fraccionaria es que el término Laplaciano clásico asociado con la difusión clásica implica un núcleo de dispersión Gaussiano en la ecuación correspondiente, que no representa todos los modelos posibles en la práctica. El modelo fraccionario captura las tasas de dispersión más rápidas y los perfiles de invasión de la ley de potencia observados en muchas aplicaciones. La principal razón de este comportamiento es por las propiedades del Laplaciano

fraccionario, que esta descrito por las teorías estándares de cálculo fraccionario (para un resumen completo del tema ver [29]). Hay varias definiciones equivalentes del Laplaciano fraccionario y su comportamiento esta bien comprendido (ver [11], [36], [25], [28], [45], [39] y [26]).

La ecuación no autónoma de reacción difusión no lineal fue estudiada en [42] y otros, analizando la estabilidad y la evolución del problema. La existencia global en ecuaciones de reacción-difusión en conjuntos acotados se estudió en [47] y en [16] donde se considera el caso  $n$  dimensional con difusión clásica y utilizando productos de intervalos como conjuntos invariantes en  $\mathbb{R}^n$ , en donde evoluciona la ecuación. El caso de tomar como invariante un conjunto convexo solo se considera cuando los coeficientes de difusión forman la matriz identidad (ver corolario 14.8 (b) en [47]). Morgan [34] consideró un caso similar en el que los coeficientes de difusión no forman la identidad, pero se necesitan otras condiciones sobre el sistema para lograr el resultado. Estas técnicas fueron usadas varias veces, recientemente para obtener buen planteo global para distintos problemas de difusión clásica (ver [1], [7], [31], y [46]). Motivado por esto, estudiaremos el buen planteo global de la ecuación de reacción difusión usando una técnica completamente diferente. Utilizaremos métodos de tipo time-splitting (Lie-Trotter) en espacios de Banach tomando conjuntos convexos cerrados como regiones invariantes. De esta forma generalizaremos los resultados mencionados anteriormente.

Además, analizaremos varios ejemplos para los cuales podremos aplicar los resultados novedosos. Para el buen planteo global, estudiaremos distintos casos, con diferentes no linealidades ( $F(t, u)$ ). Un ejemplo de no linealidad para  $F(t, u)$ , es el sistema escalar en el cual tenemos que  $F(u) = (1 + ia)u - (1 + ib)|u|^2u$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  (ver [16], [50] y [14]). También exploraremos otros ejemplos como un sistema de formación de patrones de Fitzhugh-Nagumo en  $\mathbb{R}^2$  y también un modelo de dinámica poblacional en un espacio de Banach. En ambos casos encontraremos una región invariante apropiada para obtener el buen planteo del sistema. También mostraremos que la técnica de tipo splitting se puede utilizar para obtener otros resultados sobre el comportamiento de un sistema de reacción difusión fraccionario, como lo es el análisis asintótico de soluciones. Todos estos resultados serán analizados para funciones acotadas uniformemente continuas. En la parte final, estudiaremos el método

de Splitting aplicado a un espacio que es suma directa de una función que tiende a cero y una que es periódica. De esta forma veremos como podemos adaptar el mismo método para distintos espacios.

La tesis esta organizada de la siguiente forma:

- **Capítulo 1** Introducimos la notación, definiciones y probamos algunos resultados preliminares sobre la partes lineales y no lineales de la ecuación de reacción difusión fraccionaria.
- **Capítulo 2** Introducimos los propagadores, que nos permiten construir una ecuación *aproximada* de reacción difusión fraccionaria. Esto es importante para desarrollar el método de tipo splitting. Luego demostraremos que la ecuación *aproximada* fraccionaria converge a la ecuación *original*.
- **Capítulo 3** Demostramos buen planteo global para la ecuación de reacción difusión fraccionaria utilizando conjuntos cerrados convexos invariantes de un espacio de Banach para funciones acotadas uniformemente continuas. También mostraremos que la parte lineal y la parte no lineal de la ecuación, mantienen independientemente la solución dentro del conjunto convexo. Los resultados del capítulo 2 extienden este resultado a la ecuación original. Daremos algunos ejemplos a los cuales aplicar estos resultados, como la ecuación de Ginzburg-Landau y la ecuación de Fisher-Kolmogorov. También generalizamos los resultados demostrando buen planteo global para productos cartesianos de espacios de Banach y expondremos un ejemplo sobre un sistema de ecuaciones de reacción difusión de tipo Fitzhugh-Nagumo.
- **Capítulo 4** Analizaremos un ejemplo interesante, un modelo de dinámica poblacional, donde tendremos una variable representando distintos rasgos en un espacio de Banach. En este ejemplo utilizaremos todas las hipótesis importantes del resultado del capítulo anterior, una ecuación no autónoma, fraccionaria y soluciones con valores en espacios de Banach.
- **Capítulo 5** Mostramos la importancia de los métodos de Splitting, aplicándolos a un problema completamente distinto, el comportamiento asintótico de una

solución de la ecuación de reacción difusión fraccionaria. La estrategia es nuevamente, analizar la parte lineal y la parte no lineal por separado, para finalmente unir ambos resultados, usando lo visto en los capítulos 2 y 3.

- **Capítulo 6** Aplicaremos los métodos de Splitting para la ecuación de reacción difusión fraccionaria para funciones que son suma directa de una función que tiende a cero y una función periódica, mostrando que el método es flexible y extensible a otros conjuntos. Exhibiremos también una solución explícita del problema.

Varios de los resultados originales presentados en la tesis, forman parte de artículos científicos enviados a revistas o ya publicados. Estos artículos son los siguientes ([9], [8]):

- Besteiro, Agustín; Rial, Diego. *Global existence for vector valued fractional reaction-diffusion equations*. arXiv preprint arXiv:1805.09985, 2018.
- Besteiro, Agustín; Rial, Diego. *Existence of Peregrine type solutions in fractional reaction-diffusion equations*. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* 9 (2019): 1-9.

---

# Capítulo 1

## Notación y preliminares

En este capítulo daremos algunos resultados que serán necesarios para el desarrollo de la tesis. Estamos interesados en funciones continuas que toman valores vectoriales, es decir, cuyas evaluaciones toman valores en espacios de Banach. La principal razón de esto es para analizar el buen planteo de un modelo de dinámica poblacional con rasgos discretos o continuos, que distinguen componentes poblacionales (ver capítulo 4).

**Definición 1.1.** Sea  $X$  un espacio de Banach, diremos que  $\mathcal{B}(X)$  es el conjunto de funciones acotadas  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow X$  y definimos la norma  $\|u\|_{\mathcal{B}(X)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u|_X$

**Definición 1.2.** Sea  $Z$  un espacio de Banach, definimos  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  como el conjunto de funciones uniformemente continuas y acotadas en  $\mathbb{R}^d$  con valores en  $Z$ . Tomando la norma

$$\|u\|_{\infty, Z} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u(x)|_Z,$$

tenemos que  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  es un espacio de Banach. Se puede ver que si  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  y  $u \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  tenemos la integral de Bochner (ver [15]),

$$(g * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)u(x - y)dy$$

Esto define un elemento de  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  y el operador lineal  $u \mapsto g * u$  es continuo.

**Definición 1.3.** Sea  $Z$  un espacio de Banach, definimos  $L_{loc}^1(\mathbb{R}^d, Z)$  como el conjunto de funciones localmente integrables  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow Z$ .

**Definición 1.4.** Sea  $Z$  un espacio de Banach, definimos  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d, Z)$  como el espacio de funciones  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow Z$  continuas de soporte compacto y  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, Z)$  como el espacio de funciones continuas de soporte compacto con derivadas continuas en todos los ordenes.

**Definición 1.5.** Sea  $Z$  un espacio de Banach, definimos el espacio  $C_0(\mathbb{R}^d, Z)$  como el espacio de funciones uniformemente continuas  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow Z$  que tienden a 0 cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

**Definición 1.6.** Diremos que  $C_u^k(\mathbb{R}^d, Z)$  es el conjunto de funciones continuamente diferenciables tal que  $D_x^\gamma u \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  con la norma

$$\|u\|_{k, \infty, Z} = \sum_{|\gamma| \leq k} \|D_x^\gamma u\|_{\infty, Z}$$

**Definición 1.7.** Sea  $Z$  un espacio de Banach, definimos el espacio de Schwartz de funciones de decrecimiento rápido  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, Z)$  como las funciones infinitamente diferenciables  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d, Z)$ , tal que para todo  $a, b$  se tiene  $\|u\|_{a, b} < \infty$ , con  $a, b$  multíndices:

$$\|u\|_{a, b} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|x^a D^b u(x)\|_{\infty, Z} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_m}^{a_m} \frac{\partial^{|b|}}{\partial_{j_1}^{b_1} \dots \partial_{j_k}^{b_k}} u(x)|$$

donde los números  $a_i, b_j$  son naturales que satisfacen:

$$\sum_{i=1}^m a_i = |a|$$

$$\sum_{j=1}^k b_j = |b|$$

Una directa consecuencia de la definición es que las funciones de Schwartz son aquellas funciones infinitamente diferenciables cuyas derivadas decaen mas rápido que cualquier polinomio.

**Ejemplo 1.1.** Para  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $\gamma$  multíndice tenemos que la función

$$f_\gamma(x) = x^\gamma e^{-|x|^2} = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots x_d^{\gamma_d} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \quad (1.1)$$

**Definición 1.8.** Denotamos  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}^{-1}$  la transformada de Fourier y su inversa, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx \\ u(x) &= \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

donde  $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_d \xi_d$

**Proposición 1.1.** La transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa son una biyección lineal de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, Z) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, Z)$  y vale la fórmula de inversión  $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}u) = u$  para  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, Z)$ .

**Demostración.** Ver [40] capítulo 2.2, corolario 5. ■

**Ejemplo 1.2.** Para  $u = e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  se tiene que

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$$

y para  $u = e^{-|x|^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  se tiene que

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} e^{-|x|^2/2} dx$$

usando que  $u = \prod_{j=1}^d e^{-x_j^2/2}$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}u(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_j^2/2} dx_1 \cdots dx_d \\
 &= \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_j^2/2} dx_j \\
 &= (2\pi)^{d/2} \prod_{j=1}^d e^{-\xi_j^2/2} = (2\pi)^{d/2} e^{-|\xi|^2/2}
 \end{aligned}$$

## 1.1. Laplaciano fraccionario

**Definición 1.9.** Para  $u \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^d, Z)$  y se define el Laplaciano fraccionario como

$$(-\Delta)^\beta u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\beta} \mathcal{F}u)$$

donde  $0 < \beta \leq 1$ . En principio tenemos que

$$(-\Delta)^\beta : \mathbb{S}(\mathbb{R}^d, Z) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d, Z)$$

**Observación 1.1.** El laplaciano fraccionario se puede definir de varias formas equivalentes (ver [11], [36], [25], [28], [45] y [39]), por ejemplo la siguiente definición utilizando el valor principal de Cauchy

$$\begin{aligned}
 (-\Delta)^\beta u &= c_{d,\beta} \text{ P.V. } \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{d+2\beta}} dy \\
 &= c_{d,\beta} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{d+2\beta}} dy
 \end{aligned}$$

$$\text{Con } c_{d,\beta} = (4^\beta \Gamma(\frac{d}{2} + \beta)) / (\pi^{n/2} \Gamma(-\beta))$$

Las funciones pueden estar dependiendo implícitamente del tiempo u otras variables. Es importante observar que el integrando es singular cuando  $y$  se encuentra en un entorno cercano a  $x$ , haciendo que en muchos casos no sea integrable. Tomando

esta definición, con  $\beta = 1$  no es integrable.

Otra definición equivalente es

$$(-\Delta)^\beta u = c_{d,\beta} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{d+2\beta}} dy \quad (1.2)$$

**Observación 1.2.** Si uno toma el laplaciano clásico, se tiene que

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\Delta(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(x) = -\Delta \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2 \hat{u}(\xi)) \end{aligned}$$

resultado que concuerda con la definición 1.9 con  $\beta = 1$ . En general, se tiene que

$$\lim_{\beta \rightarrow 1^-} (-\Delta)^\beta u = -\Delta u$$

y también

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} (-\Delta)^\beta u = u$$

Solo algunas definiciones del laplaciano fraccionario permiten que el dominio y codominio del operador estén en el espacio de Banach  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  (Ver [25] Teorema 6.1). La versión que nos interesa profundizar para nuestros objetivos es la de semigrupo.

## 1.2. Semigrupo de la ecuación del calor

**Definición 1.10.** Sea  $X$  un espacio de Banach,  $D \subset X$  un subespacio denso y  $A : D \rightarrow X$  un operador lineal cerrado decimos que  $A$  genera un semigrupo fuertemente continuo de operadores  $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$  sii

- $S(0) = \mathbb{1}$  (el operador identidad en  $X$ ).
- $S(t+t') = S(t)S(t')$ , para  $t, t' \geq 0$ .
- Existen constantes  $M \geq 1$  y  $\omega \in \mathbb{R}$  tales que  $\|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Me^{\omega t}$ , para  $t > 0$ .

- Para todo  $u \in X$  la aplicación  $t \mapsto S(t)u$  es continua.
- Para todo  $u \in D$  la aplicación  $t \mapsto S(t)u$  es derivable y vale

$$\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u = S(t)Au.$$

Si  $M = 1$  decimos que  $S$  es cuasi-contractivo; si además  $\omega \leq 0$ ,  $S$  es contractivo.

Consideremos la ecuación difusiva

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

donde  $u(x, t) \in X$  espacio de Banach,  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $t > 0$ .

**Definición 1.11.** El operador lineal que asigna cada dato inicial  $u_0(x)$  a la solución  $u(x, t)$  del problema es el semigrupo de la ecuación del calor o de la ecuación de difusión generado por  $\Delta$  y lo notaremos  $e^{-t\Delta}$ . Por lo tanto la solución se escribe en términos del semigrupo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u(x, t) = e^{-t\Delta} * u_0 &= \frac{e^{-|x|^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}} * u_0 \\ &= \mathcal{F}(e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0) \end{aligned}$$

**Observación 1.3.** La notación  $e^{-t\Delta}$  es conveniente por varias razones. Por ejemplo, por un lado tendremos que

$$\frac{\partial(e^{-t\Delta}u_0)}{\partial t} = -\Delta e^{-t\Delta}u_0$$

pero además

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t\Delta}u_0 = u_0$$

### 1.3. Semigrupo fraccionario

#### Motivación probabilística del Laplaciano fraccionario y ecuación del calor fraccionaria

En esta sección, mostraremos que el Laplaciano fraccionario y la ecuación del calor fraccionaria, surgen naturalmente de un proceso probabilístico en el cual una partícula se mueve aleatoriamente en el espacio sujeto a un proceso en el cual se permiten grandes saltos (Ver [11]).

Para ver eso, introducimos una distribución de probabilidad sobre los números naturales de la siguiente forma. Si  $I \subseteq \mathbb{N}$ , entonces la probabilidad de  $I$  esta definida como

$$P(I) := c_\beta \sum_{k \in I} \frac{1}{|k|^{1+2\beta}}.$$

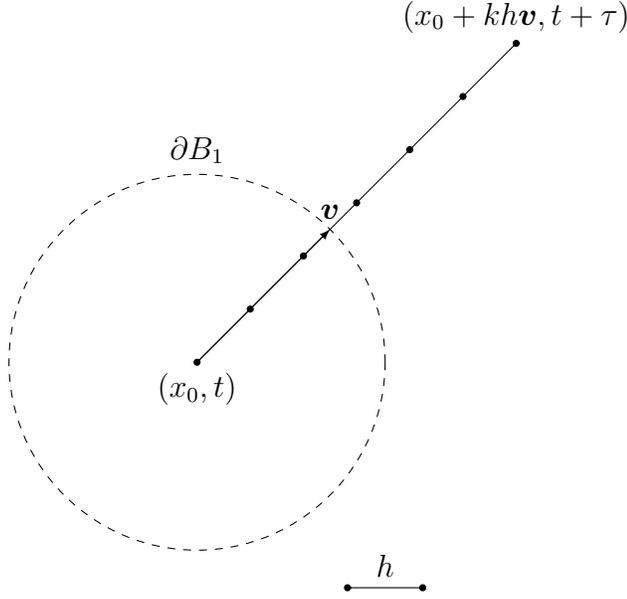
La constante  $c_\beta$  esta tomada para normalizar  $P$  para que sea una medida de probabilidad. Tomaremos

$$c_\beta := \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{|k|^{1+2\beta}} \right)^{-1},$$

de modo que nos resulte  $P(\mathbb{N}) = 1$ .

Consideremos una partícula que se mueve en  $\mathbb{R}^d$  de acuerdo a un proceso probabilístico. Este proceso sera discreto tanto en espacio como el tiempo (en el final tomaremos el limite cuando estos pasos de tiempo y espacio son pequeños). Fijamos la medida de los pasos discretos:  $\tau > 0$  para el paso del tiempo y  $h > 0$  para el paso del espacio. Tomaremos la relación entre las medidas de los pasos  $\tau = h^{2\beta}$  y definiremos  $u(x, t)$  como la probabilidad de encontrar la partícula en el punto  $x$  a tiempo  $t$ . La partícula en  $\mathbb{R}^d$  se debe mover con la siguiente ley probabilística: en cada paso temporal  $\tau$ , la partícula selecciona aleatoriamente una dirección  $v \in \partial B_1$ , de acuerdo a una distribución uniforme en  $\partial B_1$  (vector en la esfera unitaria), y un número natural  $k \in \mathbb{N}$ , de acuerdo con la ley probabilística  $P$ , y se mueve con un paso discreto espacial  $khv$ . Es importante remarcar que los pasos largos están permitidos aunque son de probabilidad pequeña. Entonces si la partícula esta a tiempo  $t$  en el punto  $x_0$  y, siguiendo la ley probabilística, toma una dirección  $v \in \partial B_1$  y un número natural  $k \in \mathbb{N}$ , entonces la partícula a tiempo  $t + \tau$  va a estar en  $x_0 + khv$ .

Ahora, la probabilidad  $u(x, t + \tau)$  de encontrar la partícula en  $x$  a tiempo  $t + \tau$  es la suma de las probabilidades de encontrar la partícula en algún otro lado, es decir en  $x + khv$ , para alguna dirección  $v \in \partial B_1$  y algún número natural  $k \in \mathbb{N}$ , multiplicado por la probabilidad de haber seleccionado tal dirección y tal número.



Esto significa que

$$u(x, t + \tau) = \frac{c_\beta}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv, t)}{|k|^{1+2\beta}} d\mathcal{H}^{d-1}(v).$$

Notemos que el factor  $c_\beta/|\partial B_1|$  es una constante normalizadora, por lo tanto sustraemos  $u(x, t)$  y obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t + \tau) - u(x, t) &= \frac{c_\beta}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv, t)}{|k|^{1+2\beta}} d\mathcal{H}^{d-1}(v) - u(x, t) \\ &= \frac{c_\beta}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv, t) - u(x, t)}{|k|^{1+2\beta}} d\mathcal{H}^{d-1}(v). \end{aligned}$$

Por simetría podemos cambiar  $v$  por  $-v$  en la integral anterior, de modo que resulte

$$u(x, t + \tau) - u(x, t) = \frac{c_\beta}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} \frac{u(x - khv, t) - u(x, t)}{|k|^{1+2\beta}} d\mathcal{H}^{d-1}(v).$$

Entonces podemos sumar estas dos expresiones, dividir por 2 y obtener

$$\begin{aligned} & u(x, t + \tau) - u(x, t) \\ &= \frac{c_\beta}{2 |\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv, t) + u(x - khv, t) - 2u(x, t)}{|k|^{1+2\beta}} d\mathcal{H}^{d-1}(v). \end{aligned}$$

Ahora dividimos por  $\tau = h^{2\beta}$ , y reconocemos un suma de Riemann. Pasamos al límite y usamos coordenadas polares para obtener:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &\simeq \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} \\ &= \frac{c_\beta h}{2 |\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv, t) + u(x - khv, t) - 2u(x, t)}{|hk|^{1+2\beta}} d\mathcal{H}^{d-1}(v) \\ &\simeq \frac{c_\beta}{2 |\partial B_1|} \int_0^{+\infty} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + rv, t) + u(x - rv, t) - 2u(x, t)}{|r|^{1+2\beta}} d\mathcal{H}^{d-1}(v) dr \\ &= \frac{c_\beta}{2 |\partial B_1|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x + y, t) + u(x - y, t) - 2u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= -c_{d,\beta} (-\Delta)^\beta u(x, t) \end{aligned}$$

para un  $c_{d,\beta} > 0$  adecuado. Entonces en el lado derecho hemos llegado a una expresión que contiene la definición del laplaciano fraccionario mencionada en 1.2.

Esto nos muestra que, para pasos de tiempo y espacio pequeños, el proceso probabilístico anterior tiende a la ecuación de reacción difusión fraccionaria lineal. Los procesos de este tipo ocurren muy seguido en la naturaleza, podemos citar observaciones en [22, 41, 44, 49, 51] y discusiones matemáticas en [21, 23, 30, 32, 33].

Los siguientes resultados muestran que el operador  $-(-\Delta)^\beta$  define un semigrupo continuo contractivo en el espacio de Banach  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ .

El siguiente lema es una consecuencia de la formula de Lévy–Khintchine para distribuciones infinitamente divisibles y las propiedades de la transformada de Fourier.

**Lema 1.1.** Sea  $0 < \beta \leq 1$  y  $g_\beta \in C_0(\mathbb{R}^d)$  tal que  $\hat{g}_\beta(\gamma) = e^{-|\gamma|^{2\beta}}$ , se tiene que  $g_\beta$  es positiva, integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_\beta(x) dx = 1.$$

**Demostración.** Se deduce del Teorema 14.14 de [43], y de la definición de  $\hat{g}_\beta$ . ■

Basados en el lema anterior, estudiamos la función de Green asociada al operador lineal  $\partial_t + \sigma(-\Delta)^\beta$ .

**Proposición 1.2.** Sea  $\sigma > 0$  y  $0 < \beta \leq 1$ , la función  $G_{\sigma,\beta}$  dada por

$$G_{\sigma,\beta}(x, t) = (\sigma t)^{-\frac{d}{2\beta}} g_\beta((\sigma t)^{-\frac{1}{2\beta}} x),$$

para cada  $t > 0$ , se tiene que:

- I.  $G_{\sigma,\beta}(\cdot, t) > 0$ ;
- II.  $G_{\sigma,\beta}(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$  y

$$\int_{\mathbb{R}^d} G_{\sigma,\beta}(t, x) dx = 1;$$

- III.  $G_{\sigma,\beta}(\cdot, t) * G_{\sigma,\beta}(\cdot, t') = G_{\sigma,\beta}(\cdot, t + t')$ , para  $t, t' > 0$ ;
- IV.  $\partial_t G_{\sigma,\beta} + \sigma(-\Delta)^\beta G_{\sigma,\beta} = 0$  para  $t > 0$ .

**Demostración.** El primer y segundo enunciado son consecuencia de la definición de  $\hat{g}_\beta$ . El tercer y cuarto enunciado son inmediatos aplicando transformada de Fourier.

■

En la siguiente proposición, mostramos que el operador lineal,  $-\sigma(-\Delta)^\beta$  define un semigrupo continuo contractivo en el conjunto  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ .

**Proposición 1.3.** Para cada  $\sigma > 0$  y  $0 < \beta \leq 1$ , la función  $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(C_u(\mathbb{R}^d, Z))$  definida por  $S(t)u = G_{\sigma,\beta}(\cdot, t) * u$  es un semigrupo continuo contractivo.

**Demostración.**

Demostramos primero la propiedad de semigrupo que se deduce de III de la proposición anterior:

$$\begin{aligned} S(t)S(t')u &= G_{\sigma,\beta}(\cdot, t) * (G_{\sigma,\beta}(\cdot, t') * u) \\ &= (G_{\sigma,\beta}(\cdot, t) * (G_{\sigma,\beta}(\cdot, t'))) * u = (G_{\sigma,\beta}(\cdot, t + t')) * u = S(t + t')u \end{aligned}$$

La siguiente propiedad prueba que  $\mathbf{S}$  esta bien definido, es decir  $\mathbf{S}u \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ .

$$\begin{aligned} |(\mathbf{S}(t)u)(x_1) - (\mathbf{S}(t)u)(x_2)|_Z &\leq \int_{\mathbb{R}^n} G_{\sigma,\beta}(y, t) |u(x_1 - y) - u(x_2 - y)|_Z dy \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} G_{\sigma,\beta}(y, t) dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

En la ultima desigualdad usamos que  $u$  es uniformemente continua.

Ahora mostramos que  $\mathbf{S}(t)u$  converge a  $u$  para todo  $u \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  cuando  $t \rightarrow 0$ . De hecho, tenemos para  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} |(\mathbf{S}(t)u)(x) - u(x)|_Z &\leq \int_{\mathbb{R}^n} G_{\sigma,\beta}(y, t) |u(x - y) - u(x)|_Z dy \\ &= \int_{|y| < \delta} G_{\sigma,\beta}(y, t) |u(x - y) - u(x)|_Z dy \\ &\quad + \int_{|y| \geq \delta} G_{\sigma,\beta}(y, t) |u(x - y) - u(x)|_Z dy. \end{aligned}$$

La primer integral del lado derecho de la igualdad se puede estimar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_{|y| < \delta} G_{\sigma,\beta}(y, t) |u(x - y) - u(x)|_Z dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n} G_{\sigma,\beta}(y, t) \sup_{|y| < \delta} |u(x - y) - u(x)|_Z dy \\ &= \sup_{|y| < \delta} |u(x - y) - u(x)|_Z \end{aligned}$$

Esto puede ser suficientemente chico porque,  $|y| < \delta$  y  $u$  es uniformemente continuo. Para el segundo termino procedemos de la misma forma,

$$\begin{aligned} \int_{|y| \geq \delta} G_{\sigma,\beta}(y, t) |u(x - y) - u(x)|_Z dy &\leq 2\|u\|_\infty (\alpha t)^{-\frac{d}{2\beta}} \int_{|y| \geq \delta} g_\beta((\alpha t)^{-\frac{1}{2\beta}} y) dy \\ &= 2\|u\|_\infty \int_{|y| \geq \delta(\alpha t)^{-1/(2\beta)}} g_\beta(y) dy \end{aligned}$$

Como  $\delta(\sigma t)^{-1/(2\beta)} \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow 0^+$  y  $g_\beta \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , el lado derecho de la

igualdad anterior tiende a 0.

Finalmente, demostramos la propiedad contractiva del semigrupo:

$$|(\mathbf{S}(t)u)(x)|_Z \leq \int_{\mathbb{R}^n} G_{\sigma,\beta}(y,t) |u(x-y)|_Z dy \leq \|u\|_\infty$$

■

**Observación 1.4.** If  $u \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  es una constante, entonces  $\mathbf{S}(t)u = u$ .

## 1.4. Ecuación fraccionaria no lineal

**Definición 1.12.** Diremos que  $u \in C([0, T], C_u(\mathbb{R}^d, Z))$  es una solución de tipo leve (mild solution) de (0.1) si y solo si  $u$  verifica

$$u(t) = \mathbf{S}(t)u_0 + \int_0^t \mathbf{S}(t-t')F(t', u(t'))dt'. \quad (1.3)$$

Como el método que desarrollaremos para construir soluciones de (1.3) esta basado en aplicar el método de Lie-Trotter, es necesario estudiar el problema no lineal asociado a  $F$ . Remarcamos que necesitaremos alguna condición de regularidad, como se muestra en el contraejemplo dado en [13].

**Definición 1.13.** Sea  $F : \mathbb{R} \times Z \rightarrow Z$  una función continua diremos que es una función localmente Lipschitz en la segunda variable si dado  $R, T > 0$  existe  $L = L(R, T) > 0$  tal que si  $t \in [0, T]$  y  $z, \tilde{z} \in Z$  con  $|z|_Z, |\tilde{z}|_Z \leq R$ , entonces

$$|F(t, z) - F(t, \tilde{z})|_Z \leq L|z - \tilde{z}|_Z.$$

**Proposición 1.4.** Si  $F : \mathbb{R} \times Z \rightarrow Z$  es una función localmente Lipschitz en la segunda variable entonces para cada  $z_0 \in Z$  existe una única solución (maximal) del problema de Cauchy

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t F(t', z(t'))dt' \quad (1.4)$$

definido en  $[t_0, t_0 + T^*(t_0, z_0))$ , con  $T^*(t_0, z_0)$  es el tiempo maximal de existencia. Es fácil ver que existe una función no creciente  $\mathcal{T} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , tal que

$$\mathcal{T}(T, R) \leq \inf\{T^*(t_0, z_0) : 0 \leq t_0 \leq T, |z_0|_Z \leq R\}.$$

También, tendremos una de las siguientes alternativas:

- $T^*(t_0, z_0) = \infty$ ;
- $T^*(t_0, z_0) < \infty$  y  $|z(t)|_Z \rightarrow \infty$  cuando  $t \uparrow t_0 + T^*(t_0, z_0)$ .

Podemos ver que  $F : \mathbb{R}_+ \times C_u(\mathbb{R}^d, Z) \rightarrow C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ , dado por  $F(t, u)(x) = F(t, u(x))$  es continua y localmente Lipschitz en la segunda variable. Por lo tanto podemos considerar el problema (1.4) en  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ .

**Demostración.** Ver capítulo 3 de [2] ■

**Definición 1.14.** Diremos que  $\mathbf{N} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C_u(\mathbb{R}^d, Z) \rightarrow C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  es el flujo generado por la ecuación integral (1.4) como  $u(t) = \mathbf{N}(t, t_0, u_0)$ , definida para  $t_0 \leq t < t_0 + T^*(t_0, u_0)$ .

**Observación 1.5.** Todos los resultados se pueden aplicar al conjunto  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  y extender al conjunto  $C_u^k(\mathbb{R}^d, Z)$ . Si  $u_0 \in C_u^k(\mathbb{R}^d, Z)$  y  $F$  una función suficientemente suave, entonces  $\mathbf{S}(t)u_0 \in C_u^k(\mathbb{R}^d, Z)$  y  $F(t, u)(x) \in C_u^k(\mathbb{R}^d, Z)$  por lo tanto usando (1.3) tenemos que  $u(t) \in C([0, T], C_u^k(\mathbb{R}^d, Z))$ .

**Proposición 1.5.** Si  $u_0$  es una función constante, entonces  $u(t) = \mathbf{N}(t, t_0, u_0)$  es solución de (1.3).

**Demostración.** Como  $u_0$  es una función constante por la unicidad del problema (1.4), tenemos que  $u(t)$  es una función constante para cualquier  $t > 0$  donde la solución esta definida. Por lo tanto,

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t F(t', u(t'))dt' = \mathbf{S}(t)u_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{S}(t - t')F(t', u(t'))dt',$$

lo que demuestra el resultado. ■

## 1.5. Buen planteo local

**Proposición 1.6.** Sea  $M > 0$  y sea  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  tal que  $\|u_0\| \leq M$ . Entonces existe una solución única  $u \in C([0, T_M], C_u(\mathbb{R}^d, Z))$  de (0.1) con

$$T_M = \frac{1}{2L(2M + \|F(t, 0)\|) + 2}$$

como tiempo máximo de existencia  $T$  y  $L$  es la constante de Lipschitz definida en 1.13.

**Demostración.** Ver Proposición 4.3.3 en [15] con  $x = u_0$  y  $X = C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ . ■

**Teorema 1.1.** Existe una función  $T^* : C_u(\mathbb{R}^d, Z) \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que para  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ , existe una única función  $u \in C([0, T^*(u_0)], C_u(\mathbb{R}^d, Z))$  solución leve (mild) de (0.1) con  $u(0) = u_0$ . Adicionalmente tenemos que:

$$2L(\|F(t, 0)\| + 2\|u(t)\|) \geq \frac{1}{T^*(u_0) - t} - 2$$

Más aún, vale una de las siguientes opciones:

- $T^*(u_0) = \infty$ ;
- $T^*(u_0) < \infty$  y  $\lim_{t \uparrow T^*(u_0)} \|u(t)\|_{C_u(\mathbb{R}^d, Z)} = \infty$ .

**Demostración.** Ver Teorema 4.3.4 en [15] con  $X = C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ . ■

**Proposición 1.7.** Bajo las condiciones del teorema anterior tenemos,

1.  $T^* : C_u(\mathbb{R}^d, Z) \rightarrow \mathbb{R}_+$  es semicontinua inferiormente;
2. Si  $u_{0,n} \rightarrow u_0$  en  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  y  $0 < T < T^*(u_0)$ , entonces  $u_n \rightarrow u$  en el espacio de Banach  $C([0, T], C_u(\mathbb{R}^d, Z))$ .

**Demostración.** Ver Proposición 4.3.7 en [15] con  $X = C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ . ■

---

## Capítulo 2

# Lie-Trotter en dimensión infinita

### 2.1. Propagadores

Para construir soluciones aproximadas, hay que descomponer la variable temporal en intervalos regulares y considerar la evolución de forma alternada del problema lineal y el no lineal. Para lograr esto, *apagamos y prendemos* cada termino de la ecuación. El primer paso es considerar el problema abstracto lineal,

$$\begin{aligned}\partial_t u - \alpha(t)Au &= 0, \\ u(s) &= u_0,\end{aligned}$$

donde  $\alpha(t) \geq 0$  y  $A$  es el generador infinitesimal de  $S$ , un semigrupo de operadores fuertemente continuos definido en el espacio de Banach  $X$ . La función  $\alpha(t)$  implica para la ecuación integral, la creación de un propagador, es decir, un operador asociado al nuevo generador  $\alpha(t)A$  que es dependiente del tiempo para la evolución lineal. La solución de tipo leve (mild) del problema no autonomo se puede expresar como  $u(t) = S_\alpha(t, s)u_0 = S(\tau(t, s))u_0$ , donde  $\tau$  esta definido por

$$\tau(t, s) = \int_s^t \alpha(t') dt'$$

Formalmente, tenemos  $\partial_t u = \partial_t S(\tau(t, s))u_0 = \partial_t \tau(t, s)AS(\tau(t, s))u_0$ .

**Definición 2.1.** Para analizar y utilizar el método de tipo Lie-Trotter, definimos

$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función periódica de período 1 como

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2 & , \text{ si } k \leq t < k + 1/2, \\ 0 & , \text{ si } k - 1/2 \leq t < k, \end{cases} \quad (2.1)$$

para  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 2.2.** Dado  $h > 0$ , definimos la función  $\alpha_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\alpha_h(t) = \alpha(t/h)$ . Claramente  $0 \leq \alpha_h \leq 2$  y  $\alpha_h$  es  $h$ -periódica.

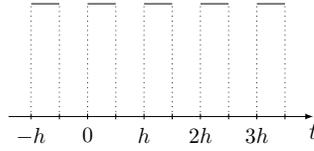


Figura 2.1: Gráfico de  $\alpha_h(t)$ .

**Definición 2.3.** Consideramos  $\tau_h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\tau_h(t, t') = \int_{t'}^t \alpha_h(t'') dt'',$$

Los siguientes resultados muestran que  $S_{\alpha_h}$  define un propagador en  $X$ . También obtenemos algunas estimaciones que utilizaremos en la siguiente sección sobre convergencia. Podemos probar el siguiente lema:

**Lema 2.1.** La función  $\tau_h$  es continua en  $\mathbb{R}^2$  y satisface

- I.  $0 \leq \tau_h(t, t') \leq 2(t - t')$ , con  $t' \leq t$ ,
- II.  $\tau_h(t, t') + \tau_h(t', t'') = \tau_h(t, t'')$ , con  $t'' \leq t' \leq t$ ,
- III.  $\tau_h(t + kh, t' + kh) = \tau_h(t, t')$ , para  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- IV.  $\tau_h(t' + kh, t') = kh$ , para  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- V.  $|(t - t') - \tau_h(t, t')| \leq h$ ,

**Demostración.** La primera afirmación es consecuencia de la desigualdad  $0 \leq \alpha_h \leq 2$ . La aditividad es inmediata de la definición. La tercera afirmación es consecuencia de la periodicidad de  $\alpha_h$ . Para la cuarta afirmación tenemos que, como el valor medio de  $\alpha_h$  es 1, entonces  $\tau_h(t' + h, t') = h$ , y usando la propiedad aditiva tenemos,

$$\tau_h(t' + kh, t') = \sum_{j=1}^k \tau_h(t' + jh, t' + (j-1)h) = kh.$$

Para la última afirmación, consideramos  $t = t' + kh + sh$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $0 \leq s < 1$ , como  $|1 - \alpha_h(t)| \leq 1$ , entonces

$$\begin{aligned} |(t - t') - \tau_h(t, t')| &= |kh + sh - \tau_h(t' + kh + sh, t')| \\ &= |(kh + sh) - \tau_h(t' + kh + sh, t' + kh) - \tau_h(t' + kh, t')| \\ &= |sh - \tau_h(t' + kh + sh, t' + kh)| \\ &= \left| \int_{t'+kh}^{t'+kh+sh} (1 - \alpha_h(t'')) dt'' \right| \\ &\leq \int_{t'+kh}^{t'+kh+sh} |1 - \alpha_h(t'')| dt'' \leq h, \end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado.

■

**Definición 2.4.** Definimos  $\Omega = \{(t, t') \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t' \leq t\}$  y el propagador  $S_h : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$  dado por  $S_h(t, t') = S(\tau_h(t, t'))$ ,

Del lema anterior, obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.1.** Sea  $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$  un semigrupo de operadores fuertemente continuos, tenemos que  $S_h$  satisface:

- I.  $S_h(t, t) = \mathbb{1}$ .
- II.  $S_h(t, t'') = S_h(t, t')S_h(t', t'')$ , si  $0 \leq t'' \leq t' \leq t$ .
- III. Existen constantes  $M \geq 1$  y  $\omega \in \mathbb{R}$  tales que  $\|S_h(t, t')\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Me^{2\omega(t-t')}$ , para  $(t, t') \in \Omega$ .



continua. Para la quinta afirmación, separamos en dos casos:

Si  $kh < t < (k + 1/2)h$  entonces

$$\frac{d}{dt} \mathbf{S}_h(t, t')u = \frac{d}{dt} \mathbf{S}(\tau(t, t'))u = A\mathbf{S}(\tau(t, t'))u \frac{d}{dt}(\tau(t, t')) = 2A\mathbf{S}_h(t, t')u,$$

con  $\frac{d}{dt} \int_{t'}^t \alpha(t'')dt'' = 2$ .

Si  $(k - 1/2)h < t < kh$ , en ese intervalo tenemos que  $\alpha_h(t) = 0$  entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{t'}^t \alpha(t'')dt'' = 0 \text{ y } \frac{d}{dt} \mathbf{S}_h(t, t')u = 0.$$

■

## 2.2. Soluciones aproximadas

En esta sección desarrollamos las herramientas básicas (Proposición 2.2 y Teorema 2.2) que nos permite obtener algunas propiedades de las soluciones del problema (1.3) de las aproximaciones obtenidas con el método de Lie-Trotter. El Teorema 2.2 es una extensión del Teorema 3.9 en [27] al caso no autónomo.

**Definición 2.5.** Definimos el sistema

$$\begin{cases} \partial_t u_h - \alpha_h(t)Au_h = (2 - \alpha_h(t))F(t, u_h), \\ u_h(0) = u_{h,0}, \end{cases} \quad (2.2)$$

Con  $\alpha_h(t)$  como en la Definición 2.2,  $u_h \in X$ ,  $t > 0$ ,  $F : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$  una función continua y  $X$  un espacio de Banach.

**Definición 2.6.** De forma similar definimos la ecuación integral

$$u_h(t) = \mathbf{S}_h(t, 0)u_{h,0} + \int_0^t (2 - \alpha_h(t'))\mathbf{S}_h(t, t')F(t', u_h(t'))dt' \quad (2.3)$$

Podemos enunciar los teoremas de existencia local para el caso de  $\mathbf{S}_h$ .

**Proposición 2.1.** Sea  $u_h \in C([0, T], \text{Dom}(A)) \cap \text{Lip}([0, T], X)$ , si  $u_h$  es solución del sistema (2.2) entonces  $u_h$  es solución de (2.3) para  $t \in [0, T]$ .

**Demostración.** Sea  $t \in (0, T]$  y sea  $w_h(s) = \mathbf{S}_h(t, s)u_h(s)$  para  $s \in [0, t]$ . Sea  $s \in [0, t]$  y  $j \in (0, t - s]$  teniendo en cuenta el punto v del lema 2.1 suponemos que  $s \neq kh/2$  y que  $s$  es un punto derivable de  $u_h$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{w_h(s+j) - w_h(s)}{j} &= \frac{\mathbf{S}_h(t, s+j)u_h(s+j) - \mathbf{S}_h(t, s)u_h(s)}{j} \\ &= \frac{\mathbf{S}_h(t, s+j)u_h(s+j) - \mathbf{S}_h(t, s)u_h(s)}{j} + \frac{\mathbf{S}_h(t, s+j)u_h(s) - \mathbf{S}_h(t, s+j)u_h(s)}{j} \\ &= \mathbf{S}_h(t, s+j) \left\{ \frac{u_h(s+j) - u_h(s)}{j} - \frac{\mathbf{S}_h(s+j, s) - I}{j} u_h(s) \right\} \end{aligned}$$

En la ultima igualdad usamos que

$$\mathbf{S}_h(t, s+j)\mathbf{S}_h(s+j, s) = \mathbf{S}_h(t, s)$$

Tomando limite cuando  $j \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_h(t, s) \left\{ u_h'(s) - \frac{d}{dt} \mathbf{S}_h(t, s) u_h(s) \right\} &= \mathbf{S}_h(t, s) \left\{ u_h'(s) - \alpha_h(s) A u_h(s) \right\} \\ &= \mathbf{S}_h(t, s) (2 - \alpha_h(s)) F(s, u_h(s)) \end{aligned}$$

entonces

$$w_h'(s) = \mathbf{S}_h(t, s) (2 - \alpha_h(s)) F(s, u_h(s))$$

para todo  $s \in [0, t]$ .

Integrando entre 0 y  $t$ , obtenemos

$$\begin{aligned} w(t) - w(0) &= \int_0^t \mathbf{S}_h(t, s) (2 - \alpha_h(s)) F(s, u_h(s)) ds \\ u_h(t) - \mathbf{S}_h(t, 0) u_{h,0} &= \int_0^t \mathbf{S}_h(t, s) (2 - \alpha_h(s)) F(s, u_h(s)) ds \end{aligned}$$

■

**Lema 2.2.** Sea  $T > 0$ ,  $u_{h,0} \in X$ , y sea  $u_h, v_h \in C([0, T], X)$  dos soluciones a la ecuación (2.3). Entonces  $u_h = v_h$ .

**Demostración.** Tomamos  $r = \sup_{t \in [0, T]} \max \{\|u_h(t)\|_X, \|v_h(t)\|_X\}$ . Usando que  $F$  es Lipschitz en la segunda variable tenemos que

$$\begin{aligned} \|u_h(t) - v_h(t)\|_X &= \left\| \int_0^t (2 - \alpha_h(t')) \mathcal{S}_h(t, t') (F(t', u_h(t')) - F(t', v_h(t'))) dt' \right\|_X \leq \\ &\int_0^t \left\| 2M e^{2\omega(t-t')} (F(t', u_h(t')) - F(t', v_h(t'))) dt' \right\|_X \leq \\ &2L(r) M e^{2\omega T} \int_0^t \| (u_h(t') - v_h(t')) \|_X dt' \end{aligned}$$

Usando el Lema de Gronwall obtenemos el resultado (Ver capítulo 4.2, Observación 4.2.2 de [15]). ■

**Lema 2.3.** Sea  $u_h \in C([0, T_0], X)$  solución de (2.3) y

$$N = \max_{0 \leq t \leq T_0} \|F(t, 0)\|_X$$

y sea

$$T_r = \min \left\{ T_0, \frac{\frac{K}{2Me^{2\omega T_0}} - r}{N + KL(K)}, \frac{e^{-2\omega T_0}}{4ML} \right\}$$

Sea  $r > 0$ ,  $K > 0$  y  $u_{h,0} \in X$  tal que  $\|u_{h,0}\|_X < r$ . Entonces existe una solución única  $u_h \in C([0, T_r], X)$  de (2.3).

**Demostración.** La unicidad es consecuencia del lema 2.2. Sea  $u_{h,0} \in X$  y  $r \geq \|u_{h,0}\|_X$ . Sea  $K = 2Mr e^{2\omega T_0}$  y

$$E = \{u_h \in C([0, T_r], X); u_h(0) = u_{h,0}, \|u_h(t)\|_{C([0, T_r], X)} \leq K, \forall t \in [0, T_r]\}$$

Asociamos a  $E$  con una distancia generada por la norma de  $C([0, T_r], X)$ :

$$d(u_h, v_h) = \max_{t \in [0, T_r]} \|u_h(t) - v_h(t)\|_X$$

para  $u_h, v_h \in E$ . Como  $C([0, T_r], X)$  es un espacio de Banach,  $(E, d)$  es un espacio

métrico completo. Para todo  $u_h \in E$ , definimos  $\Phi_{u_h} \in C([0, T_r], X)$  como

$$\Phi_{u_h}(t) = \mathcal{S}_h(t, 0)u_{h,0} + \int_0^t (2 - \alpha_h(t'))\mathcal{S}_h(t, t')F(t', u_h(t'))dt'$$

para todo  $t \in [0, T_r]$ . Notemos que para  $s \in [0, T_r]$ , tenemos que

$$F(s, u_h(s)) = F(s, 0) + F(s, u_h(s)) - F(s, 0)$$

entonces

$$\begin{aligned} \|F(s, u_h(s))\|_X &\leq \|F(s, 0)\|_X + \|F(s, u_h(s)) - F(s, 0)\|_X \\ &\leq \|F(s, 0)\|_X + L(K) \|u_h(s)\|_X \leq N + KL(K) \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \|\Phi_{u_h}(t)\|_X &\leq 2Me^{2\omega T_0} \|u_{h,0}\|_X + 2Me^{2\omega T_0} \int_0^t \|F(s, u_h(s))\|_X ds \\ &\leq 2Me^{2\omega T_0}(r + t(N + KL(K))) \leq K \end{aligned}$$

Entonces se tiene que  $\Phi : E \rightarrow E$ . Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\Phi_{v_h}(t) - \Phi_{u_h}(t)\|_X &\leq 2Me^{2\omega T_0} L(K) \int_0^t \|v_h(s) - u_h(s)\|_X ds \\ &\leq 2Me^{2\omega T_0} T_r L(K) d(u_h, v_h) \leq \frac{1}{2} d(u_h, v_h) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\Phi$  es una contracción en  $E$  con constante de Lipschitz  $\frac{1}{2}$ , y entonces  $\Phi$  tiene un punto fijo (Ver teorema 1.1.1 de [15])  $u_h \in E$ , que es lo que queríamos demostrar.

■

**Teorema 2.1.** Existe una función  $T^* : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que para  $u_{h,0} \in X$ , existe una única función  $u_h \in C([0, T^*(u_{h,0})], X)$  solución leve (mild) de (2.3) con  $u_h(0) = u_{h,0}$ .

Adicionalmente tenemos que:

$$2L(\|F(t, 0)\| + 2\|u_h(t)\|) \geq \frac{1}{T^*(u_{h,0}) - t} - 2$$

Más aún, vale una de las siguientes opciones:

- $T^*(u_{h,0}) = \infty$ ;
- $T^*(u_{h,0}) < \infty$  y  $\lim_{t \uparrow T^*(u_{h,0})} \|u_h(t)\|_X = \infty$ .

**Demostración.** La demostración es similar a Teorema 4.3.4 en [15]. ■

En la siguiente proposición, mostramos que la solución del problema integral (2.3) corresponde a la aproximación obtenida con el método de Lie-Trotter.

**Proposición 2.2.** Sea  $u_h$  la solución de (2.3), si  $U_{h,k} = u_h(kh)$  y  $V_{h,k} = u_h(kh - h/2)$ , entonces

$$V_{h,k+1} = \mathbf{S}(h)U_{h,k}, \quad (2.4a)$$

$$U_{h,k+1} = \mathbf{N}(kh + h, kh + h/2, V_{h,k+1}), \quad (2.4b)$$

donde  $\mathbf{N}$  es el flujo asociado a  $2F$ , es decir  $w(t) = \mathbf{N}(t, t_0, w_0)$  donde  $w$  es la solución de:

$$\begin{cases} \dot{w} = 2F(t, w(t)), \\ w(t_0) = w_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

**Demostración.** Para  $t_1 \in (0, t)$  se verifica

$$u_h(t) = \mathbf{S}_h(t, t_1)u_h(t_1) + \int_{t_1}^t (2 - \alpha_h(t'))\mathbf{S}_h(t, t')F(t', u_h(t'))dt'$$

tomando  $t_1 = kh$  y  $t = kh + h/2$ , tenemos

$$V_{h,k+1} = \mathbf{S}_h(kh + h/2, kh)U_{h,k} + \int_{kh}^{kh+h/2} (2 - \alpha_h(t'))\mathbf{S}_h(kh + h/2, t')F(t', u_h(t'))dt',$$

dado que  $\alpha_h(t) = 2$  para  $t \in [kh, kh + h/2)$ , vale  $\tau_h(kh + h/2, kh) = h$  y por lo tanto (2.4a). De la misma forma,  $\alpha_h(t) = 0$  para  $t \in [kh + h/2, kh + h)$ , entonces  $\tau_h(t, kh + h/2) = 0$  y por lo tanto

$$u_h(t) = V_{h,k+1} + 2 \int_{kh+h/2}^t F(t', u_h(t')) dt',$$

evaluando en  $t = kh + h$ , obtenemos (2.4b). ■

**Teorema 2.2.** Sea  $u \in C([0, T^*), X)$  la solución del problema integral (1.3)

$$u(t) = \mathbf{S}(t)u_0 + \int_0^t \mathbf{S}(t-t')F(t', u(t'))dt',$$

$T \in (0, T^*)$  y  $\varepsilon > 0$ . Existe  $h^* > 0$  tal que si  $0 < h < h^*$ , entonces  $u_h$  solución de (2.3) con  $u_{h,0} = u_0$ , está definida en el intervalo  $[0, T]$  y verifica  $\|u(t) - u_h(t)\|_X \leq \varepsilon$  para  $t \in [0, T]$ .

Para demostrar del teorema, necesitamos dos lemas previos. Seguimos el mismo procedimiento del teorema 3.9 en [27] (ver también [10]).

**Lema 2.4.** Sea  $f \in C([0, T], X)$ , si

$$I_h(t, t') = (\mathbf{S}(t-t') - \mathbf{S}_h(t, t'))f(t'),$$

entonces  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{(t,t') \in \Omega_T} \|I_h(t, t')\|_X = 0$ , donde  $\Omega_T = \{(t, t') \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t' \leq t \leq T\}$ .

**Demostración.** Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $g \in C([0, T], X)$  tal que  $g(t) \in \text{Dom}(A)$  para  $t \in [0, T]$ ,  $Ag \in C([0, T], X)$  y  $\max_{t \in [0, T]} \|f(t) - g(t)\|_X < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{S}(t-t') - \mathbf{S}_h(t, t'))(f(t') - g(t'))\|_X &\leq 2Me^{2\omega T} \max_{t \in [0, T]} \|f(t) - g(t)\|_X \\ &\leq 2Me^{2\omega T} \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por otro lado, podemos escribir

$$\begin{aligned} S(t-t')g(t') &= g(t') + \int_0^{t-t'} S(\xi)Ag(t')d\xi, \\ S_h(t,t')g(t') &= g(t') + \int_0^{\tau_h(t,t')} S(\xi)Ag(t')d\xi, \end{aligned}$$

restando ambas ecuaciones obtenemos

$$(S(t-t') - S_h(t,t'))g(t') = \pm \int_{J(t,t')} S(\xi)Ag(t')d\xi,$$

donde  $J(t,t')$  es el intervalo  $J(t,t') = [\text{mín}\{(t-t'), \tau_h(t,t')\}, \text{máx}\{(t-t'), \tau_h(t,t')\}]$ , entonces

$$\begin{aligned} \|(S(t-t') - S_h(t,t'))g(t')\|_X &\leq Me^{2\omega T} |(t-t') - \tau_h(t,t')| \max_{t \in [0,T]} \|Ag(t)\|_X \\ &\leq Me^{2\omega T} h \max_{t \in [0,T]} \|Ag(t)\|_X. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De las ecuaciones (2.6) y (2.7) obtenemos el resultado. ■

**Lema 2.5.** Sea  $f \in C(\Omega_T, X)$ , si

$$I_h(t) = \int_0^t (\alpha_h(t') - 1) f(t, t') dt',$$

entonces  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{t \in [0,T]} \|I_h(t)\|_X = 0$ .

**Demostración.** De la continuidad uniforme de  $f$ , vemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 \leq t', t'' \leq t \leq T$  y  $|t' - t''| < \delta$ , entonces  $\|f(t, t') - f(t, t'')\|_X < \varepsilon$ . Sea  $k = \lfloor t/h \rfloor$ , podemos escribir

$$I_h(t) = \sum_{j=1}^k \int_{(j-1)h}^{jh} (\alpha_h(t') - 1) f(t, t') dt' + \int_{kh}^t (\alpha_h(t') - 1) f(t, t') dt'.$$

Como el valor medio de  $\alpha_h$  vale 1 en intervalos de longitud  $h$ , para  $f_j \in X$  tenemos

$$0 = \int_{(j-1)h}^{jh} (\alpha_h(t') - 1) f_j dt', \quad (2.8)$$

por lo tanto

$$\int_{(j-1)h}^{jh} (\alpha_h(t') - 1) f(t, t') dt' = \int_{(j-1)h}^{jh} (\alpha_h(t') - 1) (f(t, t') - f_j) dt'.$$

Si  $h < \delta$  y  $f_j = f(t, jh)$ , entonces  $\|f(t, t') - f_j\|_X < \varepsilon$  para  $t' \in [(j-1)h, jh]$  y por lo tanto

$$\left\| \int_{(j-1)h}^{jh} (\alpha_h(t') - 1) (f(t, t') - f_j) dt' \right\|_X \leq \varepsilon h. \quad (2.9)$$

Si  $M = \max_{(t, t') \in \Omega_T} \|f(t, t')\|_X$ , vale que

$$\left\| \int_{kh}^t (\alpha_h(t') - 1) f(t, t') dt' \right\|_X \leq \int_{kh}^t \|f(t, t')\|_X dt' \leq Mh. \quad (2.10)$$

De (2.9), (2.8) y (2.10), se obtiene

$$\|I_h(t)\|_X \leq \sum_{j=1}^k \varepsilon h + Mh \leq T\varepsilon + Mh,$$

de donde obtenemos el resultado. ■

**Demostración del teorema 2.2.** Si  $[0, T_h^*)$  es el intervalo de existencia de la ecuación integral (2.3), para  $0 \leq t < \min\{T, T_h^*\}$  la diferencia  $u(t) - u_h(t)$  satisface

$$\begin{aligned} u(t) - u_h(t) &= (S(t) - S_h(t, 0)) u_0 + \int_0^t S(t-t') F(t', u(t')) dt' \\ &\quad - \int_0^t (2 - \alpha_h(t')) S_h(t, t') F(t', u_h(t')) dt'. \end{aligned}$$

Si definimos

$$\begin{aligned} I_{1,h}(t) &= (\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}_h(t, 0)) u_0, \\ I_{2,h}(t) &= \int_0^t (2 - \alpha_h(t')) (\mathbf{S}(t - t') - \mathbf{S}_h(t, t')) F(t', u(t')) dt', \\ I_{3,h}(t) &= \int_0^t (\alpha_h(t') - 1) \mathbf{S}(t - t') F(t', u(t')) dt', \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} u(t) - u_h(t) &= I_{1,h}(t) + I_{2,h}(t) + I_{3,h}(t) \\ &\quad + \int_0^t (2 - \alpha_h(t')) \mathbf{S}_h(t, t') (F(t', u(t')) - F(t', u_h(t'))) dt'. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por el lema 2.4, tomando  $f(t) = u_0$ , vemos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|I_{1,h}(t)\|_X = 0$ . Dado que

$$\begin{aligned} \|I_{2,h}(t)\|_X &\leq 2 \int_0^t \|(\mathbf{S}(t - t') - \mathbf{S}_h(t, t')) F(t', u(t'))\|_X dt' \\ &\leq 2T \sup_{(t, t') \in \Omega_T} \|(\mathbf{S}(t - t') - \mathbf{S}_h(t, t')) F(t', u(t'))\|_X, \end{aligned}$$

usando nuevamente el lema 2.4 para  $f(t) = F(t, u(t))$ , obtenemos  $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|I_{2,h}(t)\|_X =$

0. La aplicación  $f(t, t') = \mathbf{S}(t - t') F(t', u(t'))$  es continua en  $\Omega_T$ , por lo tanto del lema 2.5, se deduce  $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|I_{3,h}(t)\|_X = 0$ .

Consideramos  $R = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X + \varepsilon$  y  $L$  la constante de Lipschitz de  $F$  para  $B_R(0) \subset X$ , si definimos

$$J_\varepsilon = \{0 \leq t < \min\{T, T_h^*\} : \|u_h(t')\|_X < R + \varepsilon, 0 \leq t' \leq t\},$$

de la estimación (2.11) obtenemos para  $t \in J_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_X &\leq \|I_{1,h}(t)\|_X + \|I_{2,h}(t)\|_X + \|I_{3,h}(t)\|_X \\ &\quad + 2Me^{2\omega T}L \int_0^t \|u(t') - u_h(t')\|_X dt', \end{aligned}$$

y por el lema de Gronwall

$$\|u(t) - u_h(t)\|_X \leq e^{CT} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|I_{1,h}(t)\|_X + \sup_{t \in [0, T]} \|I_{2,h}(t)\|_X + \sup_{t \in [0, T]} \|I_{3,h}(t)\|_X \right)$$

donde  $C = 2Me^{2\omega T}L$ .

Tomando  $h^* > 0$  suficientemente pequeño, vale que  $\|u(t) - u_h(t)\|_X < \varepsilon$  para  $t \in J_\varepsilon$  y  $0 < h < h^*$ . Entonces tenemos que

$$\|u_h(t)\|_X \leq \|u(t)\|_X + \|u(t) - u_h(t)\|_X \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X + \varepsilon = R \quad (2.12)$$

para  $t \in J_\varepsilon$ .

Supongamos que  $T_h^* < T$ . Sea  $T_\varepsilon = \sup J_\varepsilon$  y supongamos que  $T_\varepsilon < T_h^* < T$ . Usando la desigualdad (2.12) tenemos que  $\|u_h(T_\varepsilon)\|_X < R + \varepsilon$ . Por lo tanto, por continuidad de  $u_h$  existe  $T_1 \in (T_\varepsilon, T_h^*)$  tal que  $\max_{0 \leq t \leq T_1} \|u_h(t)\|_X < R + \varepsilon$ . Esto significa que  $T_1 \in J_\varepsilon$  y además  $T_1 > T_\varepsilon$ . Pero  $T_\varepsilon = \sup J_\varepsilon$  y esto es absurdo. Entonces debe ser que  $T_\varepsilon = T_h^*$ . Por definición de  $J_\varepsilon$  tenemos que  $\|u_h(t)\|_X < R + \varepsilon$  para  $0 \leq t < T_h^*$ . Pero por otro lado, tenemos que  $\lim_{t \rightarrow T_h^*} \|u_h(t)\|_X = \infty$ , una contradicción.

Por lo tanto  $T_h^* \neq T_\varepsilon$  y entonces  $T = \sup J_\varepsilon$ , con  $T \leq T_h^*$  y además  $\|u(t) - u_h(t)\|_X \leq \varepsilon$  para  $t \in [0, T]$  lo que prueba el teorema. ■

**Observación 2.1.** Existen casos en los que el método de Splitting puede no converger. En [13] se muestra un ejemplo en el cual tenemos una suma de dos generadores de semigrupos que no pueden ser representados por medio de la formula de Lie-Trotter. Se muestra que si no se cumple una de las hipótesis del Corolario 1.2 en [13] (condición de estabilidad) entonces puede no haber convergencia.

---

## Capítulo 3

# Buen planteo global de la ecuación de reacción difusión fraccionaria

En este capítulo, analizamos el buen planteo del problema (0.1) para distintos casos de interés. El caso local se analiza usando métodos estándares, por lo tanto referimos al lector a la bibliografía (Ver sección 1.5).

Analizaremos el problema global,  $t \in [0, \infty)$ , utilizando la noción de familias de conjuntos positivamente invariantes convexos. Para el caso de difusión clásica ( $\beta = 1$ ), ideas similares se pueden encontrar en el capítulo 14 de [47]. Pero este método presenta dos problemas, el operador debe ser un operador diferencial elíptico y  $u(x)$  debe pertenecer a un espacio de dimensión finita, para poder utilizar el principio de máximo. Ambas dificultades se superan considerando las aproximaciones de tipo Lie-Trotter y luego pasando al límite. Aprovechamos esto, para estudiar la evolución de un modelo de dinámica poblacional, donde los individuos tienen un rasgo característico que los diferencia. En [4] se estudia la existencia de soluciones estacionarias, para una variable escalar que representa un rasgo característico. Para no limitar las posibilidades de modelar este problema a priori, consideramos el caso abstracto, donde la variable del rasgo característico es un elemento en un espacio de medida.

De aquí en adelante, las funciones dependientes del tiempo  $u \in C([0, T], X)$  las notaremos como  $u(t) \in X$  a menos que este indicado.

### 3.1. Buen planteo global en espacios de Banach

**Definición 3.1.** Sea  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  una familia de conjuntos cerrados de  $Z$ , diremos que  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es positivamente  $F$ -invariante si para cada  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $z_0 \in K(t_0)$ , la solución  $z$  de (1.4) verifica que  $z(t) \in K(t)$  para  $t \in [t_0, t_0 + T^*(t_0, z_0))$ . La familia  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es creciente si  $K(t') \subseteq K(t)$  para  $0 \leq t' \leq t$ .

**Ejemplo 3.1.** Sea  $a, b \in C(\mathbb{R}_+)$  funciones continuas positivas definidas en  $\mathbb{R}_+$  tal que  $|F(t, z)|_Z \leq a(t) + b(t)|z|_Z$  para  $(t, z) \in \mathbb{R}_+ \times Z$ , afirmamos que la familia de bolas cerradas dadas por  $B(t) = \{z \in Z : |z|_Z \leq \lambda(t)\}$ , con

$$\lambda(t) = \left( \lambda_0 + \int_0^t a(t') dt' \right) e^{\left( \int_0^t b(t') dt' \right)},$$

es creciente y además es una familia de conjuntos cerrados convexos positivamente  $F$ -Invariantes. De hecho, como  $\lambda(t)$  es una función creciente, es claro que  $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es una familia creciente. Sea  $z_0 \in B(t_0)$ , de (1.4) obtenemos

$$|z(t)|_Z \leq |z_0|_Z + \int_{t_0}^t |F(t', z(t'))|_Z dt' \leq \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t (a(t') + b(t')|z|_Z) dt'.$$

Por el lema de Gronwall, tenemos

$$|z(t)|_Z \leq \left( \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t a(t') dt' \right) e^{\left( \int_{t_0}^t b(t') dt' \right)} \leq \lambda(t),$$

lo cual implica que  $z(t) \in B(t)$ .

**Lema 3.1.** Sea  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  una familia de conjuntos cerrados de  $Z$ . Si  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es positivamente  $F$ -invariante y  $F$  es autónomo, entonces para cada  $z_0 \in K(t_0)$  y  $0 < h < T^*(z_0)$ , la solución  $z$  de (2.5) con condición inicial  $z(t_0 + h/2) = z_0$ , verifica  $z(t_0 + h) \in K(t_0 + h)$ .

**Demostración.** Sea  $w(t) = z((t + t_0 + h)/2)$ , tenemos

$$\begin{aligned} w(t_0 + h) &= z(t_0 + h) = z_0 + \int_{t_0+h/2}^{t_0+h} 2F(z(t'))dt' \\ &= z_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} F(z((t + t_0 + h)/2))dt = z_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} F(w(t))dt. \end{aligned}$$

Usando  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es positivamente  $F$ -invariante, tenemos  $w(t_0 + h) \in K(t_0 + h)$ .

■

**Lema 3.2.** Sea  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  una familia creciente de conjuntos cerrados de  $Z$  tal que  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es positivamente  $2F$ -invariante entonces para cada  $z_0 \in K(t_0)$  y  $0 < h < T^*(z_0)$ , la solución  $z$  de (2.5) con dato inicial  $z(t_0 + h/2) = z_0$ , verifica  $z(t_0 + h) \in K(t_0 + h)$ .

**Demostración.** Como  $z_0 \in K(t_0) \subseteq K(t_0 + h/2)$  y  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es positivamente  $2F$ -invariante, tenemos el resultado. ■

**Corolario 3.1.** Sea  $F : \mathbb{R}_+ \times Z \rightarrow Z$  una aplicación continua localmente Lipschitz en la segunda variable y  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  una familia de conjuntos cerrados de  $Z$ . Si una de las siguientes condiciones se cumple

- $F$  es autónomo y  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es positivamente  $F$ -invariante,
- $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es creciente y positivamente  $2F$ -invariante,

entonces para cada  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, K(t_0))$  y  $0 < h < T^*(t_0, u_0)$  se verifica que

$$\mathbf{N}(t_0 + h, t_0 + h/2, u_0) \in C_u(\mathbb{R}^d, K(t_0 + h)).$$

**Lema 3.3.** Sea  $\sigma \geq 0$ ,  $0 < \beta \leq 1$  y sea  $K$  un conjunto cerrado convexo de  $Z$ , para cada  $t > 0$  y  $u \in C_u(\mathbb{R}^d, K)$ , se cumple que  $\mathbf{S}(t)u \in C_u(\mathbb{R}^d, K)$ .

**Demostración.** Supongamos que la afirmación del lema es falsa. Entonces, existe  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  tal que  $v = (\mathbf{S}(t)u)(x) \notin K$ . Usando el teorema de separación de Hahn-Banach, tomamos un hiperplano separador; i.e.,  $\omega \in Z^*$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  que verifica

que  $\langle \omega, z \rangle \leq \lambda$  para cada  $z \in K$  y  $\langle \omega, v \rangle > \lambda$ , pero

$$\langle \omega, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} G_{\sigma, \beta}(x - y, t) \langle \omega, u(y) \rangle dy \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^d} G_{\sigma, \beta}(x - y, t) dy = \lambda,$$

lo cual es absurdo. ■

**Proposición 3.1.** Sea  $F$  y  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  como en el corolario 3.1. Si  $K(t)$  es convexo para  $t \geq 0$ , entonces  $u(t) \in C_u(\mathbb{R}^d, K(t))$  para cada  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, K(0))$  y  $t \in (0, T^*(u_0))$ , donde  $u$  es solución de (1.3).

**Demostración.** Para  $t \in [0, T^*(u_0))$  y  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $h = t/n$  y  $\{U_{h,k}\}_{0 \leq k \leq n}$ ,  $\{V_{h,k}\}_{1 \leq k \leq n}$  las sucesiones dadas por  $U_{h,0} = u_0$ ,

$$V_{h,k+1} = \mathcal{S}(h)U_{h,k}, \quad (3.1a)$$

$$U_{h,k+1} = \mathcal{N}(kh + h, kh + h/2, V_{h,k+1}), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.1b)$$

Por proposición 2.2 y teorema 2.2, se puede concluir que  $U_{h,k}$  esta definido y  $\|u(t) - U_{h,n}\|_{\infty, Z} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $K(t)$  es un conjunto cerrado, entonces es suficiente demostrar que  $U_{h,n} \in K(t)$ . Afirmamos que  $U_{h,k} \in C_u(\mathbb{R}^d, K(kh))$ , la demostración es por inducción en  $k$ . Si  $U_{h,k} \in C_u(\mathbb{R}^d, K(kh))$ , como  $K(kh)$  es convexo, entonces lema 3.3 implica que  $V_{h,k+1} \in C_u(\mathbb{R}^d, K(kh))$ . Por corolario 3.1, tenemos que  $U_{h,k+1} \in C_u(\mathbb{R}^d, K((k+1)h))$  y se demuestra la afirmación. ■

**Teorema 3.1.** Sea  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  una familia de conjuntos cerrados convexos acotados de  $Z$ . Supongamos que  $F$  y  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfacen la hipótesis del corolario 3.1 y para cada  $T > 0$ , se verifica que  $M(T) = \sup\{\|z\|_Z : z \in K(t), t \in [0, T]\} < \infty$ , entonces para cada  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, K(0))$ , tenemos que  $T^*(u_0) = \infty$  y  $u(t) \in C_u(\mathbb{R}^d, K(t))$  para  $t > 0$ .

**Demostración.** Por proposición 3.1, tenemos que  $u(t) \in C_u(\mathbb{R}^d, K(t))$  para  $t \in (0, T^*(u_0))$ . Supongamos que  $T^*(u_0) < \infty$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow T^*(u_0)} \|u(t)\|_{\infty, Z} = \infty$ . Pero  $\|u(t)\|_{\infty, Z} \leq M(T^*(u_0)) < \infty$ , una contradicción. ■

A continuación, veremos algunos ejemplos a los cuales podremos aplicar los resultados obtenidos.

### 3.1.1. Ecuación de Ginzburg-Landau compleja

**Ejemplo 3.2** (Ecuación de Ginzburg-Landau compleja). La ecuación compleja de Ginzburg-Landau cúbica es una de las ecuaciones no lineales más estudiadas en la comunidad física. Describe en un nivel cualitativo, y a menudo incluso en un nivel cuantitativo, una gran variedad de fenómenos de ondas no lineales, transiciones de fase de segundo orden, de superconductividad, superfluidez y condensación de Bose-Einstein a cristales líquidos y cuerdas en teoría de campos (ver [3], [14], [16] y [50]).

En general, la ecuación de Ginzburg-Landau esta dada por (0.1), donde  $\beta = 1$ ,  $\sigma > 0$  y  $F(u) = (1 + ia)u - (1 + ib)|u|^2u$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . En general, consideramos  $F(u) = f_{\mathbb{R}}(|u|^2)u + if_{\mathbb{I}}(|u|^2)u$ , donde  $f_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{I}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones suaves. Si  $f_{\mathbb{R}}(\eta) \leq 0$  para  $\eta > 0$ , entonces  $K = B(0, \eta)$  es un conjunto convexo acotado positivamente  $F$ -invariante de  $\mathbb{C}$ . Para  $0 < \beta \leq 1$ , del teorema 3.1, obtenemos que la ecuación fraccionaria de Ginzburg-Landau esta globalmente bien planteada para  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, K)$ .

### 3.1.2. Ecuación de Fisher-Kolmogorov

**Ejemplo 3.3** (Ecuación de Fisher-Kolmogorov). Fisher [19] y Kolmogorov et al [24] introdujeron un modelo clásico para describir la propagación de un gen ventajoso en un hábitat unidimensional. En [19] por ejemplo, se considera una población distribuida en un hábitat unidimensional, como puede ser la orilla de una costa, con densidad uniforme. Si en cualquier punto del hábitat ocurre una mutación, que termina siendo en algún grado, ventajoso para la supervivencia, uno esperaría el crecimiento y propagación de dicho gen. Este proceso se completará primero en las cercanías de la ocurrencia de la mutación y luego el gen ventajoso es difundido a la población circundante.

Consideramos la ecuación de reacción difusión no lineal generalizada

$$\partial_t u + \sigma(-\Delta)^\beta u = \chi u(1 - u),$$

donde  $u$  es la concentración química,  $\sigma$  es el coeficiente de difusión y la constante positiva  $\chi$  representa la tasa de crecimiento de la reacción química. Desde entonces,

se ha llevado a cabo una gran cantidad de trabajo para ampliar el modelo y tener en cuenta otros factores biológicos, químicos y físicos. Esta ecuación también se usa en modelos de propagación de llamas [20], teoría de reacciones nucleares [12], reacciones químicas autocatalíticas [17, 18], modelos de crecimiento logístico [35] y neurofisiología [48]. Consideremos  $b_0 > 1$  y  $K(t) = [0, b(t)]$ , con

$$b(t) = \frac{b_0 e^{\chi t}}{1 + b_0(e^{\chi t} - 1)},$$

podemos ver que  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es una familia de intervalos compactos, positivamente  $F$ -invariantes para  $F(z) = \chi z(1 - z)$ . En particular, para cada  $u_0 \in C_u(\mathbb{R})$  con  $u_0(x) \geq 0$ , tomando  $b_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} u_0(x)$ , podemos ver que  $T^*(u_0) = \infty$  y  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(x, t)| \leq 1$  para cada  $x \in \mathbb{R}^d$ . En el caso que  $0 < a_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} u_0(x) < 1$ , tenemos que  $K(t) = [a(t), b(t)]$  con

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\chi t}}{1 + a_0(e^{\chi t} - 1)},$$

es positivamente  $F$ -invariante. Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - 1\|_\infty = 0$ .

### 3.1.3. Ecuación de Liénard

**Ejemplo 3.4** (Sistema de tipo Liénard). Consideremos el sistema de de ecuaciones diferenciales ordinarias en dos dimensiones con  $F(u_1, u_2) = (u_2 - f(u_1), -u_1)$ , donde  $f$  es una función suave impar con  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) < 0$  y  $f(u)/u \rightarrow +\infty$  cuando  $u \rightarrow +\infty$ . Se sabe que este sistema diferencial ordinario tiene al menos un ciclo límite (ver Sección 3.8 de [38]). Para  $(u_1^*, u_2^*) \in \mathbb{R}^2$ , con  $u_1^* > 0$  y  $u_2^* = f(u_1^*)$ , definimos  $K$  el polígono convexo (Figura (3.1)) vértices:  $(0, u_2^*)$ ,  $(u_1^*, u_2^*)$ ,  $(u_1^*, 0)$ ,  $(0, -u_2^*)$ ,  $(-u_1^*, -u_2^*)$ ,  $(-u_1^*, 0)$ .

Sea  $u_0 \in [0, u_1^*]$  tal que  $f(u_0) = 0$  y en el intervalo  $0 \leq s < u_0$  tenemos  $f(s) \leq 0$ . Sea  $k = \max_{0 < s < u_0} |f(s)|$ . Como  $f(u)/u \rightarrow +\infty$ , definimos  $u_\infty$  tal que  $u_\infty < f(u_\infty) \leq f(s)$  para  $s \geq u_\infty$ . Elegimos  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  tal que:

$$u_2^* > 4u_1^* \tag{3.2}$$

$$u_1^* > 4u_0 \quad (3.3)$$

$$u_2^* > 4k \quad (3.4)$$

$$u_1^* > 2u_\infty \quad (3.5)$$

Podemos ver que:

- $\gamma_1(s) = (s, s u_2^*/u_1^* - u_2^*)$  if  $0 \leq s \leq u_1^*$  con normal exterior  
 $\mathbf{n}_1 = (u_2^*/u_1^*, -1)$ , tenemos  $F(\gamma_1(s)) \cdot \mathbf{n}_1 = (s u_2^*/u_1^* - u_2^* - f(s), -s)(u_2^*/u_1^*, -1)$   
 $= s(u_2^*/u_1^*)^2 - (u_2^*)^2/u_1^* - (u_2^*/u_1^*)f(s) + s$ .

Dividimos el intervalo  $[0, u_1^*]$  en tres partes y analizamos cada caso por separado:

1)  $0 \leq s < u_0$

En este intervalo tenemos  $f(s) \leq 0$ . Entonces

$$s(u_2^*/u_1^*)^2 - (u_2^*)^2/u_1^* - (u_2^*/u_1^*)f(s) + s \leq u_0(u_2^*/u_1^*)^2 - (u_2^*)^2/u_1^* + (u_2^*/u_1^*)k + u_0.$$

Por (3.2), (3.3) y (3.4),

$$u_0(u_2^*/u_1^*) + k + u_0(u_1^*/u_2^*) \leq (1/4)u_2^* + (1/4)u_2^* + (1/4)u_0 \leq u_2^*.$$

Por lo tanto  $(u_2^*)^2/u_1^* \geq u_0(u_2^*/u_1^*)^2 + (u_2^*/u_1^*)k + u_0$  y  $F(\gamma_1(s)) \cdot \mathbf{n}_1 \leq 0$  for  $s \in [0, u_0)$ .

2)  $u_0 < s < \frac{u_1^*}{2}$

En este intervalo tenemos  $f(s) > 0$  y  $f$  es una función monótona creciente.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } s(u_2^*/u_1^*)^2 - (u_2^*)^2/u_1^* - (u_2^*/u_1^*)f(s) + s &\leq (u_2^*)^2/(2u_1^*) - (u_2^*)^2/u_1^* + u_1^*/2 \\ &= -(u_2^*)^2/2u_1^* + u_1^*/2. \end{aligned}$$

Por (3.2) tenemos,  $(u_1^*)^2/2 < (u_2^*)^2/2$ .

Por lo tanto  $(u_2^*)^2/2u_1^* > u_1^*/2$  y  $F(\gamma_1(s)) \cdot \mathbf{n}_1 \leq 0$  para  $s \in (u_0, \frac{u_1^*}{2})$ .

3)  $\frac{u_1^*}{2} < s \leq u_1^*$

En este intervalo tenemos  $f(s) > 0$  y  $f$  es una función monótona creciente.

Por (3.2), y (3.5) tenemos  $u_1^*/u_2^* < \frac{f(s)}{s}$ , entonces  $s < u_2^* \frac{f(s)}{u_1^*}$ .

Por lo tanto  $s(u_2^*/u_1^*)^2 - (u_2^*)^2/u_1^* - (u_2^*/u_1^*)f(s) + s \leq -(u_2^*/u_1^*)f(s) + s \leq 0$  y finalmente  $F(\gamma_1(s)) \cdot \mathbf{n}_1 \leq 0$  para  $s \in (\frac{u_1^*}{2}, u_1^*]$ .

- $\gamma_2(s) = (u_1^*, s)$  if  $0 \leq s \leq u_2^*$  con vector normal exterior  $\mathbf{n}_2 = (1, 0)$ , tenemos  $F(\gamma_2(s)) \cdot \mathbf{n}_2 = s - u_2^* \leq 0$ .
  
- $\gamma_3(s) = (u_1^* - s, u_2^*)$  si  $0 \leq s \leq u_1^*$  con vector normal exterior  $\mathbf{n}_3 = (0, 1)$  tenemos  $F(\gamma_3(s)) \cdot \mathbf{n}_3 = s - u_1^* \leq 0$ .

De manera similar, por simetría, si evaluamos a  $F$  en los bordes restantes, también el campo apunta hacia adentro. Entonces el sistema de tipo Liénard esta globalmente bien planteado.

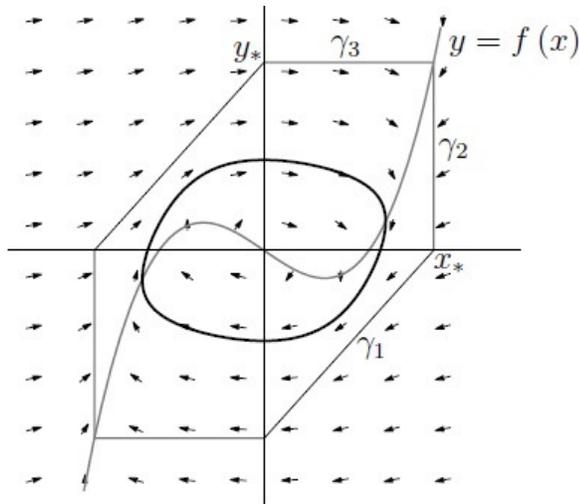


Figura 3.1: Se muestra el campo vectorial para el caso  $f(x) = -x + x^3/3$ , correspondiente a la ecuación de van der Pol. En trazo fino se muestra un polígono convexo invariante, la línea tenue muestra el gráfico de  $f$ . En trazo grueso, se muestra el único ciclo límite.

## 3.2. Buen planteo global para productos de espacios de Banach

Ahora demostraremos la existencial global para productos de espacios de Banach. El lema 3.4 demuestra que el operador semigrupo mantiene la solución dentro de la región invariante. Después de eso, el teorema 3.2 demuestra que si  $u_0$  esta dentro de la región invariante, entonces  $u(t)$  se mantiene dentro para todo  $t > 0$ .

Sean  $\{Z_j\}_{1 \leq j \leq m}$  espacios de Banach y  $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_m$  con la norma,  $\|u\|_{\infty, Z} = \sup_j \{\|u\|_{\infty, Z_j}\}$ , denotamos  $\pi_j : Z \rightarrow Z_j$  la función proyección. Si  $\sigma_j > 0$ ,  $0 < \beta_j \leq 1$ , y  $S_j(t)u = G_{\sigma_j, \beta_j}(\cdot, t) * u$  para  $u \in C_u(\mathbb{R}^d, Z_j)$ , entonces  $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(C_u(\mathbb{R}^d, Z))$  dado por

$$S(t)u = (S_1(t)\pi_1 u, \dots, S_m(t)\pi_m u)$$

es un semigrupo fuertemente continuo.

**Lema 3.4.** Sean  $K_j \subset Z_j$  conjuntos cerrados y convexos y  $K = K_1 \times \cdots \times K_m \subset Z$ . Sea  $u \in C_u(\mathbb{R}^d, K)$ , entonces  $S(t)u \in C_u(\mathbb{R}^d, K)$ , para cada  $t > 0$ .

**Demostración.** La demostración es una consecuencia de la definición anterior y el lema 3.3. ■

**Teorema 3.2.** Sean  $K_j(t) \subset Z_j$  conjuntos convexo cerrados y acotados, si  $K(t) = K_1(t) \times \cdots \times K_m(t)$  y  $F$  cumplen con las hipótesis del corolario 3.1 y del teorema 3.1, entonces para cada  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, K(0))$ , se tiene que  $T^*(u_0) = \infty$  y  $u(t) \in C_u(\mathbb{R}^d, K(t))$  para  $t > 0$ .

**Demostración.** Sea  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, K(0))$  y  $T^*(u_0)$  el tiempo de existencia maximal de la solución  $u$  de (1.3). Sea  $t \in (0, T^*(u_0))$ ,  $h = t/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{V_{h,k}\}_{1 \leq k \leq n}$  y  $\{U_{h,k}\}_{0 \leq k \leq n}$ , definidos como en la Proposición 3.1. Supongamos que  $U_{h,k} \in C_u(\mathbb{R}^d, K(kh))$ . Como cada  $K_j$  es un conjunto cerrado y convexo, Lema 3.4 implica que  $V_{h,k+1} \in C_u(\mathbb{R}^d, K(kh))$ . Sabiendo que  $K(t) = K_1(t) \times \cdots \times K_m(t)$  cumple con las hipótesis del corolario 3.1 entonces tenemos que,  $U_{h,k+1} \in C_u(\mathbb{R}^d, K((k+1)h))$ . Usando el mismo razonamiento que en la proposición 3.1, tenemos que  $U_{h,k} \rightarrow u(kh)$  en  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $u(t) \in C_u(\mathbb{R}^d, K(t))$ . Usando los mismos argumentos que en la proposición 3.1, obtenemos el resultado ■

### 3.2.1. Ecuación de FitzHugh-Nagumo

**Ejemplo 3.5.** Exponemos un ejemplo, donde construiremos un conjunto convexo invariante que consiste de un producto de intervalos, para los cuales podremos aplicar los resultados anteriores. En el artículo [5] se presenta un modelo de tipo FitzHugh-Nagumo para la formación de patrones:

$$\begin{cases} \partial_t u = \sigma_u \Delta u + (a - u)(u - 1)u - v \\ \partial_t v = \sigma_v \Delta v + e(bu - v) \end{cases} \quad (3.6)$$

con  $0 < a < 1$ ,  $e > 0$  and  $b \geq 0$ . Un ejemplo similar se analiza en [47]. Para aplicar el teorema 3.2, utilizaremos un rectángulo positivamente F-invariante  $K = K_1 \times K_2$ ,  $K_j = [-R_j, R_j]$ , donde  $F$  esta dado por

$$F(u, v) = (au^2 - u^3 - au + u^2 - v, e(bu - v)).$$

Sea  $R_1 > \max\{4, \sqrt{2b}\}$  y  $2bR_1 < 2R_2 < R_1^3$ , podemos ver que el rectángulo con  $R_1$  y  $R_2$  es  $F$ -invariante:

$$\begin{aligned} F_1(R_1, v) &\leq a(R_1^2 - R_1) - R_1^3 + R_1^2 + |v| \leq a(R_1^2 - R_1) - R_1^3 + R_1^2 + R_2 < 0, \\ F_1(-R_1, v) &\geq a(R_1^2 + R_1) + R_1^3 + R_1^2 - |v| \geq a(R_1^2 + R_1) + R_1^3 + R_1^2 - R_2 > 0, \\ F_2(u, R_2) &\leq e(b|u| - R_2) \leq e(bR_1 - R_2) < 0, \\ F_2(u, -R_2) &\geq e(-b|u| + R_2) \geq e(-bR_1 + R_2) > 0. \end{aligned}$$

Entonces el campo evaluado en el borde de  $K$  apunta hacia adentro del rectángulo. Por el teorema 3.2 la ecuación (3.6) esta globalmente bien planteada.

---

## Capítulo 4

# Modelo de Dinámica poblacional con una variable continua

En el artículo [4], Arnold et al. consideran un modelo de dinámica poblacional en el cual la población esta estructurada con respecto a la variable espacial  $x$  y una variable de rasgos denotada por  $\theta$ . La función de distribución  $u(x, \theta, t) \geq 0$  denota la densidad de individuos a tiempo  $t \in \mathbb{R}_+$ , posición  $x \in \mathbb{R}^d$ , y cuyo rasgo es  $\theta \in \Theta$ . La evolución de  $u$  esta gobernada por un modelo integro diferencial de tipo reacción-difusión en dimensión infinita (continua) en la cual la selección, las mutaciones, la competición y la migración son tomadas en cuenta. Las suposiciones del modelado son las siguientes: La migración se describe por un operador de difusión (normal o anómala)  $-\sigma(-\Delta)^\beta$ ; las mutaciones se describen por un núcleo lineal  $M(\theta, \vartheta)$  el cual esta relacionado a la probabilidad de que los individuos con rasgo  $\vartheta$  tengan descendencia con rasgo  $\theta$ ; la selección se implementa en el modelo, gracias a la función de aptitud  $k$  la cual puede depender del rasgo  $\theta$ ; finalmente el termino logístico involucra un núcleo  $C(\theta, \vartheta)$  modela la competición (sentida por los individuos de rasgo  $\theta$ ) debido a los individuos de rasgo  $\vartheta$ . Bajo esas suposiciones, la evolución de la población esta gobernada por la siguiente ecuación integro diferencial.:

$$\partial_t u + \sigma(-\Delta_x)^\beta u = F(t, u(t)) \tag{4.1}$$

con dato inicial  $u(0) = u_0$ . La aplicación  $F$  esta dada por

$$F(t, z)(\theta) = k(t, \theta)z(\theta) + \int_{\Theta} M(t, \theta, \vartheta)z(\vartheta)d\mu(\vartheta) - \left( \int_{\Theta} C(t, \theta, \vartheta)z(\vartheta)d\mu(\vartheta) \right) z(\theta),$$

Sea  $\Theta$  un espacio de Hausdorff compacto,  $\mathcal{B}$  un álgebra de Borel y  $\mu$  una probabilidad de Borel regular, planteamos el problema en el conjunto  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ , con  $Z = L^1(\Theta, \mathcal{B}, \mu)$ .

Tomando en cuenta lo que ya está definido en [4], asumimos que  $k \in C(\mathbb{R}_+ \times \Theta)$ ,  $M, C \in C(\mathbb{R}_+ \times \Theta \times \Theta)$  verifica que  $M \geq 0$  y  $C > 0$ . Para cada  $T > 0$ , definimos

$$\begin{aligned} \|k\|_{T,\infty} &= \text{máx}\{|k(t, \theta)| : (t, \theta) \in [0, T] \times \Theta\}, \\ \|M\|_{T,\infty} &= \text{máx}\{M(t, \theta, \vartheta) : (t, \theta, \vartheta) \in [0, T] \times \Theta \times \Theta\}, \\ \|C\|_{T,\infty} &= \text{máx}\{C(t, \theta, \vartheta) : (t, \theta, \vartheta) \in [0, T] \times \Theta \times \Theta\}. \end{aligned}$$

También, necesitamos

$$k_+(t) = \text{máx} \left\{ k(t', \theta) + \int_{\Theta} M(t', \vartheta, \theta)d\mu(\vartheta) : (t', \theta) \in [0, t] \times \Theta \right\}, \quad (4.2a)$$

$$c_-(t) = \text{mín} \{ C(t', \theta, \vartheta) : (t', \theta, \vartheta) \in [0, t] \times \Theta \times \Theta \}. \quad (4.2b)$$

Asumimos que  $c_-(t) > 0$  para  $t > 0$ , la cota inferior para  $C$  significa que todos los individuos están bajo competición. Para obtener el buen planteo de la ecuación (4.1), necesitamos algunos resultados previos.

**Lema 4.1.** La aplicación  $F : \mathbb{R}_+ \times Z \rightarrow Z$  es continua y localmente Lipschitz en la segunda variable.

**Demostración.** Sea  $R, T > 0$  y  $z, \tilde{z} \in Z$  con  $|z|_Z, |\tilde{z}|_Z \leq R$ , tenemos

$$\begin{aligned} |F(t, z) - F(t, \tilde{z})|_Z &\leq \int_{\Theta} |k(t, \theta)| |z(\theta) - \tilde{z}(\theta)| d\mu(\theta) \\ &\quad + \int_{\Theta \times \Theta} M(t, \theta, \vartheta) |z(\vartheta) - \tilde{z}(\vartheta)| d\mu(\vartheta) d\mu(\theta) \\ &\quad + \int_{\Theta \times \Theta} C(t, \theta, \vartheta) |z(\vartheta)| |z(\theta) - \tilde{z}(\theta)| d\mu(\vartheta) d\mu(\theta) \\ &\quad + \int_{\Theta \times \Theta} C(t, \theta, \vartheta) |\tilde{z}(\theta)| |z(\vartheta) - \tilde{z}(\vartheta)| d\mu(\vartheta) d\mu(\theta). \end{aligned}$$

Usando que  $k, M, C$  están acotados para  $t \in [0, T]$  y  $\theta, \vartheta \in \Theta$ , obtenemos que

$$|F(t, z) - F(t, \tilde{z})|_Z \leq (\|k\|_{T, \infty} + \|M\|_{T, \infty} + 2\|C\|_{T, \infty} R) |z - \tilde{z}|_Z.$$

Sea  $(t_n, z_n) \rightarrow (t, z) \in [0, T] \times \Theta$ , podemos ver que

$$\begin{aligned} |F(t, z) - F(t_n, z_n)|_Z &\leq |F(t, z) - F(t_n, z)|_Z + |F(t_n, z) - F(t_n, z_n)|_Z \\ &\leq |F(t, z) - F(t_n, z)|_Z + L(R, T) |z - z_n|_Z, \end{aligned}$$

usando que

$$\begin{aligned} |F(t, z) - F(t_n, z)|_Z &\leq \int_{\Theta} |k(t, \theta) - k(t_n, \theta)| |z(\theta)| d\mu(\theta) \\ &\quad + \int_{\Theta \times \Theta} |M(t, \theta, \vartheta) - M(t_n, \theta, \vartheta)| |z(\vartheta)| d\mu(\vartheta) d\mu(\theta) \\ &\quad + \int_{\Theta \times \Theta} |C(t, \theta, \vartheta) - C(t_n, \theta, \vartheta)| |z(\vartheta)| |z(\theta)| d\mu(\vartheta) d\mu(\theta), \end{aligned}$$

de la continuidad uniforme de  $k, M, C$ , obtenemos que  $F(t_n, z) \rightarrow F(t, z)$  en  $Z$ , lo que completa la demostración. ■

Tenemos el mismo resultado para funciones continuas:

**Lema 4.2.** La función  $F : \mathbb{R}_+ \times C(\Theta) \rightarrow C(\Theta)$  es continua y localmente Lipschitz en la segunda variable.

**Demostración.** La demostración es similar al lema anterior. ■

La no negatividad de la densidad  $z(\theta, t)$  queda establecida por la siguiente proposición (y el subsiguiente corolario).

**Proposición 4.1.** Sea  $z$  la solución de (1.4) con  $z(t_0) = z_0 \in C(\Theta)$ . Si  $z(t_0) > 0$  entonces  $z(t) > 0$  para cada  $t \in [t_0, t_0 + T^*(t_0, z_0))$ .

**Demostración.** Sea  $0 < T < T^*(t_0, z_0)$ , para cada  $(t, \theta) \in [t_0, t_0 + T] \times \Theta$ , definimos

$$\begin{aligned} g(t, \theta) &= \int_{\Theta} M(t, \theta, \vartheta) z(t, \vartheta) d\mu(\vartheta) \\ a(t, \theta) &= \int_{\Theta} C(t, \theta, \vartheta) z(t, \vartheta) d\mu(\vartheta) \end{aligned}$$

entonces  $g(\cdot, \theta), a(\cdot, \theta)$  son continuas, la solución verifica  $z(\cdot, \theta) \in C^1([t_0, t_0 + T^*(t_0, z_0)))$  y

$$\begin{cases} \partial_t z(t, \theta) = (k(t, \theta) - a(t, \theta))z(t, \theta) + g(t, \theta), \\ z(t_0, \theta) = z_0(\theta). \end{cases}$$

Entonces

$$z(t, \theta) = e^{A(t, t_0, \theta)} z_0(\theta) + \int_{t_0}^t e^{A(t, t', \theta)} g(t', \theta) dt', \quad (4.3)$$

donde

$$A(t, t', \theta) = \int_{t'}^t (k(t'', \theta) - a(t'', \theta)) dt''.$$

Sea  $t_* = \sup\{t \in [t_0, t_0 + T] : \min_{[t_0, t] \times \Theta} z(t, \theta) > 0\}$ . Supongamos  $t_* < t_0 + T$ , entonces existe  $\theta_* \in \Theta$  tal que  $z(\theta_*, t_*) = 0$ . Pero de (4.3), tenemos que

$$z(t_*, \theta_*) = e^{A(t_*, t_0, \theta_*)} z_0(\theta_*) + \int_{t_0}^{t_*} e^{A(t_*, t', \theta_*)} g(t', \theta_*) dt' > 0,$$

una contradicción. Como  $T$  es arbitrario, obtenemos el resultado. ■

**Corolario 4.1.** Sea  $z$  la solución de (1.4) con  $z(t_0) = z_0 \in C(\Theta)$ . Si  $z_0 \geq 0$  entonces  $z(t) \geq 0$  para cada  $t \in [t_0, t_0 + T^*(t_0, z_0))$ .

**Demostración.** Consideramos  $z_{0,n} = z_0 + 1/n$ , para cada  $0 < T < T^*(t_0, z_0)$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $T < T^*(t_0, z_{0,n})$  si  $n \geq n_0$ . Como  $z_{0,n} > 0$ , usando la proposición 4.1 tenemos que  $z_n(t) > 0$  para  $t \in [t_0, t_0+T]$ . Como  $z_n$  converge a  $z$  en  $C(\Theta \times [t_0, t_0+T])$ , podemos ver que  $z \geq 0$ . Como  $T$  es arbitrario, obtenemos el resultado. ■

Ahora mostraremos que tenemos buen planteo global en  $C(\Theta)$  para  $z_0 \geq 0$ .

**Proposición 4.2.** Si  $z_0 \in C(\Theta)$  con  $z_0 \geq 0$ , entonces  $T^*(t_0, z_0) = \infty$ .

**Demostración.** Sea  $0 < T < T^*(t_0, z_0)$ , del corolario 4.1, obtenemos que  $a(t, \theta), g(t, \theta) \geq 0$  y entonces  $A(t, t', \theta) \leq \|k\|_{T, \infty}(t - t')$ . Integrando (4.3) en  $\Theta$ , obtenemos para  $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} z(t, \theta) d\mu(\theta) &\leq e^{\|k\|_{T, \infty}(t-t_0)} \int_{\Theta} z_0(\theta) d\mu(\theta) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{\Theta \times \Theta} e^{\|k\|_{T, \infty}(t-t')} M(t', \theta, \vartheta) z(t', \vartheta) d\mu(\vartheta) d\mu(\theta) dt' \\ &\leq e^{\|k\|_{T, \infty}(t-t_0)} \left( \int_{\Theta} z_0(\theta) d\mu(\theta) + \right. \\ &\quad \left. + \|M\|_{T, \infty} \int_0^t \int_{\Theta} e^{-\|k\|_{T, \infty}(t'-t_0)} z(t', \vartheta) d\mu(\vartheta) dt' \right), \end{aligned}$$

usando el lema de Gronwall, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} z(t, \theta) d\mu(\theta) &\leq e^{(\|k\|_{T, \infty} + \|M\|_{T, \infty})(t-t_0)} \int_{\Theta} z_0(\theta) d\mu(\theta) \\ &\leq e^{(\|k\|_{T, \infty} + \|M\|_{T, \infty})(t-t_0)} |z_0|_{\infty}, \end{aligned}$$

lo que implica  $0 \leq g(t, \theta) \leq \|M\|_{T, \infty} e^{(\|k\|_{T, \infty} + \|M\|_{T, \infty})(t-t_0)} |z_0|_{\infty}$ . De (4.3), tenemos que

$$\begin{aligned} \|z\|_{T, \infty} &\leq \|e^{A(t, t_0, \theta)}\|_{T, \infty} |z_0|_{\infty} + \int_{t_0}^t \|e^{A(t, t', \theta)} g(t', \theta)\|_{T, \infty} dt' \\ \|z\|_{T, \infty} &\leq e^{(\|k\|_{T, \infty} + \|M\|_{T, \infty})T} |z_0|_{\infty}. \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que,  $T^*(z_0) = \infty$ . ■

Ahora, construimos un conjunto positivamente  $F$ -invariante de  $Z$ .

**Lema 4.3.** Sea  $w \in C^1([t_0, t_0 + T])$ ,  $w \geq 0$ , tal que  $\dot{w} \leq kw - cw^2$ , con  $k, c > 0$ . Si  $\lambda \geq k/c$  y  $0 \leq w(t_0) \leq \lambda$ , entonces  $0 \leq w(t) \leq \lambda$  para  $t \in [t_0, t_0 + T]$ .

**Demostración.** Supongamos  $w(t_+) > \lambda$  con  $t_0 < t_+ \leq t_0 + T$ , consideramos  $t_- = \sup\{t \in [t_0, t_+] : w(t) \leq \lambda\}$ . Usando el teorema de valor medio, tenemos que existe  $t_1 \in (t_-, t_+)$  tal que

$$w(t_+) - w(t_-) = \dot{w}(t_1)(t_+ - t_-),$$

entonces  $\dot{w}(t_1) > 0$ . Pero  $w(t_1) > \lambda$ , lo cual implica  $kw(t_1) - cw^2(t_1) < 0$ , una contradicción. ■

**Proposición 4.3.** Sea  $z_0 \in C(\Theta)$ ,  $z_0 \geq 0$ . Si  $\lambda(t) \geq \max\{k_+(t)/c_-(t), |z_0|_Z\}$ , entonces la solución de (1.4)  $z \in C([t_0, \infty), C(\Theta))$  verifica  $z(t) \geq 0$  y  $|z(t)|_Z \leq \lambda(t)$  para cada  $t \geq t_0$ .

**Demostración.** Del corolario 4.1, podemos ver que  $z(t) \geq 0$ . Sea  $t > 0$ , para cada  $t' \in [t_0, t]$  tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Theta} z(t', \theta) d\mu(\theta) &= \int_{\Theta} k(t', \theta) z(t', \theta) d\mu(\theta) + \int_{\Theta \times \Theta} M(t', \theta, \vartheta) z(t', \vartheta) d\mu(\vartheta) d\mu(\theta) \\ &\quad - \int_{\Theta \times \Theta} C(t', \theta, \vartheta) z(t', \vartheta) z(t', \theta) d\mu(\vartheta) d\mu(\theta) \\ &= \int_{\Theta} \left( k(t', \theta) + \int_{\Theta} M(t', \vartheta, \theta) d\mu(\vartheta) \right) z(t', \theta) d\mu(\theta) \\ &\quad - \int_{\Theta \times \Theta} C(t', \theta, \vartheta) z(t', \vartheta) z(t', \theta) d\mu(\vartheta) d\mu(\theta). \end{aligned}$$

De la ecuación (4.2), tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Theta} z(t', \theta) d\mu(\theta) \leq k_+(t) \int_{\Theta} z(t', \theta) d\mu(\theta) - c_-(t) \left( \int_{\Theta} z(t', \theta) d\mu(\theta) \right)^2.$$

Usando el lema 4.3, obtenemos que  $|z(t)|_Z \leq \lambda(t)$ . ■

**Proposición 4.4.** Sea  $\lambda \in C(\mathbb{R}_+)$  una función creciente tal que  $\lambda(t) \geq k_+(t)/c_-(t)$ . Entonces, la familia de conjuntos cerrados convexos acotados  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  dada por  $K(t) = \{z \in Z : z \geq 0 \text{ a.e.}, |z|_Z \leq \lambda(t)\}$  es creciente y positivamente  $F$ -invariante.

**Demostración.** Sea  $z_0 \in K(t_0)$ , tomando  $\{z_{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\Theta) \cap K(t_0)$  tal que  $|z_0 - z_{0,n}|_Z \rightarrow 0$ , de la proposición 4.3 podemos ver que  $T^*(z_{0,n}) = \infty$  y  $z_n(t) \in K(t)$ , para  $t \geq t_0$ . Usando la dependencia continua en los datos iniciales, podemos ver que  $|z(t) - z_n(t)|_Z \rightarrow 0$  para cada  $t \in [t_0, t_0 + T^*(t_0, z_0))$ , como  $K(t)$  es cerrado, obtenemos  $z(t) \in K(t)$ . ■

**Observación 4.1.** También tenemos que, la familia  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es positivamente  $2F$ -invariante.

**Teorema 4.1.** Sea  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ , con  $u_0(x) \geq 0$  p.c.t.p. en  $\Theta$ , la solución leve (mild) de la ecuación (4.1) esta globalmente bien planteada y verifica  $\|u(t)\|_{\infty, Z} \leq \max\{\|u_0\|_{\infty, Z}, k_+(t)/c_-(t)\}$ .

**Demostración.** El resultado es una consecuencia inmediata del teorema 3.1 y de la proposición 4.4 tomando  $\lambda(t) = \max\{\|u_0\|_{\infty, Z}, k_+(t)/c_-(t)\}$ . ■

---

## Capítulo 5

# Comportamiento asintótico

Analizamos la situación en la que, si  $u_0$  tiene una asíntota horizontal en  $z_0$  entonces, usando los mismos métodos que en los dos capítulos anteriores, demostramos que  $u(t)$  se aproxima asintóticamente a la evolución temporal de  $z_0$ . Consideramos el caso unidimensional real. Primero demostraremos en el lema 5.1, si  $u_0$  tiene una asíntota horizontal en  $z_0$  entonces  $\mathcal{S}(t)u_0$  se mantiene con la misma asíntota. Luego, demostraremos en el lema 5.2 que  $\mathbf{N}(t, t_0, u_0)(x)$  tiene una asíntota horizontal dependiente del tiempo, es decir, la solución de la ecuación (2.5) con  $z_0$  como condición inicial. Finalmente, combinamos ambos resultados y un argumento de dependencia continua en lema 5.3 para llegar a la proposición 5.1, que la solución  $u(t)$  de (0.1) tiene la misma asíntota horizontal dependiente del tiempo  $z(t)$ .

Estos resultados se pueden aplicar por ejemplo, a la ecuación de Fisher-Kolmogorov [19, 24] mencionada en la subsección 3.1.2. Específicamente en [24] se analizan soluciones con el comportamiento asintótico mencionado (ver Figura 5.1). La parte de la curva de densidad que cambia de  $u = 1$  a  $u = 0$  se va desplazando con el tiempo de derecha a izquierda. Uno puede ver que esta forma de la curva de densidad, cuando  $t \rightarrow \infty$ , se acerca a una forma límite. En [24] se estudia el problema de encontrar esta forma límite de la curva densidad y la tasa límite de su desplazamiento de derecha a izquierda.

**Proposición 5.1.** Sea  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}, Z)$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_0(x) = z_0^\pm \in Z$ , si  $u(t)$  es la solución de (1.3) con  $F$  como en el corolario 3.1, entonces  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = z^\pm(t)$ ,

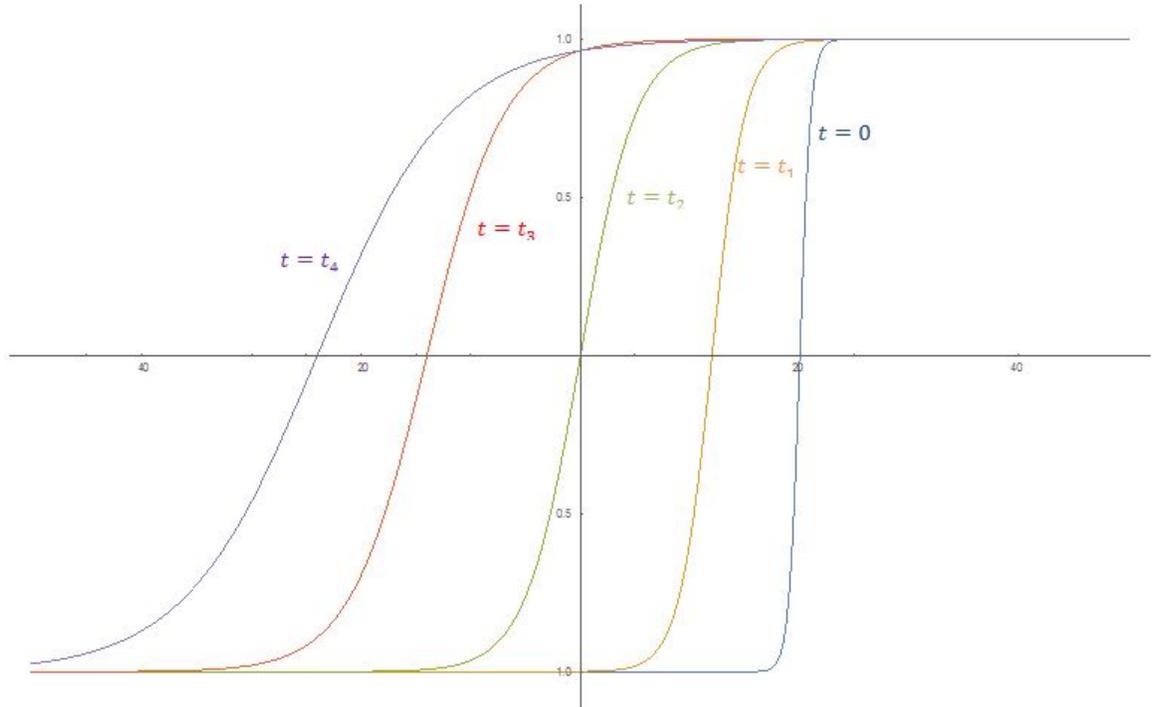


Figura 5.1: Ejemplo de evolución de las soluciones con comportamiento asintótico de la ecuación de Fisher-Kolmogorov. La solución se desplaza con el tiempo, de derecha a izquierda y se va aproximando a una forma límite.

donde  $z^\pm(t)$  es la solución de (2.5) con  $z^\pm(0) = z_0^\pm$ .

Para demostrar esta proposición, necesitaremos los siguientes lemas.

**Lema 5.1.** Sea  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}, Z)$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_0(x) = z_0^\pm \in Z$ . Si  $u(t) = S(t)u_0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = z_0^\pm$ .

**Demostración.** Simplemente probaremos el caso para  $z_0^+$ , el caso para  $z_0^-$  es similar. Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $x_*^+ > 0$  tal que  $|u_0(x) - z_0^+|_Z < \varepsilon$  para  $x > x_*^+$ . Antes de demostrar el límite, necesitaremos una estimación sobre  $g_\beta(\xi)$ . Tomando  $r > 0$  suficientemente grande, obtenemos

$$\int_{|z| > (\sigma t)^{-1/(2\beta)} r} g_\beta(\xi) d\xi < \varepsilon / (2|u_0|_{\infty, Z}), \quad (5.1)$$

Lo siguiente es estudiar la convergencia asintótica. Analizamos dos casos, si  $x > x_* + r$

$$\begin{aligned} |u(t, x) - z_0^+| &\leq \int_{\mathbb{R}} G_{\sigma, \beta}(t, x - y) |u_0(y) - z_0^+| dy \\ &= \int_{y > x-r} G_{\sigma, \beta}(t, x - y) |u_0(y) - z_0^+| dy \\ &\quad + \int_{y < x-r} G_{\sigma, \beta}(t, x - y) |u_0(y) - z_0^+| dy = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Como  $y > x - r > x_*^+$ , tenemos que  $|u_0(y) - z_0^+| < \varepsilon$  y entonces podemos acotar la primer integral,

$$I_1 \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} G_{\sigma, \beta}(t, x - y) dy = \varepsilon.$$

Para la segunda integral, utilizaremos la cota (5.1), y la norma del dato inicial  $u_0$ ,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2|u_0|_{\infty, Z} \int_{y < x-r} G_{\sigma, \beta}(t, x - y) dy = 2|u_0|_{\infty, Z} \int_{\xi > r} G_{\sigma, \beta}(t, \xi) d\xi \\ &= 2|u_0|_{\infty, Z} \int_{|\xi'| > (\sigma t)^{-1/(2\beta)} r} g_{\beta}(\xi') d\xi' < \varepsilon \end{aligned}$$

Acotando ambas integrales obtenemos el resultado. ■

**Lema 5.2.** Sea  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}, Z)$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_0(x) = z_0^{\pm} \in Z$ . Si  $u(t) = \mathbf{N}(t, t_0, u_0)$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = z^{\pm}(t)$ , donde  $z^{\pm}(t)$  es la solución de (2.5) con  $z^{\pm}(0) = z_0^{\pm}$ .

**Demostración.** Consideramos nuevamente solo el caso de  $z^+$ . De la dependencia continua de los datos iniciales, para  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|z_0^+ - z_0|_Z < \delta$ , entonces  $|z^+(t) - z(t)|_Z < \varepsilon$ . Sea  $x_*^+ \in \mathbb{R}$  tal que si  $x > x_*^+$ ,  $|u_0(x) - z_0^+|_Z < \delta$ , entonces  $|u(t, x) - z^+(t)|_Z < \varepsilon$ . ■

**Lema 5.3.** Sea  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  en  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ . Si para  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_n(x) = z^{\pm}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = z^{\pm}$ .

**Demostración.** Consideramos solo el caso de  $z^+$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|u - u_n\|_{\infty, Z} < \varepsilon/2$ . Entonces existe  $x_*^+ \in \mathbb{R}$  tal que  $|u_n(x) - z^+|_Z < \varepsilon/2$  si

$x > x_*^+$ . Por lo tanto,

$$|u(x) - z^+|_Z \leq |u(x) - u_n(x)|_Z + |u_n(x) - z^+|_Z < \varepsilon.$$

■ **Demostración. (demostración de la proposición 5.1)** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h = t/n$  y  $\{U_{h,k}\}_{0 \leq k \leq n}$ ,  $\{V_{h,k}\}_{1 \leq k \leq n}$  las sucesiones definidas por (3.1). Afirmamos que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_{h,k}(x) = z^\pm(kh)$  para  $k = 0, \dots, n$ . Claramente, la afirmación es verdadera para  $k = 0$ . Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_{h,k}(x) = z^\pm(kh)$ , del Lema 5.1, podemos ver que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_{h,k+1} = z^\pm(kh)$ , y usando el lema 5.2 obtenemos que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_{h,k+1}(x) = z^\pm((k+1)h)$ . Concluimos entonces que  $z^\pm(t) = z^\pm(nh) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_{h,n}(x)$  y, como por Proposición 2.2 y Teorema 2.2 tenemos que  $U_{h,n} \rightarrow u(t)$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , el Lema 5.3 implica el resultado. ■

---

## Capítulo 6

# Funciones Periódicas

En este capítulo, analizaremos la existencia de soluciones para la ecuación de reacción difusión fraccionaria aplicando métodos de tipo Splitting, a aplicaciones que son suma directa de funciones de tipo periódicas y de funciones que tienden a cero en el infinito. Este tipo de soluciones son estudiadas también en la ecuación de Schroedinger no lineal, con el nombre de solitones de Peregrine [37]. Se obtienen resultados de buen planteo para cada característica en particular, para luego combinar ambos resultados. Además, observaremos que la evolución de la parte periódica es independiente de la parte que tiende a cero en el infinito.

Por ejemplo, supongamos que la no linealidad es de tipo polinómica (como lo es en la ecuación de Fitzhugh-Nagumo referida en la sección 3.1.3), en este caso tomamos  $F(u) = u^2$ . Si  $u(t) = v(t) + w(t)$ , donde  $v(t)$  es una función de tipo periódica y  $w(t)$  es una función que tiende a cero en el infinito, entonces tenemos que

$$F(u) = F(v + w) = (v + w)^2 = v^2 + 2vw + w^2$$

En donde,  $v^2$  es de tipo periódica y  $2vw + w^2$  tiende a cero en el infinito. En este caso se puede apreciar la *absorción* de la parte que tiende a cero, sobre lo periódico, en los términos cruzados. Como  $v^2 = F(v)$ , esperamos que la parte periódica del dato inicial evolucione de forma independiente de la parte que tiende a cero para la ecuación no lineal. La linealidad del laplaciano fraccionario hace que esta separación se mantenga en la ecuación lineal. En este capítulo obtendremos el resultado general que refiere este ejemplo.

**Definición 6.1.** Sean  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_q\}$   $q$  vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^d$  y sea  $\Gamma$  el conjunto generado por,  $\Gamma = \{n_1\gamma_1 + \dots + n_q\gamma_q : n_j \in \mathbb{Z}\}$ . Una función  $u \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  es  $\Gamma$ -periódica si  $u(x + \gamma) = u(x)$  para cada  $\gamma \in \Gamma$ .

**Definición 6.2.** Definimos el conjunto de funciones  $\Gamma$ -periódicas en  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  por  $C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$ .

**Proposición 6.1.** Los espacios  $C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z), C_0(\mathbb{R}^d, Z) \subset C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  son subespacios cerrados. Mas aun,  $C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z) \cap C_0(\mathbb{R}^d, Z) = \{0\}$ .

**Demostración.** Sea  $u \in C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$ , fijamos  $x \in \mathbb{R}^d$   $u(x) = \lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} u(x + \gamma)$ . Si  $u \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ , entonces  $\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} u(x + \gamma) = 0$ . Por lo tanto,  $u(x) = 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}^d$ . ■

**Lema 6.1.** Sea  $X$  be a espacio de Banach y sea  $X_1, X_2 \subset X$  subespacios cerrados tal que  $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ , tenemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I.  $X_1 \oplus X_2$  es cerrado.
- II. El proyector  $P : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1$  es continuo.

**Demostración.** Como  $X_1 \oplus X_2$  es un espacio de Banach, la función lineal  $\phi : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2$  dada por  $\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  es biyectiva y  $\phi$  es continua. Entonces por el teorema de la gráfica cerrada tenemos que  $\phi^{-1}$  es un operador continuo. Podemos escribir  $P = \pi_1 \phi^{-1}$  y entonces  $P$  es continua. Por otro lado,  $X_1 \oplus X_2 = P^{-1}X_1$ , como  $P$  es continua y  $X_1$  es un subespacio cerrado,  $X_1 \oplus X_2$  es cerrado. ■

**Lema 6.2.** El proyector  $P : C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z) \oplus C_0(\mathbb{R}^d, Z) \rightarrow C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$  es continuo.

**Demostración.** Sea  $u = v + w \in C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z) \oplus C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ ,  $v \in C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$  y  $w \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}^d$ , podemos ver que

$$v(x) = \lim_{\substack{|\gamma| \rightarrow \infty \\ \gamma \in \Gamma}} v(x + \gamma) = \lim_{\substack{|\gamma| \rightarrow \infty \\ \gamma \in \Gamma}} u(x + \gamma),$$

entonces  $\|v(x)\|_Z \leq \|u\|_{\infty, Z}$ , lo que implica que  $\|v\|_{\infty, Z} = \|Pu\|_{\infty, Z} \leq \|u\|_{\infty, Z}$ . ■

**Corolario 6.1.** La suma directa  $X_{\Gamma, Z} = C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z) \oplus C_0(\mathbb{R}^d, Z)$  es un subespacio cerrado de  $C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ .

Para obtener la existencia de soluciones en  $X_{\Gamma, Z}$ , primero estudiaremos cada caso por separado. Analizaremos primero la existencia de soluciones para el caso de funciones  $\Gamma$  periódicas utilizando la función traslación.

**Definición 6.3.** Dado  $\gamma \in \mathbb{R}^d$  definimos  $T_\gamma : C_u(\mathbb{R}^d, Z) \rightarrow C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  como  $(T_\gamma u)(x) = u(x + \gamma)$ .

**Observación 6.1.** Como  $S(t)$  es un operador convolución, es fácil ver que  $T_\gamma S(t) = S(t)T_\gamma$ . Usando que  $T_\gamma F(t, u) = F(t, T_\gamma u)$  obtenemos

$$T_\gamma u(t) = S(t)T_\gamma u_0 + \int_0^t S(t-t')F(t, T_\gamma u(t'))dt'.$$

Por lo tanto,  $T_\gamma u$  es la solución de (1.3) con valor inicial  $T_\gamma u_0$ .

**Proposición 6.2.** Si  $u_0 \in C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$ , entonces la solución  $u$  de la ecuación (1.3) cumple que  $u(t) \in C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$  para  $0 \leq t < T^*(u_0)$ .

**Demostración.** Como  $T_\gamma u_0 = u_0$  para cada  $\gamma \in \Gamma$ ,  $T_\gamma u, u$  son soluciones con los mismos datos iniciales. De la unicidad, tenemos que  $T_\gamma u = u$ . Por lo tanto,  $u(t) \in C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$ . ■

Ahora analizaremos la existencia de soluciones para las funciones que tienden a cero en el infinito.

**Lema 6.3.** Si  $u \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ , entonces  $S(t)u \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$  para  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Demostración.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión con  $|x_n| \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$|(S(t)u)(x_n)|_Z \leq \int_{\mathbb{R}^d} G_{\sigma, \beta}(t, y)|u(x_n - y)|_Z dy.$$

Como  $G_{\sigma, \beta}(t, \cdot)|u(x_n - \cdot)|_Z \leq G_{\sigma, \beta}(t, \cdot)\|u\|_{\infty, Z}$  y  $G_{\sigma, \beta}(t, y)|u(x_n - y)|_Z \rightarrow 0$ , por el teorema de la convergencia dominada tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |(S(t)u)(x_n)|_Z = 0$ . Como  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión arbitraria,  $(S(t)u) \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ . ■

**Lema 6.4.** Sea  $u_0, \tilde{u}_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ , si  $u_0 - \tilde{u}_0 \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ , entonces  $N(t, t_0, u_0) - N(t, t_0, \tilde{u}_0) \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$  para  $0 \leq t < \min\{T^*(u_0), T^*(\tilde{u}_0)\}$ .

**Demostración.** Sea  $u(t) = \mathbf{N}(t, t_0, u_0)$  y  $\tilde{u}(t) = \mathbf{N}(t, t_0, \tilde{u}_0)$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^d$  tenemos

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)|_Z &\leq |u_0(x) - \tilde{u}_0(x)|_Z + \int_0^t |F(t', u(x, t')) - F(t', \tilde{u}(x, t'))|_Z dt' \\ &\leq |u_0(x) - \tilde{u}_0(x)|_Z + L \int_0^t |u(x, t') - \tilde{u}(x, t')|_Z dt'. \end{aligned}$$

Por el lema de Gronwall, tenemos que  $|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)|_Z \leq e^{Lt}|u_0(x) - \tilde{u}_0(x)|_Z$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $r > 0$  tal que  $|u_0(x) - \tilde{u}_0(x)|_Z < \varepsilon e^{-Lt}$  para  $|x| > r$ , entonces  $|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)|_Z < \varepsilon$ , lo que implica que  $u(t) - \tilde{u}(t) \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ . ■

**Proposición 6.3.** Sea  $u_0, \tilde{u}_0 \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ , tal que  $u_0 - \tilde{u}_0 \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$  y sea  $u, \tilde{u}$  las respectivas soluciones de (1.3). Para cada  $0 \leq t < \min\{T^*(u_0), T^*(\tilde{u}_0)\}$ , se tiene que  $u(t) - \tilde{u}(t) \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ .

**Demostración.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h = t/n$  y  $\{U_{h,k}\}_{0 \leq k \leq n}, \{\tilde{U}_{h,k}\}_{0 \leq k \leq n}$  la sucesión definida por (3.1). Afirmamos que  $U_{h,k} - \tilde{U}_{h,k} \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$  para  $k = 0, \dots, n$ . Claramente, la afirmación es verdadera para  $k = 0$ . Si  $U_{h,k-1} - \tilde{U}_{h,k-1} \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ , por el Lema 6.4, tenemos que  $\mathbf{N}(kh, kh - h/2, V_{h,k-1}) - \mathbf{N}(kh, kh - h/2, \tilde{V}_{h,k-1}) \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ . Usando el Lema 6.3, podemos ver que

$$U_{h,k} - \tilde{U}_{h,k} = S(h)(\mathbf{N}(kh, kh - h/2, V_{h,k-1}) - \mathbf{N}(kh, kh - h/2, \tilde{V}_{h,k-1})) \in C_0(\mathbb{R}^d, Z).$$

Como  $C_0(\mathbb{R}^d, Z)$  es cerrado y  $U_{h,n} - \tilde{U}_{h,n} \rightarrow u(t) - \tilde{u}(t)$ , obtenemos el resultado. ■

**Teorema 6.1.** Sea  $u_0 \in X_{\Gamma, Z}$ , entonces la solución  $u$  de la ecuación (1.3) verifica que  $u(t) \in X_{\Gamma, Z}$  para  $0 \leq t < T^*(u_0)$ . Mas aun, si  $u_0 = v_0 + w_0$  con  $v_0 \in C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$  y  $w_0 \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ , entonces  $u(t) = v(t) + w(t)$ , donde  $v$  es la solución de (1.3) con dato inicial  $v_0$  y  $w$  es la solución de

$$w(t) = S(t)w_0 + \int_0^t S(t-t') (F(t, v(t') + w(t')) - F(t, v(t'))) dt'.$$

**Demostración.** Como  $u_0 \in X_{\Gamma, Z} \subset C_u(\mathbb{R}^d, Z)$ , por teorema 1.1 tenemos que  $u(t) \in C_u(\mathbb{R}^d, Z)$  con tiempo maximal de existencia  $T^*(u_0)$ . Observemos que como  $v_0 \in C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$  entonces por proposición 6.2 sabemos que  $v(t) \in C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$

con tiempo maximal de existencia  $T^*(v_0)$ . Definimos  $w(t) = u(t) - v(t)$ . Por hipótesis, tenemos que  $w_0 = w(0) = u(0) - v(0) = u_0 - v_0 \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$  por lo tanto, por proposición 6.3 tenemos que  $w(t) \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$ . Entonces se obtiene que  $u(t) = v(t) + w(t) \in X_{\Gamma, Z}$ , donde  $v(t) \in C_u(\mathbb{R}^d/\Gamma, Z)$  y  $w(t) \in C_0(\mathbb{R}^d, Z)$  en el intervalo  $[0, T_{min})$  donde  $T_{min} = \min\{T(u_0), T(v_0)\}$ . Si fuera que  $T^*(v_0) \geq T^*(u_0)$  entonces tenemos el resultado.

Supongamos que  $T^*(v_0) < T^*(u_0)$ .

Sea  $T \in (0, T^*(u_0))$ ,  $M = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{\infty, Z}$ . Definimos  $\mathcal{T} = \{t \in [0, T] : u(t) \notin X_{\Gamma, Z}\}$ , es decir, los tiempos para los que  $u(t)$  no es una suma directa. Supongamos que  $\mathcal{T} \neq \emptyset$ . Existe entonces  $t_1 = \inf \mathcal{T}$ . Analizaremos si el ínfimo puede ser igual a cero o mayor a cero.

El caso en que  $t_1 = 0$  no es posible ya que hemos visto que  $u(t) \in X_{\Gamma, Z}$ , en el intervalo  $[0, T^*(v_0))$ . Del mismo modo, si  $t_1 > 0$  y además  $t_1 < T^*(v_0)$  también tenemos que  $u(t) \in X_{\Gamma, Z}$ . Analizaremos el caso que resta,  $t_1 > 0$  y además  $T > t_1 > T^*(v_0)$ .

Observemos que, por teorema 1.1 se tiene que  $\lim_{t \rightarrow T^*(v_0)} \|v(t)\|_{\infty, Z} = +\infty$  pero por otro lado, por lema 6.2 tenemos que  $\|v(t)\|_{\infty, Z} \leq \|P\|_{\infty, Z} \|u(t)\|_{\infty, Z} \leq \|P\|_{\infty, Z} M$  es decir, la norma de  $v(t)$  esta acotada para  $t \in [0, T^*(v_0)) \subset [0, T]$  lo cual es una contradicción.

Esto hace que finalmente tengamos que  $u(t) \in X_{\Gamma, Z}$  para  $t \in [0, T^*(u_0))$

## 6.1. Ejemplo de soluciones de tipo Peregrine para la ecuación de reacción-difusión

Consideramos el problema

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + i\omega u + f(|u|^2 - 1)u.$$

donde  $u(x, t)$  toma valores complejos, suponemos que  $f$  es una función suave a valores reales. Podemos ver que  $u(x, t) = Ae^{i\omega t}$  es solución si y solo si  $f(|A|^2 - 1) = 0$ . Por lo tanto, si se verifica  $f(0) = 0$ , entonces  $u(x, t) = e^{i\omega t}$  es solución. Buscamos soluciones de la forma  $u(x, t) = e^{i\omega t}(1 + \psi(x))$ , donde  $\psi(x)$  toma valores reales con

$\psi(x) \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , la ecuación anterior se escribe como

$$0 = \frac{d^2\psi}{dx^2} + (\psi + 1) f(\psi^2 + 2\psi). \quad (6.1)$$

Si  $F$  es una primitiva de  $f$ , entonces

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} F(\psi^2 + 2\psi) = (\psi + 1) f(\psi^2 + 2\psi) \frac{d\psi}{dx},$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} F(\psi^2 + 2\psi) \right) = 0$$

lo que implica  $\mathcal{H}(\psi, d\psi/dx) = E$ , donde

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} F(q^2 + 2q).$$

Si  $\psi$  es una solución de (6.1) con  $\psi(x), \psi'(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ , entonces  $E = 0$ . Tomamos como ejemplo  $F(q) = -q^2 + \frac{1}{3}q^3$ , por lo tanto

$$F(q^2 + 2q) = -\frac{1}{3}q^2(1 - q)(2 + q)^2(3 + q).$$

cuyo gráfico se muestra en la figura 6.1. En este caso, vale  $f(q) = -2q + q^2$  y la ecuación queda

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + (3 + i\omega - 4|u|^2 + |u|^4)u.$$

la ecuación (6.1) se escribe como

$$0 = \frac{d^2\psi}{dx^2} + (\psi + 1) f(\psi^2 + 2\psi).$$

Las soluciones correspondientes a  $E = 0$  deben verificar

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{-F(\psi^2 + 2\psi)}} = \pm x.$$

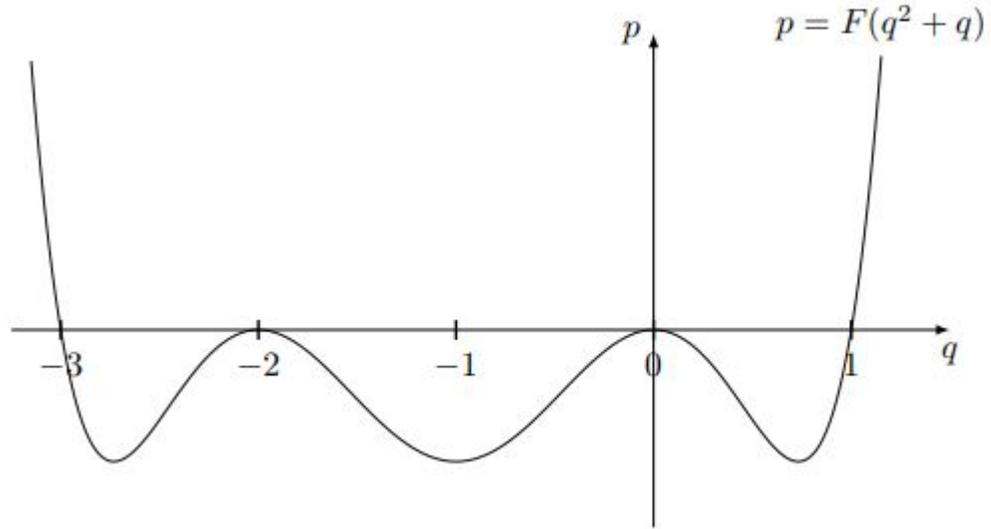


Figura 6.1: Gráfico de F

Mediante cálculo directo obtenemos cuatro soluciones  $\psi_j(x) = h_j(\tanh(x))$

$$h_1(q) = \frac{2}{\sqrt{1+3q^2}} - 1, \quad h_2(q) = \frac{2q}{\sqrt{3+q^2}} - 1$$

$$h_3(q) = -\frac{2}{\sqrt{3+q^2}} - 1, \quad h_4(q) = -\frac{2}{\sqrt{1+3q^2}} - 1$$

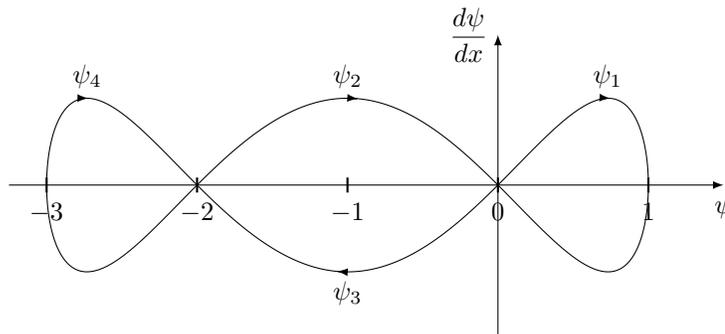


Figura 6.2: Diagrama de fases

■

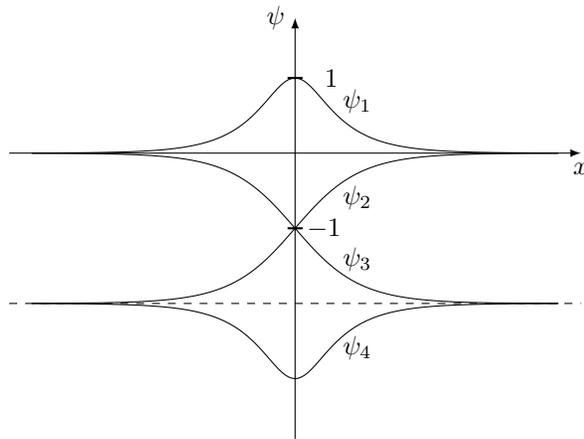


Figura 6.3: Gráfico de las soluciones

---

# Bibliografía

- [1] S. Abdelmalek. Invariant regions and global solutions for reaction-diffusion systems with a tridiagonal symmetric toeplitz matrix of diffusion coefficients. *Electron. J. Differential Equations*, 2014:1–14, 2014.
- [2] H. Amann. *Ordinary differential equations: an introduction to nonlinear analysis*, tomo 13. Walter de Gruyter, 1990.
- [3] I. S. Aranson y L. Kramer. Class of cellular automata for reaction-diffusion systems. *Rev. Mod. Phys.*, 74:1749–1752, 2002.
- [4] A. Arnold, L. Desvillettes, y C. Prévost. Existence of nontrivial steady states for populations structured with respect to space and a continuous trait. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 11:8396, 2012.
- [5] Z. Asgari, M. Ghaemi, y M. G. Mahjani. Pattern formation of the fitzhugh-nagumo model:cellular automata approach. *Iran. J. Chem. Chem. Eng.*, 30:135–142, 2011.
- [6] B. Baeumer, M. Kovács, y M. M. Meerschaert. Fractional reproduction-dispersal equations and heavy tail dispersal kernels. *Bull. Math. Biol.*, 69:2281–2297, 2007.
- [7] S. Bendoukha y S. Abdelmalek. Invariant regions and existence of global solutions to reaction-diffusion systems without conditions on the growth of nonlinearities. *Electron. J. Differential Equations*, 2016:1–11, 2016.
- [8] A. Besteiro y D. Rial. Global existence for vector valued fractional reaction-diffusion equations. *arXiv preprint arXiv:1805.09985*, 2018.

- 
- [9] A. Besteiro y D. Rial. Existence of peregrine type solutions in fractional reaction–diffusion equations. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 9:1–9, 2019.
- [10] J. P. Borgna, M. De Leo, D. Rial, y C. Sanchez de la Vega. General splitting methods for abstract semilinear evolution equations. *Commun. Math. Sci, Int. Press Boston, Inc.*, 13:83–101, 2015.
- [11] C. Bucur y E. Valdinoci. *Nonlocal diffusion and applications*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer, 2016.
- [12] J. Canosa. Diffusion in non-linear multiplicative media. *J. Math. Phys.*, 10:1862–1868, 1969.
- [13] C. Canzi y G. Guerra. A simple counterexample related to the lie–trotter product formula. *Semigroup Forum*, 84:499–504, 2012.
- [14] J. H. E. Cartwright, R. Montagne, N. Piro, y O. Piro. Fronts between rhythms: Spatiotemporal dynamics of extended polyrhythmic media. *Phys. Rev. Lett.*, 99:174101, 2007.
- [15] T. Cazenave y A. Haraux. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford Lecture Ser. Math. Appl., Clarendon Press, Rev ed., 1999.
- [16] K. Chueh, C. Conley, y J. Smoller. Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. *Ind. U. Math. J.*, 26:373–392, 1977.
- [17] H. Cohen. *Non-Linear Diffusion Problems*. A. H. Taub, Ed., Stud. Appl. Math, The Mathematical Association of America, 1971.
- [18] P. C. Fife y J. B. McLeod. The approach of solutions of non-linear diffusion equations to travelling front solutions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 65:335–361, 1977.
- [19] R. A. Fisher. The wave of advance of advantage genes. *Ann. Eugen.*, 7:353–369, 1937.
- [20] D. A. Frank-Kamenetskii. *Diffusion and heat exchange in chemical kinetics*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1955.

- 
- [21] A. Friedman. PDE problems arising in mathematical biology. *Networks & Heterogeneous Media*, 7(4), 2012.
- [22] N.E. Humphries, N. Queiroz, J.R.M. Dyer, N.G. Pade, M.K. Musyl, K.M. Schaefer, D.W. Fuller, J.M. Brunnschweiler, T.K. Doyle, J.D.R. Houghton, G.C. Hays, C.S. Jones, L.R. Noble, V.J. Wearmouth, E.J. Southall, y D.W. Sims. Environmental context explains lévy and brownian movement patterns of marine predators. *Nature*, 465(7301):1066, 2010.
- [23] C.Y. Kao, Y. Lou, y W. Shen. Random dispersal vs. nonlocal dispersal. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 26(2):551–596, 2010.
- [24] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, y N. Piskounov. Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its applications to a biological problem. *Moscow Univ. Math. Bull.*, pág. 105, 1989.
- [25] M. Kwaśnicki. Ten equivalent definitions of the fractional laplace operator. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 20:7–51, 2017.
- [26] N. S. Landkof. *Foundations of modern potential theory*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.
- [27] M. De Leo, D. Rial, y C. Sanchez de la Vega. High-order time-splitting methods for irreversible equations. *IMA J. Numer. Anal.*, págs. 1842–1866, 2015.
- [28] A. Lischke, G. Pang, M. Gulian, F. Song, C. Glusa, X. Zheng, Z. Mao, W. Cai, M. Meerschaert, M. Ainsworth, y G. Karniadakis. *What is the Fractional Laplacian?* preprint, arXiv:1801.09767, 2018.
- [29] J. T. Machado, V. Kiryakova, y F. Mainardi. Recent history of fractional calculus. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., Elsevier*, 16:1140–1153, 2011.
- [30] A. Massaccesi y E. Valdinoci. Is a nonlocal diffusion strategy convenient for biological populations in competition? *J. Math. Biol.*, 74(1-2):113–147, 2017.
- [31] S. Meftah y L. Nisse. Invariant sets for non classical reaction-diffusion systems. *Glob. J. Pure Appl. Math*, 12:1140–1153, 2016.

- 
- [32] R. Metzler y J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys. Rep.*, 339(1):1–77, 2000.
- [33] E. Montefusco, B. Pellacci, y G. Verzini. Fractional diffusion with neumann boundary conditions: the logistic equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 18(8):2175–2202, 2013.
- [34] J. Morgan. Global existence for semilinear parabolic systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 20:1128–1144, 1989.
- [35] J. D. Murray. *Lectures on non-linear models in differential equation models in biology*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1977.
- [36] E. Di Nezza, G. Palatucci, y E. Valdinoci. Hitchhiker's guide to the fractional sobolev spaces. *Bull. Sci. Math.*, 136:521–573, 2012.
- [37] D.H. Peregrine. Water waves, nonlinear schrödinger equations and their solutions. *J. Austral. Math. Soc.*, 25:16–43, 1983.
- [38] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Springer-Verlag, 1991.
- [39] C. Pozrikidis. *The fractional Laplacian*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [40] J. Rauch. *Partial differential equations*. Springer-Verlag, 1991.
- [41] A.M. Reynolds y C.J. Rhodes. The lévy flight paradigm: random search patterns and mechanisms. *Ecology*, 90(4):877–887, 2009.
- [42] J.C. Robinson, A. Rodríguez-Bernal, y A. Vidal-Lopez. Pullback attractors and extremal complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems. *J. Differential Equations, Elsevier*, 238:289–337, 2007.
- [43] K. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge Stud. Adv. Math., Cambridge Univer. Press, 1999.
- [44] W. Schoutens. *Lévy processes in finance*. Wiley, 2003.
- [45] L. E. Silvestre. *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator*. Thesis (Ph.D.)-The University of Texas at Austin, 2005.

- 
- [46] A. Slavík. Invariant regions for systems of lattice reaction-diffusion equations. *J. Differential Equations, Elsevier*, 263:7601–7626, 2017.
- [47] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, 1983.
- [48] H. C. Tuckwell. *Introduction to theoretical neurobiology: non-linear and stochastic theories*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [49] G.M. Viswanathan, V. Afanasyev, S.V. Buldyrev, E.J. Murphy, P.A. Prince, y H.E. Stanley. Lévy flight search patterns of wandering albatrosses. *Nature*, 381(6581):413, 1996.
- [50] J. R. Weimar y J. P. Boon. Class of cellular automata for reaction-diffusion systems. *Phys. Rev. E*, 49:1749–1752, 2015.
- [51] W.A. Woyczyński. Lévy processes in the physical sciences. En *Lévy processes*, págs. 241–266. Springer, 2001.