Universidad Nacional de General Sarmiento

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). *Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".*

DESARROLLO DE MÉTODOS MULTIRRESOLUCIÓN PARA LA SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES DE SENSORES REMOTOS

Trabajo de tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de General Sarmiento

Autor: **Victor M. San Martin**

Directora: María Alejandra Figliola

Fecha: 05 de Junio de 2020

Universidad Nacional de General Sarmiento

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). *Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".*

FORMULARIO "E"

TESIS DE POSGRADO

Niveles de acceso al documento autorizados por el autor.

El autor de la tesis puede elegir entre las siguientes posibilidades para autorizar a la UNGS a difundir el contenido de la tesis: a

a) Liberar el contenido de la tesis para acceso público.

b) Liberar el contenido de la tesis solamente a la comunidad universitaria de la UNGS.

c) Retener el contenido de la tesis por motivos de patentes, publicación y/o derechos de autor por un lapso de cinco años.

a. Título completo del trabajo de Tesis: Desarrollo de Métodos Multirresolución para la Segmentación de Imágenes de Sensores Remotos.

b. Presentado por (Apellido/s y Nombres completos del autor): San Martin, Victor Manuel.

c. E-mail del autor: victor_sanmartin1@hotmail.com.

d. Estudiante del Posgrado (consignar el nombre completo del Posgrado): Doctorado en Ciencia y Tecnología.

e. Institución o Instituciones que dictaron el Posgrado (consignar los nombres desarrollados y completos): Universidad Nacional de General Sarmiento.

f. Para recibir el título de (consignar completo):

a) Grado académico que se obtiene: Doctor.

b) Nombre del grado académico: Doctor en Ciencia y Tecnología.

g. Fecha de la defensa: 05 / 06 / 2020
día / mes / año

h. Director de la Tesis (Apellidos y Nombres): Figliola, María Alejandra.

i. Tutor de la Tesis (Apellidos y Nombres): Jorge, Guillermo.

j. Colaboradores con el trabajo de Tesis: -

k. Descripción física del trabajo de Tesis (cantidad total de páginas, imágenes, planos, videos, archivos digitales, etc.):

- 168 páginas;
- 12 tablas;
- 61 figuras.

l. Alcance geográfico y/o temporal de la Tesis: El alcance geográfico de la tesis es internacional ya que se realizaron publicaciones en revistas internacionales. El trabajo de investigación fue realizado entre abril de 2014 y febrero 2020.

m. Temas tratados en la Tesis (palabras claves): Segmentación, Sensores Remotos, Imágenes SAR, Imágenes Ópticas, Análisis Multifractal, Transformada Wavelet, Transformada Wavelet Discreta No Decimada, Transformada Curvelet, Medida de Información de Shannon.

n. Resumen en español (hasta 1000 caracteres):

En el presente trabajo de tesis se estudiaron métodos multirresolución con la intención de contribuir a la segmentación de imágenes de sensores remotos, con especial interés en datos de radar de apertura sintética (SAR). Se hizo énfasis en dos aplicaciones: la detección de áreas inundadas y la segmentación de texturas. Para la detección de cuerpos

de agua se estimaron los espectros de singularidades de imágenes ópticas y SAR a partir de la teoría multifractal gruesa y se estableció un criterio de segmentación en base a sus características. La segmentación de texturas fue abordada mediante la propuesta de cuatro distribuciones de probabilidad locales, basadas en coeficientes de la transformada wavelet discreta no decimada (UDWT) y la transformada curvelet. Esas distribuciones son calculadas para cada punto de una imagen y analizadas con la medida de información de Shannon.

o. Resumen en portugués (hasta 1000 caracteres):

Neste trabalho de tese, métodos de multirresolução foram estudados com o intuito de contribuir para a segmentação de imagens de sensoriamento remoto, com especial interesse em dados de radares de abertura sintética (SAR). A ênfase foi colocada em duas aplicações: detecção de áreas inundadas e segmentação de texturas. Para a detecção de corpos d'água, os espectros de singularidade das imagens ópticas e SAR foram estimados a partir da teoria multifractal grossa e um critério de segmentação foi estabelecido com base em suas características. A segmentação das texturas foi abordada através da proposta de quatro distribuições locais de probabilidade, baseadas em coeficientes de transformada de wavelet discreta não-dizimada (UDWT) e transformada curvelet. Essas distribuições são calculadas para cada ponto de uma imagem e analisadas com a medida de informações de Shannon.

p. Resumen en inglés (hasta 1000 caracteres):

In this thesis, multiresolution methods were studied with the intention of contributing to segmentation of remote sensing images, with special interest in synthetic aperture radar (SAR) data. Emphasis was placed on two applications: detection of flooded areas and segmentation of textures. For the detection of water bodies, singularity spectra of

optical and SAR images were estimated using coarse multifractal theory and a segmentation criterion was established based on their characteristics. Segmentation of textures was addressed through the proposal of four local probability distributions, based on coefficients of undecimated discrete wavelet transform (UDWT) and curvelets transform. These distributions are calculated for each point of an image and analysed with Shannon's information measure.

q. Aprobado por (Apellidos y Nombres del Jurado):

- Morvidone, Marcela Alejandra;
- Frery, Alejandro César;
- Vampa, Victoria Cristina;

Firma y aclaración de la firma del Presidente del Jurado:

Firma del autor de la tesis:

Universidad Nacional de General Sarmiento

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). *Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".*

DESARROLLO DE MÉTODOS MULTIRRESOLUCIÓN PARA LA SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES DE SENSORES REMOTOS

Publicaciones:

- Publicaciones en revistas:
  - V.M. San Martin y A. Figliola. "Application of multifractal analysis to segmentation of water bodies in optical satellite images". *Papers in Physics*, vol. 9, pp. 1 - 10, 2017. http://dx.doi.org/10.4279/PIP.090007.
- Trabajos en eventos científicos y/o técnicos publicados:
  - V.M. San Martin y A. Figliola. "Medidas de información basadas en coeficientes wavelet discretos no decimados aplicadas a la segmentación de texturas en imágenes satelitales". *Mecánica Computacional*, vol. 37, n. 14, pp. 549 - 557, 2019.
  - M. Rosenblatt, V. San Martin, A. Figliola, E. Serrano. "Regularidad de imágenes aplicada al estudio de ríos de llanura". *Actas del VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, pp. 464 - 467, 2017.
  - V. San Martin, A. Figliola. "Estudio de la multifractalidad de imágenes satelitales sobre el Río Lujan". *Actas del V Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial.* pp. 413 - 416, 2015.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). *Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".*

Aportes Originales:

(Especificar cuales son los aportes originales o innovadores conseguidos en la realización de esta tesis. Indicar donde se encuentran. Máximo una carilla)

En el capítulo 3 de esta tesis se presenta un nuevo criterio de segmentación de cuerpos de agua calma para imágenes satelitales ópticas, con frecuencias correspondientes al infrarrojo cercano, y de radar de apertura sintética basado en la teoría multifractal gruesa. Si bien este enfoque ha sido aplicado al análisis de imágenes, hasta donde el autor tiene conocimiento, no hay registro en la bibliografía sobre la asociación entre la existencia de un mínimo local en el espectro de singularidades estimado y la presencia de regiones inundadas u otra cobertura de suelo. Resultados parciales asociados a esta investigación pueden encontrarse en [1].

En el capítulo 4 se proponen y analizan cuatro nuevos cuantificadores de información, construidos a partir de la combinación de coeficientes multirresolución (procedentes de la transformada wavelet discreta no decimada y la transformada curvelet) y la medida de información de Shannon. Los mismos fueron pensados para su aplicación en la segmentación de texturas en imágenes de sensores remotos. Dos de estos cuantificadores son descartados y los restantes son aplicados a datos ópticos y SAR con gran exito en la detección de texturas naturales y antrópicas. No se han encontrado registros previos a este trabajo de los cuantificadores propuestos, así como tampoco de su aplicación a la segmentación de texturas en imágenes.

Agradecimientos

A Rebeca;

a mis padres;

a la memoria de mi madre;

a Alejandra;

a mis compañeros y amigos de la UNGS, especialmente a Mariel, Leandro y Gustavo.

Resumen

En el presente trabajo de tesis se estudiaron métodos multirresolución con la intención de contribuir a la segmentación de imágenes satelitales, con especial interés en aquéllas de radar de apertura sintética (SAR). Se hizo énfasis en dos aplicaciones: la detección de regiones inundadas y la segmentación de texturas.

Para la detección de cuerpos de agua, se estimó el espectro de singularidades de imágenes ópticas y SAR a partir de la teoría multifractal gruesa. La existencia de un mínimo local en los espectros obtenidos pudo asociarse con la presencia de zonas cubiertas por agua en las capturas. A partir de esta observación y la inspección de los exponentes de Hölder para la medida estimados, se estableció un criterio de segmentación de cuerpos de agua consistente en la selección de aquellos píxeles con singularidad local mayor a la del mínimo encontrado en los espectros. Las segmentaciones realizadas fueron comparadas cuantitativamente con máscaras de agua de las regiones estudiadas, mostrando una alta coincidencia en ambos tipos de datos.

La segmentación de texturas fue abordada mediante la propuesta de cuatro distribuciones de probabilidad locales, basadas en coeficientes de la transformada wavelet discreta no decimada (UDWT) y la transformada curvelet. La idea central es que esas distribuciones sean calculadas para cada punto de una imagen y, al ser analizadas con la medida de información de Shannon, asocien un valor de entropía distinto a cada textura. Los cuantificadores de información resultantes fueron probados con imágenes sintéticas, y su desempeño llevó a descartar dos de ellos

debido a su dependencia con la dirección de las texturas. Los restantes fueron aplicados sobre cuatro conjuntos de datos de sensores remotos, dos de tipo óptico, procedentes del programa NAIP y de los sensores Sentinel 2, y dos de tipo SAR, correspondientes a las plataformas ALOS 1 y Sentinel 1. Los cuantificadores se desempeñaron exitosamente en las pruebas realizadas, pudiendo segmentar una variedad de texturas reales correspondientes a coberturas como cultivos, escenarios urbanos y accidentes geográficos.

Índice general

Índice general IV

Índice de cuadros VII

Índice de figuras VIII

1. Introducción 1

2. Preliminares 13

2.1. Teoría fractal y multifractal 14

2.1.1. Teoría fractal 14

2.1.2. Teoría multifractal 21

2.2. Coeficientes multirresolución 27

2.2.1. Transformada Wavelet y análisis multirresolución 27

2.2.2. Wavelet leaders 33

2.2.3. Transformada Wavelet discreta no decimada 35

2.2.4. Transformada Curvelet 37

2.3. Medidas de Información: Entropía de Shannon. 40

3. Detección de cuerpos de agua a partir de análisis multifractal 43

3.1. Metodología para la obtención del espectro multifractal 44

3.2. Ensayos sobre multifractales teóricos 45
3.3. Aplicación a imágenes de sensores remotos 48
3.4. Conclusiones del capítulo 65

4. Segmentación de texturas a partir de métodos multirresolución 67

4.1. Distribuciones de probabilidad 68
4.1.1. Distribución no direccional 69
4.1.2. Distribución direccional 70
4.1.3. Distribución basada en rotaciones 71
4.1.4. Distribución curvelets 73
4.2. Aplicación sobre imágenes sintéticas 75
4.3. Aplicación sobre datos de sensores remotos 89
4.4. Conclusiones de este capítulo 99

5. Conclusiones generales 102

A. Teoría de la medida 106

B. Sistemas de función iterada 109

B.1. Algoritmo para obtener una medida auto-similar 112

C. Datos de sensores remotos 113

C.1. Sensores ópticos 114
C.1.1. Landsat 8 114
C.1.2. NAIP 116
C.1.3. Sentinel 2 117
C.2. Sensores de Radar de Apertura Sintética (SAR) 119
C.2.1. Sentinel 1 123

C.2.2. ALOS 127

D. Optimización convexa **130**

D.1. Descripción general 131

D.2. Implementación a la entropía de Shannon 131

E. Información computacional **134**

Bibliografía **137**

Índice de cuadros

3.1. Distribuciones de probabilidad utilizadas para la síntesis de medidas multifractales a partir de IFS. 46

C.1. Bandas de Landsat 8 (Sensores OLI y TIRS) 115

C.2. Datos del observatorio Landsat 8 utilizados en este trabajo. 116

C.3. Datos del programa NAIP utilizados en este trabajo. 117

C.4. Bandas espectrales para los sensores SENTINEL-2 (S2A y S2B). 118

C.5. Datos Sentinel 2 utilizados en este trabajo. 119

C.6. Bandas usadas para los sistemas SAR y frecuencias y longitudes de onda correspondientes. 120

C.7. Resolución espacial y espaciado entre píxeles de los productos Sentinel 1 de nivel 1.126

C.8. Datos Sentinel 1 utilizados en este trabajo. 126

C.9. Datos ALOS 1 utilizados en este trabajo. 129

C.10. Resolución espacial y espaciado entre píxeles de los productos ALOS 1 de nivel 1.5.129

E.1. Especificaciones del equipo. 134

Índice de figuras

2.1. Conjunto de Cantor. 16

2.2. Curva de Von Koch. 17

2.3. Conjunto de Julia creado a partir de $f = z^2 + c$ para tres valores de c. 18

3.1. Medidas multifractales obtenidas por medio de IFS. 49

3.2. Espectros multifractales teóricos y los calculados con la teoría gruesa para medidas multifractales 50

3.3. Fragmentos de 256x256 píxeles de imágenes tomadas por los sensores OLI - TIRS del satélite Landsat 8 (banda 5). 52

3.4. Análisis realizado sobre los fragmentos de imágenes Landsat 8 presentados en la figura 3.3. 53

3.5. Imagen Landsat8-1 y su análisis multifractal. 54

3.6. Imagen Landsat8-2 y su análisis multifractal. 55

3.7. Imagen Landsat8-3 y su análisis multifractal. 55

3.8. Imagen Landsat8-4 y su análisis multifractal. 56

3.9. Descripción de los índices presentes en las matrices de confusión. 57

3.10. Matrices de confusión correspondientes a las imágenes Landsat8-1, Landsat8-2, Landsat8-3 y Landsat8-4. 58

3.11. Comparación entre la imagen Landsat8-1 y el resultado de la segmentación. . . . 59
3.12. Comparación entre la imagen Landsat8-2 y el resultado de la segmentación. . . . 59
3.13. Comparación entre la imagen Landsat8-3 y el resultado de la segmentación. . . . 60
3.14. Comparación entre la imagen Landsat8-4 y el resultado de la segmentación. . . . 60
3.15. Imagen Sentinel1-1 y su análisis multifractal. 63
3.16. Imagen Sentinel1-2 y su análisis multifractal. 63
3.17. Matrices de confusión correspondientes a las imágenes Sentinel1-1 y Sentinel1-2. . 64
3.18. Comparación entre la imagen Sentinel1-1 y el resultado de la segmentación. . . . 64
3.19. Comparación entre la imagen Sentinel1-2 y el resultado de la segmentación. . . . 65

4.1. Estimación de exponentes de Hölder a través de coeficientes UDWT y wavelet leaders. 70
4.2. Conjunto de rotaciones de una imagen para la construcción de la distribución basada en rotaciones. 72
4.3. Coronización discreta utilizada sobre el espacio de frecuencias para el cálculo de los coeficientes de curvelets. 74
4.4. Imagen sintética construida a partir de movimiento Browniano multi-fraccionario y los exponentes de regularidad que determinan su rugosidad en cada punto. . . . 76
4.5. Entropía basada en distribución no direccional para imagen 4.4. 77
4.6. Relación teórica $S(h)$. 77
4.7. Histograma de $S^{TV}[\widetilde{P}]$ para la figura 4.4. 79
4.8. Segmentación de la figura 4.4 a través de umbrales en el histograma 4.7. 79
4.9. $S^{TV}[\widehat{P}]$ obtenida para la figura 4.4. 80
4.10. $S^{TV}[\breve{P}]$ obtenida para la figura 4.4. 80
4.11. $S^{TV}[\mathring{P}]$ obtenida para la figura 4.4. 80

4.12. Texturas creadas a partir de patrones sinusoidales. 81

4.13. $S^{TV}[\widetilde{P}]$ obtenida para la figura 4.12. 82

4.14. $S^{TV}[\widehat{P}]$ obtenida para la figura 4.12. 82

4.15. $S^{TV}[\breve{P}]$ obtenida para la figura 4.12. 82

4.16. $S^{TV}[\mathring{P}]$ obtenida para la figura 4.12. 83

4.17. Coeficientes $\mathring{d}_{j,\ell}(k)$ correspondientes a distintas coordenadas de la figura 4.12. . . 85

4.18. Imagen sintética creada para el estudio de los coeficientes de la distribución $\mathring{P}$. . 86

4.19. Coeficientes $\mathring{d}_{j,l}(k)$ correspondientes a distintas coordenadas de la figura 4.18(a). 86

4.20. Imagen sintética usada para el estudio de la influencia del ruido en la clasificación por medio de la distribución $\breve{P}$. 87

4.21. Matrices de confusión correspondientes a la segmentación de la imagen 4.20 contaminada con distintos niveles de ruido. 88

4.22. Fragmento de imagen correspondiente al Programa NAIP de USDA. 90

4.23. $S^{TV}[\breve{P}]$ correspondiente a la imagen 4.22. 91

4.24. $S^{TV}[\mathring{P}]$ correspondiente a la imagen 4.22. 91

4.25. Comparación entre las segmentaciones realizadas a partir de $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$. . 91

4.26. Fragmento de una captura del satélite Sentinel 2 B. 92

4.27. $S^{TV}[\breve{P}]$ correspondiente a la imagen 4.26. 93

4.28. $S^{TV}[\mathring{P}]$ correspondiente a la imagen 4.26. 93

4.29. Comparación entre las segmentaciones realizadas a partir de $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$. . 93

4.30. Fragmento de imagen ALOS 1 en banda HH. 95

4.31. $S^{TV}[\breve{P}]$ correspondiente a la imagen 4.30. 96

4.32. $S^{TV}[\mathring{P}]$ correspondiente a la imagen 4.30. 96

4.33. Comparación entre las segmentaciones realizadas a partir de $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$. . 96

4.34. Fragmento de imagen $S1_1$ en banda VV. 97

4.35. $S^{TV}[\breve{P}]$ correspondiente a la imagen 4.34. 98

4.36. $S^{TV}[\mathring{P}]$ correspondiente a la imagen 4.34. 98

4.37. Comparación entre las segmentaciones realizadas a partir de $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$. . 98

C.1. Ilustración de la geometría de imágenes SAR. 121

E.1. Diagrama de la estructura de carpetas en el repositorio de la tesis. 136

Capítulo 1

Introducción

La teledetección puede definirse en un sentido amplio como el conjunto de técnicas que permiten obtener información de un objeto a la distancia sin entrar en contacto directo con él. Este término es comúnmente usado para referirse al estudio de la superficie de la tierra a través de imágenes adquiridas desde una perspectiva aérea utilizando radiación en una o más regiones del espectro electromagnético [2].

Si bien es posible encontrar fotografías de la superficie terrestre tomadas a finales del 1800 desde globos aerostáticos, fue en el siglo XX cuando la teledetección se desarrolló fuertemente. En la primera mitad del siglo se realizó un gran avance en el área de las fotografías aéreas y la implementación de sensores en las regiones del infrarrojo y de las microondas. Más tarde, de la mano de la guerra fría, comenzaron a surgir los primeros satélites militares de vigilancia. Al mismo tiempo, el uso civil de la fotografía aérea se institucionalizó debido a la liberación al público de muchas capturas previamente limitadas al uso militar.

En 1972 fue lanzado el satélite Landsat 1, que sentó las bases para la observación de la superficie terrestre actual. A partir de allí se desarrollaron un gran número de satélites que han permitido el acceso civil a una gran variedad y cantidad de datos en distintas regiones del

espectro electromagnético [2].

Actualmente la teledetección es una fuente de información invaluable para muchas áreas del conocimiento como ecología [3], geología [4, 5], urbanismo [6, 7], hidrología [8] y actividades productivas, especialmente en agricultura [9, 10]. También son de suma utilidad para la evaluación de riesgos y daños en desastres naturales [11, 12, 13, 14].

De la gran variedad de datos de sensores remotos disponibles hoy en día, aquellos obtenidos a partir de frecuencias electromagnéticas visibles y del infrarrojo cercano y térmico son, sin duda, los más utilizados. Estos datos, comúnmente llamados ópticos, tienen la ventaja de tener bajos niveles de ruido y ser de una interpretación relativamente sencilla. La mayor parte de los sensores ópticos son pasivos, es decir, no poseen su propia fuente de iluminación. Esto hace que dependan de las condiciones de iluminación natural en el momento de la captura. Además son susceptibles a las condiciones climáticas, lo que reduce su utilidad en escenarios de desastres como inundaciones, donde las nubes interrumpen las capturas, o incendios, en los que el humo impide tener una visión directa de la superficie afectada.

En las últimas décadas ha crecido el interés por los sensores remotos que operan en las frecuencias de las microondas, sobre todo los llamados radares de apertura sintética (SAR). Si bien estos poseen altos niveles de ruido y una física de captura compleja, que deriva en defectos de las imágenes que deben corregirse, cuentan con ventajas significativas frente a los sensores ópticos. En primera instancia, los sensores SAR poseen su propia fuente de iluminación, lo que les permite obtener datos de manera independiente a las condiciones de luz solar [15]. Por otro lado, dado que las nubes son prácticamente transparentes en sus frecuencias de operación, estos dispositivos pueden obtener datos en casi cualquier condición climática [15]. Además de esas cualidades, hay que mencionar que los datos SAR poseen cierta capacidad de penetración en la cobertura vegetal y, bajo determinadas condiciones, incluso en la superficie del terreno [15]. También se ha estudiado estos sensores para obtener mediciones indirectas de la humedad de la

capa superficial de suelo, dato de gran importancia en meteorología e hidrología [15, 16, 17].

El desarrollo de herramientas eficientes y precisas para el análisis de imágenes de sensores remotos es un área de investigación en permanente desarrollo, sobre todo en el caso de los datos SAR, en los que la presencia del ruido dificulta la extracción de información. Entre los procesos que se realizan sobre datos de sensores remotos, la segmentación es uno de gran importancia [18, 19]. Ya sea para un estudio en particular o para incorporar los datos a un sistema de información geográfica, en general las capturas presentan alguna segmentación según determinados criterios.

Desde un punto de vista simplista, existen dos enfoques básicos para la segmentación de una imagen: uno centrado en la búsqueda de regiones de píxeles homogéneos respecto de alguna propiedad, y otro orientado a la detección de los bordes o discontinuidades entre estas regiones. La detección de bordes cuenta con métodos clásicos como los propuestos por Canny [20], Sobel [21], Kirsch [22], Prewitt [23], etc. y sigue siendo intensamente estudiada hasta nuestros días. Los lectores interesados en este tema pueden consultar el artículo de revisión de G. Papari y N. Petkov [24] y sus referencias. La segmentación basada en regiones también ha sido fuertemente investigada, dando lugar a una innumerable cantidad de algoritmos. Las técnicas clásicas involucran la definición de umbrales [25], el crecimiento, separación y fusión de regiones, y el uso cuencas morfológicas [26, 27].

Si bien en este punto sería pertinente incorporar una revisión sistemática [28, 29] de la bibliografía disponible en materia de segmentación de datos de sensores remotos, el volumen de publicaciones que sería necesario relevar excedería ampliamente el tiempo y los recursos disponibles durante el presente trabajo. Se sugiere a los lectores interesados remitirse al artículo de revisión de M. D. Hossain y D. Chen [30], orientado a la revisión sistemática de métodos de segmentación de datos de sensores remotos para su implementación en Análisis de Imágenes Basado en Objetos (OBIA). Dicho artículo revisa métodos basados detección de bordes, detección de regiones, métodos híbridos y métodos semánticos, resaltando los pros y contras de cada grupo.

El uso de umbrales sobre los valores de intensidad fue uno de los primeros criterios propuestos para la segmentación de datos de sensores remotos, en particular, para la extracción de cuerpos de agua en imágenes de naturaleza óptica [31]. Determinar el umbral óptimo tiene una gran influencia en los resultados de la clasificación, por lo que se han propuesto muchas técnicas para tal fin. Entre estas, el método de Otsu [32] sigue siendo el más popular por su simplicidad y eficiencia. El algoritmo de Otsu selecciona el valor umbral que maximiza la varianza entre clases del histograma de intensidades. Este método ha mostrado ser eficiente para separar objetos grandes de un fondo, es decir, cuando se tiene un histograma con distribución bimodal o multimodal. Sin embargo, una de sus limitaciones es que cuando la bimodalidad de los histogramas no está equilibrada, el valor umbral puede sobre o subestimar la extensión de los objetos como resultado de que el modo dominante tenga un mayor efecto en la varianza entre clases. Varias modificaciones han sido propuestas en la bibliografía para resolver estos inconvenientes y mejorar el desempeño de este método [33, 34].

En base al estudio de la reflectancia de los cuerpos de agua libre surgieron los llamados índices normalizados diferenciales de agua [35, 36, 37], que han sido usados en una amplia variedad de estudios para obtener máscaras de agua de gran calidad [38]. Por su parte, la detección de zonas anegadas en imágenes SAR, si bien resulta prometedora por la posibilidad de disponer de capturas independientemente de la cobertura nubosa y a través de la canopia vegetal, es un desafío de mayor dificultad. Además de la presencia de ruido, los datos muestran notorias variaciones cuando la superficie de agua posee oleaje o hay presencia de vegetación que, en conjunto con el agua, retrodispersa la señal generando un eco significativo [39]. Para segmentar estos datos se han implementado una gran variedad de métodos, como interpretación visual, umbrales, redes neuronales, grafos, por citar algunos (véase [40, 41] y sus referencias).

En general, la aplicación de umbrales a la intensidad de las imágenes responde a una hipótesis de homogeneidad de las regiones que se busca segmentar. Esta es razonablemente

válida para las zonas inundadas en sensores ópticos y en capturas SAR en condiciones de agua calma y libre de vegetación. Con esa base, uno podría considerar las zonas inundadas como singularidades de cierta extensión a lo largo de la captura. Estas singularidades, así como ocurre con otros objetos naturales, tienen una forma sumamente irregular, por lo que la geometría tradicional no resulta apropiada para describirlas cabalmente.

En la segunda mitad del siglo XX hubo un incremento en el interés por entender objetos, tanto matemáticos como naturales, con una estructura intrincada. Se centró la atención en estructuras para las que cada una de sus partes puede considerarse, en un sentido exacto o estadístico, una imagen del conjunto a escala reducida [42], propiedad denominada autosimilaridad. A partir de estas inquietudes surgieron, durante la década de 1970, los primeros registros de los conceptos de geometría fractal en las publicaciones de B. B. Mandelbrot [43]. En un intento por describir la forma en la que estos objetos irregulares ocupaban el espacio, Mandelbrot definió los conjuntos fractales como aquellos para los cuales la dimensión de Hausdorff es mayor que su dimensión topológica [44]. Sin embargo, actualmente no hay una definición consensuada de conjunto fractal, tendiendo a definirlos en función de sus propiedades más significativas: autosimilaridad, una estructura fina compleja y alguna relación de tipo potencial entre sus parámetros geométricos y la escala de medición [45]. La geometría fractal ha sido aplicada al análisis de imágenes a través de diferentes algoritmos. Una revisión de distintos métodos puede encontrarse en [46] y sus referencias.

La dimensión fractal se utiliza para caracterizar el espacio ocupado por un conjunto. Esto significa que para aplicarla sobre una imagen es necesario binarizarla, perdiendo la información presente en la intensidad. Para resolver esta limitación, en general se introduce la descripción a través de medidas o capacidades, es decir, funciones que les asignan valores reales a conjuntos dados. Una medida finita en un conjunto acotado puede pensarse como una distribución de masa, que puede distribuirse de manera que su concentración sea muy irregular. Si se supone que una

medida dada satisface una ley de potencia en cada punto del conjunto soporte, los conjuntos de puntos caracterizados por un exponente dado pueden determinar distintos fractales, dando lugar a toda una gama de conjuntos con estas características. En general, los autores se refieren a esos objetos como multifractales en lugar de fractales.

Los conjuntos multifractales pueden verse como una extensión de los conjuntos fractales en los que un solo exponente de escala no es suficiente para describir su dinámica; en cambio, se necesita un espectro continuo de exponentes, el llamado espectro de singularidades o espectro multifractal. El interés por los multifractales nace del estudio de las propiedades de los fluidos turbulentos con un alto número de Reynolds [47]. En este contexto, Parisi y Frisch [48] introdujeron un método basado en la transformada de Legendre que permite deducir el espectro de singularidades de una medida, siendo el primer ejemplo de lo que ahora se conoce como "formalismos multifractales". Con un espíritu similar, Chhabra y Jensen [49] definieron un método para la estimación directa del espectro multifractal de datos experimentales que ha tenido una amplia difusión. La estimación del espectro multifractal de conjuntos reales a sido un área de investigación de profundo desarrollo de la que han surgido diferentes métodos. R. Lopes y N. Betrouni [46] los clasifican en métodos de conteo de cajas y métodos de wavelets, destacando aquellos de interés para el análisis de imágenes médicas.

Muchos de los métodos propuestos en la bibliografía permiten obtener el espectro de singularidades de un conjunto de datos en su totalidad, lo que nos brinda información global del proceso subyacente. No obstante, cuando se pretende realizar una segmentación, esta descripción resulta insuficiente. Jacques Lévy Véhel, Pascal Mignot y Jean-Paul Berroir [50] propusieron un método de estimación directa del espectro multifractal basado en la dimensión de conteo de cajas. Además de estimar el espectro de singularidades, este método permite obtener una estimación del exponente Hölder local para una medida en cada punto del conjunto estudiado, con lo que se obtiene una descripción no solo global sino también local. Este método ha sido

utilizado en diversos estudios sobre imágenes con notables resultados; en particular podemos encontrarlo aplicado a detección de bordes [51, 52, 53], análisis de imágenes médicas [54, 55, 56] y detección de cuerpos de agua [57, 1]. Esta propuesta, a diferencia de los métodos que involucran la transformada de Legendre, permite obtener espectros no necesariamente convexos [58]. Hay que destacar que el enfoque propuesto por Lévy Véhel, Mignot y Berroir no supone a priori que los objetos considerados sean fractales o multifractales, sino que solo asume que la capacidad definida sobre un conjunto tiene un exponente Hölder en cada punto de su soporte. A partir de esto es posible utilizar el método de estimación del espectro multifractal, aun si la medida no posee estas propiedades, con el fin de describir las singularidades locales[1].

Como se dijo, es esperable que exista cierta uniformidad en la intensidad cuando se busca segmentar regiones inundadas. No obstante, otras coberturas de suelo no presentan una intensidad homogénea, lo que dificulta su segmentación. Un problema que presenta ese inconveniente es la extracción de texturas. Entre los enfoques utilizados para esto se cuentan *Markov Random Fields* [59], geometría fractal y multifractal [60, 61], redes neuronales [62, 63], por citar algunos. En el caso de imágenes SAR, la segmentación de texturas encuentra la dificultad adicional de la presencia de ruido speckle. A través de modelación estadística de datos con speckle se han propuesto distribuciones de probabilidad que permiten describir la respuesta de diversos blancos. Entre ellas, el modelo $\mathcal{G}^0$ [64] permite caracterizar una gran cantidad de blancos en imágenes SAR monopolarizadas. Son destacables los resultados de este modelo combinado con medidas de complejidad estadística para la identificación de distintas coberturas de suelo [65]. Además,

[1] "We stress a very important point here: it is obvious that the objects we consider are far from being "fractals", or even "multifractals". However, our approach does not at any point make such an assumption. All we do is to suppose that the defined capacity does have a Holder exponent at each point (a rather weak assumption). This makes it possible to compute a multifractal spectrum, whether the capacity is multifractal or not. Of course, strictly speaking, the spectra corresponding to all of our models reduce to the point (2,2), thus we do not have a multifractal behavior. The fundamental idea here is that we are not interested in getting the "real" spectrum, but rather to verify that, if we use a certain procedure of estimation, the "spectrum" associated with a typical image will allow a description of the local singularities. In other terms, we are not interested in absolute quantities (the "true" spectrum), but rather in evidencing differences between estimated spectrum associated with different sets of images."[52]

el uso de distancias geodésicas entre modelos $\mathcal{G}^0$ asociados a regiones de distintas rugosidades ha permitido la detección de los bordes entre estas regiones en datos sintéticos y reales [66], y los prometedores resultados presentados en [67] para la estimación del parámetro de textura permiten suponer potenciales usos para la segmentación basada en regiones.

Una perspectiva muy interesante es la de los métodos multirresolución, como la transformada wavelet [68] y los coeficientes wavelet leaders. En este contexto, los artículos de Pustelnik et al. [69, 70, 71] han mostrado la eficiencia de las estimaciones de Hölder local a través de wavelet leaders junto con métodos de eliminación de ruido basados en optimización convexa para la segmentación de texturas con comportamientos de escala bien marcados.

El cálculo de los coeficientes wavelet leaders se basa en la transformada wavelet discreta (DWT) [68, 72]. Esta resulta computacionalmente muy eficiente en comparación con la transformada continua debido a su implementación basada en bancos de filtros. No obstante, tiene el inconveniente de no ser invariante frente a traslaciones, lo que puede ocasionar problemas tanto en el análisis de las imágenes como en su reconstrucción luego de modificar los coeficientes. Esto ha sido mencionado en diversas publicaciones, especialmente en aquellas abocadas al estudio de imágenes médicas [73, 74, 75], donde esa característica puede desembocar en un diagnóstico erróneo. Para resolver este problema, usualmente se emplea la transformada wavelet discreta no decimada (UDWT) [76, 77]. Si bien esta transformada es redundante, es invariante traslacional, reduciendo así artefactos propios de la DWT.

Otros coeficientes que recientemente ha sido foco de gran atención son los obtenidos a partir de la transformada curvelet, introducida por E. J. Candès y D. L. Donoho [78]. Los marcos curvelet se obtienen rotando, dilatando y desplazando funciones elementales con un soporte alargado. A diferencia de las wavelets, estas funciones son sometidas a un escalado parabólico que utiliza diferentes factores de escala para el ancho y la longitud de la función. Estas formas de onda anisotrópicas son más sensibles que las wavelets a la dirección de las singularidades, lo

que las hace más apropiadas para obtener una representación dispersa de imágenes con bordes regulares.

Los coeficientes multirresolución son excelentes candidatos para extraer información de imágenes que nos permita diferenciar texturas. Sin embargo, es deseable disponer de un cuantificador que sintetice esa información haciéndola fácilmente interpretable. Una revisión bibliográfica permite ver algunos precedentes del uso de medidas de información combinados con coeficientes multirresolución para el estudio de diversas series de datos reales [79, 80, 81]. En trabajos recientes, Rosenblatt et al. [82, 83] han propuesto el uso de cuantificadores de información y complejidad sobre distribuciones de probabilidad basadas en wavelet leaders para el estudio de la regularidad de distintas series temporales. Además, en estos trabajos se demostraron resultados teóricos que establecen relaciones entre la entropía wavelet leaders propuesta y los exponentes de Hölder estimados a partir de los coeficientes leaders. El éxito de esta metodología en el análisis de series reales como el índice Dow Jones y señales EEG así como su reciente aplicación a imágenes, tanto teóricas como de sensores remotos [84], hace pensar que podría dar resultados positivos en la detección de texturas.

Las medidas de información surgieron en el contexto de la teoría de comunicación para cuantificar la información contenida en un mensaje dentro de una señal analógica. En la década de 1930, Hartley introdujo una medida logarítmica de información para la transmisión de un mensaje [85]. Su medida es esencialmente el logaritmo del tamaño del alfabeto utilizado. Esta definición de información se conoce comúnmente como la fórmula de Hartley y da por supuesto que todos los elementos del conjunto se producen con la misma probabilidad. Claude E. Shannon [86] amplió el concepto de información de Hartley al permitir elementos que pueden ocurrir con distinta probabilidad, fundando, según muchos autores, la teoría de información. La medida propuesta por Shannon fue estudiada y formalizada con mayor rigor matemático en 1957 por A. Khinchin [87]. Por su parte, Brillouin [88] y Jaynes [89, 90] discutieron en profundidad los

paralelismos y la relación existentes entre esta medida de información y la entropía termodinámica. En el trabajo citado, Jaynes reinterpretó los resultados de la mecánica estadística como consecuencias estadísticas de la maximización de la medida de Shannon, comúnmente denominada entropía de Shannon[2]. A partir de ese momento surgieron diversas medidas de información y generalizaciones, entre las que se destaca la propuesta por Alfréd Rényi [94].

En función de la bibliografía revisada sobre la aplicación de métodos multirresolución para el estudio de imágenes en general y datos de sensores remotos en particular, resulta evidente que estas herramientas permiten obtener información relevante que facilita la extracción de regiones no triviales.

La idea del presente trabajo es desarrollar métodos eficaces para la segmentación de coberturas de suelo en imágenes satelitales. Particularmente se ha planteado el objetivo de que las propuestas tengan un buen desempeño sobre datos SAR, debido a su dificultad inherente. Con eso en mente se plantearon las siguientes hipótesis generales de trabajo:

H1: La estimación del espectro multifractal a partir del método propuesto en [50] para imágenes de sensores remotos permite la segmentación de coberturas de suelo; en particular, de cuerpos de agua.

H2: La combinación de la medida de información de Shannon con distribuciones de probabilidad formadas con coeficientes UDWT y coeficientes curvelet permite distinguir texturas en datos de sensores remotos de naturaleza óptica y SAR.

De las hipótesis generales se desprenden las siguientes hipótesis especificas:

h1: Una estimación directa del espectro multifractal de datos de sensores remotos ópticos correspondientes a frecuencias del infrarrojo cercano, considerando un número apropiado de

[2]Es prácticamente imposible pasar por alto el parecido funcional entre la noción de entropía procedente de la mecánica estadística y la medida de información de Shannon. En varios textos se menciona como anécdota que John von Neumann le aconsejó a Shannon que adoptara el término entropía, porque le proporcionaría una gran ventaja en los debates debido a que, de todos modos, nadie sabe realmente qué significa entropía [91, 92, 93].

escalas, nos permite detectar regiones singulares asociadas a áreas inundadas.

h2: La estimación directa del espectro multifractal a partir de medidas locales sobre datos de sensores SAR, considerando un número apropiado de escalas, nos permite detectar áreas inundadas de baja retrodispersión y características uniformes en cuanto al oleaje, a pesar del ruido speckle.

h3: Una adaptación a imágenes de la entropía leaders propuesta por Rosenblatt et al. utilizando coeficientes UDWT puede distinguir distintas texturas, con particular utilidad para el caso de texturas con comportamiento de escala bien definido.

h4: La medida de información de Shannon combinada con distribuciones de probabilidad locales construidas a partir de los coeficientes UDWT de detalle (horizontal, vertical y diagonal) permite caracterizar las texturas presentes en una imagen.

h5: El uso de la entropía de Shannon sobre distribuciones de probabilidad conformadas por los máximos por escala de los coeficientes UDWT obtenidos en diversas rotaciones de las imágenes estudiadas es útil para detectar texturas con diversas frecuencias espaciales involucradas.

h6: Distribuciones locales basadas en coeficientes curvelet y analizadas con la entropía de Shannon facilitan la segmentación de texturas en imágenes debido a su alta sensibilidad a bordes continuos.

El presente trabajo se encuentra estructurado del siguiente modo: el capítulo 2 realiza una revisión de los distintos conceptos matemáticos involucrados en la investigación. Los capítulos 3 y 4 presentan los resultados del trabajo. El capítulo 3 está abocado a la segmentación de cuerpos de agua en imágenes satelitales mediante el cálculo directo del espectro multifractal. Por su parte, el capítulo 4 detalla cuatro nuevos cuantificadores de información, construidos mediante la

combinación de coeficientes multirresolución y la medida de Shannon, que permiten caracterizar las texturas presentes en distintas capturas y facilitan su segmentación. El capítulo 5 reúne las conclusiones más relevantes del trabajo.

La tesis viene acompañada por una serie de apéndices que brindan información sobre temas de importancia para el desarrollo de la investigación pero cuya incorporación en el cuerpo del texto entorpecería la lectura. El apéndice A introduce la teoría de medidas, sobre la que se basa la teoría de análisis multifractal desarrollada en el capítulo 2 y aplicada en el capítulo 3. El apéndice B da un pantallazo sobre los fundamentos de los Sistemas de Función Iterada y presenta el algoritmo utilizado en el capítulo 3 para construir las medidas autosimilares con las que se prueba inicialmente el método de estimación de los espectros multifractales. Por otra parte, el apéndice C realiza una revisión de los principales conceptos asociados a la teledetección y los distintos tipos de sensores utilizados en la tesis. Detalla las características de los datos analizados en los capítulos 3 y 4. El apéndice D está abocado a un método de reducción de ruido empleado como posprocesamiento de los estudios realizados en el capítulo 4. Finalmente, el apéndice E brinda información acerca de los códigos computacionales desarrollados en el transcurso del trabajo y de la plataforma de ejecución de los experimentos.

Capítulo 2

Preliminares

> *"Thus it is that in war the victorious strategist only seeks battle after the victory has been won, whereas he who is destined to defeat first fights and afterwards looks for victory."*
>
> — Sun Tzu, *The Art of War*

La idea de este capítulo es presentar los conceptos y basamentos matemáticos sobre los que se apoya el presente trabajo, así como unificar y explicitar la notación a fin de evitar confusiones.

El capítulo se estructura en tres bloques: la sección 2.1, que resume los conceptos asociados al análisis fractal y multifractal de conjuntos basándose en la teoría de medidas; la sección 2.2, donde se introducen varias definiciones de coeficientes multirresolución; y, por último, la sección 2.3, en donde se presentan los rudimentos de las llamadas medidas de información.

La sección 2.1 comienza enlistando propiedades de conjuntos fractales dando algunos ejemplos clásicos, para luego presentar las definiciones de dimensiones, herramientas matemáticas para el estudio de estos conjuntos. Se introduce luego la noción de conjunto multifractal y se sintetizan tres modos de estudiar los espectros multifractales: las teorías fina y gruesa y el método

de los momentos.

En la primera parte de la sección 2.2 se ofrece un resumen sobre los conceptos asociados a la transformada wavelet, centrándose en la transformada discreta y su aplicación a conjuntos de $\mathbb{R}^2$. Esto sirve de base para presentar los coeficientes wavelet leaders y su relación con los exponentes de regularidad o exponentes Hölder. Luego se aborda la transformada wavelet discreta no decimada y su aplicación a imágenes. En el último apartado de la sección, se resumen los conceptos básicos de la transformada curvelet.

La sección 2.3 cierra este capítulo con una revisión de la definición de las medidas de información, y puntualmente de aquella propuesta por C. E. Shannon en 1948, considerada la piedra angular de la teoría de información.

2.1. Teoría fractal y multifractal

2.1.1. Teoría fractal

La palabra fractal fue acuñada por Mandelbrot [44] para describir objetos tan irregulares que no ajustan dentro de una descripción geométrica tradicional[1].

Cuando decimos que un conjunto F es fractal, pensamos en que satisface algunas de las siguientes propiedades:

- F es autosimilar. El conjunto contiene copias de si mismo a varias escalas.
- El conjunto F tiene estructura "fina"; esto es, contiene detalles en escalas arbitrariamente pequeñas.
- F es demasiado irregular como para ser descrito en lenguaje geométrico tradicional: no es

[1] En palabras de K. Falconer, "My personal feeling is that the definition of a 'fractal' should be regarded in the same way as a biologist regards the definition of 'life'. There is no hard and fast definition, but just a list of properties characteristic of a living thing, such as the ability to reproduce or to move or to exist to some extent independently of the environment. Most living things have most of the characteristics on the list, though there are living objects that are exceptions to each of them."

ni el conjunto de puntos que satisfacen alguna condición geométrica simple, ni el conjunto solución de alguna ecuación sencilla.

- Aunque F tiene una estructura detallada intrincada, su definición es bastante sencilla, por ejemplo, una recursión.

Algunos conjuntos fractales que pueden hallarse en la literatura clásica son Cantor, la curva de Von Koch y el conjunto de Julia.

El conjunto se Cantor, ilustrado en la figura 2.1, se construye a partir de un intervalo unitario a través de una secuencia de operaciones de borrado. Consideremos el conjunto $E_0 \equiv [0,1]$ y supongamos que lo dividimos en tres tercios. Supongamos que borramos el tercio central, obteniendo entonces el conjunto $E_1 \equiv [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Si tomamos los dos tercios restantes, los dividimos nuevamente en tercios y borramos los tercios centrales de cada uno, obtenemos el conjunto $E_2 \equiv [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$.Si continuamos con este procedimiento, luego de k iteraciones obtendremos el conjunto E_k, formado por 2^k segmentos de longitud 3^{-k}. El conjunto de Cantor F se define entonces como la intersección de los E_k cuando k tiende a infinito, $F := \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$.

La curva de Von Koch, presentada en la figura 2.2, se construye a partir de un segmento unitario, que llamaremos E_0. El conjunto E_1 se obtiene reemplazando el tercio central de E_0 por los otros dos lados de un triangulo equilátero con base en el segmento reemplazado. E_2 se obtiene aplicando el mismo procedimiento a cada segmento de E_1. Siguiendo este proceso, cuando k tiende a infinito, E_k tiende a la curva de Von Koch.

Otro ejemplo de conjunto fractal es el conjunto de Julia. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Llamamos f^k a la k-ésima composición $f \circ \cdots \circ f$. El conjunto de Julia se define en base al comportamiento de $f^k(z), z \in \mathbb{C}$ para grandes k. Si definimos el conjunto de Julia relleno de f como $K(f) := \left\{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \nrightarrow \infty\right\}$, entonces el conjunto de Julia $J(f)$ es el contorno del conjunto de Julia

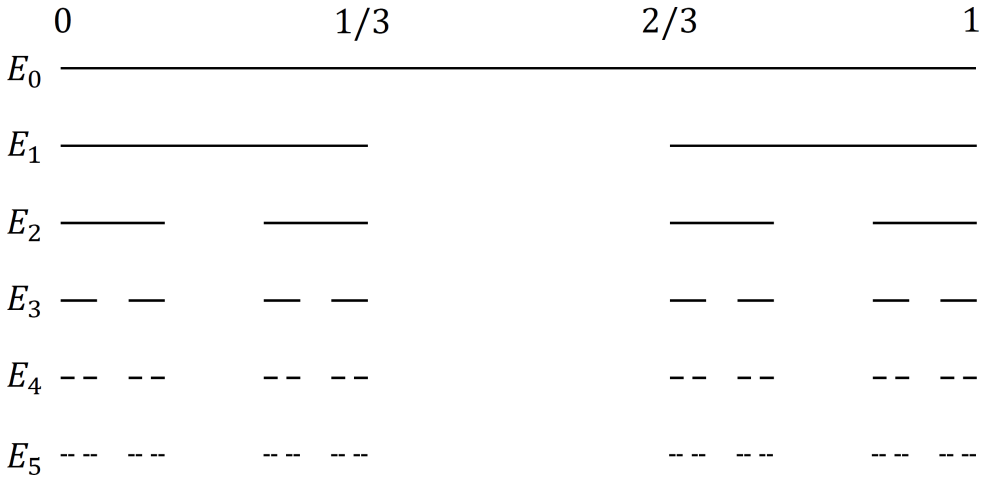


Figura 2.1: Conjunto de Cantor.

relleno. Es decir, $z \in J(f)$ si en todo vecindario de z existen puntos w y v tal que $f^k(w) \to \infty$ y $f^k(v) \nrightarrow \infty$. En la figura 2.3 se puede ver una representación del conjunto de Julia creado a partir de $f = z^2 + c$ para algunos valores de c.

Muchos fractales tienen algún grado de autosimilaridad aunque esta no es exacta, es decir, están formados por partes que se asemejan a todo el conjunto. Algunas veces esa semejanza puede ser más débil que la similaridad geométrica estricta, por ejemplo, la similaridad podría ser aproximada o estadística. En el ensayo original de Mandelbrot se plantea la diferencia entre fractales matemáticos y fractales naturales. Mientras los fractales matemáticos poseen propiedades de autosimilaridad más estrictas, los llamados fractales naturales presentan estas propiedades solo dentro de un rango acotado de escalas. En general, estos últimos casos poseen autosimilaridad de carácter estadístico.

Las principales herramientas para estudiar la geometría fractal son las dimensiones en sus muchas formas. De manera simplista, una dimensión da una descripción de cuanto espacio llena un conjunto. Es una medida de la prominencia de las irregularidades de un conjunto cuando es observado a escalas muy pequeñas.

Quizá las dimensiones más ampliamente conocidas son las dimensiones euclidea y topo-

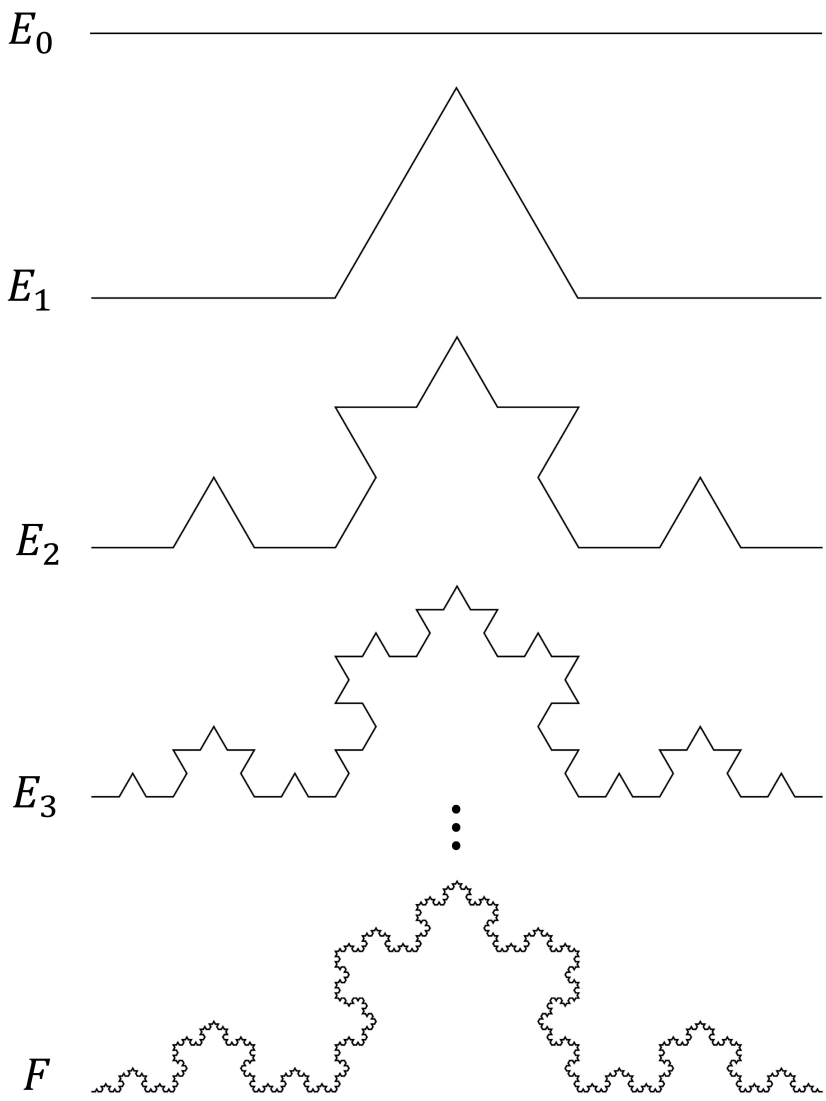
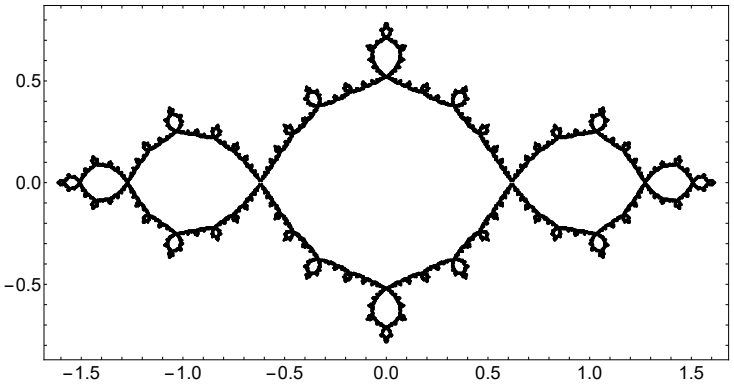
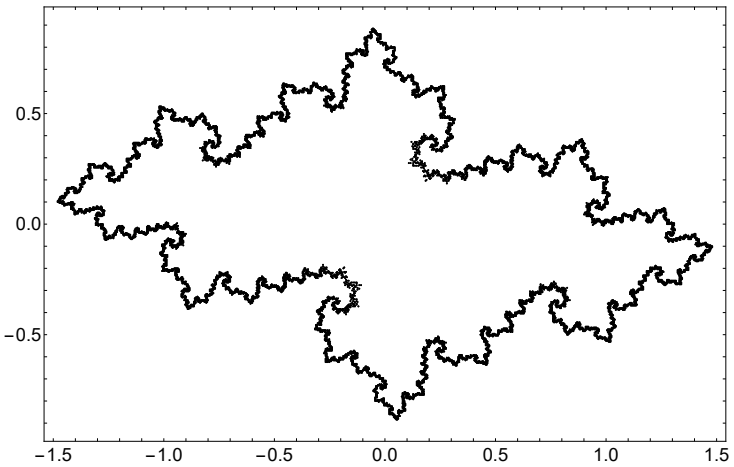


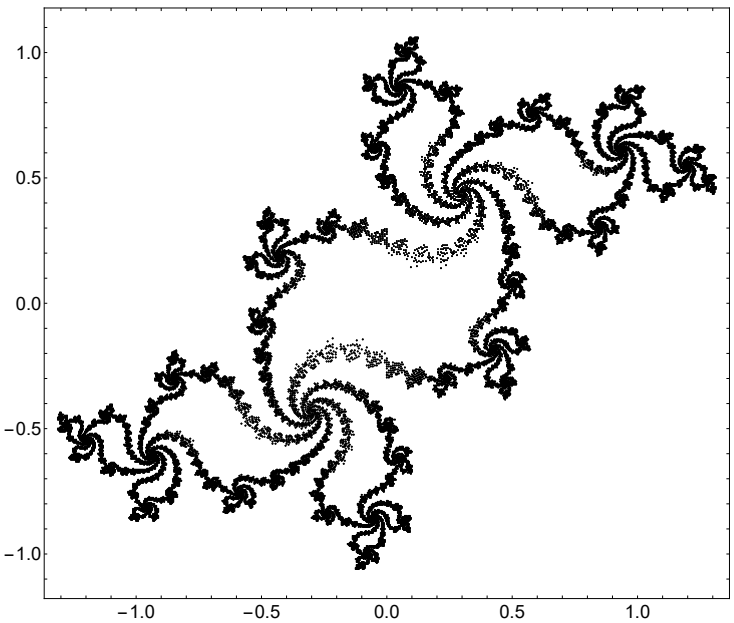
Figura 2.2: Curva de Von Koch.



(a) $c = -1$.



(b) $c = -0.7 - 0.2i$.



(c) $c = -0.2 - 0.7i$.

Figura 2.3: Conjunto de Julia creado a partir de $f = z^2 + c$ para tres valores de c.

lógica. Ambas admiten solo valores enteros. De acuerdo con la *dimensión euclidea*, un objeto tiene dimensión 1 si está contenido en una linea recta, 2 si está contenido en un plano y 3 si se encuentra en un espacio. Un punto tiene dimensión euclidea 0.

La *dimensión topológica* considera el modo en el que un objeto puede dividirse. Un punto tiene dimensión 0, coincidentemente con la dimensión euclidea, ya que no es posible dividirlo en otras estructuras. Una linea al ser considerada como un conjunto de puntos, tiene asignada la dimensión 1. Dado que una superficie se puede dividir en un conjunto de lineas, tiene una dimensión topológica 2. Un volumen en el espacio tiene una dimensión topológica 3, ya que se lo puede considerar como un conjunto de superficies.

Si bien estas dos dimensiones son útiles dentro de la geometría tradicional, no alcanzan a capturar la complejidad de las estructuras fractales. Por ese motivo, se han propuesto otras que nos permiten caracterizar el modo en el que los conjuntos fractales ocupan el espacio y compararlos entre si.

Para los conjuntos estrictamente autosimilares existe la llamada *dimensión de similaridad*. Para un conjunto construido por m copias de si mismo escaladas por un factor r esta dimensión adopta el valor $D_s = -\log(m)/\log(r)$. Por ejemplo, el conjunto de Cantor se construye, en cada iteración, con $m = 2$ copias de si mismo escaladas por un factor de $r = 1/3$; eso nos da una dimensión de similaridad de $D_s = \log(2)/\log(3) \approx 0.631$.

La dimensión de autosimilaridad no es apropiada para fractales que no poseen una regla de construcción bien definida, es decir, para aquellos que no son estrictamente autosimilares. Para esos casos, existen definiciones más convenientes, tales como las dimensiones de Hausdorff y de conteo de cajas.

La dimensión de Hausdorff tiene la ventaja de estar definida para cualquier conjunto y ha sido de suma utilidad para el desarrollo teórico de la geometría fractal. Si U es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, el diámetro de U se define como $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, si

$\{U_i\}$ es una colección contable o finita de conjuntos tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ con $0 \leq |U_i| \leq \delta$, $\forall i$, decimos que $\{U_i\}$ es una cobertura-δ de A.

Supongamos que F es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y s es un número no negativo. Para cualquier $\delta > 0$ definimos

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una cobertura-}\delta \text{ de } F \right\}. \tag{2.1}$$

A medida que δ decrece, la clase de coberturas permitidas de F en (2.1) se reduce. Por tanto, el ínfimo $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ se incrementa, alcanzando un límite a medida que $\delta \to 0$. Escribimos

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F). \tag{2.2}$$

Este límite existe para cualquier subconjunto F de $\mathbb{R}^n$, aunque el valor límite suele ser 0 o ∞. $\mathcal{H}^s(F)$ es llamada medida s-dimensional de Hausdorff de F.

Es claro que $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ es no creciente con s, por lo que lo mismo ocurre con $\mathcal{H}^s(F)$. También es cierto que si $t > s$ y $\{U_i\}$ es una cobertura-δ de F, $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{t-s} |U_i|^s$, entonces, tomando el ínfimo, $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(F)$. Haciendo $\delta \to 0$ vemos que si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ entonces $\mathcal{H}^t(F) = 0$. Existe un valor crítico de s para el cual $\mathcal{H}^s(F)$ salta de ∞ a 0. Ese valor crítico es llamado *dimensión de Hausdorff* de F, $\dim_H F$, y puede escribirse formalmente como

$$\dim_H F = \text{ínf} \{ s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0 \} = \sup \{ s : \mathcal{H}^s(F) = \infty \}. \tag{2.3}$$

Quizá el mayor inconveniente de esta definición de dimensión es la dificultad para calcularla o estimarla por métodos computacionales.

La *dimensión de conteo de cajas* es una de las más ampliamente usadas debido a su

simplicidad de implementación en un algoritmo numérico. Sea F un subconjunto acotado no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea $N_\delta(F)$ el menor número de conjuntos de diámetro no mayor a δ que cubren completamente a F [2]. Las dimensiones de conteo de cajas inferior y superior de de F se definen respectivamente como

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{2.4}$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \tag{2.5}$$

Si estas dimensiones son iguales, nos referimos al resultado como la dimensión de conteo de cajas

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \tag{2.6}$$

La teoría fractal es aplicable a conjuntos, en los que elementos particulares pueden estar contenidos o no. Esto quiere decir que las estructuras estudiadas deben ser binarias. No obstante, es común encontrar fenómenos que deben caracterizarse por más de dos valores y para los que un tratamiento en términos de solo dos posibles etiquetas significa perder una gran cantidad de información. Por ese motivo, es necesario trabajar con una generalización de la teoría fractal, comúnmente denominada teoría multifractal.

2.1.2. Teoría multifractal

La presentación de los conjuntos multifractales y su teoría correspondiente requiere de algunos conceptos básicos de la teoría de medidas. Los mismos se encuentran desarrollados en el apéndice A a fin de no entorpecer la lectura.

Una medida finita puede distribuirse de forma muy irregular sobre un conjunto acotado, dando lugar a diferentes formas de variación de la misma en función de la escala en distintas

[2] En la práctica los conjuntos pueden ser bolas, cubos, cubos de malla-δ o cualquier otro conjunto que sea conveniente para la aplicación.

regiones. Los conjuntos de puntos que para los que la medida tiene un comportamiento de escala similar podrían determinar fractales que coexistirían en una estructura mucho más compleja que aquella constituida por un único fractal. Una medida con tal riqueza suele denominarse medida multifractal o simplemente multifractal.

La idea del análisis multifractal es describir una medida tanto local como globalmente. En primera instancia, la dimensión local, o exponente Hölder de la medida, es calculada para cada punto del conjunto estudiado. Esta cantidad da cuenta de la regularidad local de la medida, bajo el supuesto de que la misma satisface una ley de potencia respecto de la escala. Luego, la región se particiona en subconjuntos de puntos con una dimensión local similar. Cuando estos subconjuntos son no vacíos y fractales, estamos en presencia de una medida multifractal. La descripción global de la medida se obtiene a través de su espectro multifractal o espectro de singularidades.

A continuación se presentará un método para la obtención del espectro multifractal a partir de la transformada de Legendre. Se describirán además dos formas de obtener el espectro de singularidades de manera directa: la teoría fina, emparentada con la estimación de dimensiones de Hausdorff, y la teoría gruesa, relacionada con el cálculo de las dimensiones de conteo de cajas.

Método de los momentos

El cálculo del espectro multifractal a partir de la transformada de Legendre fue originalmente propuesto por Frisch y Parisi [48] para analizar la homogeneidad de medidas multifractales que modelan la disipación de energía de fluidos turbulentos. Fue luego extendido por Muzy, Bacry y Arneodo [95] a señales multifractales.

Dada una medida μ, su soporte $\mathrm{spt}(\mu)$ se cubre con una partición regular de cajas n-dimensionales de ancho r (malla-r), y para $q \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, consideramos la suma de las potencias

q-ésimas de las medidas μ_i de cada caja de la malla

$$M_r(q) = \sum_{\mathcal{M}_r} \mu_i^q, \tag{2.7}$$

donde la suma se extiende sobre todo el conjunto $\mathcal{M}_r$ de los cubos de la malla-r.

Si suponemos que la medida satisface una ley de potencia, podemos reescribir $\mu_i \sim r^{\alpha_i}$. Denotamos el número de cajas para las que el exponente α_i satisface $\alpha < \alpha_i < \alpha + d\alpha$ como $N_r(\alpha)d\alpha$. Supongamos además que $N_r(\alpha)$ es continua y que existen constantes $\alpha_{\text{mín}}$ y $\alpha_{\text{máx}}$ tales que $0 < \alpha_{\text{mín}} < \alpha < \alpha_{\text{máx}} < \infty$. Entonces, la contribución a $M_r(q)$ del conjunto de cajas con α_i entre α y $\alpha + d\alpha$ es $N_r(\alpha)r^{\alpha q}d\alpha$. Reescribimos (2.7) como

$$M_r(q) = \int N_r(\alpha) r^{\alpha q} d\alpha.$$

Si $N_r(\alpha) \sim r^{-f(\alpha)}$, podemos escribir

$$M_r(q) = \int r^{\alpha q - f(\alpha)} d\alpha. \tag{2.8}$$

En el límite $r \to 0$ la contribución dominante de esta integral viene del valor de α que minimiza $\{\alpha q - f(\alpha)\}$. Si $f(\alpha)$ es diferenciable, la condición necesaria para la existencia de un extremo es $\frac{\partial}{\partial \alpha}\{q\alpha - f(\alpha)\} = 0$ y, para un q dado, el extremo ocurre para el $\alpha = \alpha(q)$ que satisface $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha(q)} = q$.

Conservando solo el término dominante en (2.8) e introduciendo $-\tau(q) = q\alpha(q) - f(\alpha(q))$ tenemos que $M_r(q)$ satisface la ley de potencia

$$M_r(q) \sim r^{-\tau(q)}. \tag{2.9}$$

También se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial q}\tau(q) = -\alpha. \tag{2.10}$$

Tenemos entonces que $\tau(q)$ y $f(\alpha)$ se relacionan a través de la transformada de Legendre[3]

$$f_L(\alpha(q)) = \inf_{-\infty<q<\infty} \{q\alpha(q) + \tau(q)\}. \tag{2.11}$$

Por tanto, $f(\alpha)$ puede calcularse a partir de $\tau(q)$ mediante las ecuaciones (2.10) y (2.11).

Si bien este método es computacionalmente muy eficiente, no brinda información de la regularidad local de la medida estudiada. Por ese motivo, cuando se busca tener una descripción dual de los datos estudiados, es preferible optar por un método de estimación directa del espectro.

Teoría fina

Dada una medida de Borel μ y un punto x en el soporte de μ se define la dimensión local o exponente de Hölder[4] superior e inferir para la medida μ en x como

$$\overline{\dim}_{loc}\mu(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log\left(\mu(B(x,r))\right)}{\log r} \tag{2.12}$$

$$\underline{\dim}_{loc}\mu(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log\left(\mu(B(x,r))\right)}{\log r}, \tag{2.13}$$

[3] Es necesario mencionar que para que la transformada de Legendre se encuentra unívocamente determinada, $\tau(q)$ debe ser una función convexa.

[4] En este punto es necesario hacer la salvedad de que la denominación de exponente de Hölder para la medida puede resultar en una confusión con el exponente de Hölder para las funciones, definido en la sección 2.2.2. Es necesario decir que dichas cantidades son en general distintas, si bien existe un vínculo entre ambas para funciones y medidas unidimensionales, debido a que los formalismos multifractales de los que forman parte pueden relacionarse en este caso [96, 97].

Para evitar confusiones, se hablará de dimensión local en el contexto del análisis multifractal de medidas, reservando el término de exponente de Hölder para el calculado para funciones a través de coeficientes de wavelet o wavelet leaders.

donde $B(x,r)$ es una bola de radio r centrada en x. Si los dos valores son iguales, la dimensión local de μ en x es

$$\dim_{loc}\mu(x) = \alpha = \lim_{r\to 0}\frac{\log\left(\mu(B(x,r))\right)}{\log r}. \tag{2.14}$$

El valor de α es próximo a la dimensión euclidea de la estructura bajo observación, por ejemplo, para el caso de conjuntos bidimensionales, los valores de α se agrupan cerca de 2. Los puntos con $\alpha > 2$ y $\alpha < 2$ corresponden a las singularidades más fuertes de la medida, mientras que las áreas con $\alpha \approx 2$ corresponden a regiones homogéneas.

Para $\alpha \geq 0$, descomponemos el soporte de la medida en subconjuntos

$$E_\alpha = \{x \in \mathrm{spt}(\mu) : \dim_{loc}\mu(x) = \alpha\}.$$

Definimos el *espectro multifractal fino* a partir de la dimensión de Hausdorff como

$$f_H(\alpha) = \dim_H E_\alpha. \tag{2.15}$$

Teoría gruesa

Una vez calculado α para todo $x \in \mathrm{spt}(\mu)$, se cubre $\mathrm{spt}(\mu)$ con una malla-r y para $r > 0$ y $\alpha \geq 0$ definimos

$$N_r(\alpha) = \#\{\text{cajas } A \text{ de la malla-}r \text{ con } \mu(A) \geq r^\alpha\}. \tag{2.16}$$

El *espectro multifractal grueso* se define en [45] como

$$f_C(\alpha) = \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{r\to 0}\frac{\ln^+(N_r(\alpha+\epsilon) - N_r(\alpha-\epsilon))}{-\ln r}, \tag{2.17}$$

si el doble límite existe.

Usando $\ln^+(x) = \text{máx}\{0, \ln(x)\}$ nos aseguramos que $f_C(\alpha) \geq 0$.

Asumiendo que este límite existe, la definición del espectro grueso nos dice que para $\eta > 0$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeños

$$r^{-f_C(\alpha)+\eta} \geq N_r(\alpha + \epsilon) - N_r(\alpha - \epsilon) \geq r^{-f_C(\alpha)-\eta} \tag{2.18}$$

para todo r suficientemente pequeño. Esto significa que el número de cubos de la malla con $\mu(A)$ aproximadamente r^α obedece una ley de potencia a medida que $r \longrightarrow 0$ con un exponente $f_C(\alpha)$

$$N_r(\alpha + \epsilon) - N_r(\alpha - \epsilon) \sim r^{-f_C(\alpha)}. \tag{2.19}$$

Si el límite de $r \longrightarrow 0$ en la definición de $f_C(\alpha)$ no existe, para $\alpha \geq 0$ los espectros multifractales gruesos mayor y menor de μ son

$$\overline{f}_C(\alpha) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{r \to 0} \frac{\ln^+(N_r(\alpha + \epsilon) - N_r(\alpha - \epsilon))}{-\ln r} \tag{2.20}$$

$$\underline{f}_C(\alpha) = \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_{r \to 0} \frac{\ln^+(N_r(\alpha + \epsilon) - N_r(\alpha - \epsilon))}{-\ln r}. \tag{2.21}$$

Para $\alpha \geq 0$, la relación entre espectros fino y grueso es

$$f_H(\alpha) \leq \underline{f}_C(\alpha) \leq \overline{f}_C(\alpha). \tag{2.22}$$

Usualmente, la teoría gruesa es más practica para llevar a cabo experimentos computacionales, mientras que la fina suele ser más conveniente para el análisis matemático.

Es relevante señalar que el espectro grueso se encuentra acotado por la transformada de Legendre de τ. En la proposición 17.2 de [45]es posible encontrar demostrado que $\underline{f}_C(\alpha) \leq \overline{f}_C(\alpha) \leq f_L(\alpha)$.

Como se mencionó brevemente en la introducción de este trabajo, el espectro de singularidades puede estimarse por medio de los coeficientes de la transformada wavelet. Si bien dicho enfoque no es aplicado en este trabajo, las nociones básicas de transformada wavelet son desarrollados a continuación, junto con otros coeficientes multirresolución. El motivo de esto es el uso de esos coeficientes para el estudio de texturas.

2.2. Coeficientes multirresolución

En esta sección se presentan coeficientes multirresolución usados para construir las distribuciones de probabilidad con las que se analizan imágenes en el capítulo 4. Se describen las transformadas wavelet continua y discreta para presentar luego los coeficientes wavelet leaders. Se habla luego de los coeficientes de la transformada wavelet discreta no decimada y, por último, de los correspondientes a la transformada curvelet.

2.2.1. Transformada Wavelet y análisis multirresolución

Una wavelet es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ que satisface $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0$, $\|\psi\| = 1$ y cumple con la llamada condición de admisibilidad:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2}{\omega} d\omega < +\infty, \tag{2.23}$$

donde $\widehat{\psi}(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\psi(x)$.

Partiendo de una wavelet "madre" se puede obtener una familia de wavelets $\{\psi_{s,u}\}$ mediante su traslación y dilatación

$$\psi_{s,u}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-u}{s}\right), \tag{2.24}$$

con $u \in \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}^+$.

Dada una función $f \in L^2(\mathbb{R})$, su transformada wavelet en el punto u a escala s es [68]

$$Wf(s,u) = \langle f, \psi_{s,u} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{x-u}{s} \right) dt. \tag{2.25}$$

La transformada de wavelet puede reescribirse como una convolución

$$Wf(s,u) = f \star \overline{\psi}_s(u), \tag{2.26}$$

con $\overline{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{-t}{s} \right)$.

La transformada de Fourier de $\overline{\psi}_s(t)$ es

$$\widehat{\overline{\psi}}_s(\omega) = \sqrt{s} \widehat{\psi}^* (s\omega) \,. \tag{2.27}$$

Dado que $\widehat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, $\widehat{\psi}$ es la transformada de un filtro pasa banda. Por tanto, la convolución (2.26) calcula la transformada wavelet con un filtro pasa banda dilatado.

Cuando $Wf(s,u)$ es conocida solo para $s < s_0$, para recuperar f necesitamos un complemento de información para $s > s_0$, lo que se obtiene introduciendo una función de escala $\phi(x)$, que puede interpretarse como la respuesta de la señal a un filtro pasa-bajo. Dicha función, da lugar a la familia de funciones:

$$\left\{ \phi_{s,u}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \phi \left(\frac{x-u}{s} \right) \right\}_{u \in \mathbb{R},\, s \leq s_0} . \tag{2.28}$$

Por consiguiente, la aproximación de baja frecuencia de una función f a escala s es

$$Lf(u,s) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{s}} \phi \left(\frac{t-u}{s} \right) \right\rangle = f \star \overline{\phi}_s(u), \tag{2.29}$$

donde $\overline{\phi}_s(t) = \phi_s^*(-t)$.

Analizar una señal usando todos los coeficientes de wavelet, es decir, utilizando factores de dilatación y traslación continuos, es computacionalmente tedioso. Por este motivo surge la necesidad de seleccionar un subconjunto discreto de wavelets hijas para poder reconstruir una señal a partir de los coeficientes correspondientes. Este enfoque es conocido como transformada wavelet discreta (DWT).

Una de las cosas que se considera al momento de seleccionar las funciones para realizar una transformada de wavelet discreta es que el conjunto elegido forme una base de $L^2(\mathbb{R})$. En general suele elegirse por simplicidad el conjunto de parámetros $s_j = 2^{-j}$ y $u_{k,j} = k2^{-j}$, $k, j \in \mathbb{Z}$.

Un concepto fundamental para la construcción de bases ortonormales de wavelets es el de análisis multirresolución o MRA por sus siglas en inglés, introducido por Stephane Mallat [98] e Yves Meyer [99]. Definimos un análisis multirresolución en $\mathbb{R}$ como una secuencia de subespacios $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de funciones $L^2(\mathbb{R})$ que satisfacen las siguientes propiedades [68]:

I. $\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2,\ f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$,

II. $\forall j \in \mathbb{Z},\ V_{j+1} \subset V_j$,

III. $\forall j \in \mathbb{Z},\ f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$,

IV. $\lim_{j\to+\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$,

V. $\lim_{j\to-\infty} V_j = Clausura\left(\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j\right) = L^2(\mathbb{R})$,

VI. existe una función θ tal que $\{\theta(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_0.

La aproximación de una función f a una resolución 2^{-j} se define como la proyección ortogonal f en V_j, para lo que es necesario encontrar una base ortonormal de V_j. A partir de la base de Riesz $\{\theta(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es posible construir una función de escala ϕ, a partir de la cual

se puede definir una familia de funciones dilatadas y trasladadas que forma una base ortogonal para cada V_j (véase [68], teorema 7.1).

Sea $\phi(x)$ la función de escala asociada a un MRA $\{V_j\}$. La secuencia ℓ^2 de coeficientes $\{h(k)\}$ que satisface

$$\phi(x) = \sum_k h(k) 2^{1/2} \phi(2x - k) \tag{2.30}$$

en $L^2(\mathbb{R})$ es llamada el filtro de escala asociado a $\phi(x)$.

Además podemos escribir

$$\widehat{\phi}(\gamma) = m_0(\gamma/2)\widehat{\phi}(\gamma/2), \tag{2.31}$$

donde

$$m_0(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h(k) e^{-2\pi i k\gamma} \tag{2.32}$$

se conoce como función auxiliar del filtro de escala.

Se define también el filtro de wavelet como

$$g(k) = (-1)^k h^*(1 - k) \tag{2.33}$$

y la wavelet asociada como

$$\psi(x) = \sum_k g(k) 2^{1/2} \phi(2x - k). \tag{2.34}$$

Para cada $j, k \in \mathbb{Z}$ definimos las familias de funciones de escala y de wavelet

$$\{\phi_{j,k}(x)\} = \{2^{j/2} \phi(2^j x - k)\}, \tag{2.35}$$

$$\{\psi_{j,k}(x)\} = \{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}. \tag{2.36}$$

Dadas estas definiciones, es posible demostrar que $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ y, dado un $J \in \mathbb{Z}$ fijo, $\{\phi_{J,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ [68, 72].

Supongamos ahora que se nos da una señal o secuencia de datos discreta $\{c_0(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Si consideramos que $c_0(k) = \langle f, \phi_{0,k}\rangle$[5] con $f \in L^2(\mathbb{R})$, definimos para $j \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ los coeficientes de aproximación y de detalle de f respectivamente,

$$c_j(k) = \langle f, \phi_{-j,k}\rangle ,$$

$$d_j(k) = \langle f, \psi_{-j,k}\rangle .$$

Entonces,a partir de los filtros $\{h(k)\}$ y $\{g(k)\}$ podemos escribir

$$c_{j+1}(k) = \sum_n c_j(n) h^*(n-2k), \tag{2.37}$$

$$d_{j+1}(k) = \sum_n c_j(n) g^*(n-2k) \tag{2.38}$$

y

$$c_j(k) = \sum_n c_{j+1}(n) h(k-2n) + \sum_n d_{j+1}(n) g(k-2n). \tag{2.39}$$

Para que las transformaciones definidas por (2.37) y (2.38) sean invertibles a través de (2.39), es necesario que el filtro de escala satisfaga las llamadas condiciones de "filtro de espejo de cuadratura" (QMF, del inglés Quadrature Mirror Filter). Se dice que $h(k)$, con una función auxiliar $m_0(\gamma)$ definida por (2.32), es un QMF si:

- $m_0(0) = 1$,

[5] Es necesario remarcar aquí que se esta suponiendo que la señal original está constituida por los coeficientes de escala de la función continua subyacente, en lugar de la interpretación tradicional en la que se la supone un conjunto de muestras de la señal f.

- $|m_0(\gamma/2)|^2 + |m_0(\gamma/2 + 1/2)|^2 \equiv 1, \forall \gamma \in \mathbb{R}$.

En base a estos conceptos se formaliza la definición de transformada de wavelet discreta. Sea $h(k)$ un QMF y defínase $g(k)$ como (2.33). Para $J \in \mathbb{N}$ fijo, la transformada de wavelet discreta de una señal $c_0(n)$ es la colección de secuencias

$$\{d_j(k) : 1 \geq j \geq J; k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{c_J(k) : k \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.40}$$

donde $c_j(k)$ y $d_j(k)$ se definen como (2.37) y (2.38) respectivamente.

Es claro a partir de las expresiones (2.37) y (2.38) que la transformada de wavelet discreta involucra una decimación por un factor 2 en cada escala analizada.

Si se tiene una función $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, es posible construir su descomposición en término de funciones wavelet de modo similar a la que se obtiene para funciones unidimensionales a través del llamado producto tensorial de wavelets [72]. Esta construcción se basa en una función bidimensional de escala $\Phi(x, y)$ y tres funciones de wavelet $\Psi^{(1)}(x, y)$, $\Psi^{(2)}(x, y)$, $\Psi^{(3)}(x, y)$ construidas a partir de funciones de escala $\phi(x)$ y de wavelet $\psi(x)$ unidimensionales

$$\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y),$$

$$\Psi^{(1)}(x, y) = \phi(x)\psi(y),$$

$$\Psi^{(2)}(x, y) = \psi(x)\phi(y),$$

$$\Psi^{(3)}(x, y) = \psi(x)\psi(y).$$

Adoptando nuevamente los parámetros de dilatación y traslación $s_j = 2^{-j}$ y $u_{k,j} = k2^{-j}$,

$k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $j \in \mathbb{Z}$ definimos los conjuntos de funciones[6]

$$\Phi_{j,k}(x,y) = 2^j \Phi(2^j x - k_1, 2^j y - k_2) = \phi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y),$$

$$\Psi^{(1)}_{j,k}(x,y) = 2^j \Psi^{(1)}(2^j x - k_1, 2^j y - k_2) = \phi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y),$$

$$\Psi^{(2)}_{j,k}(x,y) = 2^j \Psi^{(2)}(2^j x - k_1, 2^j y - k_2) = \psi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y),$$

$$\Psi^{(3)}_{j,k}(x,y) = 2^j \Psi^{(3)}(2^j x - k_1, 2^j y - k_2) = \psi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y).$$

Entonces, los coeficientes de wavelet 2D vienen dados por [68, 72]

$$w^{(m)}_{j,k} = \left\langle f, \Psi^{(m)}_{j,k} \right\rangle.$$

Resulta evidente por su construcción que, al igual que en el encaso de señales, la transformada de wavelet discreta en este contexto bidimensional involucra la decimación de los coeficientes en las sucesivas aplicaciones del algoritmo de cálculo.

2.2.2. Wavelet leaders

El exponente de Hölder puntual cuantifica cuán rugosa o puntiaguda es la gráfica de una función. Un valor bajo del exponente de Hölder indica un punto irregular, mientras que las partes suaves de una función tienen exponentes más altos. El exponente Hölder puntual se define en cada $x_0 \in \mathbb{R}$ en el dominio de una función localmente acotada f, como:

$$h_f(x_0) = \sup_{0 \le \alpha \le \infty} \{\alpha : f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)\}.^7$$

Recordaremos ahora los conceptos asociados con wavelet leaders, introducidos inicial-

[6] Nótese que en esta definición el factor de dilatación es el mismo en ambas direcciones, dando lugar a una transformada isotrópica.

[7] Recordemos que una función f está en la clase $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$ si existe una constante $C > 0$ y un polinomio $P_{x_0}(x)$ de grado menor que α tal que cerca del punto x_0 se cumple $|f(x) - P_{x_0}(x)| \le C\,|x - x_0|^\alpha$.

mente por Jaffard en [96]. Los mismos serán tratados de forma particular para el análisis de funciones bidimensionales.

Se define un cuadrado diádico de escala j como

$$I_{j,k} = \left[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1+1}{2^j}\right) \times \left[\frac{k_2}{2^j}, \frac{k_2+1}{2^j}\right),$$

con $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Si suponemos que una wavelet madre $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ se encuentra localizada en el intervalo $[0,1] \times [0,1]$, entonces $\psi_{j,k}$ está localizada en el intervalo diádico $I_{j,k}$.

Definimos además el conjunto de cuadrados diádicos adyacentes

$$3I_{j,k} = \left[\frac{k_1-1}{2^j}, \frac{k_1+2}{2^j}\right) \times \left[\frac{k_2-1}{2^j}, \frac{k_2+2}{2^j}\right).$$

Consideremos que $x_0 \in \mathbb{R}^2$ es un punto perteneciente al dominio de una función bidimensional f localmente acotada que se desea estudiar, $I_j(x_0)$ denota el único intervalo diádico $I_{j,k}$ que contiene a x_0 para el nivel j. Asimismo, $3I_j(x_0)$ es el único $3I_{j,k}$ centrado en $I_j(x_0)$ en el nivel j. Entonces, se define la *wavelet leader* para x_0 a nivel j como

$$d_j(x_0) = \sup_{\substack{m=1,\ldots,3 \\ I_{\ell,h} \subset 3I_j(x_0)}} \left|w_{\ell,h}^{(m)}\right|,$$

En [97] Jaffard demostró que si una función f es $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$\forall j \geq 0, \qquad d_j(x_0) \leq C 2^{-\alpha j},$$

y que si f es uniformemente Hölder, se puede calcular el exponente de Hölder de f como

$$h_f(x_0) = \liminf_{j\to\infty} \left(\frac{\log(d_j(x_0))}{\log(2^{-j})} \right). \tag{2.41}$$

En la práctica, la estimación de los valores de Hölder local basada en la ecuación (2.41) se realiza a través de una regresión lineal con un número finito de datos asociados a algunas de las escalas disponibles. Obviamente, si las leaders a un cierto nivel expresan la influencia de una región con un Hölder diferente al de escalas más finas, el comportamiento de escala se rompe y la estimación puede arrojar valores erróneos.

2.2.3. Transformada Wavelet discreta no decimada

A pesar del extenso uso que la DWT tiene el diferentes campos del conocimiento, uno de los principales problemas de aplicarlas a imágenes es la pérdida de invariancia traslacional, ocasionando un gran número de artefactos cuando la imagen es reconstruida luego de modificaciones en sus coeficientes de wavelet [100].

En un intento por conservar la construcción de bancos de filtros, que brindan algoritmos computacionalmente eficientes, algunos investigadores decidieron eliminar la decimación en la transformada de wavelet discreta. Esto puede hacerse separando los coeficientes de aproximación a una cierta escala en coeficientes pares e impares y transformándolos por separado de manera tradicional. Este procedimiento se aplica de forma recursiva en cada escala analizada [100].

Un enfoque más simple de implementar es el llamado algoritmo à trous o con huecos [76, 77]. En este algoritmo, los coeficientes de aproximación y de detalle a la escala $j+1$ sin decimar, $\{\widetilde{c}_{j+1}\}$ y $\{\widetilde{w}_{j+1}\}$ respectivamente, se obtienen a partir de los coeficientes $\{\widetilde{c}_j\}$ a través de las

convoluciones discretas [100]

$$\widetilde{c}_{j+1}(\ell) = (\overline{h}^{(j)} \star \widetilde{c}_j)(\ell) = \sum_k h(k)\widetilde{c}_j(\ell + 2^j k),$$

$$\widetilde{w}_{j+1}(\ell) = (\overline{g}^{(j)} \star \widetilde{c}_j)(\ell) = \sum_k g(k)\widetilde{c}_j(\ell + 2^j k),$$

donde

$$h^{(j)}(\ell) = \begin{cases} h(\ell) & \frac{\ell}{2^j} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

con $\ell \in \mathbb{Z}$, y $\overline{h}(\ell) = h(-\ell)$.

Aquí nuevamente se supone que la serie inicial de datos, $\{\widetilde{c}_0\}$, es un conjunto de coeficientes de aproximación de la señal subyacente.

Del mismo modo que en el caso de la DWT, es posible extender este método a dos dimensiones a través del producto tensorial,

$$\widetilde{c}_{j+1}(k) = (\overline{h}^{(j)}\overline{h}^{(j)} \star \widetilde{c}_j)(k),$$

$$\widetilde{w}^{(1)}_{j+1}(k) = (\overline{g}^{(j)}\overline{h}^{(j)} \star \widetilde{c}_j)(k),$$

$$\widetilde{w}^{(2)}_{j+1}(k) = (\overline{h}^{(j)}\overline{g}^{(j)} \star \widetilde{c}_j)(k),$$

$$\widetilde{w}^{(3)}_{j+1}(k) = (\overline{g}^{(j)}\overline{g}^{(j)} \star \widetilde{c}_j)(k),$$

$k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. [8]

Shensa demostró en [77] que los coeficientes de wavelet obtenidos a través de la DWT se encuentran contenidos entre los que resultan de la UDWT. Puntualmente, estableció que $w_{j,k} = \widetilde{w}_{j,2^j k}$, es decir, es posible recuperar los coeficientes DWT subsampleando los obtenidos a partir de UDWT.

[8] En estas expresiones $hg \star c$ es la convolución de c por el filtro separable hg, es decir, primero la convolución a lo largo de las columnas por h y luego la convolución a lo largo de las filas por g.

Hasta donde el autor tiene conocimiento, no existe bibliografía específica referida a la estimación del exponente de Hölder por medio del comportamiento de escala de los coeficientes UDWT. Más aun, no he encontrado bibliografía que demuestre formalmente una relación entre estas cantidades y el exponente de Hölder. Si bien una demostración formal sería de suma importancia para lo propuesto en esta contribución, la misma excede e alcance del presente trabajo. No obstante, a partir de los coeficientes multiescala propuestos en este trabajo, se han obtenido evidencias experimentales que permiten suponer que esta estimación es válida y conjeturar una relación entre estos coeficientes y el Hölder de modo similar al existente con las leaders. En el capítulo 4 se presenta un resumen de los resultados experimentales que permiten suponer esta hipótesis.

2.2.4. Transformada Curvelet

E. J. Candès y D. L. Donoho introdujeron en [78] las curvelet para construir una representación dispersa de objetos compuestos por regiones suaves separadas por discontinuidades a lo largo de curvas $\mathcal{C}^2$ constantes por trozos. Conceptualmente, la transformada de Curvelet es una pirámide multiescala con muchas direcciones y posiciones en cada escala y elementos en forma de aguja.

Poco después de la introducción de las curvelets, los investigadores desarrollaron algoritmos numéricos para su implementación basados en la construcción original [78]. Estos utilizan un paso de preprocesamiento consistente en una partición especial del espacio de fase, seguido de la transformada de ridgelet [101], que se aplica a bloques de datos bien localizados en espacio y frecuencia. Esta primera implementación se conoce en la actualidad como primera generación de la transformada curvelet y no será desarrollada aquí. Los lectores interesados pueden consultar [78, 102] para una descripción completa, o el resumen presente en [100].

En los últimos años, las curvelets han sido rediseñadas, dando lugar a la llamadas segunda

generación de la transformada curvelet, y con ella a nuevos algoritmos de cálculo, más sencillos de entender y utilizar. En [103], Candès et al. presentaron dos nuevos algoritmos discretos de transformada curvelet.

Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$ una variable en el dominio de frecuencias, y r y θ las coordenadas polares en el dominio de frecuencias. Sean $W(r)$ y $V(t)$ un par de ventanas, la "ventana radial" y "ventana angular" respectivamente. Las mismas son suaves, no negativas y reales. El soporte de W es $r \in (1/2, 2)$, y el de V $t \in [-1, 1]$. Estas ventanas deben obedecer las condiciones de admisibilidad:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} W^2(2^j r) = 1, \qquad r \in (3/4, 3/2), \tag{2.42}$$

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} V^2(t - \ell) = 1, \qquad t \in (-1/2, 1/2). \tag{2.43}$$

Para cada $j \geq j_0$, se define la ventana de frecuencias U_j en el dominio de Fourier como

$$U_j(r, \theta) = 2^{-3j/4} W(2^{-j} r) V\left(\frac{2^{\lfloor j/2 \rfloor} \theta}{2\pi}\right). \tag{2.44}$$

Así, el soporte de U_j es una "cuña" polar definida por el soporte de W y V.

Se define la curvelet "madre" $\phi_j(x)$ a través de su transformada de Fourier $\widehat{\phi}_j(\omega) = U_j(\omega)$. Se define además la secuencia equiespaciada de ángulos de rotación $\theta_\ell = 2\pi 2^{-\lfloor j/2 \rfloor} \ell$, con $\ell = 0, 1, \ldots$ tal que $0 \leq \theta_\ell \leq 2\pi$ y los parámetros de traslación $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Entonces, se definen las curvelets en la escala 2^{-j}, orientación θ_ℓ, y posición $x_k^{(j,l)} = R_{\theta_\ell}^{-1}(k_1 2^{-j}, k_2 2^{-j/2})$ como [103]

$$\phi_{j,\ell,k}(x) = \phi_j\left(R_{\theta_\ell}(x - x_k^{(j,\ell)})\right), \tag{2.45}$$

donde R_θ es una rotación de θ radianes y R_θ^{-1} su inversa.

Un coeficiente de curvelet de una función $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ es el producto interno de f con una curvelet $\phi_{j,\ell,k}$

$$c(j,\ell,k) := \langle f, \phi_{j,\ell,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\phi^*_{j,\ell,k}(x)dx. \tag{2.46}$$

Al igual que en la teoría de wavelets, también se consideran elementos de escala gruesa. Dada la ventana pasa bajo W_0 obedeciendo

$$|W_0(r)|^2 + \sum_{j\geq 0} \left|W(2^{-j}r)\right|^2 = 1 \tag{2.47}$$

y para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ se define las curvelets de escala gruesa como

$$\phi_{j_0,k}(x) = \phi_{j_0}(x - 2^{-j_0}k), \qquad \widehat{\phi}_{j_0}(\omega) = 2^{-j_0}W_0(|\omega|). \tag{2.48}$$

La transformada curvelet completa consiste en los elementos direccionales de escala fina $\{\phi_{j,\ell,k}\}, j > j_0, \ell, k \in \mathbb{Z}$, y las wavelets paternas isotrópicas de escala gruesa $\{\phi_{j_0,k}\}, k \in \mathbb{Z}$.

Entre las propiedades destacables de las curvelets se encuentra su condición de marco ajustado [103], por lo que una función $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ puede expandirse como una serie de curvelets $f = \sum_{j,\ell,k} \langle f, \phi_{j,\ell,k} \rangle \phi_{j,\ell,k}$.

Al comienzo de la sección se dijo que las curvelets tienen forma alargada. Por la forma en la que es construida, $\phi_j(x)$ decae rápidamente fuera de un rectángulo de dimensiones $2^{-j} \times 2^{-j/2}$ con el eje mayor apuntando en la dirección vertical. Se dice entonces que estas funciones satisfacen un escalado parabólico, donde la longitud y el ancho efectivos obedecen a la relación de escala anisotrópica $[ancho] \approx [longitud]^2$.

Se dice que la curvelet $\phi_j(x)$ tiene q momentos nulos cuando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(x_1, x_2) x_1^n dx_1 = 0, \qquad \forall 0 \leq n < q, \forall x_2. \tag{2.49}$$

La implementación de la transformada curvelet a datos reales requiere de una versión discreta de la misma. Actualmente, los dos algoritmos más usados para esto son las transformaciones via UFFTs y via *wrapping* [103]. Ambos métodos utilizan la misma manera de colocar ventanas sobre el espacio de frecuencias, comúnmente llamada coronización, pero difieren en el grillado sobre el que calculan los coeficientes.

2.3. Medidas de Información: Entropía de Shannon.

En principio, una medida de información puede verse como una cantidad que caracteriza una distribución de probabilidad. Este es un concepto que surgió originalmente en la primera mitad del siglo XX en el contexto de las comunicaciones.

En 1948 Claude E. Shannon formuló una medida de información para cuantificar la incerteza existente a priori en la emisión de un mensaje por parte de una fuente discreta sin memoria [86]. Este trabajo es considerado la piedra fundacional de la teoría de información.

Si se tiene una variable aleatoria X que puede adoptar un conjunto de valores $\{x_i\}, i = 1, \ldots, n$ con una distribución de probabilidades asociada $P = \{p_i\}, i = 1, \ldots, n$, la entropía de información de Shannon se define como

$$S(p_1, \ldots, p_n) = -k \sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i), \tag{2.50}$$

donde k es una constante positiva. La elección de la base del logaritmo corresponde a la elección de una unidad para medir información. Si se utiliza la base 2, las unidades resultantes suelen

llamarse bits, palabra resultante de la contracción de dígitos binarios en inglés.

El objetivo de Shannon fue formular una medida de la información que se obtenía sobre el sistema al obtener una u otra respuesta del mismo. Para ello requirió que dicha medida satisfaga las siguientes propiedades:

I. $S(p_1, \ldots, p_n)$ es una función continua con respecto a todos sus argumentos;

II. $S(p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n})$ es monótonamente creciente con n;

III. Si una opción se divide en dos opciones sucesivas, la medida S original debe ser la suma ponderada de los valores individuales de S. De manera más general si descomponemos los n eventos en r opciones

$$S(p_1^{n_1}, \ldots, p_{n_1}^{n_1}, p_1^{n_2}, \ldots, p_{n_2}^{n_2} \ldots, p_1^{n_r}, \ldots, p_{n_r}^{n_r}) = S(p^{n_1}, \ldots p^{n_r}) + p^{n_1} S\left(\frac{p_1^{n_1}}{p^{n_1}}, \ldots, \frac{p_{n_1}^{n_1}}{p^{n_1}}\right) + \ldots + p^{n_r} S\left(\frac{p_1^{n_r}}{p^{n_r}}, \ldots, \frac{p_{n_r}^{n_r}}{p^{n_r}}\right) \quad (2.51)$$

donde $p^{n_j} = \sum_{i=1}^{n_j} p_i^{n_j}, \forall j$ y $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$.

En ese mismo artículo, Shannon demuestra que la única función $S[P]$ que satisface las tres suposiciones anteriores es de la forma (2.50).

Algunas propiedades destacables de la entropía de información son

- $S = 0$ si y solo si todos los p_i menos uno son cero, que tiene el valor de la unidad. Así, solo cuando estamos seguros del resultado, S se desvanece. De lo contrario, S es positivo.

- Para un n dado, S es máxima e igual a $\log n$ cuando todas las p_i son iguales (es decir, $p_i = 1/n, \forall i$). Esta es intuitivamente la situación más incierta.

- Cualquier cambio que tienda a igualar las probabilidades p_i incrementa S. De modo más general, si realizamos cualquier operación de "promedio" en las p_i del tipo $p_i' = \sum_j a_{i,j} p_j$

donde $\sum_j a_{i,j} = \sum_i a_{i,j} = 1$ y $a_{i,j} \geq 0$ entonces S se incrementa.

- Cualquier permutación de probabilidades deja la entropía inalterada, es decir $S(p_1, \ldots p_i, p_j, \ldots p_n) = S(p_1, \ldots p_j, p_i, \ldots p_n)$.

- La entropía es aditiva: Sean A y B dos subsistemas independientes con distribuciones de probabilidades p_i^A y p_j^B respectivamente$S(A+B) = S(A) + S(B)$ si $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$.

En una serie de artículos E. T. Jaynes [89, 90] desarrolló las predicciones de la mecánica estadística como una forma de inferencia estadística, a partir de la entropía propuesta por Shannon. Él propuso una reinterpretación de la mecánica estadística en la cual la teoría de información puede utilizarse para justificar sus conclusiones sin la necesidad de depender de la validez de postulados o hipótesis físicas.

Jaynes mostró que la distribución de probabilidad de los estados microscópicos que tiene la máxima entropía sujeta a lo que se conoce a priori proporciona la representación más insesgada de nuestro conocimiento del estado del sistema. La distribución de máxima entropía es la más ensanchada compatible con la información dada; asigna un peso positivo a cada probabilidad que no es descartada por los datos iniciales.

En este contexto, la mecánica estadística puede entenderse como una aplicación de la inferencia estadística, adquiriendo una aplicabilidad mucho más general. Anteriormente, la mecánica estadística se desarrollaba a partir de las ecuaciones de movimiento, complementadas por hipótesis adicionales de ergodicidad, transitividad métrica o probabilidades a priori iguales, y la identificación de la entropía se hacía al final, comparando las ecuaciones resultantes con las leyes de la termodinámica fenomenológica. Esta reinterpretación permite tomar la entropía como concepto inicial, y el hecho de que una distribución de probabilidad maximice la entropía sujeta a ciertas restricciones se convierte en el hecho esencial que justifica el uso de esa distribución para la inferencia.

Capítulo 3

Detección de cuerpos de agua a partir de análisis multifractal

> *"The symbol intrinsically comprises a specific meaning, an intellectual formula, while the metaphor is the image itself. It's an image that possesses the same characteristics as the world it represents. Contrary to the symbol, its meaning is undefined. We aren't able to speak about a world that is truly boundless utilizing means which themselves are definite and restricted."*
>
> — Andrei Tarkovsky

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de aplicar la teoría multifractal gruesa a diversos tipos de imágenes. Primeramente, en la sección 3.1 se describe el modo en el que los conceptos presentados en la sección 2.1 son adaptados para el estudio de imágenes. En la sección 3.2 se prueba el desempeño de los algoritmos comparando sus resultados con los espectros teóricos de medidas multifractales. Dichas medidas se obtienen con un algoritmo que simula de manera determinista a los llamados sistemas de funciones iterados (IFS por sus siglas en inglés)

La sección 3.3 resume los estudios realizados sobre imágenes de sensores remotos y describe el modo en que estos permiten la segmentación de los cuerpos de agua presentes en las capturas.

La sección 3.4 resume las conclusiones de este capítulo.

3.1. Metodología para la obtención del espectro multifractal

Para la estimación de los espectros multifractales se tuvo en cuenta el trabajo desarrollado por E. Nilsson en su tesis de maestría en la universidad de Umeå [55]. Allí se presenta un estudio exhaustivo sobre los diferentes factores que afectan la estimación del espectro multifractal grueso en imágenes. Se estudia la influencia de la forma de los vecindarios y sus tamaños para el cálculo de la dimensión local, el relleno, los efectos de la división del rango de dimensiones locales y la influencia del ruido. Esta información fue de invaluable utilidad, ya que permitió seleccionar un conjunto de parámetros apropiado al momento de implementar los algoritmos, al mismo tiempo que aportó una base de comparación de los resultados y experimentos para probar los cálculos presentados.

Los entornos $B(x,r)$ en la ecuación (2.14) son tomados como vecindarios cuadrados de $(2^k-1)\times(2^k-1)$ píxeles, con $k \in \mathbb{N}$. Esos vecindarios se centran en el píxel cuya dimensión local estamos tratando de calcular. Se calcula la medida de todos los vecindarios para luego realizar un ajuste lineal de los logaritmos de las medidas frente a los logaritmos de los anchos de los vecindarios. La pendiente de la línea ajustada es la estimación de α para ese píxel.

Una vez obtenida la dimensión local correspondiente a cada punto de la imagen, el rango $[\alpha_{\text{mín}}, \alpha_{\text{máx}}]$, donde $\alpha_{\text{mín}}$ y $\alpha_{\text{máx}}$ son los valores mínimo y máximo de la dimensión local respectivamente, es dividido en $R+1$ clases acotadas por los sucesivos pares de elementos de la lista $\{\alpha_{\text{mín}}, \alpha_{\text{mín}} + \frac{\delta\alpha}{2} + s\cdot\delta\alpha, \alpha_{\text{máx}}\}$, con $\delta\alpha = (\alpha_{\text{máx}} - \alpha_{\text{mín}})/R$ y $s = 0,\ldots,R-1$. La división del

rango fue seleccionada de este modo para tener una mayor resolución en la cercanía de los valores extremos de la dimensión local. Las clases determinan subconjuntos de píxeles con valores de α similares.

Luego se procede a calcular la dimensión de conteo de cajas a cada uno de estos subconjuntos. Para ello, se aplican diferentes mallas de celdas cuadradas a la imagen y se cuenta el número de celdas necesarias para cubrir completamente un subconjunto dado. Para cada subconjunto, se realiza un ajuste lineal entre el logaritmo del número de celdas y el negativo del logaritmo del ancho de las celdas. La pendiente del ajuste es la estimación de $f(\alpha_m)$ para el valor medio α_m de cada clase.

3.2. Ensayos sobre multifractales teóricos

Se probaron los algoritmos para el cálculo del espectro multifractal a partir de la teoría gruesa comparando sus resultados con los espectros de medidas multifractales obtenidas a partir de IFS. Se decidió utilizar este método de síntesis ya que permite obtener medidas cuyos espectros teóricos son fácilmente calculables. Además, por tratarse de medidas autosimilares, sus espectros teóricos son estrictamente cóncavos [45]. El apéndice B resume los conceptos más importantes referidos a IFS y describe el algoritmo usado para la síntesis de estos datos.

Se sintetizaron 100 imágenes de 256×256 píxeles en base a los vectores de probabilidades generados aleatoriamente que se presentan en la tabla 3.1. Para cada imagen se calculó el espectro multifractal grueso y se lo comparó con el espectro teórico de la medida correspondiente. Se evaluó el ajuste de los espectros obtenidos con la teoría multifractal gruesa con los espectros teóricos de las medidas, de acuerdo a la proposición 17.9 de [45]. Se constató además que los espectros multifractales gruesos posean una concavidad uniforme, característica de las medidas autosimilares.

$P_{001} = \{0.04, 0.10, 0.38, 0.48\}$	$P_{034} = \{0.02, 0.13, 0.35, 0.50\}$	$P_{067} = \{0.15, 0.20, 0.24, 0.41\}$
$P_{002} = \{0.14, 0.25, 0.29, 0.32\}$	$P_{035} = \{0.15, 0.23, 0.26, 0.36\}$	$P_{068} = \{0.05, 0.25, 0.35, 0.35\}$
$P_{003} = \{0.03, 0.10, 0.24, 0.63\}$	$P_{036} = \{0.09, 0.10, 0.12, 0.69\}$	$P_{069} = \{0.19, 0.24, 0.28, 0.29\}$
$P_{004} = \{0.06, 0.27, 0.30, 0.37\}$	$P_{037} = \{0.13, 0.17, 0.31, 0.39\}$	$P_{070} = \{0.03, 0.14, 0.38, 0.45\}$
$P_{005} = \{0.10, 0.21, 0.31, 0.38\}$	$P_{038} = \{0.14, 0.22, 0.23, 0.41\}$	$P_{071} = \{0.06, 0.13, 0.35, 0.46\}$
$P_{006} = \{0.02, 0.31, 0.34, 0.33\}$	$P_{039} = \{0.18, 0.20, 0.23, 0.39\}$	$P_{072} = \{0.16, 0.22, 0.23, 0.39\}$
$P_{007} = \{0.04, 0.20, 0.34, 0.42\}$	$P_{040} = \{0.03, 0.14, 0.33, 0.50\}$	$P_{073} = \{0.08, 0.21, 0.35, 0.36\}$
$P_{008} = \{0.14, 0.25, 0.28, 0.33\}$	$P_{041} = \{0.04, 0.19, 0.37, 0.40\}$	$P_{074} = \{0.01, 0.17, 0.29, 0.53\}$
$P_{009} = \{0.21, 0.23, 0.24, 0.32\}$	$P_{042} = \{0.12, 0.17, 0.28, 0.43\}$	$P_{075} = \{0.02, 0.22, 0.33, 0.43\}$
$P_{010} = \{0.06, 0.24, 0.31, 0.39\}$	$P_{043} = \{0.03, 0.18, 0.39, 0.40\}$	$P_{076} = \{0.08, 0.11, 0.23, 0.58\}$
$P_{011} = \{0.11, 0.14, 0.31, 0.44\}$	$P_{044} = \{0.01, 0.25, 0.36, 0.38\}$	$P_{077} = \{0.08, 0.25, 0.28, 0.39\}$
$P_{012} = \{0.04, 0.16, 0.28, 0.52\}$	$P_{045} = \{0.10, 0.15, 0.22, 0.53\}$	$P_{078} = \{0.15, 0.16, 0.22, 0.47\}$
$P_{013} = \{0.09, 0.18, 0.36, 0.37\}$	$P_{046} = \{0.04, 0.25, 0.28, 0.43\}$	$P_{079} = \{0.16, 0.26, 0.28, 0.30\}$
$P_{014} = \{0.10, 0.21, 0.28, 0.41\}$	$P_{047} = \{0.14, 0.26, 0.28, 0.32\}$	$P_{080} = \{0.12, 0.26, 0.28, 0.34\}$
$P_{015} = \{0.07, 0.21, 0.34, 0.38\}$	$P_{048} = \{0.05, 0.25, 0.28, 0.42\}$	$P_{081} = \{0.03, 0.21, 0.30, 0.46\}$
$P_{016} = \{0.09, 0.12, 0.28, 0.51\}$	$P_{049} = \{0.12, 0.15, 0.27, 0.46\}$	$P_{082} = \{0.13, 0.14, 0.34, 0.39\}$
$P_{017} = \{0.14, 0.26, 0.27, 0.33\}$	$P_{050} = \{0.10, 0.19, 0.31, 0.40\}$	$P_{083} = \{0.20, 0.24, 0.25, 0.31\}$
$P_{018} = \{0.06, 0.28, 0.31, 0.35\}$	$P_{051} = \{0.14, 0.15, 0.21, 0.50\}$	$P_{084} = \{0.13, 0.18, 0.32, 0.37\}$
$P_{019} = \{0.06, 0.17, 0.27, 0.50\}$	$P_{052} = \{0.03, 0.28, 0.34, 0.35\}$	$P_{085} = \{0.09, 0.16, 0.19, 0.56\}$
$P_{020} = \{0.11, 0.20, 0.31, 0.38\}$	$P_{053} = \{0.11, 0.13, 0.34, 0.42\}$	$P_{086} = \{0.09, 0.14, 0.30, 0.47\}$
$P_{021} = \{0.09, 0.14, 0.25, 0.52\}$	$P_{054} = \{0.09, 0.12, 0.29, 0.50\}$	$P_{087} = \{0.16, 0.19, 0.30, 0.35\}$
$P_{022} = \{0.02, 0.17, 0.40, 0.41\}$	$P_{055} = \{0.02, 0.20, 0.29, 0.49\}$	$P_{088} = \{0.13, 0.24, 0.29, 0.34\}$
$P_{023} = \{0.16, 0.19, 0.31, 0.34\}$	$P_{056} = \{0.21, 0.22, 0.27, 0.30\}$	$P_{089} = \{0.12, 0.24, 0.26, 0.38\}$
$P_{024} = \{0.07, 0.29, 0.30, 0.34\}$	$P_{057} = \{0.08, 0.16, 0.32, 0.44\}$	$P_{090} = \{0.06, 0.16, 0.32, 0.46\}$
$P_{025} = \{0.02, 0.28, 0.33, 0.37\}$	$P_{058} = \{0.07, 0.19, 0.22, 0.52\}$	$P_{091} = \{0.04, 0.09, 0.43, 0.44\}$
$P_{026} = \{0.13, 0.25, 0.29, 0.33\}$	$P_{059} = \{0.10, 0.12, 0.31, 0.47\}$	$P_{092} = \{0.03, 0.12, 0.40, 0.45\}$
$P_{027} = \{0.05, 0.24, 0.29, 0.42\}$	$P_{060} = \{0.07, 0.11, 0.15, 0.67\}$	$P_{093} = \{0.18, 0.20, 0.30, 0.32\}$
$P_{028} = \{0.10, 0.25, 0.27, 0.38\}$	$P_{061} = \{0.10, 0.18, 0.32, 0.40\}$	$P_{094} = \{0.02, 0.17, 0.29, 0.52\}$
$P_{029} = \{0.04, 0.17, 0.39, 0.40\}$	$P_{062} = \{0.12, 0.19, 0.27, 0.42\}$	$P_{095} = \{0.18, 0.20, 0.24, 0.38\}$
$P_{030} = \{0.09, 0.20, 0.31, 0.40\}$	$P_{063} = \{0.11, 0.12, 0.35, 0.42\}$	$P_{096} = \{0.04, 0.21, 0.27, 0.48\}$
$P_{031} = \{0.14, 0.21, 0.29, 0.36\}$	$P_{064} = \{0.16, 0.26, 0.27, 0.31\}$	$P_{097} = \{0.17, 0.20, 0.23, 0.40\}$
$P_{032} = \{0.02, 0.16, 0.26, 0.56\}$	$P_{065} = \{0.08, 0.16, 0.25, 0.51\}$	$P_{098} = \{0.16, 0.23, 0.25, 0.36\}$
$P_{033} = \{0.01, 0.17, 0.26, 0.56\}$	$P_{066} = \{0.08, 0.15, 0.21, 0.56\}$	$P_{099} = \{0.01, 0.11, 0.34, 0.54\}$
		$P_{100} = \{0.10, 0.19, 0.26, 0.45\}$

Tabla 3.1: Distribuciones de probabilidad utilizadas para la síntesis de medidas multifractales a partir de IFS.

Basado en [55], los entornos $B(x, r)$ para la estimación de la dimensión local se calcularon para $k = 1, \ldots, 8$. El espectro de α se dividió en $R + 1 = 6$ clases, y para el cálculo del espectro multifractal se usaron grillas cuadradas con celdas de 4, 8, 16, 32, 64, 128 y 256 píxeles de ancho.

Sería necesario dedicar unas palabras a la selección de los tamaños de los entornos. Como se dijo en la sección 2.1.2, el exponente α describe la regularidad de la medida, siendo sensible a las singularidades presentes. Cuando se trabaja con conjuntos que tienen un límite de resolución como es el caso de los datos discretos, es necesario tener en cuenta que tipo de singularidades estamos buscando para definir el tamaño de los entornos. Si se usan vecindarios pequeños, el α reaccionará a las singularidades localizadas [51]. Por ejemplo, si el objetivo es detectar bordes entre regiones, sería recomendable utilizar entornos pequeños. Por otro lado, si se usan vecindarios más grandes, se detectarán singularidades más extensas.

En [55], Nilsson plantea que para obtener un buen ajuste entre los espectros teóricos y los obtenidos con teoría gruesa para medidas autosimilares, es necesario tomar entornos grandes en relación al tamaño del soporte de las medidas. Puntualmente, para este tipo de datos, utiliza entornos que van desde el límite inferior de la resolución hasta tamaños similares a la longitud total del soporte. La realización de ensayos similares mostró total concordancia con sus resultados. Se encontró que al no considerar dicho conjunto de longitudes, el rango de α tiende a ensancharse.

Como se dijo, se comprobó que los espectros multifractales obtenidos tenían una concavidad uniforme y que cumplían la proposición 17.9 de [45]. Aunque la proposición 17.9 establece la igualdad entre el espectro multifractal teórico obtenido a partir de la transformada de Legendre y el calculado a partir de la teoría gruesa para una medida auto-similar, dadas las discretizaciones realizadas en el cálculo de $f_C(\alpha)$ es razonable que los valores obtenidos sean más bajos que los de f_L.

Para comprobar que los espectros tienen concavidad uniforme y ajustan a los espectros teóricos se calcularon los errores en los ajustes lineales realizados para la estimación de α. Se calculan las cotas de error para el α de cada píxel, obteniéndose tres conjuntos de dimensiones locales: la estimación original y las cotas inferior y superior. Se procede luego a calcular el espectro multifractal para cada una de estas "imágenes" de α, obteniéndose los espectros de la estimación y de las cotas inferior y superior, $f_C(\alpha)$, $f_C^l(\alpha)$ y $f_C^h(\alpha)$ respectivamente. De este modo, se tiene una noción de la variación del espectro multifractal debido a la incerteza en la dimensión local.

Se constató que $f_C(\alpha) \leq f_L(\alpha)$ comparando los valores de $f_C(\alpha)$, $f_C^l(\alpha)$ y $f_C^h(\alpha)$ con valores interpolados de $f_L(\alpha)$. La condición de ajuste exigida fue que, para cada uno de los $R+1$ puntos de los espectros de la teoría gruesa calculados, alguno de los valores correspondientes a $f_C(\alpha)$, $f_C^l(\alpha)$ o $f_C^h(\alpha)$ fuera menor que el valor interpolado de $f_L(\alpha)$.

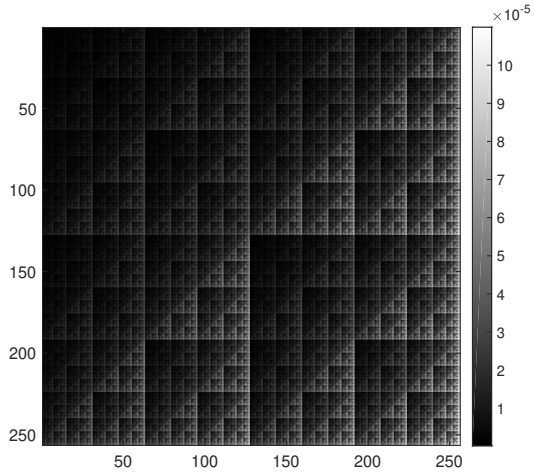
Para evaluar la concavidad de $f_C(\alpha)$ se comprobó que $-f_C(\alpha)$ satisfaga la condición de convexidad para funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ [104]:

$$f(x-1) + f(x+1) \geq 2f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

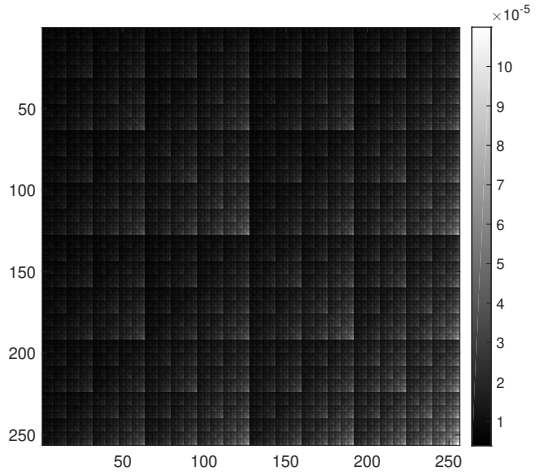
El estudio arrojó como resultado que, para las 100 medidas sintetizadas, los espectros multifractales gruesos tuvieron un buen ajuste con los espectros teóricos y una concavidad uniforme de acuerdo a los criterios establecidos. A modo de ejemplo, en la figura 3.1 puede observarse la representación de cuatro medidas multifractales estudiadas. La figura 3.2 presenta los espectros multifractales correspondientes a esas medidas.

3.3. Aplicación a imágenes de sensores remotos

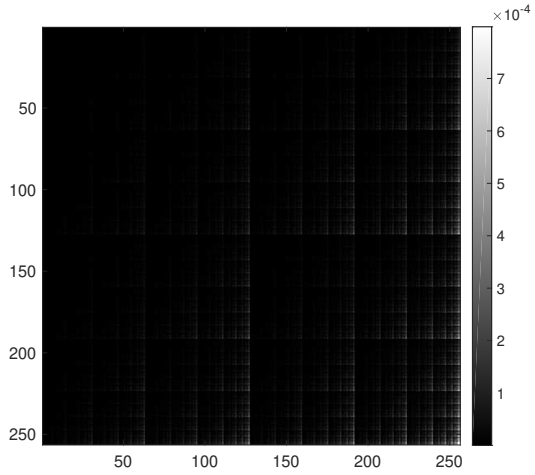
Habiendo evaluado el desempeño del algoritmo para el cálculo del espectro multifractal con la teoría gruesa, se decidió aplicarlo a datos de sensores remotos.



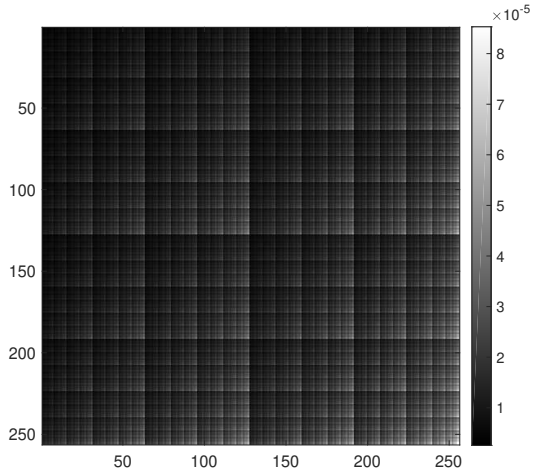
(a) $P_{002} = \{0.14, 0.25, 0.29, 0.32\}$



(b) $P_{009} = \{0.21, 0.23, 0.24, 0.32\}$

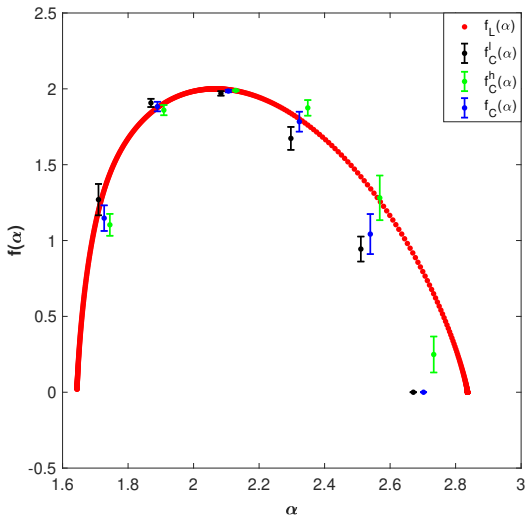


(c) $P_{014} = \{0.10, 0.21, 0.28, 0.41\}$

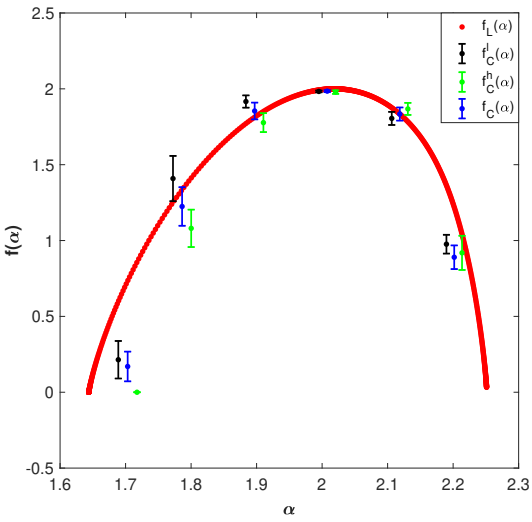


(d) $P_{083} = \{0.20, 0.24, 0.25, 0.31\}$

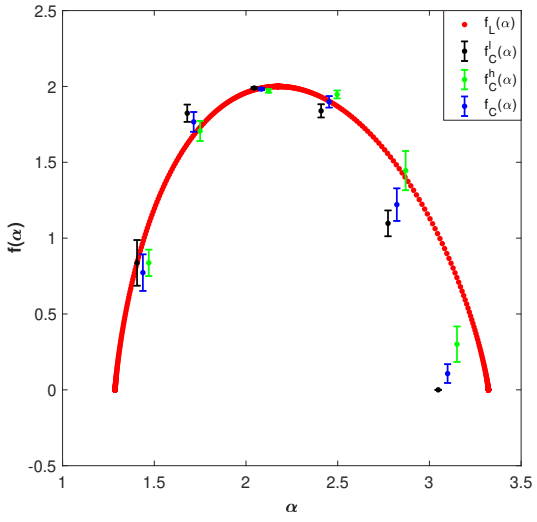
Figura 3.1: Medidas multifractales obtenidas por medio de IFS con distintos vectores de probabilidades P.



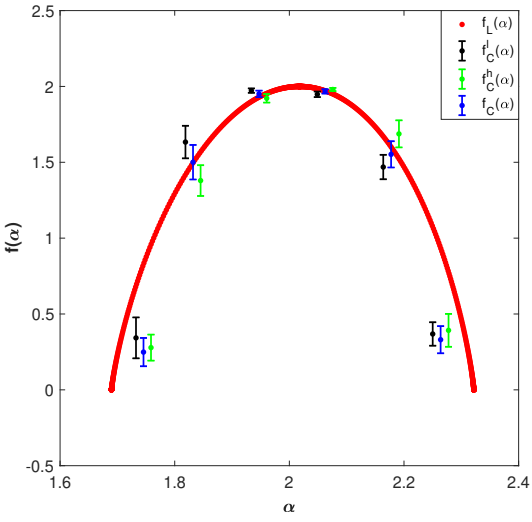
(a) $P = \{0.14, 0.25, 0.29, 0.32\}$



(b) $P = \{0.21, 0.23, 0.24, 0.32\}$



(c) $P = \{0.10, 0.21, 0.28, 0.41\}$



(d) $P = \{0.20, 0.24, 0.25, 0.31\}$

Figura 3.2: Comparación entre los espectros multifractales teóricos y los calculados con la teoría gruesa para medidas multifractales presentadas en la figura 3.1.

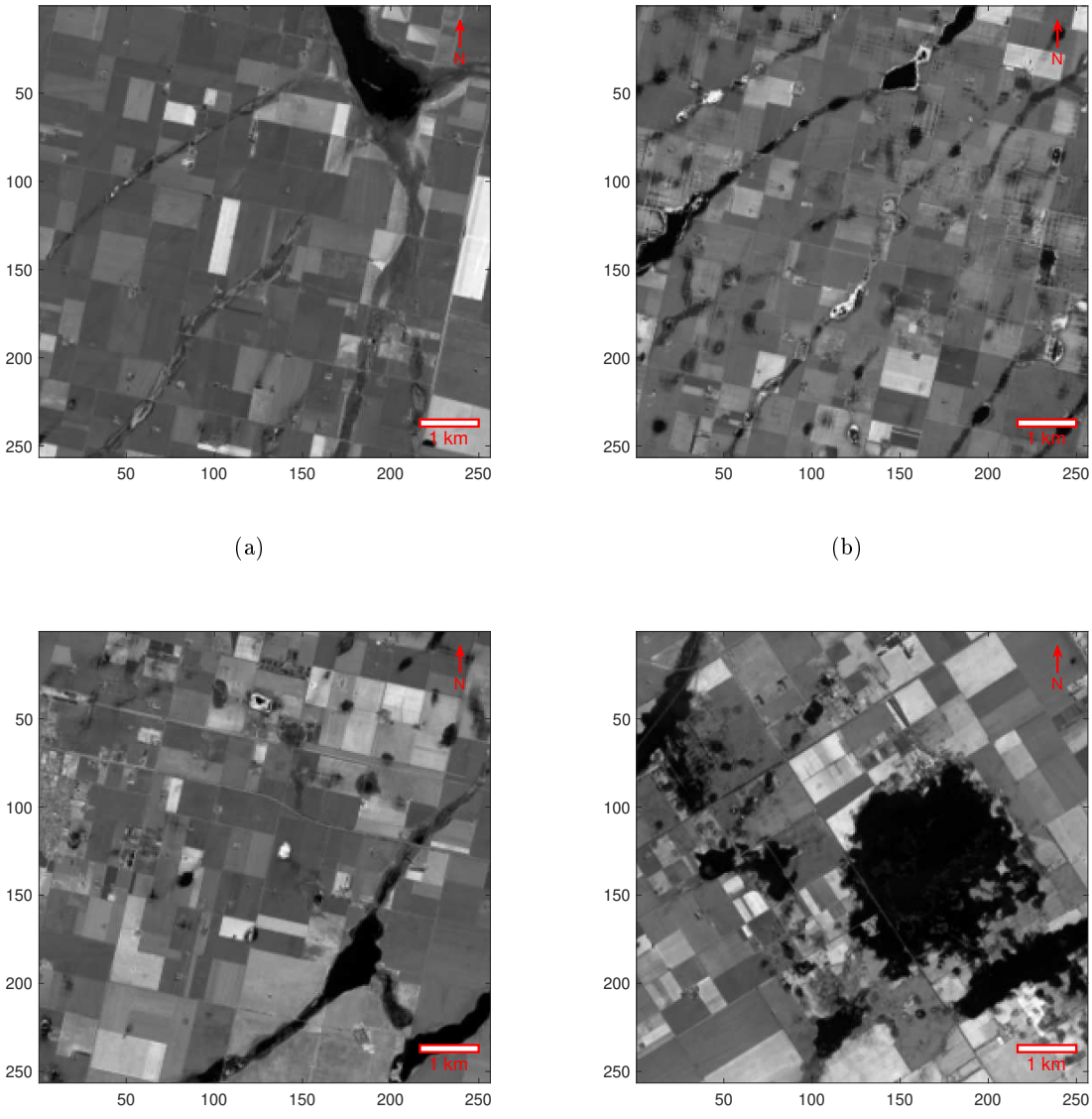
En primer lugar se trabajó con datos ópticos, decisión que responde a su bajo nivel de ruido. Las imágenes ópticas en general poseen poco ruido y, dada la física de los sensores, puede modelarse como aditivo y gaussiano. Eso hace que normalmente estas imágenes sean fáciles de procesar. Por otro lado, es posible descargar de forma libre una gran cantidad de datos de este tipo desde los servidores del U.S. Geological Survey[1]. Se trabajó en particular con imágenes del satélite Landsat 8.

Las primeras pruebas se realizaron sobre recortes de 256×256 píxeles de la banda 5 (infrarrojo cercano, 0.851–0.879 µm de longitud de onda)[2]. Los entornos para el cálculo de la dimensión local considerados fueron los correspondientes a $k = 2, \ldots, 8$ y el rango de α se dividió en $R + 1 = 6$ clases. En este caso, a diferencia de las imágenes sintéticas, no se consideró el entorno para $k = 1$ ya que este, al estar formado por un único píxel es muy susceptible al posible ruido en las capturas. En la figura 3.3 pueden observarse cuatro recortes y los correspondientes análisis multifractales se presentan en la figura 3.4.

Lo primero que se observa es que los espectros no poseen una concavidad uniforme. Esto es razonable, ya que los datos que estamos analizando no son medidas multifractales. El enfoque tomado en este trabajo no surge de considerar esa hipótesis, sino de suponer que la medida usada posee una dimensión local en cada punto. Esto nos permite obtener un espectro multifractal independientemente de que la medida sea multifractal o no. La idea es que utilizando estos métodos de estimación es posible calcular un espectro que, si bien no es el verdadero, nos permite obtener una descripción de las singularidades locales y poder compararlas dentro de la misma captura y entre distintas imágenes. Como fue mencionado en el capítulo 1, este enfoque ha sido adoptado por Levy-Vehel y Mignot en sus trabajos de análisis de imágenes [52, 53] con resultados interesantes en cuanto a la detección de bordes.

[1] https://earthexplorer.usgs.gov/

[2] En el apéndice C se presenta una descripción de las características técnicas de los datos tomados por los sensores del satélite Landsat 8. También se enlistan las imágenes usadas en el presente trabajo.



(a) (b)

(c) (d)

Figura 3.3: Fragmentos de 256x256 píxeles de imágenes tomadas por los sensores OLI - TIRS del satélite Landsat 8 (banda 5).

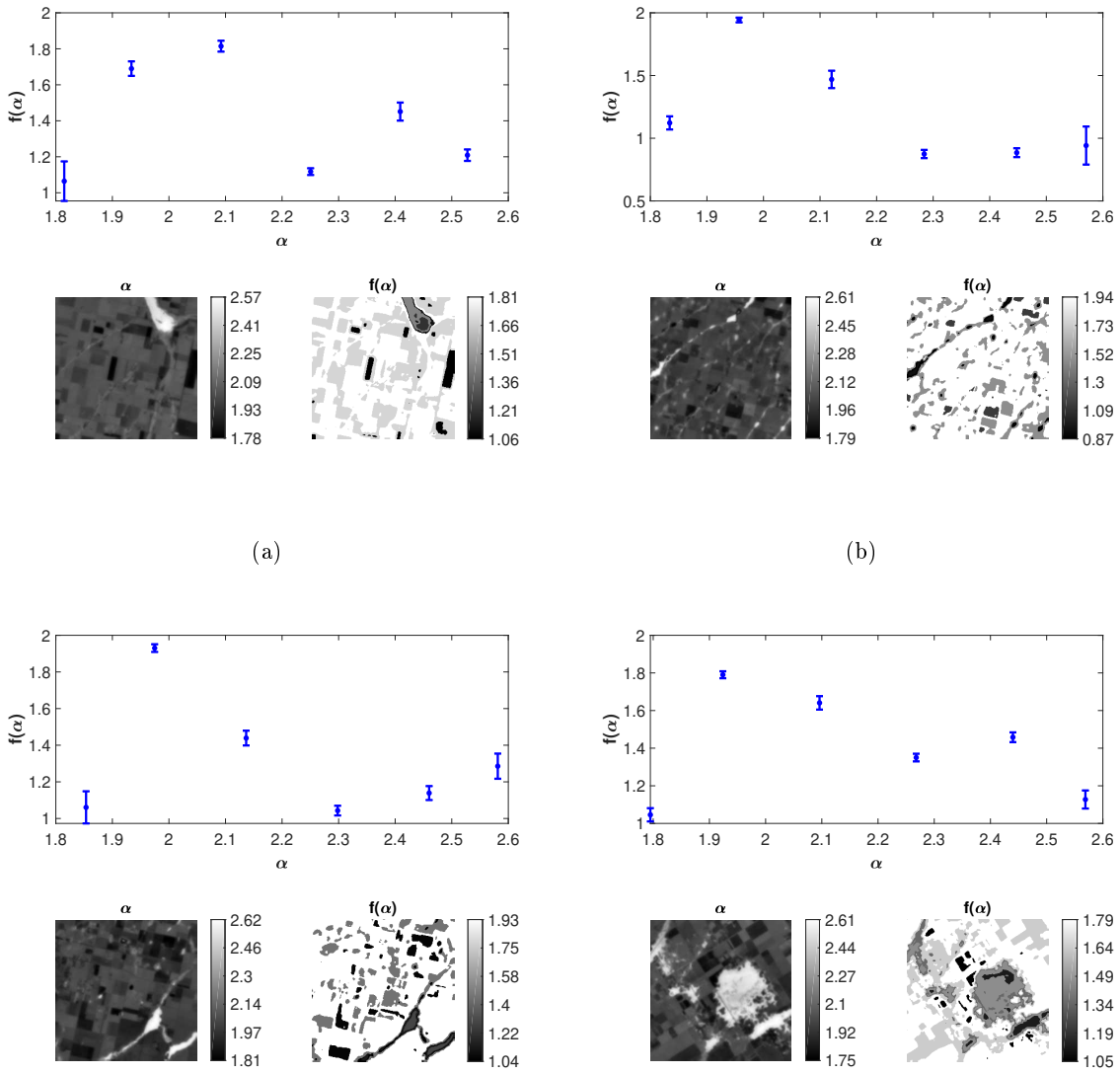
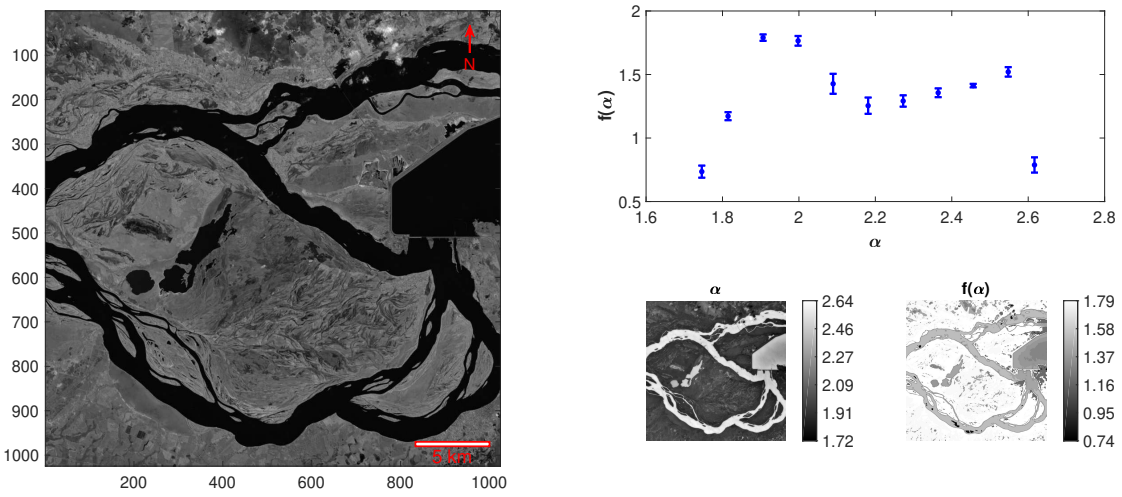


Figura 3.4: Análisis realizado sobre los fragmentos de imágenes Landsat 8 presentados en la figura 3.3.



(a) Imagen Landsat8-1.

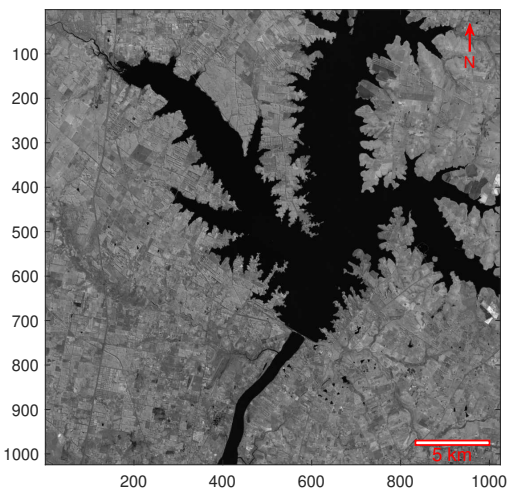
(b) Analisis multifractal.

Figura 3.5: Imagen Landsat8-1 y su análisis multifractal.

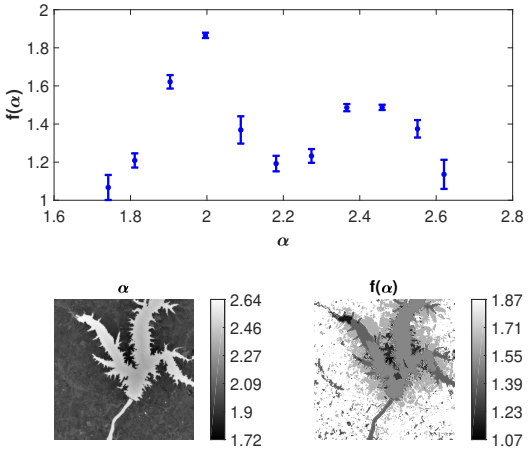
Mirando en detalle los espectros de la figura 3.4, es posible ver mínimos locales que, a pesar de los pocos puntos del espectro, aparecen claramente. A primera vista esa característica parece estar relacionada con la presencia de cuerpos de agua, de baja reflectancia en esta porción del espectro electromagnético.

Para estudiar este fenómeno con mayor profundidad se analizaron recortes de imágenes Landsat 8 de 1024×1024 píxeles, nuevamente con información espectral correspondiente al infrarrojo cercano. En las figuras 3.5 - 3.8 se observan los análisis realizados sobre las imágenes Landsat8-1, Landsat8-2, Landsat8-3 y Landsat8-4 respectivamente. Para el cálculo de la dimensión local se tomaron los entornos para $k = 2, \ldots, 9$ y el rango de valores resultante se dividió en $R + 1 = 11$ segmentos. En este caso, se aumentó en número de clases en las que se dividió el rango de α a fin de tener una mayor cantidad de puntos en el espectro.

Nuevamente, observamos un mínimo local bien marcado en los espectros. Inspeccionando las imágenes construidas con los valores de α para cada píxel, vemos que los cuerpos de agua presentes tienen asociados valores altos. Recordemos que para medidas multifractales los puntos

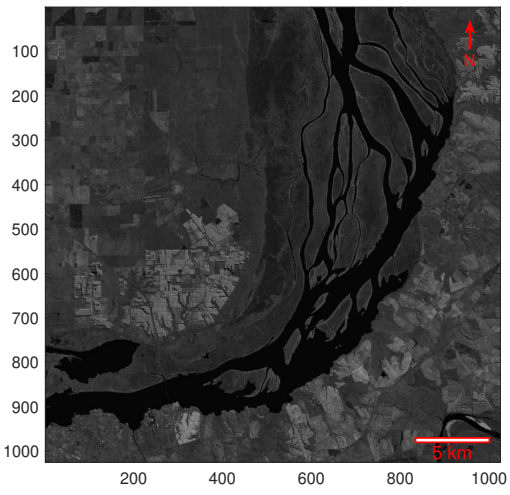


(a) Imagen Landsat8-2.

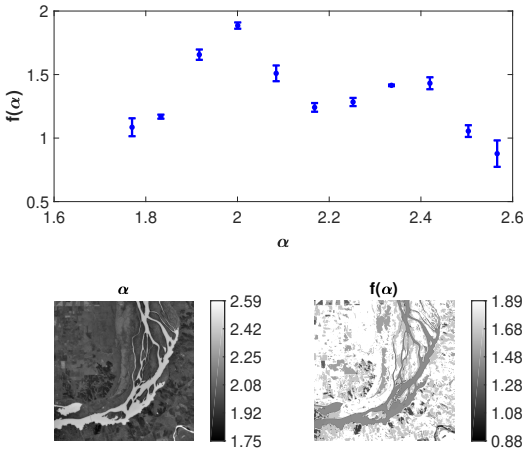


(b) Analisis multifractal.

Figura 3.6: Imagen Landsat8-2 y su análisis multifractal.

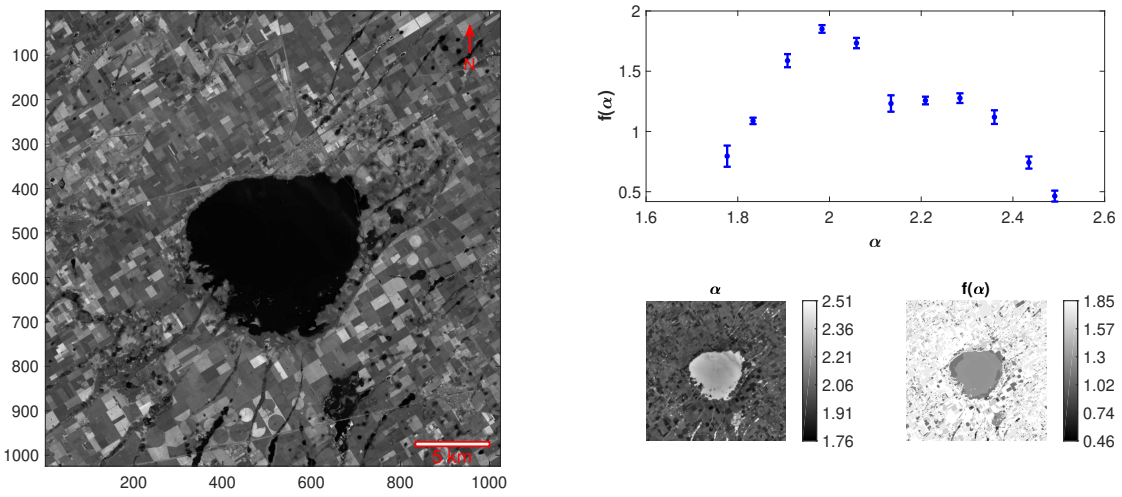


(a) Imagen Landsat8-3.



(b) Analisis multifractal.

Figura 3.7: Imagen Landsat8-3 y su análisis multifractal.



(a) Imagen Landsat8-4.

(b) Analisis multifractal.

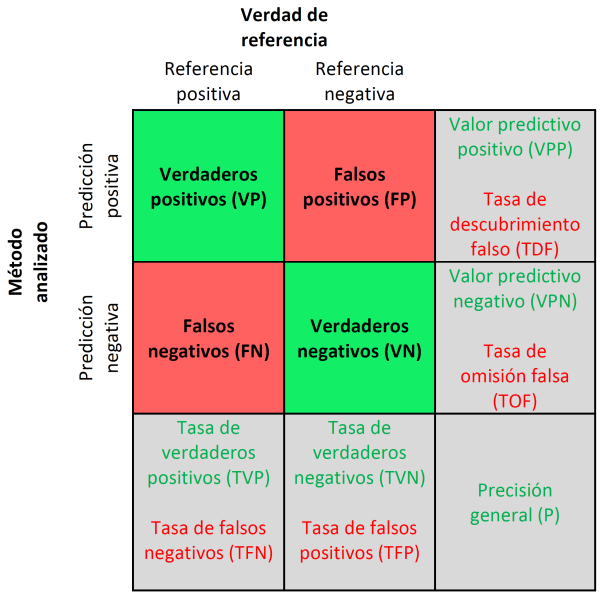
Figura 3.8: Imagen Landsat8-4 y su análisis multifractal.

de dimensión local mayor a 2 están asociados a singularidades para las que la medida es localmente baja[3]. Esto resulta razonable, ya que, en la banda analizada, el agua tiene una reflectancia baja, es decir, la medida en esos puntos será pequeña. Por otro lado, el mínimo presente en un espectro nos indica la existencia de una singularidad, con dimensión cercana a la de una linea, que está separando dos estructuras de dimensiones mayores.

Habiendo analizado estás situaciones, se construyó un código que busca el mínimo local de los espectros y extrae los píxeles con dimensiones locales pertenecientes a esa clase y las asociadas a α mayores. Esos conjuntos se compararon con máscaras de agua[4] realizadas por investigadores del Instituto Nacional del Agua (INA). La comparación se realiza a través de matrices de confusión. En ellas se compara el número de píxeles clasificados en cada categoría por el método a evaluar (en el presente caso, el método multifractal) y por el método cuyo resultado se considera verdadero o de referencia. La figura 3.9 resume los distintos índices de

[3]Nuevamente hay enfatizar que esto no significa que la medida sea multifractal, sin embargo, la revisión del comportamiento del método de estimación para esos conjuntos nos permite intuir su comportamiento sobre datos reales.

[4]Las máscaras de agua son clasificaciones de índole booleana que distinguen exclusivamente las regiones cubiertas por agua de aquellas ocupadas por otro tipo de coberturas.



$$\begin{aligned}
\text{VPP} &= \frac{\text{VP}}{\text{VP}+\text{FP}} \times 100 \\
\text{TDF} &= \frac{\text{FP}}{\text{VP}+\text{FP}} \times 100 \\
\text{VPN} &= \frac{\text{VN}}{\text{VN}+\text{FN}} \times 100 \\
\text{TOF} &= \frac{\text{FN}}{\text{VN}+\text{FN}} \times 100 \\
\text{TVP} &= \frac{\text{VP}}{\text{VP}+\text{FN}} \times 100 \\
\text{TFN} &= \frac{\text{FN}}{\text{VP}+\text{FN}} \times 100 \\
\text{TVN} &= \frac{\text{VN}}{\text{VN}+\text{FP}} \times 100 \\
\text{TFP} &= \frac{\text{FP}}{\text{VN}+\text{FP}} \times 100 \\
\text{P} &= \frac{\text{VN}+\text{FN}}{\text{Población Total}} \times 100
\end{aligned}$$

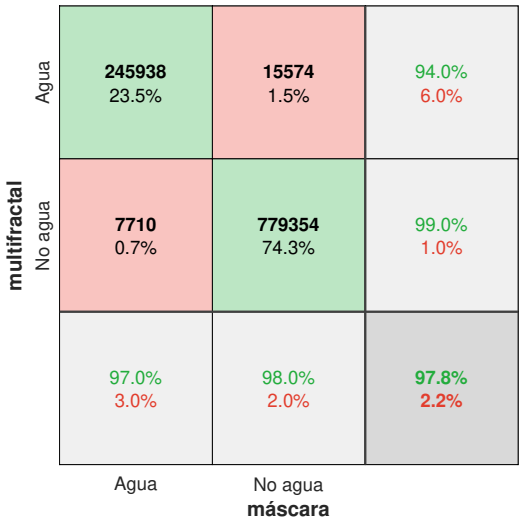
Figura 3.9: Descripción de los índices presentes en las matrices de confusión.

precisión presentes en las matrices de confusión.

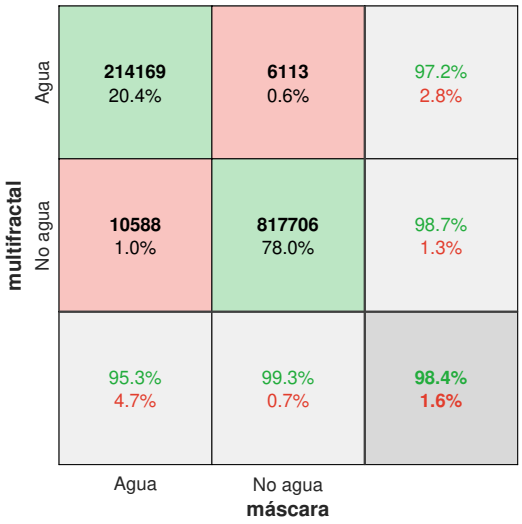
La figura 3.10 presenta las matrices de confusión resultantes de la comparación entre la clasificación propuesta y las máscaras para las imágenes Landsat estudiadas. Nótese que la coincidencia entre los resultados del método propuesto y las máscaras es alta, presentando valores de precisión general por encima del 90 %.

Claramente, el criterio propuesto solo es aplicable en los casos en que el espectro multifractal posee un mínimo local. Por ejemplo, supongamos el caso de una captura con un río; este tendrá un α alto pero la dimensión fractal de esa región será aproximadamente 1. Por lo tanto, puede que no se presente un extremo local en el correspondiente espectro. Por el contrario, si además de un río también tenemos una laguna o un cuerpo de agua con una dimensión mayor que uno, entonces encontraremos una región con un α alto y una dimensión fractal mayor a 1, causando un mínimo en el centro del espectro.

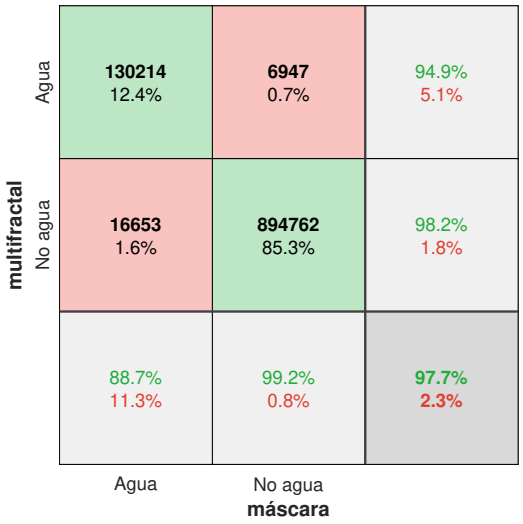
Si bien este método da como resultado clasificaciones comparables a las máscaras de agua, es necesario mencionar que su costo computacional es mayor que el de métodos estandarizados



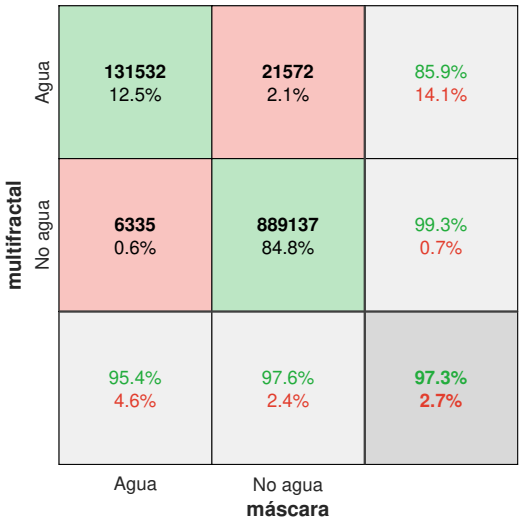
(a) Landsat8-1.



(b) Landsat8-2.

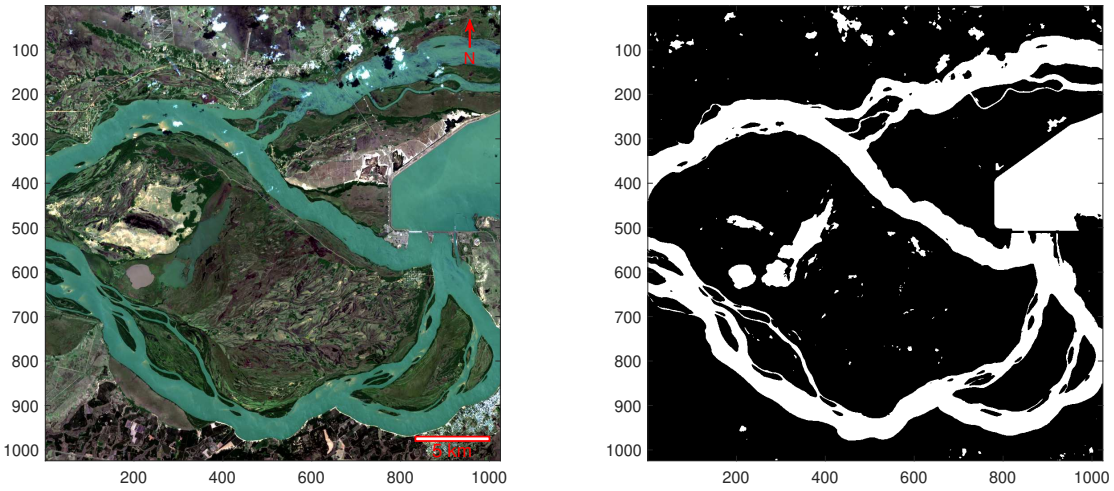


(c) Landsat8-3.



(d) Landsat8-4.

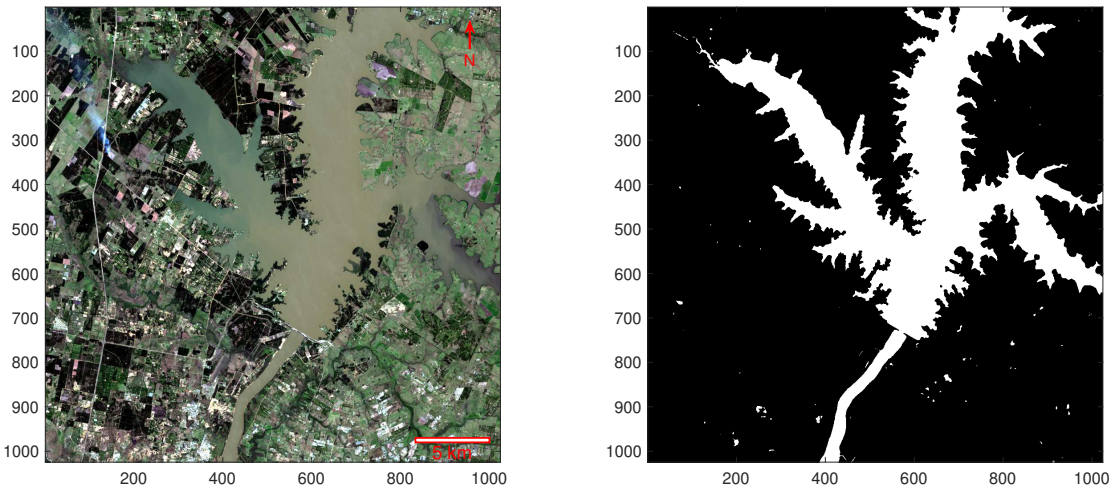
Figura 3.10: Matrices de confusión correspondientes a la comparación de la segmentación por medio del analisis multifractal y las máscaras de agua para las imágenes Landsat8-1, Landsat8-2, Landsat8-3 y Landsat8-4.



(a) Imagen Landsat8-1 en color real.

(b) Imagen segmentada.

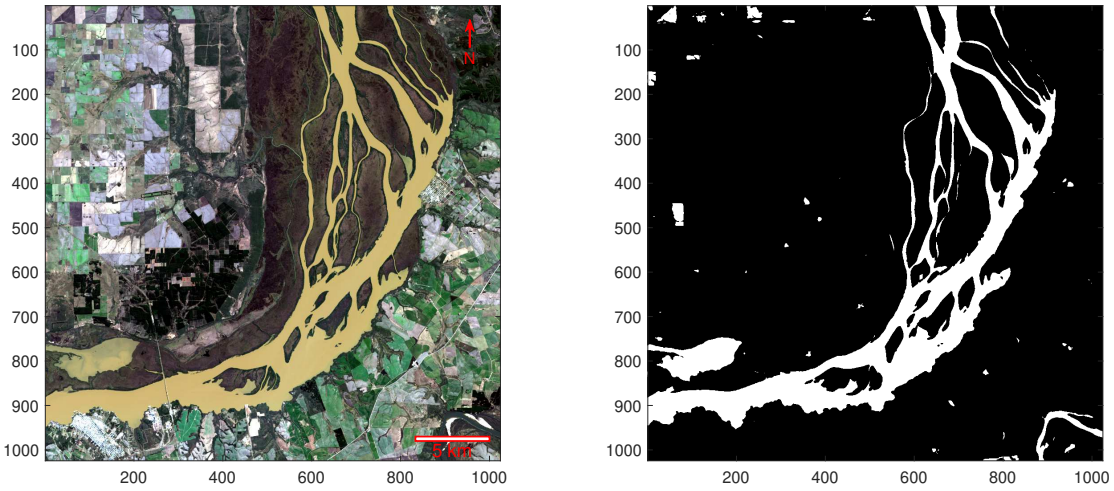
Figura 3.11: Comparación entre la imagen Landsat8-1 y el resultado de la segmentación.



(a) Imagen Landsat8-2 en color real.

(b) Imagen segmentada.

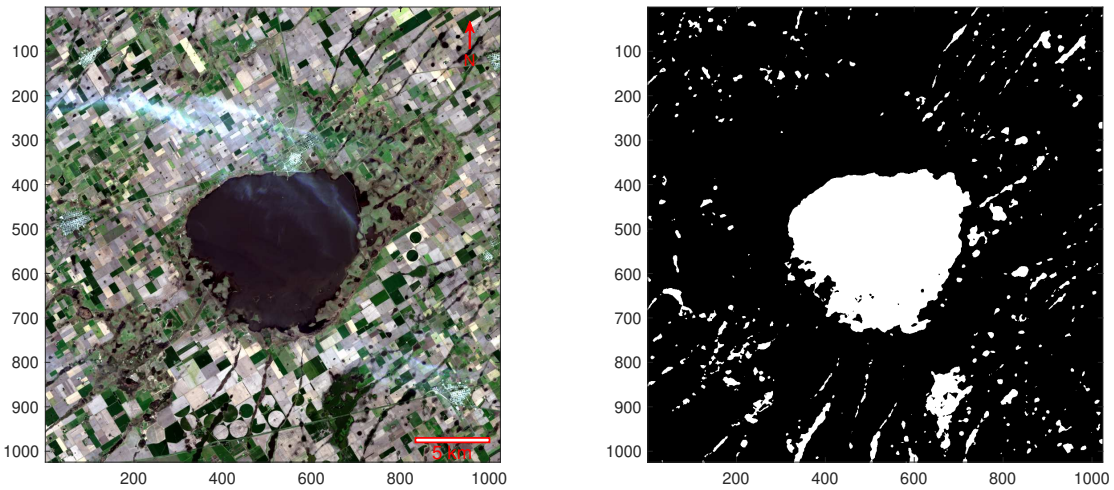
Figura 3.12: Comparación entre la imagen Landsat8-2 y el resultado de la segmentación.



(a) Imagen Landsat8-3 en color real.

(b) Imagen segmentada.

Figura 3.13: Comparación entre la imagen Landsat8-3 y el resultado de la segmentación.



(a) Imagen Landsat8-4 en color real.

(b) Imagen segmentada.

Figura 3.14: Comparación entre la imagen Landsat8-4 y el resultado de la segmentación.

para la extracción de píxeles inundados en imágenes ópticas, tales como aquellos basados en matemática de bandas como los diversos índices normalizados diferenciales de agua (NDWI, por sus siglas en inglés)[35, 36]. No obstante, la clasificación basada en análisis multifractal no se encuentra limitada al estudio de los datos correspondientes a frecuencias del infrarrojo cercano, ni a información de sensores ópticos, como ocurre con los índices NDWI. Por supuesto, es razonable pensar que su aplicación a otras bandas permita evidenciar coberturas de suelo diferentes de las regiones inundadas, dependiendo de las reflectancias correspondientes en la porción del espectro electromagnético en cuestión. El estudio de otras bandas del espectro óptico no fue abordado en este trabajo, quedando como problema abierto y posible trabajo a futuro.

Con respecto a su aplicación a datos de sensores de otra naturaleza, se realizaron pruebas sobre segmentos de imágenes SAR capturadas por los satélites Sentinel 1. En las figuras 3.15 y 3.16 pueden verse dos ejemplos de capturas de este sensor, denominadas Sentinel1-1 y Sentinel1-2 respectivamente, correspondientes a la potencia de retrodispersión (σ_0) en la polarización VH. En estos casos la estimación de las dimensiones locales se realizó con los entornos con $k = 3, \ldots, 9$, ya que la intensidad del ruido speckle afecta las estimaciones cuando se considera el entorno $k = 2$. El rango de estimaciones de dimensión local se dividió en $R + 1 = 11$ clases.

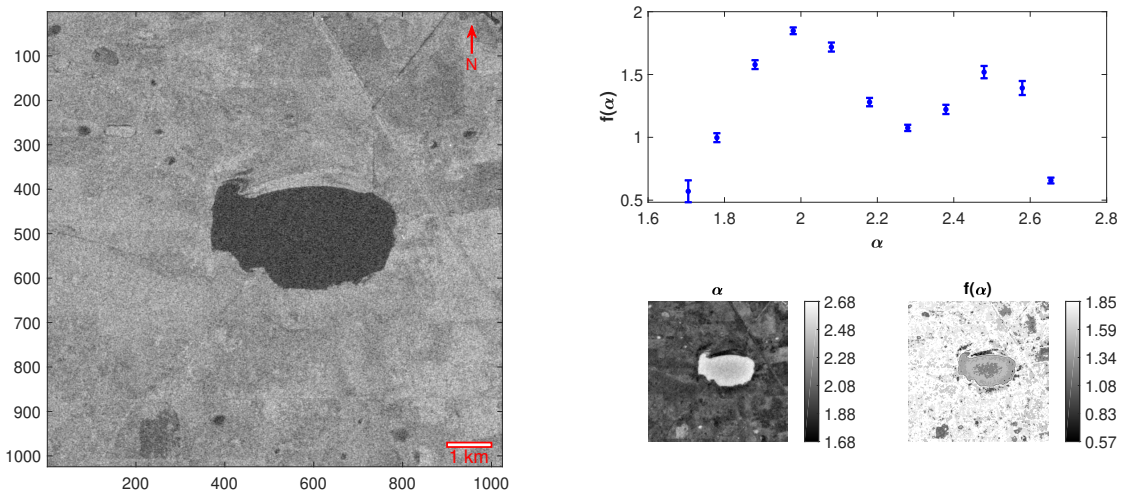
En las capturas seleccionadas las regiones cubiertas por agua presentan una baja retrodispersión debido a que allí se producen reflexiones de tipo especular. Existen algunos protocolos para la obtención de regiones inundadas a partir de estos datos, en general basados en umbrales o el entrenamiento e implementación de redes neuronales. En general, es difícil determinar el valor de umbral óptimo para una escena, lo que implica la necesidad de intervención del usuario. Los resultados de los umbrales no suelen ser completamente satisfactorios debido principalmente a que son aplicados píxel a píxel, no considerando la correlación entre píxeles cercanos. Por este motivo, las clasificaciones muchas veces se complementan con alguna clase de filtro de ruido. Las redes neuronales por su parte presentan resultados de segmentación muy buenos a pesar del

ruido. No obstante, hay que decir que, en general, este método consistente en el ajuste de un gran número de parámetros actúa como una "caja negra", dificultando la comprensión de los procesos involucrados. Eso hace complicado poder conjeturar el comportamiento de un perceptron en situaciones diferentes a aquellas para las que fue entrenado. Por el contrario, el método propuesto tiene una interpretación clara que nos permite plantear hipótesis acerca de su aplicabilidad y posibles resultados en distintos escenarios.

Para poder contrastar los resultados de la segmentación se calcularon máscaras de agua a partir de datos ópticos del satélite Sentinel 2. Se seleccionaron estas imágenes por tener el mismo espaciado de píxeles que las capturas Sentinel 1 y porque ambos tipos de datos pueden preprocesados con facilidad a con el software SNAP que distribuye gratuitamente ESA.

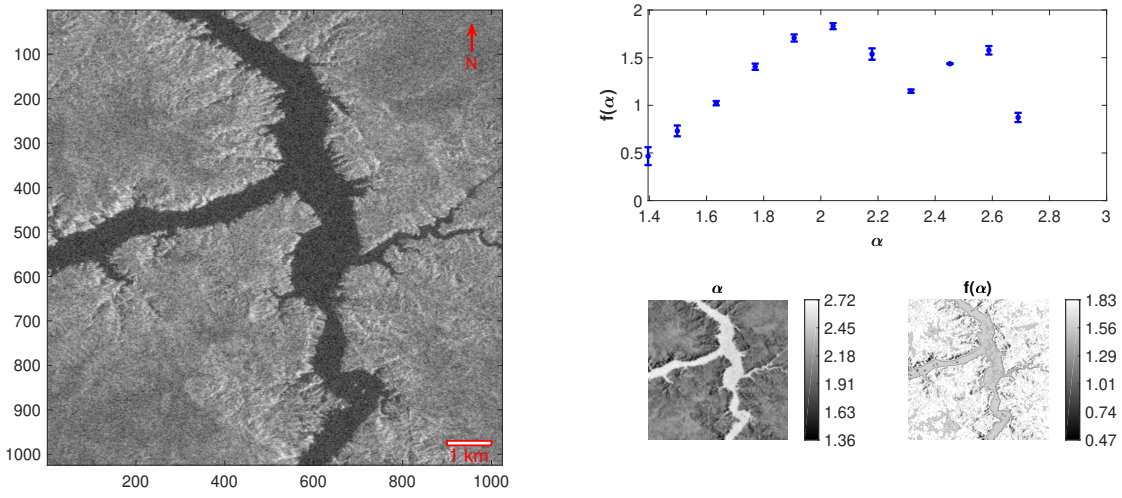
La producción de estas máscaras se realizó a partir de capturas Sentinel 2 de fechas próximas a las Sentinel 1 analizadas, calculando un NDWI [35] y aplicando un umbral que seleccionaba los píxeles con índice mayor a cero.

La figura 3.17 muestra las matrices de confusión correspondientes a la comparación de las clasificaciones con las máscaras de agua para los datos SAR. Es claro que, si bien la precisión general de las clasificaciones es buena, en estos casos tenemos un mayor error en comparación con las clasificaciones efectuadas sobre datos ópticos. Por ejemplo, en el caso de la figura Sentinel1-1 observamos un mayor error de comisión, que se evidencia en un valor de VPP más bajo que el de los demás indicadores de la matriz de confusión. A pesar de ese incremento en el error, vemos que este indicador no es inferior al 80 %, con lo que la clasificación sigue siendo buena. De modo similar, la matriz de confusión correspondiente a la imagen Sentinel1-2 muestra un valor TVP de 84.5 %, que nuevamente no es bajo pero denota un error de omisión mayor que los obtenidos para imágenes ópticas.



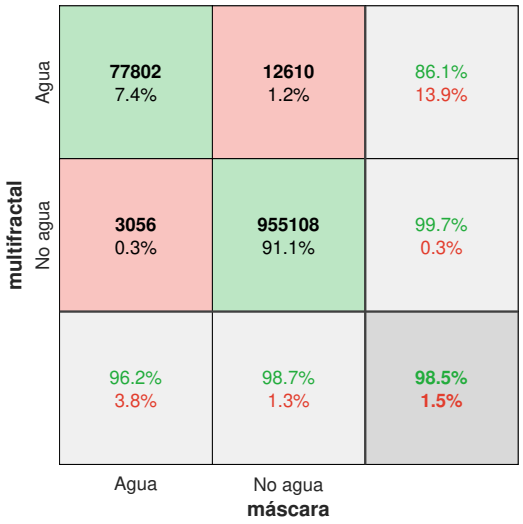
(a) Imagen Sentinel1-1 en escala logarítmica (dB). (b) Analisis multifractal.

Figura 3.15: Imagen Sentinel1-1 y su análisis multifractal.

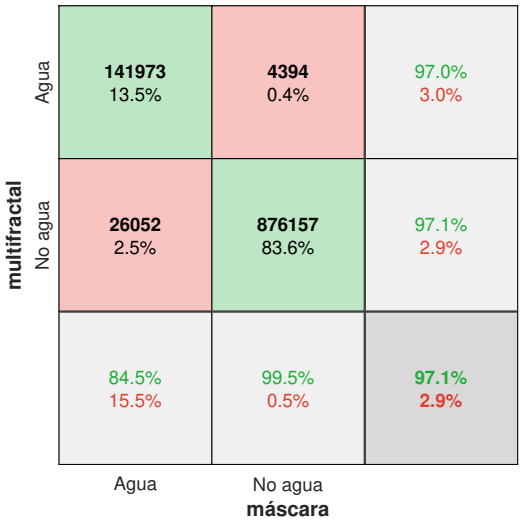


(a) Imagen Sentinel1-2 en escala logarítmica (dB). (b) Analisis multifractal.

Figura 3.16: Imagen Sentinel1-2 y su análisis multifractal.

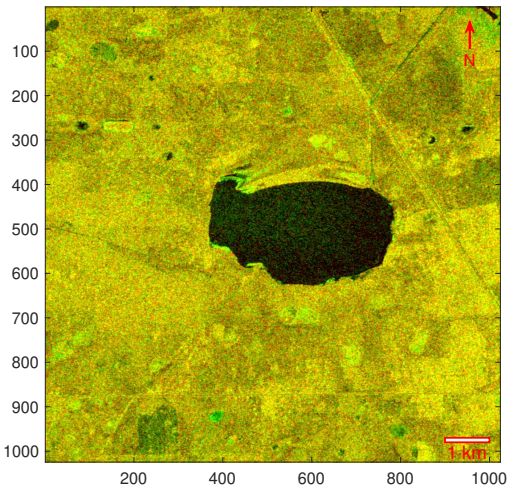


(a) Sentinel1-1

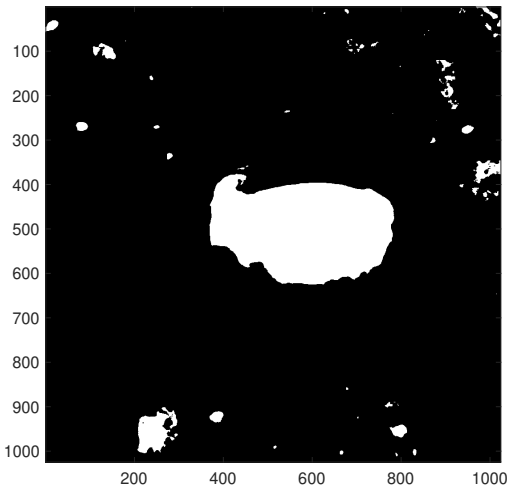


(b) Sentinel1-2

Figura 3.17: Matrices de confusión correspondientes a la comparación de la segmentación por medio del análisis multifractal y las máscaras de agua para las imágenes Sentinel1-1 y Sentinel1-2.

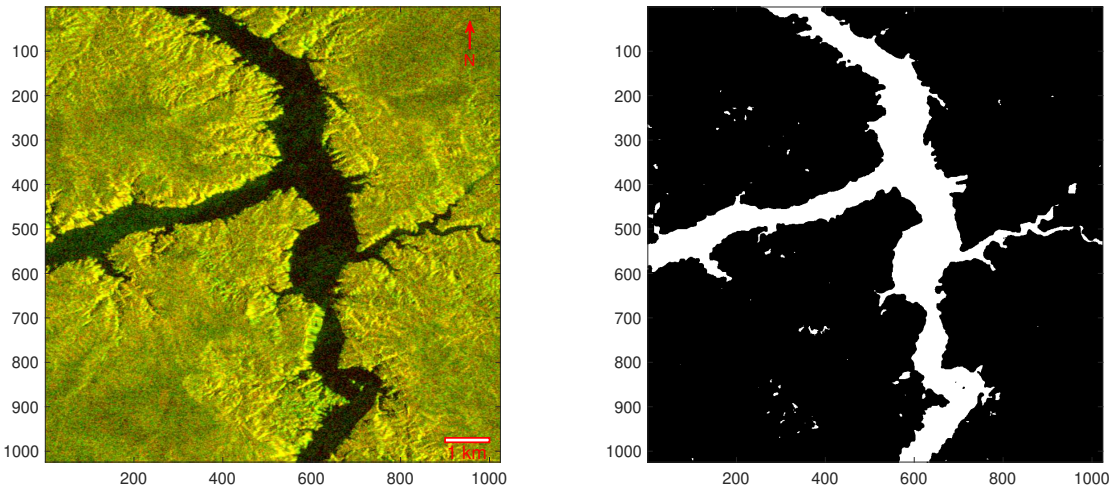


(a) Imagen Sentinel1-1 en falso color compuesto: rojo= $\sigma_0 - VH(dB)$, verde= $\sigma_0 - VV(dB)$.



(b) Imagen segmentada.

Figura 3.18: Comparación entre la imagen Sentinel1-1 y el resultado de la segmentación.



(a) Imagen Sentinel1-2 en falso color compuesto: rojo= $\sigma_0 - VH(dB)$, verde= $\sigma_0 - VV(dB)$.

(b) Imagen segmentada.

Figura 3.19: Comparación entre la imagen Sentinel1-2 y el resultado de la segmentación.

3.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se implementó la teoría multifractal gruesa para analizar imágenes satelitales ópticas y SAR. Se seleccionó un conjunto de anchos para los entornos usados en el cálculo de la dimensión local de acuerdo a la resolución espacial de las imágenes y a su nivel de ruido. De este modo fue posible detectar singularidades dispersas aun en datos fuertemente contaminados.

El estudio de imágenes ópticas, correspondientes a frecuencias del infrarrojo cercano, y SAR, de polarización VH, con presencia de superficies cubiertas por agua mostró la aparición de un mínimo local en los espectros multifractales. Dicho extremo corresponde una singularidad de dimensión próxima a la de una linea que separa dos estructuras de dimensiones mayores.

Basándose en la inspección de las imágenes construidas a partir de las dimensiones locales se formuló un criterio de segmentación de cuerpos de agua consistente en la selección de los píxeles con dimensión local mayor a la del mínimo presente en el espectro. Dicho criterio fue evaluado comparando las segmentaciones resultantes con máscaras de agua realizadas por el Instituto

Nacional del Agua en el caso de las imágenes ópticas y con máscaras realizadas a partir de datos Sentinel 2 en el caso de las imágenes SAR. En ambos casos, las clasificaciones arrojaron resultados altamente coincidentes con los datos de referencia, siendo esta coincidencia ligeramente inferior en los datos de radar.

Como se mencionó en la sección anterior, este método resulta efectivo siempre y cuando la captura posea regiones cubiertas por agua con una dimensión mayor a la de una linea, por ejemplo lagos o lagunas.

Dado que este trabajo estuvo orientado a la detección de regiones inundadas, se seleccionó la banda óptica del infrarrojo cercano. No obstante, es razonable suponer que el mismo método podría usarse con datos espectrales distintos para la segmentación de otras coberturas. Este punto queda abierto para futuras investigaciones.

Por otro lado, la posibilidad de segmentar regiones inundadas en datos SAR de manera eficiente es quizá el punto más destacable del método, ya que amplía su aplicabilidad a situaciones en las que no se dispone de datos ópticos. Tal es el caso de imágenes tomadas durante una tormenta que desata un evento de inundación.

Capítulo 4

Segmentación de texturas a partir de métodos multirresolución

> *"There's no flesh or blood within this cloak to kill. There's only an idea. Ideas are bulletproof."*
>
> — Alan Moore, *V for Vendetta*

El presente capítulo está dedicado a introducir las distribuciones de probabilidad propuestas para la clasificación de texturas en imágenes. Las mismas se basan en distintos coeficientes multirresolución y son analizadas a partir de la entropía de Shannon. Los valores locales de entropía son suavizados por medio del método de eliminación de ruido descrito en el apéndice D. A través de la observación de los histogramas correspondientes se plantean umbrales que permiten segmentar las texturas presentes.

La sección 4.1 detalla las distribuciones de probabilidad propuestas y su motivación. Seguidamente, la sección 4.2 presenta los resultados de las pruebas realizadas a las distribuciones mediante imágenes sintéticas. La sección 4.3 muestra su aplicación a datos de sensores remotos. Se resumen resultados del empleo de estos métodos sobre imágenes ópticas y SAR.

La sección 4.4 resume las principales conclusiones de este capítulo.

4.1. Distribuciones de probabilidad

A continuación se introducen cuatro distribuciones de probabilidad discretas construidas a partir de diferentes coeficientes multirresolución. Las tres primeras se basan en coeficientes UDWT, mientras que la cuarta es formulada en base a coeficientes de curvelets.

Antes de presentar las distribuciones de probabilidad es necesario aclarar un punto acerca del índice j utilizado en este capítulo para referirse a los distintos niveles de resolución en los análisis realizados. En el capítulo 2, donde j fue inicialmente introducido en el contexto de los coeficientes multirresolución, los coeficientes con valores más altos de este índice estaban asociados a las resoluciones mas finas. Para aplicar los algoritmos de las distintas transformadas sobre señales discretas se supone que los datos de entrada son los coeficientes de aproximación de la señal subyacente a nivel $j = 0$. Dada la limitación en la resolución impuesta por estos datos, los algoritmos calculan los coeficientes de detalle a escalas mayores que la de la señal inicial, lo que, en concordancia con la teoría presentada en los preliminares, equivale a moverse hacia los j negativos. Este es precisamente el caso de los análisis realizados en el presente capítulo. Sin embargo, por razones de comodidad se ha decidido eliminar el signo negativo de los índices j presentes. Por lo tanto, a partir de ahora, el índice j puede interpretarse como el número de sucesivas iteraciones de los algoritmos para la obtención de los coeficientes multirresolución respectivos. Esto es equivalente a considerar que los sucesivos j corresponden a escalas mayores, encontrando su paralelo, como ya se dijo, con los índices negativos presentados en el capítulo 2.

4.1.1. Distribución no direccional

Sean $\{\widetilde{w}_j^{(i)}(k)\}$, $j = 1, \ldots, J$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ los coeficientes UDWT calculados con J niveles de resolución para una imagen particular. Con estas cantidades se calculan los siguientes coeficientes multirresolución inspirados en las wavelet leaders:

$$\widetilde{d}_j(k) = \sup_{\substack{k' \in \Delta k \\ j'=1,\ldots,j; i=1,2,3}} \left| \widetilde{w}_{j'}^{(i)}(k') \right|, \tag{4.1}$$

donde Δk son entornos de dimensiones $(2^j + 1) \times (2^j + 1)$ centrados en k.

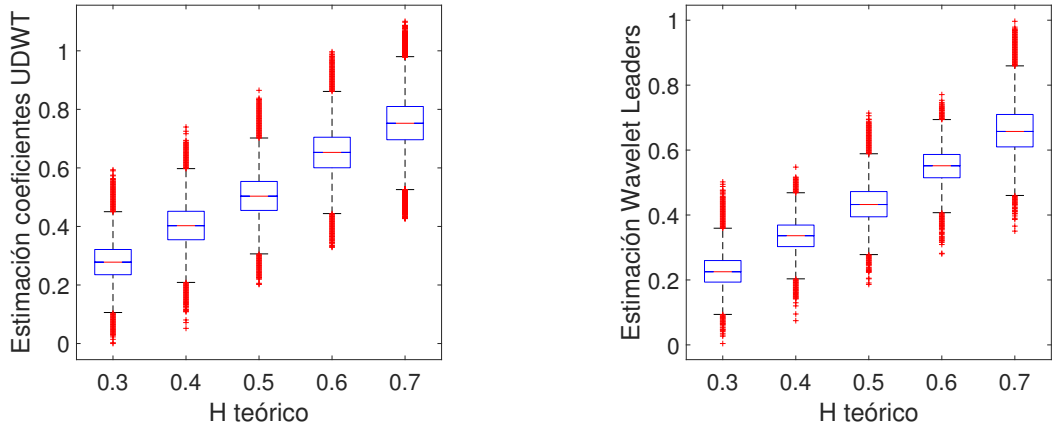
Como se menciona en la subsección 2.2.3, en la revisión de bibliografía no se han encontrado pruebas formales que demuestren la relación entre el exponente de Hölder y el comportamiento de escala de los coeficientes UDWT, como si las hay para el caso de las wavelet leaders. No obstante, estudiando el comportamiento de escala de los coeficientes propuestos, se ha llegado a estimaciones de Hölder similares a las obtenidas usando wavelet leaders.

Para poner a prueba esta suposición se construyeron conjuntos de datos de 1024×1024 píxeles con valores de hölder uniformes por medio de movimiento browniano fraccionario (fBM). Para eso se utilizaron los algoritmos del paquete FracLab[1], desarrollado por el Instituto Nacional de Investigación en Informática y Automatización de Francia (INRIA). Los interesados en profundizar en la teoría del fBM pueden dirigirse a [105].

Se estimó el Hölder con 7 escalas para cada píxel a través de los coeficientes wavelet leaders y los coeficientes propuestos, y se los comparó con los valores teóricos. En la figura 4.1 se muestran los boxplot construidos con las estimaciones para cada valor de Hölder[2]. Si bien los valores de obtenidos con los coeficientes de UDWT presentan una mayor dispersión, es evidente que ambos métodos capturan de modo similar los valores teóricos de Hölder.

[1] https://project.inria.fr/fraclab/

[2] Se tomaron las estimaciones correspondientes a los 896×896 píxeles centrales para reducir los posibles efectos de borde.



(a) Estimacion a partir de UDWT coefficients.

(b) Estimacion a partir de wavelet leaders.

Figura 4.1: Estimación de exponentes de Hölder a través de coeficientes UDWT y wavelet leaders.

Los coeficientes (4.1) son usados para construir distribuciones de probabilidad $\widetilde{P}(k) = \{\widetilde{p_j}(k)\}$, con

$$\widetilde{p_j}(k) = \frac{\widetilde{d_j}(k)^2}{\sum_{\ell=1}^{J} \widetilde{d_\ell}(k)^2}, \qquad j = 1, \ldots, J. \tag{4.2}$$

Debido a la semejanza entre los coeficientes de estas distribuciones y los coeficientes wavelet leaders es razonable suponer que la entropía resultante sea capaz de distinguir regiones caracterizadas por coeficientes de regularidad distintos.

4.1.2. Distribución direccional

Dado que la propuesta anterior utiliza el supremo de los coeficientes para la construcción de las distribuciones de probabilidad, se pierde la información brindada por los distintos tipos de coeficientes de detalle, que dan cuenta de variaciones en las direcciones horizontal, vertical y diagonal. La siguiente distribución intenta aprovechar dicha información.

Para cada punto y cada nivel j tenemos tres coeficientes UDWT de detalle, $\widetilde{w}_j^{(i)}(k)$, con $i = 1, 2, 3$. Se propone tomar los coeficientes:

$$\widehat{d}_j^{(i)}(k) = \sup_{k' \in \Delta k} \left| \widetilde{w}_j^{(i)}(k') \right|, \tag{4.3}$$

donde Δk son nuevamente entornos de dimensiones $(2^j + 1) \times (2^j + 1)$ centrados en k. Con estos coeficientes se construyen los vectores de probabilidades $\widehat{P}(k) = \left\{ \widehat{p}_j^{(i)}(k) \right\}$, con

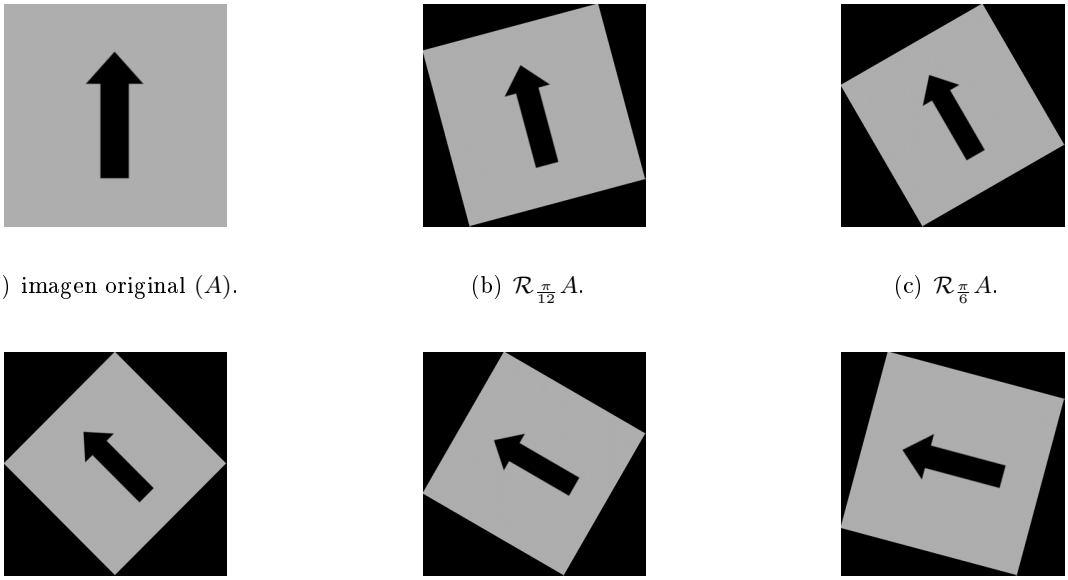
$$\widehat{p}_j^{(i)}(k) = \frac{\widehat{d}_j^{(i)}(k)^2}{\sum_{t=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{J} \widehat{d}_\ell^{(t)}(k)^2}, \qquad j = 1, \ldots, J;\ i = 1, 2, 3. \tag{4.4}$$

Es esperable que esta distribución de probabilidades sea de tipo uniforme cuando el punto correspondiente presente variaciones locales en todas direcciones y a distintas escalas. Por otro lado, si tenemos una variación local fuerte en una de las direcciones consideradas, esta distribución dará cuenta de ello con probabilidades altas correspondientes a esas direcciones en una o más escalas.

Por supuesto, es lógico pensar que esta distribución de probabilidad no presente diferencias entre regiones fuertemente ruidosas y zonas predominantemente uniformes que posean ligeras variaciones locales en varias direcciones, debido a la normalización realizada en su cálculo.

4.1.3. Distribución basada en rotaciones

Sea A la imagen en estudio y sea $\mathcal{R}_\theta$ una rotación de un ángulo θ. Definimos un conjunto de N rotaciones de la imagen A, $\{A_n, n = 0, \ldots, N-1\}$, donde $A_n = \mathcal{R}_{\theta_n} A$, $\theta_n = \Delta\theta \cdot n$, con $\Delta\theta = \frac{\pi}{2N}$. La figura 4.2 presenta un conjunto de $N = 6$ rotaciones de una imagen para ilustrar este paso en la construcción de la distribución. Calculamos la transformada UDWT con J niveles para cada rotación, obteniendo los coeficientes de detalle correspondientes. Aplicando la rotación $\mathcal{R}_{-\theta_n}$ correspondiente a cada uno de estos conjuntos, se obtienen los coeficientes $\breve{w}_{j,n}^{(i)}(k)$ para la



(a) imagen original (A). (b) $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{12}} A$. (c) $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{6}} A$.

(d) $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}} A$. (e) $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}} A$. (f) $\mathcal{R}_{\frac{5\pi}{12}} A$.

Figura 4.2: Conjunto de $N = 6$ rotaciones de una imagen A para la construcción de la distribución basada en rotaciones. Las imágenes presentadas en esta figura se encuentran ajustadas en ancho para su visualización; durante el proceso de cálculo se respeta el tamaño original de la imagen en cada rotación. Los bordes de relleno incorporados en cada rotación no son considerados al momento de calcular los coeficientes UDWT.

escala j de la rotación n en la posición k. Se propone tomar los coeficientes:

$$\breve{d}_j(k) = \sup_{\substack{n=0,\ldots,N-1 \\ i=1,2,3 \\ k' \in \Delta k}} \left| \breve{w}_{j,n}^{(i)}(k') \right|. \tag{4.5}$$

donde Δk son entornos análogos a los definidos en la distribución anterior.

Definimos la distribución $\breve{P}(k) = \{\breve{p}_j(k)\}$, con

$$\breve{p}_j(k) = \frac{\breve{d}_j(k)^2}{\sum_{\ell=1}^{J} \breve{d}_\ell(k)^2}, \qquad j = 1, \ldots, J. \tag{4.6}$$

4.1.4. Distribución curvelets

Continuando con la idea esbozada en la distribución direccional, se construyó una distribución a partir de coeficientes de curvelet, capaces de capturar con mayor detalle variaciones en diferentes direcciones. Se realiza la transformada en base a los códigos distribuidos por E. Candès, L. Demanet, D. Donoho y L. Ying [3]. Los programas originales para la implementación de la transformada vía *wrapping* fueron modificadas para descartar los pasos de decimación.

Como se dijo en la sección 2.2.4, la escala más gruesa es isotrópica, por lo que no es considerada dentro del estudio. Por otro lado, Candès et al. [103] abordan el problema del diseño de una base de curvelets apropiada para la escala más fina. De acuerdo a lo indicado en ese trabajo, un muestreo demasiado grueso de las curvelets a esa escala impide ver claramente la dirección de las oscilaciones. Cálculos preliminares mostraron la presencia de este efecto, por lo que se decidió descartar los coeficientes procedentes de la escala más fina.

Sea A la imagen que se desea analizar. Se calcula la transformada curvelet discreta con J escalas y ℓ_c direcciones en la segunda escala mas gruesa, donde ℓ_c es un múltiplo de 8. Se obtienen los coeficientes $\mathring{c}_{j,\ell}(k)$, $k \in \mathbb{Z}^2$, $j = 2, \ldots, J-1$, $\ell = 1, \ldots, \ell_c \cdot 2^{\lceil (J-1-j)/2 \rceil}$. Dado que

[3] http://curvelet.org/

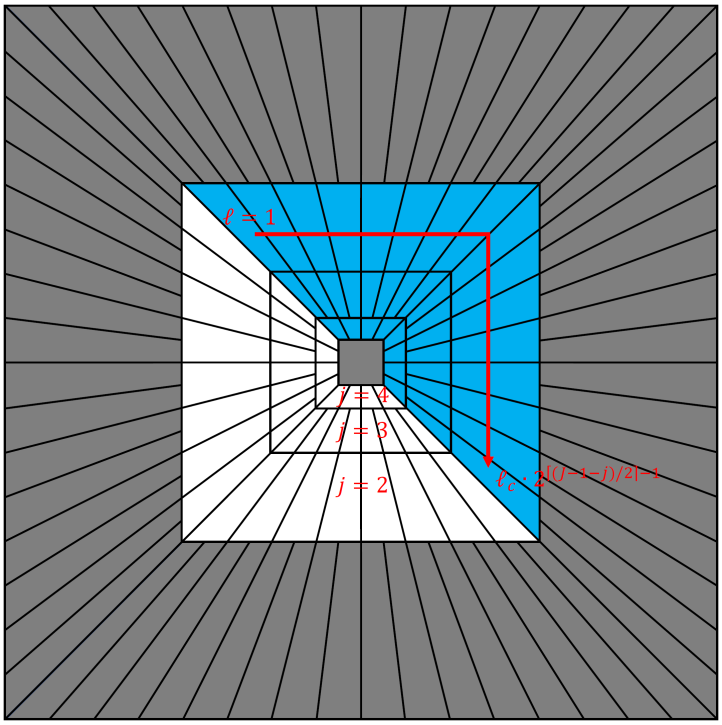


Figura 4.3: Coronización discreta utilizada sobre el espacio de frecuencias para el cálculo de los coeficientes de curvelets. Las regiones en gris (primera y última escalas) son descartadas. De las escalas restantes se consideran los ángulos correspondientes a los primeros dos cuartos de la corona (destacados en celeste). El índice ℓ, que indica la teja correspondiente, comienza a contar en la esquina superior derecha y crece en dirección horaria.

los coeficientes para $\ell = 1, \ldots, \ell_c \cdot 2^{\lceil (J-1-j)/2 \rceil - 1}$ poseen los mismos valores absolutos que los correspondientes a $\ell = \ell_c \cdot 2^{\lceil (J-1-j)/2 \rceil - 1}, \ldots, \ell_c \cdot 2^{\lceil (J-1-j)/2 \rceil}$, se decidió trabajar solo con el primer conjunto. En la figura 4.3 se muestra una representación gráfica de la coronización digital aplicada sobre el espacio de frecuencias para el cálculo de los coeficientes de curvelet que sirve para ejemplificar los distintos parámetros utilizados.

Se propone tomar los coeficientes:

$$\mathring{d}_{j,\ell}(k) = \sup_{k' \in \Delta k} \left| \mathring{c}_{j,\ell}(k') \right|, \tag{4.7}$$

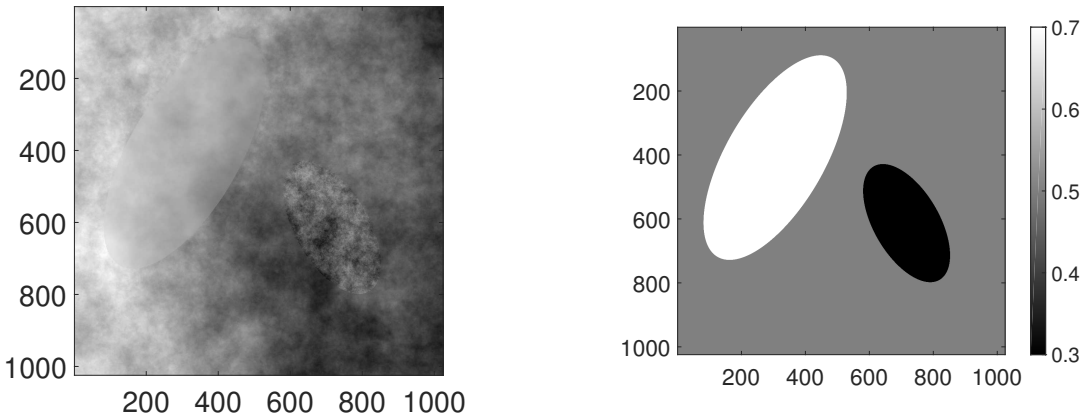
donde Δk son entornos de dimensiones $(2^j + 1) \times (2^j + 1)$ centrados en k. Los vectores de probabilidades basados en estos coeficientes se construyen como $\mathring{P}(k) = \{\mathring{p}_{j,\ell}(k)\}$, con

$$\mathring{p}_{j,\ell}(k) = \frac{\mathring{d}_{j,\ell}(k)^2}{\sum_{j=2}^{J-1} \sum_{\ell=1}^{\ell_c \cdot 2^{\lceil (J-1-j)/2 \rceil - 1}} \mathring{d}_{j,\ell}(k)^2}, \qquad j = 2, \ldots, J-1;\ \ell = 1, \ldots, \ell_c \cdot 2^{\lceil (J-1-j)/2 \rceil - 1}. \tag{4.8}$$

4.2. Aplicación sobre imágenes sintéticas

A fin de probar el desempeño de las distribuciones propuestas se plantearon una serie de ensayos sobre imágenes sintéticas. Se decidió construir figuras a partir de dos grupos de texturas. Por un lado se trabajó con imágenes que poseen regiones caracterizadas por un exponente de regularidad uniforme, obtenidas por medio de movimiento Browniano multi-fraccionario (mBm) [106]. Si bien este tipo de texturas es poco común en imágenes naturales, resultan una forma sencilla de estudiar la respuesta de los métodos propuestos a regiones con distinta rugosidad. Para su síntesis se utilizó nuevamente el paquete FracLab.

Por otro lado, se crearon figuras consistentes en regiones con variaciones de intensidad sinusoidales con distintas frecuencias y direcciones. Este tipo de texturas, aunque simples, per-



(a) Texturas creadas con por medio de movimiento Browniano multi-fraccionario.

(b) Exponentes de Hölder usados para la síntesis.

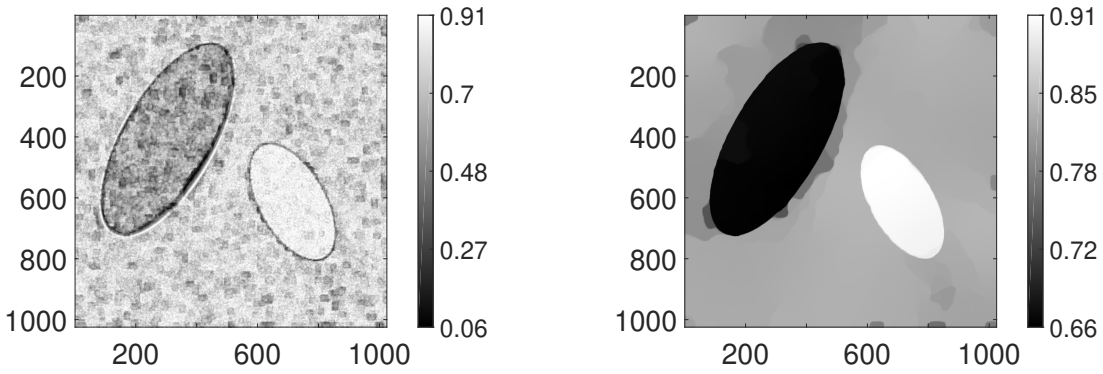
Figura 4.4: Imagen sintética construida a partir de movimiento Browniano multi-fraccionario y los exponentes de regularidad que determinan su rugosidad en cada punto.

miten estudiar la respuesta de las distribuciones a las orientaciones de los patrones.

La figura 4.4 muestra una imagen típica creada con mBm y los distintos exponentes de Hölder que determinan su rugosidad en cada punto. La figura 4.5(a) presenta los valores de entropía obtenidos a partir de la distribución no direccional, $S[\widetilde{P}]$, considerando cuatro niveles de resolución. Debido a que los coeficientes usados para su construcción tienen un desempeño análogo a las wavelet leaders para la estimación de exponentes de Hölder, es razonable suponer una respuesta positiva en la clasificación de regiones con regularidad uniforme.

Bajo la suposición de los coeficientes $\widetilde{d}_j(k)$ satisfacen una ley de potencia del tipo $\widetilde{d}_j(k) \sim \Delta k^{h(k)}$, donde $h(k)$ es el exponente de Hölder correspondiente al punto k, es posible calcular la entropía asociada a un determinado valor h reemplazando los coeficientes en la ecuación (4.2). A modo de ejemplo, considerando cuatro niveles de resolución se obtiene el gráfico $S(h)$ que se muestra en la figura 4.6. Es notable que las entropías obtenidas numéricamente en la regiones uniformes coinciden con las calculadas teóricamente a partir de los exponentes de Hölder con los que se construyó la imagen.

En la figura 4.5(a) es posible ver valores de entropía muy bajos en los bordes que separan



(a) $S[\widetilde{P}]$. (b) $S^{TV}[\widetilde{P}]$.

Figura 4.5: Entropía basada en distribución no direccional para imagen 4.4. $S[\widetilde{P}]$ representa los valores de entropía obtenidos a partir de la distribución no direccional, mientras que $S^{TV}[\widetilde{P}]$ hace referencia a los valores de entropía luego de la aplicación del proceso de optimización convexa descrito en el apéndice D.

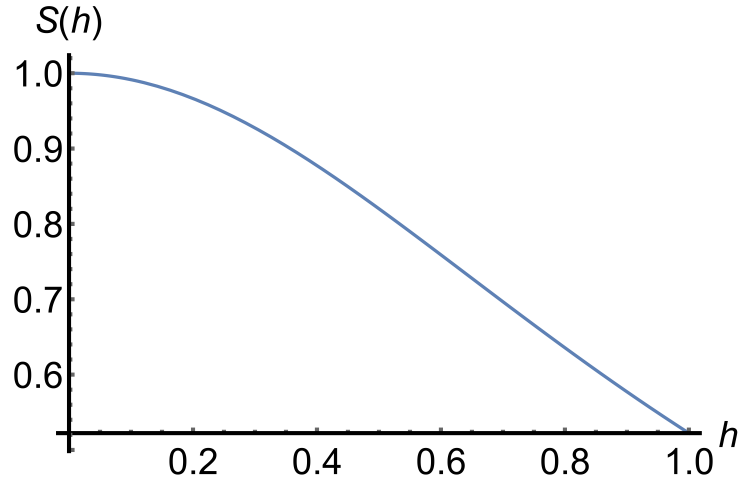


Figura 4.6: Relación teórica $S(h)$ que se obtiene suponiendo que los coeficientes $\widetilde{d}_j(k)$ satisfacen una ley de potencia para el exponente de Hölder. El cálculo fue realizado considerando cuatro niveles de resolución.

las distintas regiones. Estos valores anómalos pueden explicarse teniendo en cuenta que, dada la resolución finita de las imágenes, los coeficientes correspondientes a esas regiones responden a más de un comportamiento de escala a lo largo de los niveles de resolución. Esta ruptura de escalado es causante de estimaciones numéricas erróneas de los exponentes de Hölder. En el caso presentado se ven valores de S mucho menores a los de los puntos vecinos. Si se continúa con la hipótesis de comportamiento de escala, de modo que la figura 4.6 describe la relación $S - h$ para un cálculo con cuatro niveles, un valor de entropía menor a 0.52, como se encuentra en estos bordes, correspondería a exponentes de escala mayores a 1. Dado el contexto de la prueba realizada, en la que las texturas son construidas a partir de exponentes menores a 1, esto es erróneo. Por ese motivo, a fin de segmentar la imagen los puntos anómalos deben ser corregidos.

Debido a que los coeficientes $\widetilde{d}_j(k)$ se calculan a partir de los supremos de los coeficientes $\widetilde{w}_j^{(i)}(k)$ (véase la expresión (4.1)), la ruptura del comportamiento de escala será más notoria en las regiones de la interface con la textura más suave, es decir, en aquellas zonas caracterizadas por coeficientes de menor valor absoluto. Con esto en mente, la corrección propuesta consiste en asignarle a cada píxel anómalo el menor valor de entropía, mayor que el correspondiente a un Hölder 1, presente en su vecindario. Una vez realizada esa corrección, se aplica el proceso de optimización convexa descrito en el apéndice D, obteniéndose la entropía $S^{TV}[\widetilde{P}]$, presentada en la figura 4.5(b).

El histograma de $S^{TV}[\widetilde{P}]$ (figura 4.7) muestra tres poblaciones bien diferenciadas. A partir de su inspección es posible seleccionar umbrales que nos permiten segmentar las texturas presentes. Como ejemplo se presentan las segmentaciones correspondientes en la figura 4.8.

Las figuras 4.9, 4.10 y 4.11 muestran las entropías obtenidas para la imagen 4.4 a través de las distribuciones direccional, basada en rotaciones y basada en curvelets respectivamente. En cada una de ellas es posible ver los valores de entropía luego del proceso de suavizado (situación que se explicita con el símbolo S^{TV}) y los correspondientes histogramas.

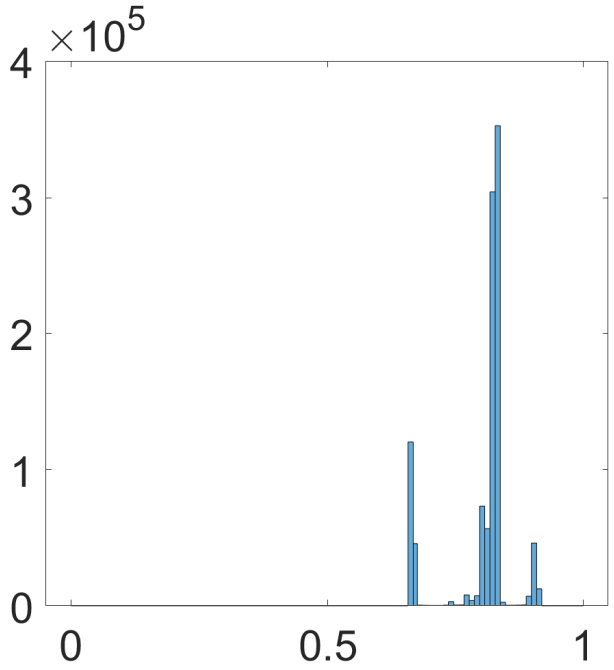
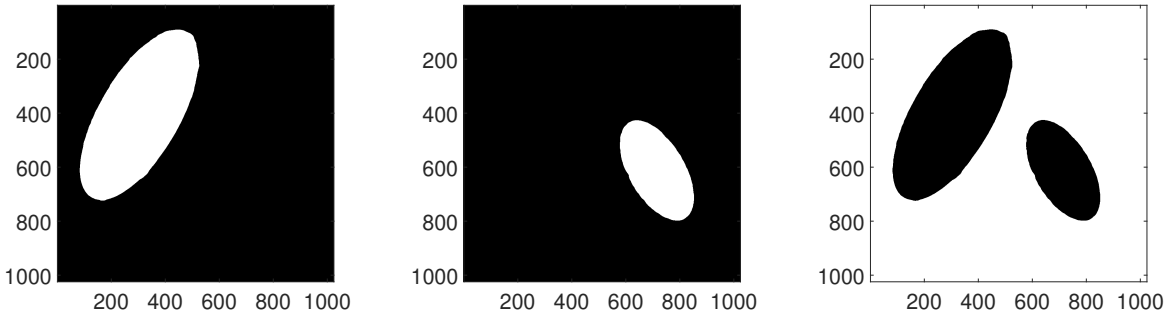
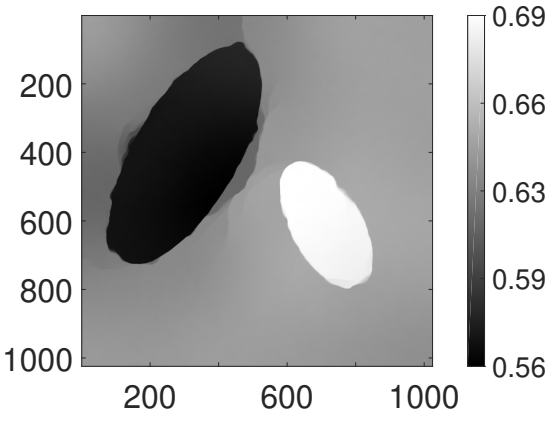


Figura 4.7: Histograma de $S^{TV}[\widetilde{P}]$ para la figura 4.4.

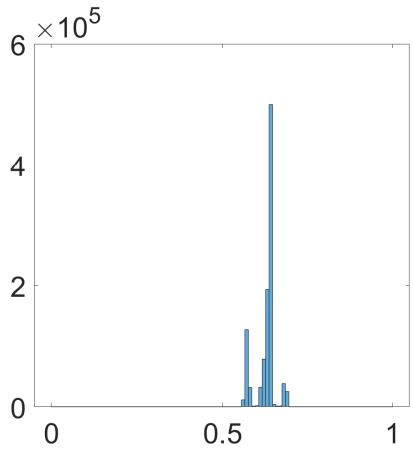


(a) $0.64 < S^{TV}[\widetilde{P}] < 0.68$. (b) $0.87 < S^{TV}[\widetilde{P}] < 0.92$. (c) $0.72 < S^{TV}[\widetilde{P}] < 0.85$.

Figura 4.8: Segmentación de la figura 4.4 a través de umbrales en el histograma 4.7.

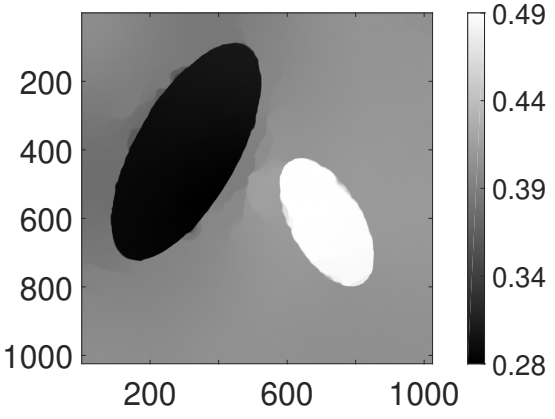


(a) $S^{TV}[\widehat{P}]$.

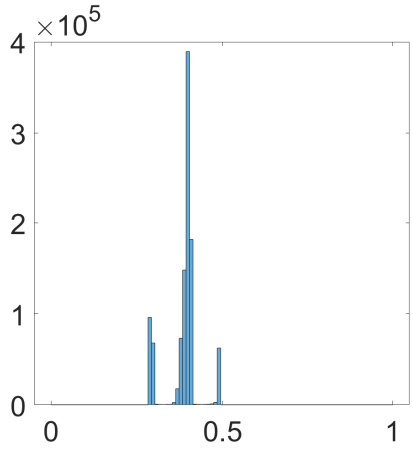


(b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\widehat{P}]$.

Figura 4.9: $S^{TV}[\widehat{P}]$ obtenida para la figura 4.4.

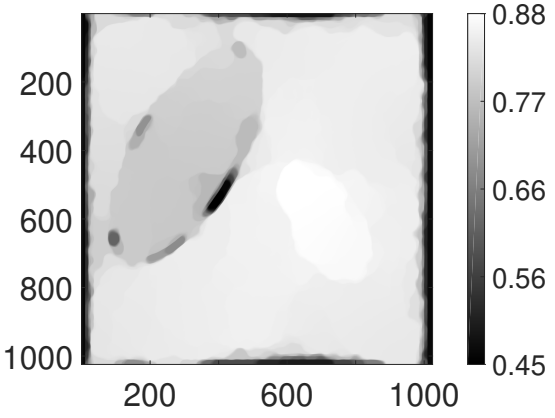


(a) $S^{TV}[\breve{P}]$.

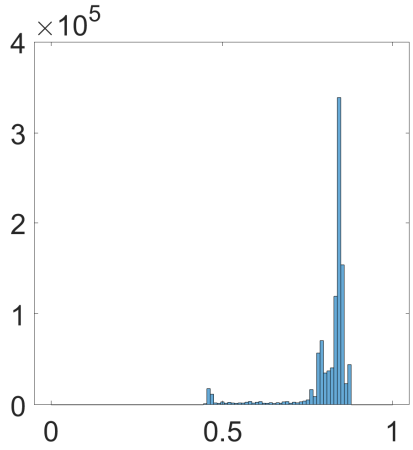


(b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\breve{P}]$.

Figura 4.10: $S^{TV}[\breve{P}]$ obtenida para la figura 4.4.



(a) $S^{TV}[\mathring{P}]$.



(b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\mathring{P}]$.

Figura 4.11: $S^{TV}[\mathring{P}]$ obtenida para la figura 4.4.

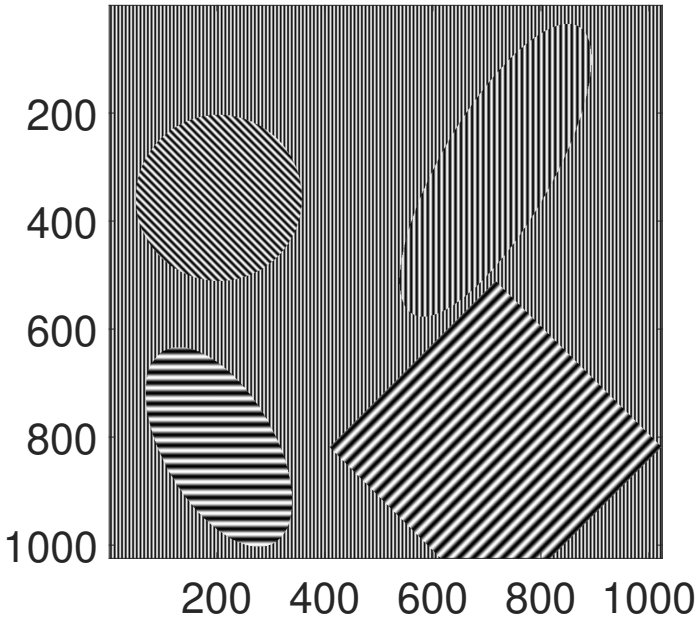
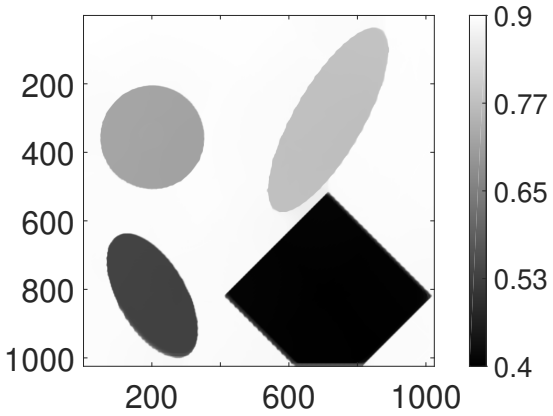


Figura 4.12: Texturas creadas a partir de patrones sinusoidales.

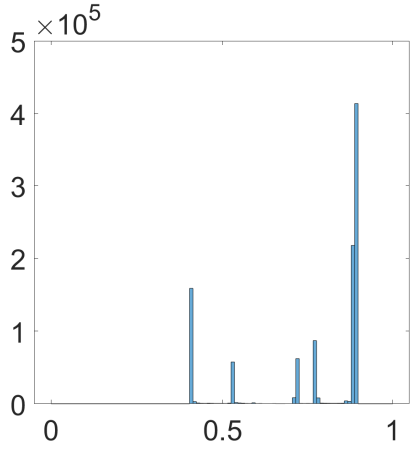
En general los métodos presentan una respuesta aceptable, presentando valores de entropías distintos para las texturas. De las cuatro distribuciones, la basada en curvelets posee el peor desempeño frente a estas texturas, lo que se ve en una menor separación entre las poblaciones en el histograma correspondiente y una clasificación visual menos clara.

Luego de las pruebas con texturas creadas a partir de mBm se procedió a evaluar las distribuciones con las imágenes con texturas sinusoidales. La figura 4.12 exhibe una imagen típica formada por cuatro regiones sobre un fondo. El fondo de la imagen posee la frecuencia más alta, seguido por las dos figuras en la parte superior de la imagen (elipse mayor y círculo). Estas poseen patrones con la misma frecuencia pero orientaciones distintas. Por último, la elipse en la esquina inferior izquierda y el rombo de la parte inferior derecha comparten la frecuencia más baja pero poseen, nuevamente, patrones con orientaciones diferentes.

Las figuras 4.13- 4.16 corresponden al los análisis realizados sobre la imagen 4.12 con las distintas distribuciones de probabilidad.

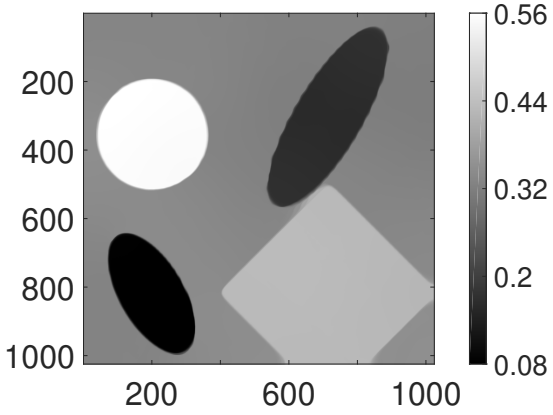


(a) $S^{TV}[\widetilde{P}]$.

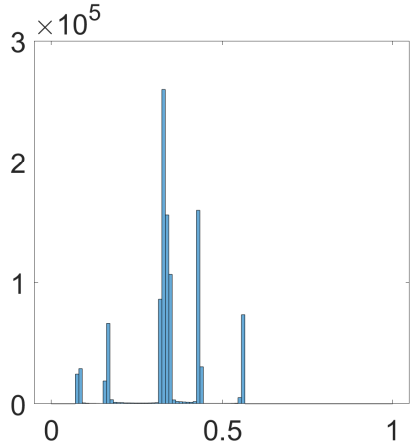


(b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\widetilde{P}]$.

Figura 4.13: $S^{TV}[\widetilde{P}]$ obtenida para la figura 4.12.

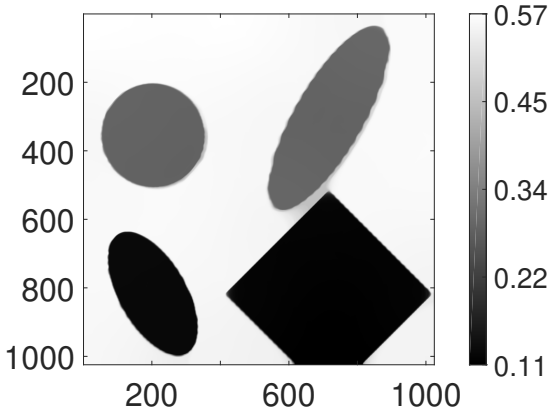


(a) $S^{TV}[\widehat{P}]$ obtenida para la figura 4.12.

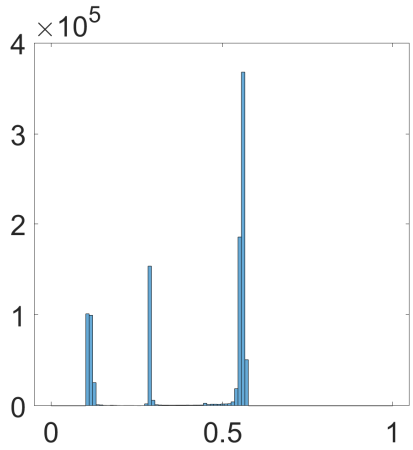


(b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\widehat{P}]$.

Figura 4.14: $S^{TV}[\widehat{P}]$ obtenida para la figura 4.12.

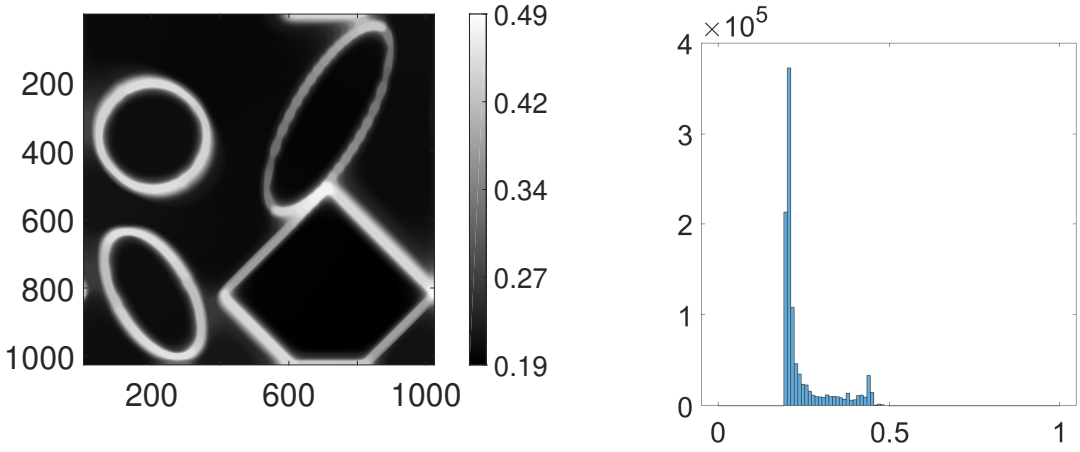


(a) $S^{TV}[\check{P}]$ obtenida para la figura 4.12.



(b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\check{P}]$.

Figura 4.15: $S^{TV}[\check{P}]$ obtenida para la figura 4.12.



(a) $S^{TV}[\mathring{P}]$. (b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\mathring{P}]$.

Figura 4.16: $S^{TV}[\mathring{P}]$ obtenida para la figura 4.12.

Respecto de la distribución $\widetilde{P}$, el cálculo de la figura 4.13 se realizó con cuatro niveles de resolución. En este caso no se realizó ninguna corrección a los valores obtenidos previamente al proceso de suavizado. Es posible ver que, si bien la entropía identifica claramente las distintas estructuras, le asigna distintos valores a cada una de ellas. Esto es incorrecto si se tiene en cuenta que algunas de las figuras comparten la misma textura variando su orientación.

El caso de la entropía calculada para la distribución direccional es similar. En la figura 4.14, donde se presenta un análisis con tres escalas, se ve que el círculo y la elipse mayor poseen entropías distintas cuando presentan la misma frecuencia en su patrón. Lo mismo ocurre entre la elipse inferior izquierda y el rombo. Esto se debe a que cuando los patrones no se encuentran orientados horizontal o verticalmente, existe un coeficiente significativo en cada una de las direcciones. Incluso, si el patrón forma un ángulo de $\pi/4$ con la dirección horizontal, en la transformación no se obtienen solamente valores altos para el coeficiente de detalle diagonal, sino que este viene acompañado por valores significativos en las otras dos direcciones.

La dependencia de la distribuciones anteriores con la orientación de las texturas motivó la propuesta de la distribución basada en rotaciones. Suponiendo que se analiza una variación

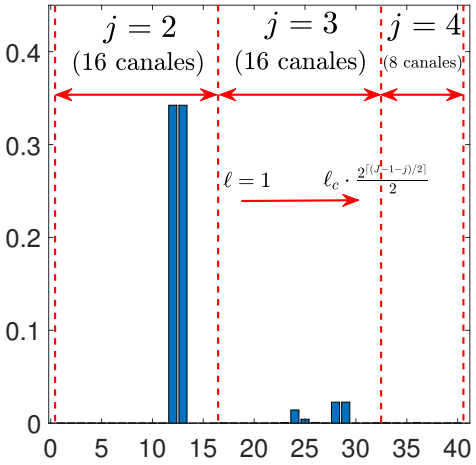
de intensidad a una escala dada y con cierta orientación, es claro que los coeficientes de detalle de la UDWT serán mayores cuando la orientación de dicha variación coincida con alguna de las direcciones contempladas en la transformada. La idea de esta distribución es capturar la mayor variación en cada escala, independientemente de su orientación. Por ese motivo se toma el máximo para cada nivel de resolución de los coeficientes resultantes de aplicar la UDWT a distintas rotaciones.

La figura 4.15 muestra el resultado del análisis con tres escalas. Puede verse que la distribución $\breve{P}$ asocia valores distintos de entropía a las diferentes texturas independientemente de su orientación. A diferencia de las definiciones anteriores, en el histograma correspondiente pueden distinguirse claramente tres poblaciones, lo que facilita una correcta segmentación de las texturas.

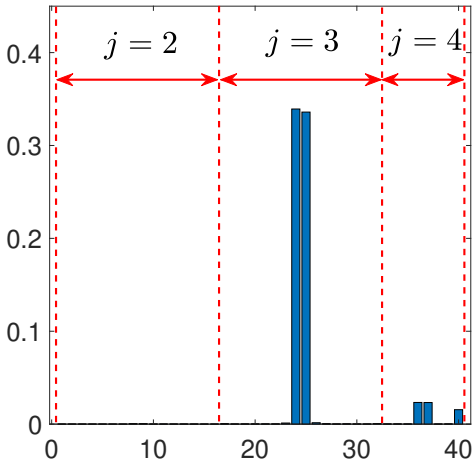
Retomando la idea de estudiar variaciones en distintas direcciones se propuso la distribución de probabilidades basada en curvelets. Los resultados de un análisis con cinco niveles de resolución[4] y dieciséis direcciones en la segunda escala más gruesa se presentan en la figura 4.16. En principio este resultado puede parecer erróneo, ya que todas las texturas tienen asociadas la misma entropía, diferenciándose solo los puntos que pertenecen a una interfaz entre regiones. Sin embargo, cuando se mira detenidamente los distintos coeficientes con los que se construye la distribución, se observa que este resultado es razonable.

Como se ve en la figura 4.17, los coeficientes correspondientes a los distintos puntos indicados muestran una respuesta alta para una escala y orientación particulares, reaccionando a los patrones texturales sinusoidales. Si bien esto no permite distinguir las texturas presentes en la figura 4.12, la capacidad de individualizar variaciones con diferentes orientaciones hace que la distribución propuesta resulte de utilidad en escenarios en los que se presenten posibles

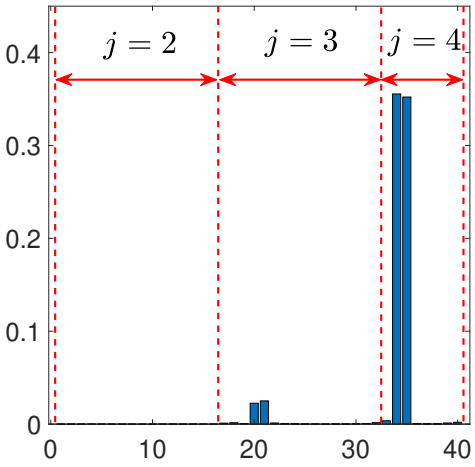
[4]Recordemos que la escala gruesa y el nivel de resolución más fina no se consideran en el análisis, por lo que en este caso tenemos tres niveles.



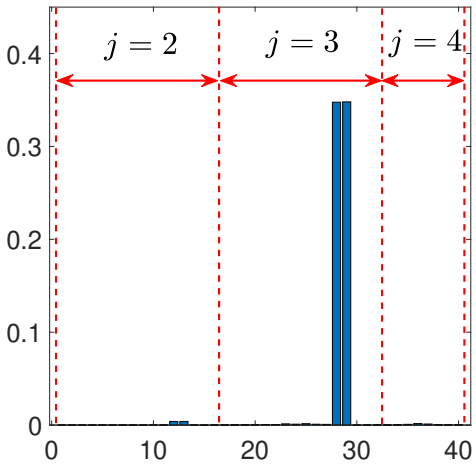
(a) $(x, y) = (400, 600)$.



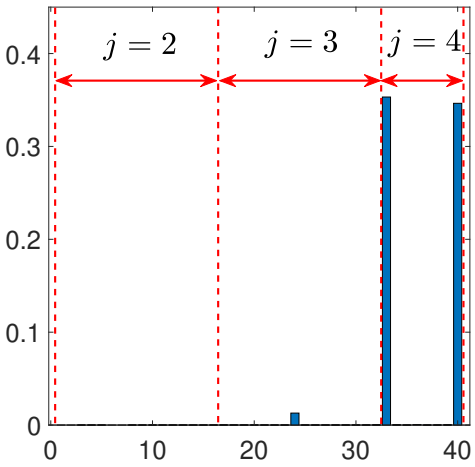
(b) $(x, y) = (200, 350)$.



(c) $(x, y) = (200, 800)$.

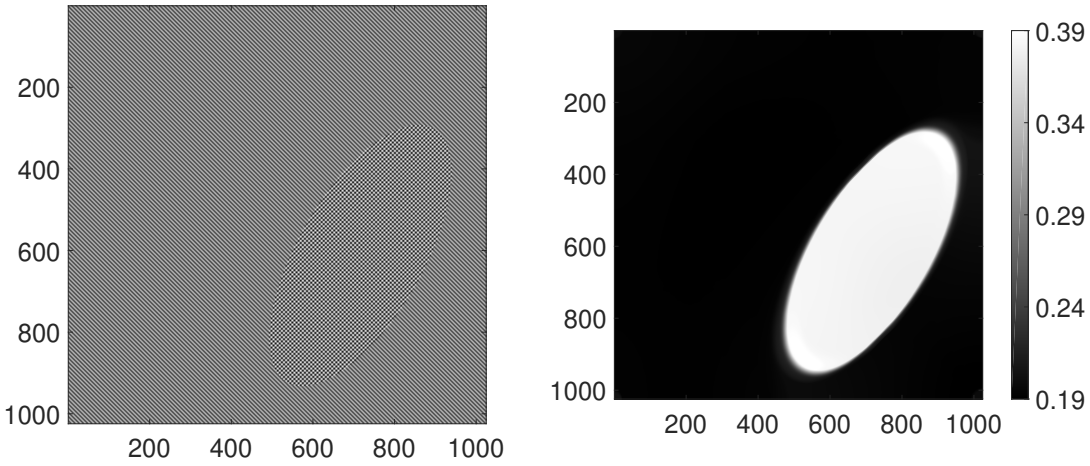


(d) $(x, y) = (700, 350)$.



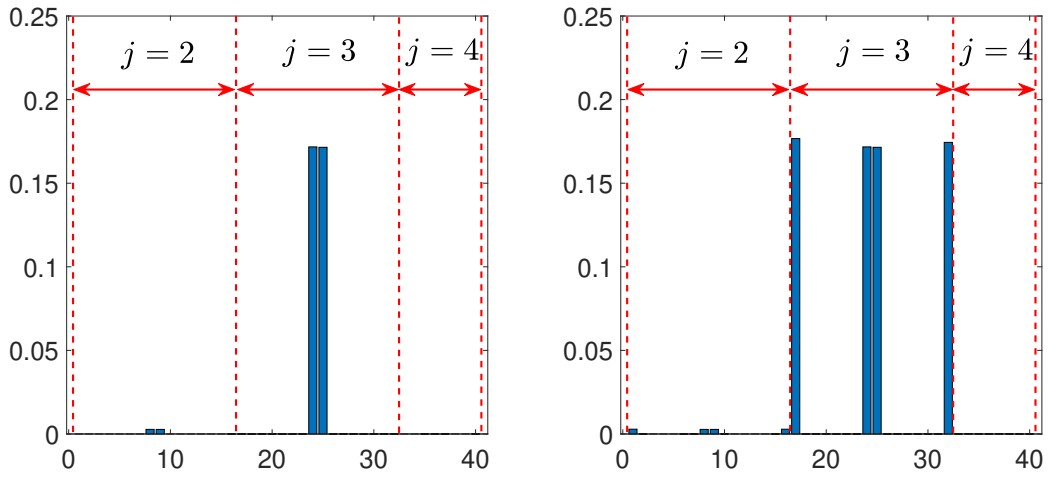
(e) $(x, y) = (750, 800)$.

Figura 4.17: Coeficientes $\mathring{d}_{j,\ell}(k)$ correspondientes a distintas coordenadas de la figura 4.12.



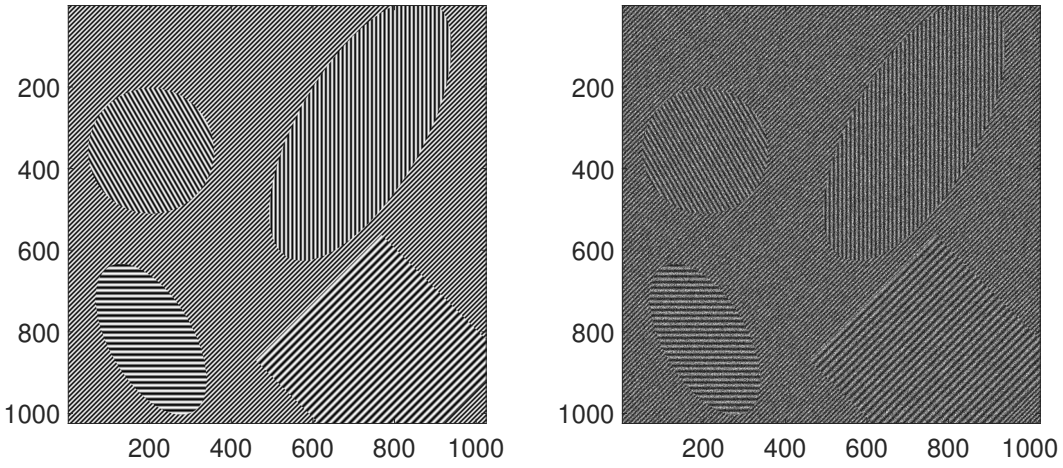
(a) Imagen sinusoidal. (b) $S^{TV}[\mathring{P}]$.

Figura 4.18: Imagen sintética creada para el estudio de los coeficientes de la distribución $\mathring{P}$.



(a) $(x, y) = (300, 300)$. (b) $(x, y) = (700, 700)$.

Figura 4.19: Coeficientes $\mathring{d}_{j,l}(k)$ correspondientes a distintas coordenadas de la figura 4.18(a).

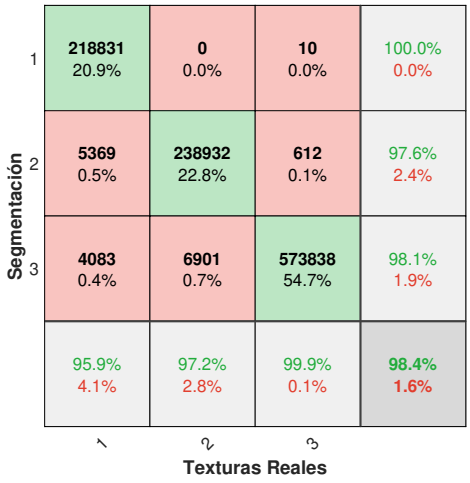


(a) $v = 0$. (b) $v = 0.1$.

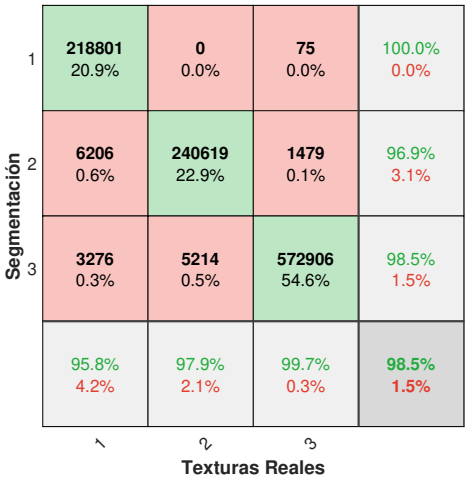
Figura 4.20: Imagen sintética usada para el estudio de la influencia del ruido en la clasificación por medio de la distribución $\breve{P}$.

superposiciones de patrones. Como ejemplo se presenta la figura 4.18(a), construida mediante la adición de dos texturas sinusoidales con la misma frecuencia y diferente orientación. Como vemos en los gráficos de la figura 4.19, los coeficientes en este caso dan cuenta de la superposición, presentándose coeficientes extra en los puntos donde coexisten ambas señales sinusoidales. En este caso, la entropía (figura 4.18(b)) logra distinguir el fondo, con una única oscilación, de la elipse en la que se superponen oscilaciones en dos direcciones.

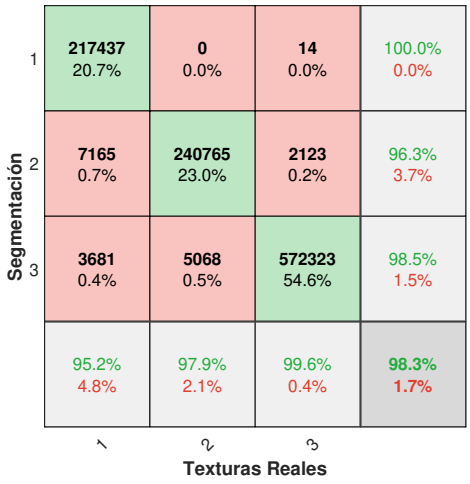
Por último, teniendo en cuenta el buen desempeño de la distribución $\breve{P}$ en las pruebas sintéticas, se estudió su respuesta al ruido en los datos de entrada. Para eso, se construyó la imagen A (figura 4.20), consistente en tres texturas sinusoidales de diferentes frecuencias, y se la contaminó con un ruido de la forma $I = A + n \cdot A$, donde n es un ruido uniformemente distribuido de media 0 y varianza v. Se realizaron pruebas con varianzas $v = 0$, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08 y 0.1 consistentes en el cálculo de la entropía $S^{TV}[\breve{P}]$, la segmentación de la imagen a partir de umbrales sobre esta entropía y la comparación de dicha segmentación con las posiciones reales de las texturas. La figura 4.21 muestra las matrices de confusión para los distintos ensayos. En



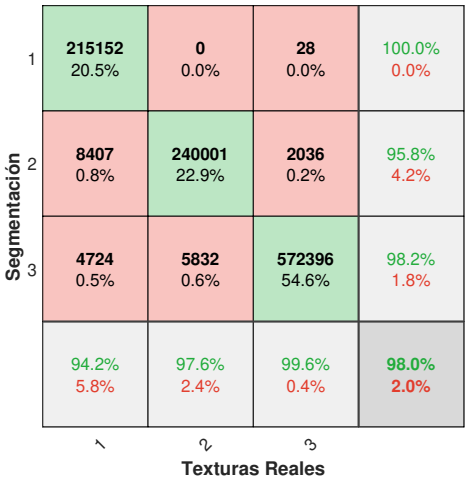
(a) $v = 0$.



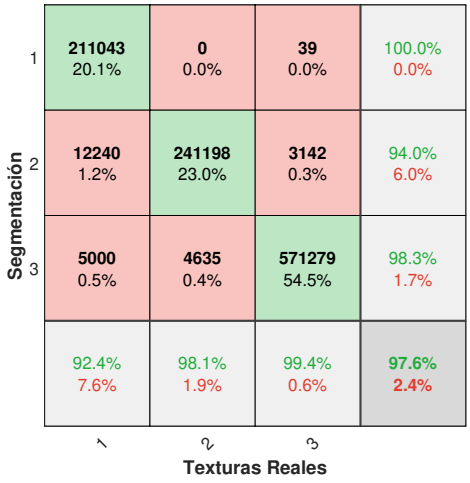
(b) $v = 0.02$.



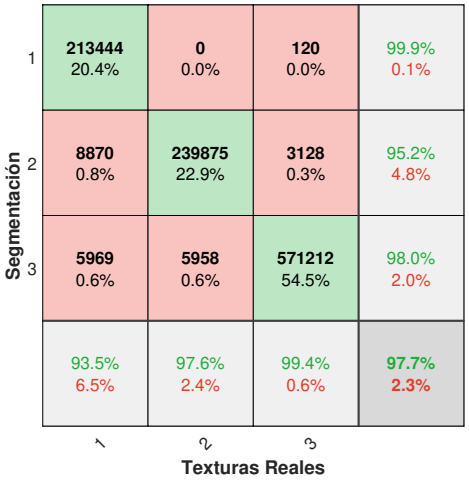
(c) $v = 0.04$.



(d) $v = 0.06$.



(e) $v = 0.08$.



(f) $v = 0.1$.

Figura 4.21: Matrices de confusión correspondientes a la segmentación de la imagen 4.20 contaminada con distintos niveles de ruido.

ellas se observa una caída en los índices de calidad de la clasificación a medida que aumenta la intensidad del ruido aplicado. Sin embargo, esa caída no es significativa, dando cuenta de la buena clasificación del método para estos niveles de ruido.

4.3. Aplicación sobre datos de sensores remotos

Con base en los resultados obtenidos en la sección anterior, se decidió no proceder con las distribuciones $\widetilde{P}$ y $\widehat{P}$ debido a la dependencia de los resultados con la orientación de las texturas. Por otro lado, las distribuciones $\breve{P}$ y $\mathring{P}$ mostraron un buen desempeño en las pruebas con imágenes sintéticas, por lo que en esta sección se las aplicará a imágenes de sensores remotos.

Se estudian datos procedentes de sensores ópticos y SAR. En primera instancia se consideraron los de naturaleza óptica que, debido a su física relativamente sencilla y su reducido nivel de ruido, son fácilmente interpretables.

Se trabajó con dos conjuntos de datos, uno correspondiente al programa NAIP de USDA, y el otro formado por datos de los satélites Sentinel 2. A pesar de su acotada disponibilidad geográfica y temporal, las imágenes NAIP fueron seleccionadas por su alta resolución espacial, lo que nos permite estudiar texturas formadas por diferentes cultivos. Por otro lado, los datos Sentinel 2 fueron elegidos por el acceso libre a un catálogo que cubre la mayor parte del planeta de forma periódica. En este caso, dada la resolución espacial de los datos, se centró la atención en distinguir estructuras de dimensiones mayores; puntualmente, se hipotetizó que la aplicación de los métodos sobre estos datos permitiría distinguir distintos patrones de organización urbana.

La figura 4.22 presenta un recorte de 1024×1024 píxeles de una imagen del programa NAIP en la que se puede apreciar una serie de parcelas cultivadas. La imagen corresponde a la banda espectral de los 0.65 µm de longitud de onda (rojo visible) y posee una resolución espacial de 0.6 m. El hecho de que cada una de las parcelas presente una textura diferente facilita la

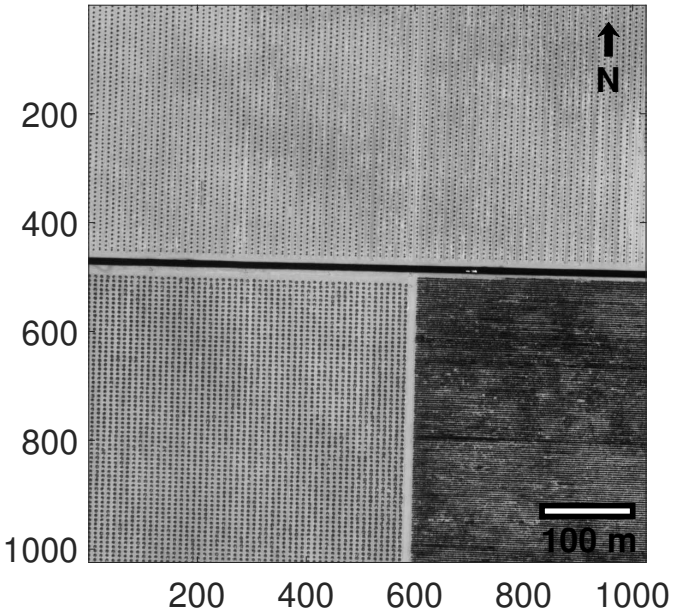


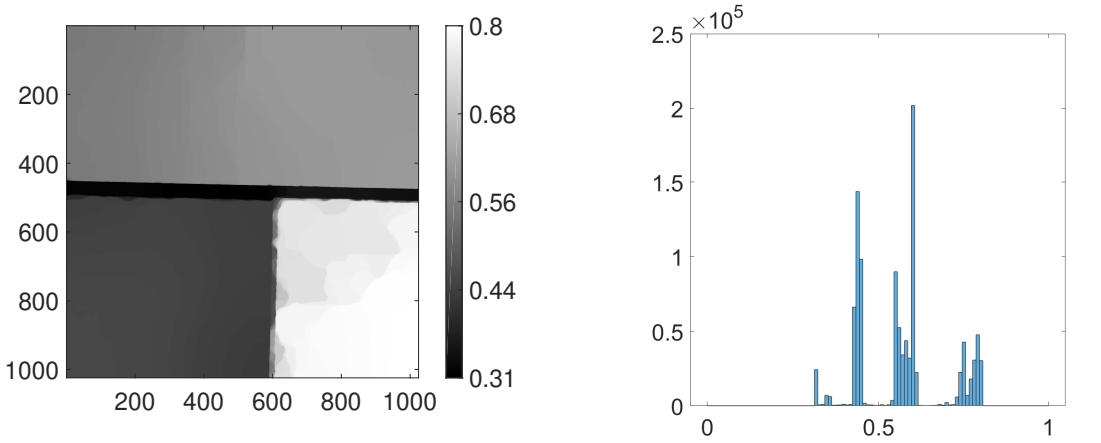
Figura 4.22: Fragmento de imagen correspondiente al Programa NAIP de USDA. Banda correspondiente a la longitud de onda aproximada de 0.65 µm (rojo).

comparación de los resultados.

En la figura 4.23 se observa la entropía obtenida para la distribución $\breve{P}$ y su correspondiente histograma. Este cálculo se realizó considerando 3 escalas y 6 rotaciones entre $[0, \pi/2)$. Se ve claramente que las distintas texturas tienen asociados diferentes valores de entropía.

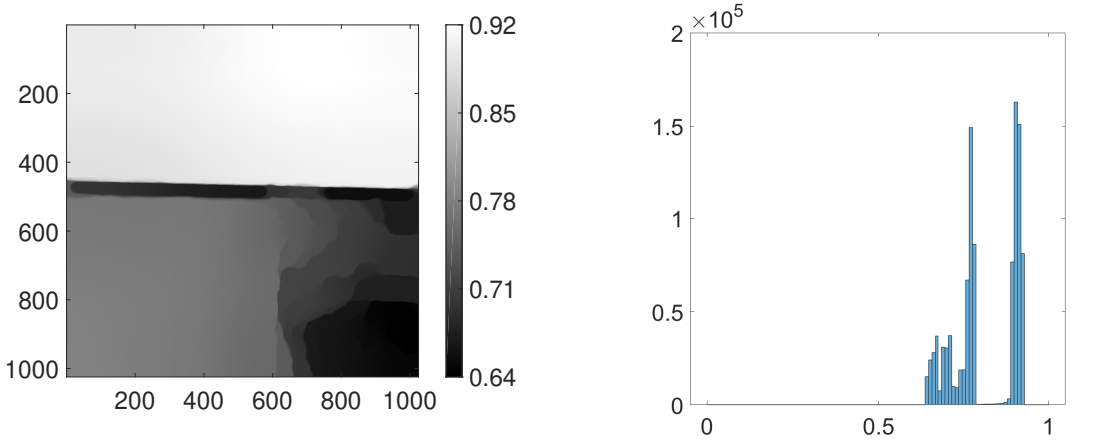
La entropía $S[\mathring{P}]$, calculada sobre 4 escalas y 8 direcciones para la segunda escala más gruesa, es presentada en la imagen 4.24. Los resultados de la detección de texturas también son satisfactorios, aunque la segmentación de las dos texturas presentes en la región inferior resulta más confusa que en el caso de la distribución basada en rotaciones. Dicha confusión se debe en parte a que esta distribución parece tener una mayor sensibilidad a ligeras variaciones en las texturas constituidas por lineas paralelas. Esto se evidencia en las variaciones de entropía de la parcela en la esquina inferior derecha (también presentes en $S[\breve{P}]$), que ocurren debido al angostamiento de los espacios entre las lineas que forman la textura.

La figura 4.25 muestra la comparación entre las segmentaciones realizadas con las dis-



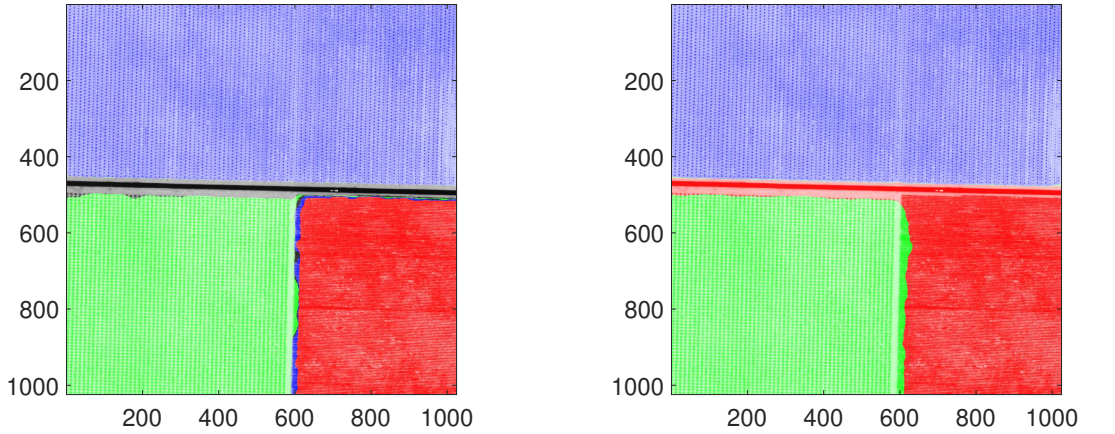
(a) $S^{TV}[\breve{P}]$. (b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\breve{P}]$.

Figura 4.23: $S^{TV}[\breve{P}]$ correspondiente a la imagen 4.22.



(a) $S^{TV}[\mathring{P}]$. (b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\mathring{P}]$.

Figura 4.24: $S^{TV}[\mathring{P}]$ correspondiente a la imagen 4.22.



(a) → $0.63 < S^{TV}[\breve{P}] < 0.81$ → $0.4 < S^{TV}[\breve{P}] < 0.47$ → $0.5 < S^{TV}[\breve{P}] < 0.63$.

(b) → $0.6 < S^{TV}[\mathring{P}] < 0.75$ → $0.75 < S^{TV}[\mathring{P}] < 0.8$ → $0.8 < S^{TV}[\mathring{P}] < 0.93$.

Figura 4.25: Comparación entre las segmentaciones realizadas a partir de $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$.

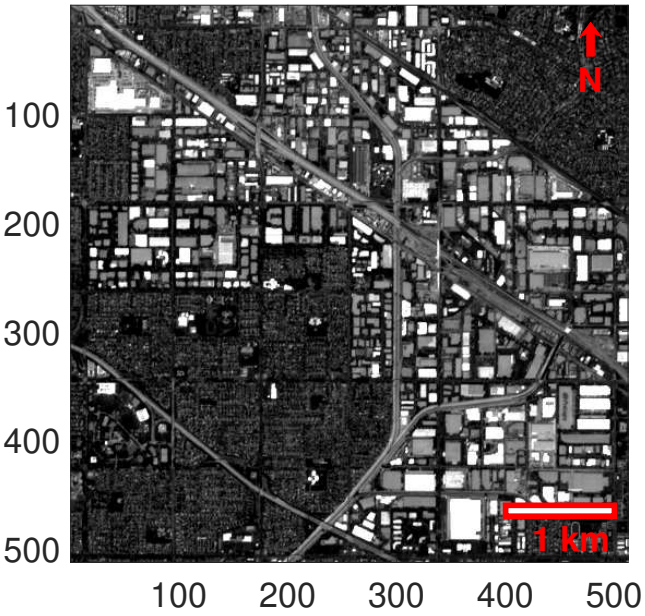
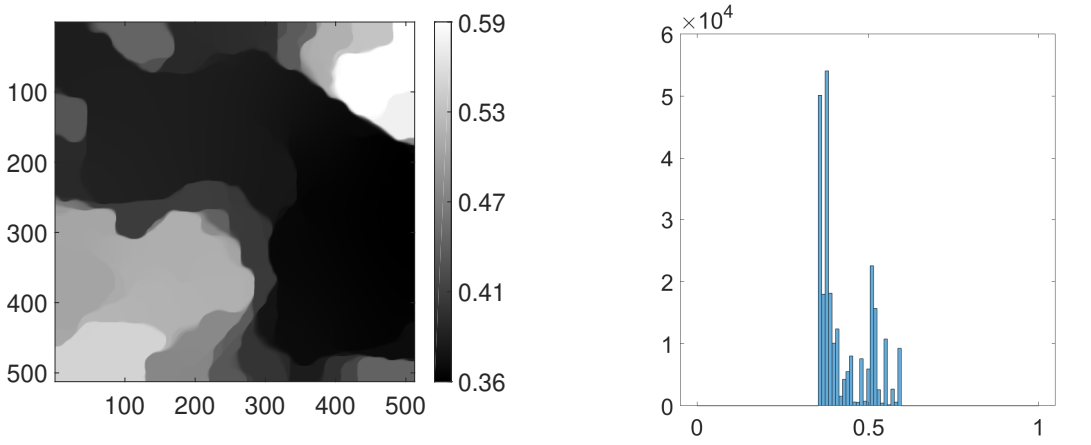


Figura 4.26: Fragmento de la banda de 664 nm de una captura del satélite Sentinel 2 B.

tintas distribuciones. Si bien los valores de entropía no coinciden en los dos casos, las regiones fueron resaltadas con el mismo color en ambas imágenes para facilitar la interpretación visual. A pesar de que ambos métodos capturan correctamente las distintas regiones, la distribución $\breve{P}$ parece presentar una menor distorsión en los bordes entre regiones.

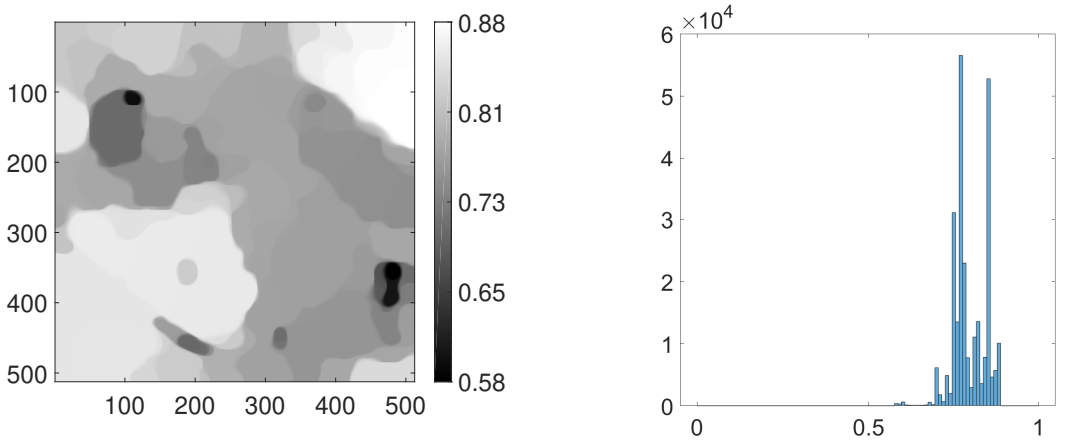
Continuando con los sensores ópticos, la figura 4.26 presenta un recorte de 512×512 píxeles de la banda de 664 nm de una captura del satélite Sentinel 2 B en la que se puede observar una zona urbana con áreas residenciales en las esquinas superior derecha e inferior izquierda separadas por una zona industrial que atraviesa la captura diagonalmente. Dado que en las zonas residenciales predominan viviendas con tamaños del orden de la resolución espacial de la captura, mientras que la zona industrial posee construcciones de un tamaño significativamente mayor, es posible distinguir estas dos regiones a partir de las texturas constituidas por los patrones de edificación.

Las figuras 4.27 y 4.28 muestran las entropías $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$ respectivamente para



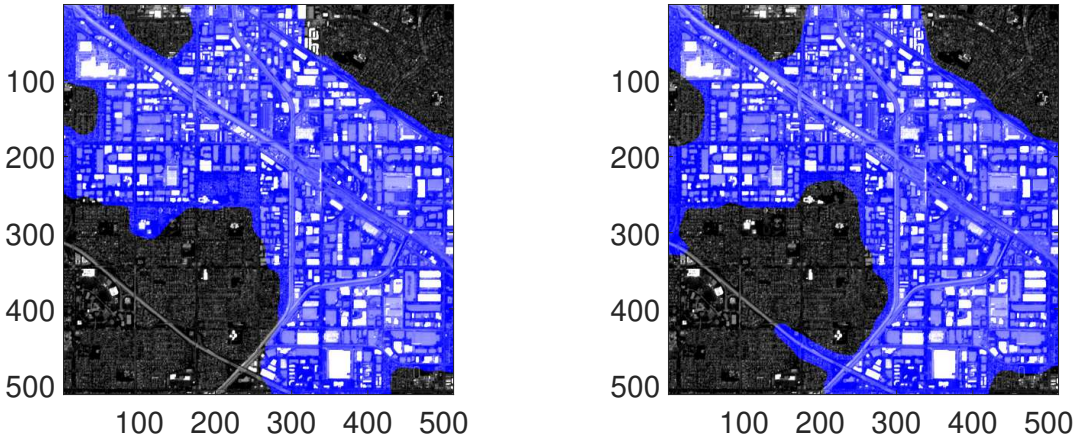
(a) $S^{TV}[\breve{P}]$. (b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\breve{P}]$.

Figura 4.27: $S^{TV}[\breve{P}]$ correspondiente a la imagen 4.26.



(a) $S^{TV}[\mathring{P}]$. (b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\mathring{P}]$.

Figura 4.28: $S^{TV}[\mathring{P}]$ correspondiente a la imagen 4.26.



(a) → $0.35 < S^{TV}[\breve{P}] < 0.42$. (b) → $0.5 < S^{TV}[\mathring{P}] < 0.82$.

Figura 4.29: Comparación entre las segmentaciones realizadas a partir de $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$.

este caso de estudio. La primera fue calculada con 3 escalas y 6 rotaciones, mientras que para la segunda se consideraron 4 escalas y 12 ángulos en la segunda escala más gruesa. Resulta esperable que la región industrial tenga valores de entropía menores que la zona residencial. Para el caso de la distribución $\breve{P}$, la zona residencial posee coeficientes de similar intensidad a lo largo de varias escalas, mientras que en la zona industrial es posible encontrar coeficientes significativamente mayores para las resoluciones más bajas. El caso de la distribución $\mathring{P}$ es similar; las zonas industriales presentan coeficientes fuertes en los niveles de resolución más bajos, y débiles en las frecuencias espaciales más altas independientemente de la orientación. Por su parte, las zonas residenciales se caracterizan por tener coeficientes de similar intensidad a lo largo de todas las escalas estudiadas.

La figura 4.29 permite comparar las segmentaciones realizadas a partir de cada método. Ambas clasificaciones presentan resultados similares, con ligeras diferencias en los bordes entre regiones. La diferencia más notable entre ambos resultados se da en un segmento de autopista, en la región inferior de la captura. El valor de $S^{TV}[\breve{P}]$ para dicha estructura es parecido a los de la zona residencial, mientras que la entropía $S^{TV}[\mathring{P}]$ le asigna propiedades similares a las de la zona industrial.

Con respecto a las imágenes SAR, se trabajó con datos procedentes de los satélites ALOS 1 y Sentinel 1. La motivación para el uso de los datos sentinel 1 es análoga a la manifestada para los datos sentinel 2, es decir, su catalogo en continua expansión y de acceso libre. Por otro lado, a pesar de que la misión ALOS 1 finalizó en 2011, sus datos son relevantes por corresponder a la banda L del espectro electromagnético (30–15 cm de longitud de onda) y poseer un catálogo de libre acceso con una amplia cobertura de la superficie terrestre. Eso permite realizar pruebas con este tipo de datos, que podrían aplicarse en un futuro a otros sensores de la misma banda espectral como los correspondientes a los satelites ALOS 2 o SAOCOM 1.

En la figura 4.30 se observa un fragmento de 1024×1024 píxeles de la banda HH (dB) de

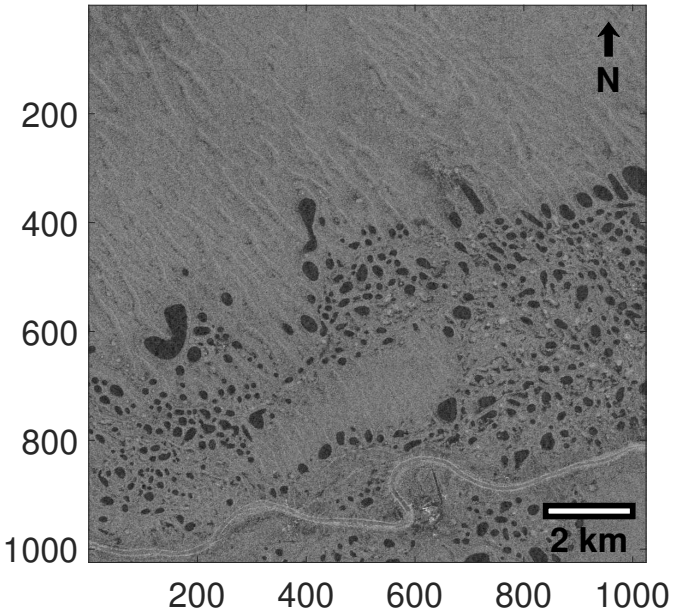
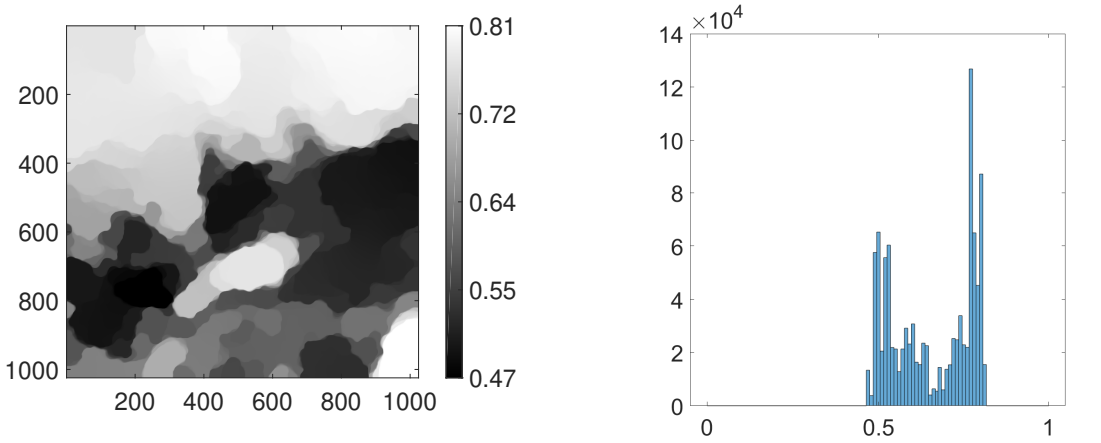


Figura 4.30: Fragmento de imagen ALOS 1 en banda HH.

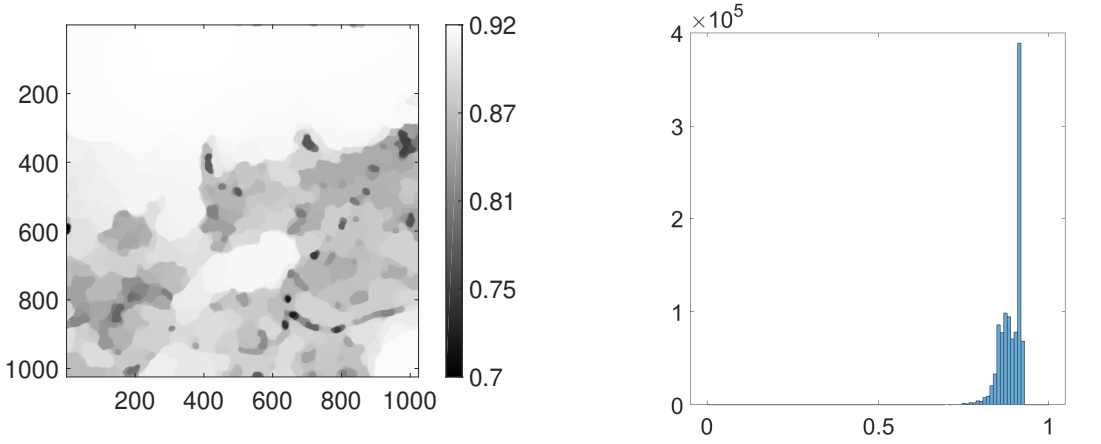
una captura procedente del sensor ALOS PALSAR, que muestra una serie de lagunas próximas al cauce de un río en un paisaje preponderantemente desértico. Las figuras 4.31 y 4.32 muestran los análisis sobre esta imagen para las dos distribuciones. La distribución sobre rotaciones fue calculada con 3 escalas y 6 rotaciones; por otro lado la distribución basada en curvelets se obtuvo para 4 niveles de resolución y 8 ángulos. En ambas puede verse como la región cubierta por lagunas posee una entropía menor que las zonas áridas circundantes. La entropía en la región de lagunas es heterogénea, lo cual es razonable ya que las lagunas no poseen una uniformidad en sus tamaños y formas, dando lugar a una textura irregular. Es necesario notar que la entropía $S[\mathring{P}]$ muestra una menor diferencia entre las dos regiones, lo que podría denotar una baja sensibilidad a este tipo de texturas.

La comparación entre las segmentaciones realizadas a partir de las dos entropías suavizadas presentada en la figura 4.33 muestra nuevamente una gran coincidencia. A pesar de la dificultad introducida por ruido speckle característico de estos datos vemos que las entropías han



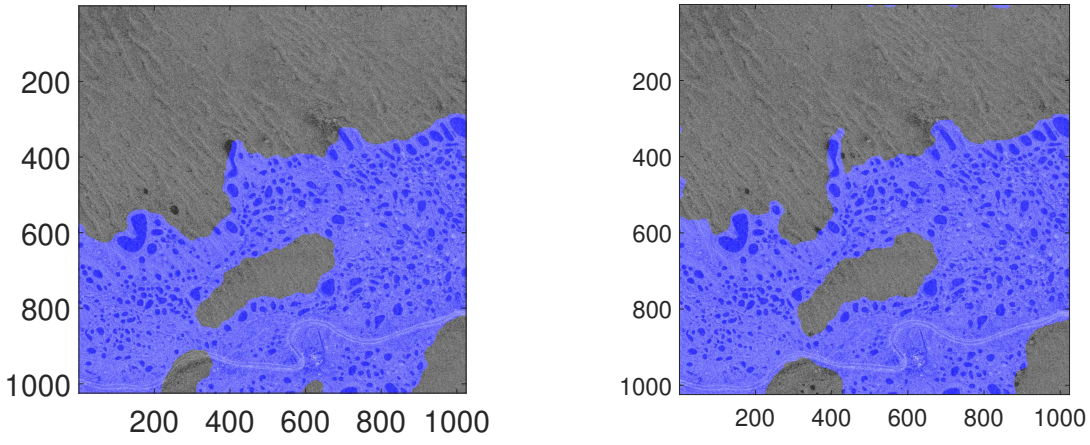
(a) $S^{TV}[\breve{P}]$. (b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\breve{P}]$.

Figura 4.31: $S^{TV}[\breve{P}]$ correspondiente a la imagen 4.30.



(a) $S^{TV}[\mathring{P}]$. (b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\mathring{P}]$.

Figura 4.32: $S^{TV}[\mathring{P}]$ correspondiente a la imagen 4.30.



(a) → $0.45 < S^{TV}[\breve{P}] < 0.65$. (b) → $0.6 < S^{TV}[\mathring{P}] < 0.9$.

Figura 4.33: Comparación entre las segmentaciones realizadas a partir de $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$.

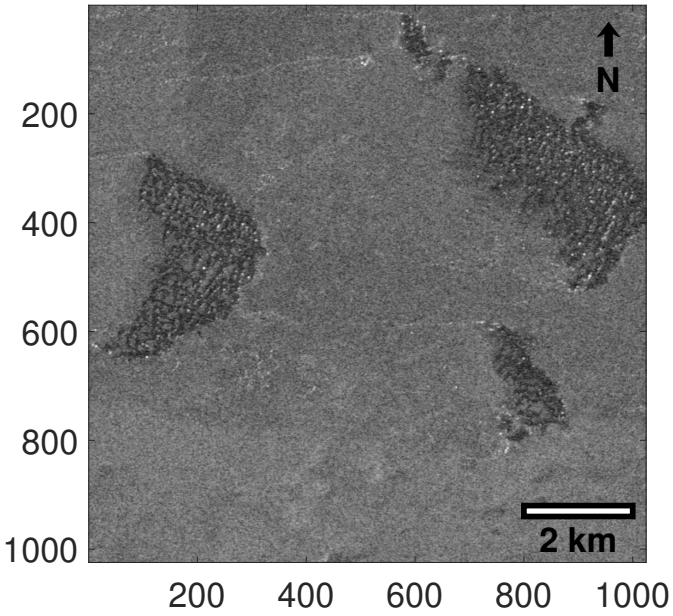
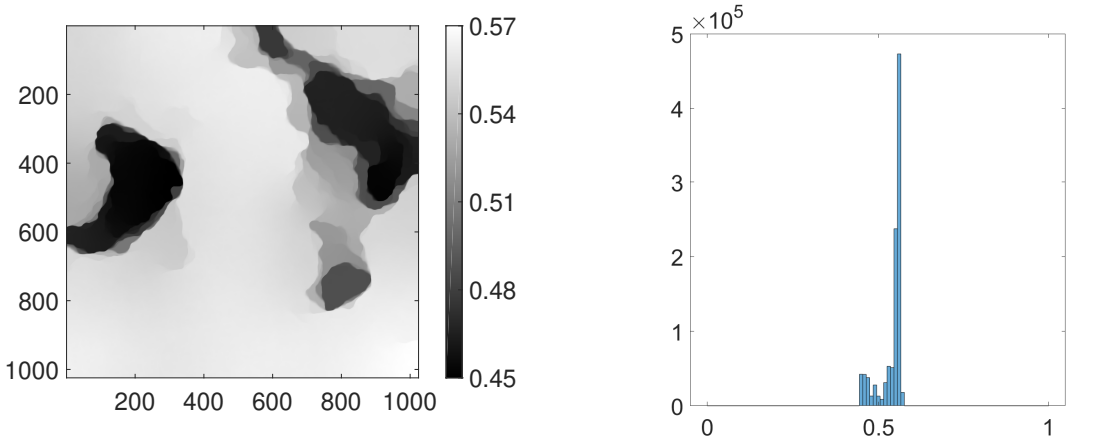


Figura 4.34: Fragmento de imagen $S1_1$ en banda VV.

permitido segmentar de forma aceptable la textura correspondiente a la región de lagunas.

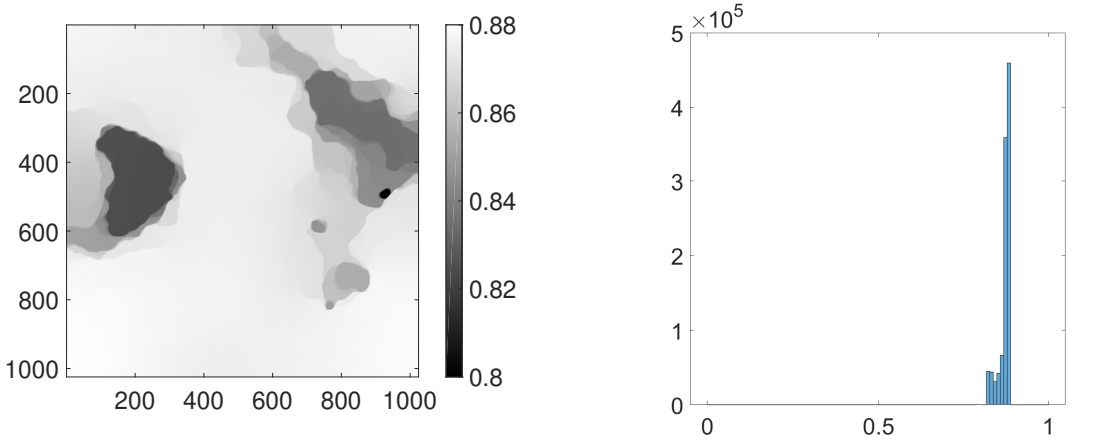
Por último, se estudia un ejemplo de dato SAR procedente del satélite Sentinel 1 A. La figura 4.34 es un recorte 1024×1024 píxeles de la banda de polarización VV, presentada en unidades de dB. Se puede apreciar una región desértica interrumpida por la presencia de grupos de dunas.

Se calcularon las entropías para la distribución $\breve{P}$ con 3 niveles de resolución y 6 rotaciones y para $\mathring{P}$ con 4 escalas y 8 ángulos en la segunda escala más gruesa. Estos resultados se presentan en las figuras 4.35 y 4.36 respectivamente. Las regiones cubiertas por dunas poseen en ambos casos una entropía menor, dando cuenta de la presencia de una variación significativa en una escala. Esto es ocasionado por la diferencia en la retrodispersión de las crestas de las dunas con respecto al resto del terreno, generando patrones más o menos uniformes. Nuevamente, la diferencia entre las dos regiones resulta menos evidente para el caso de la entropía $S[\mathring{P}]$. No obstante, en los histogramas de ambas medidas de información es posible distinguir dos poblaciones.



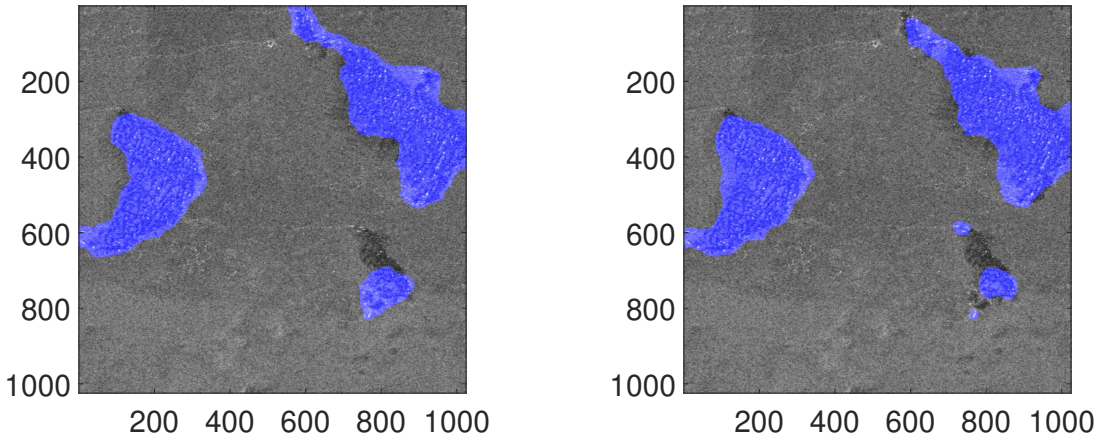
(a) $S^{TV}[\breve{P}]$. (b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\breve{P}]$.

Figura 4.35: $S^{TV}[\breve{P}]$ correspondiente a la imagen 4.34.



(a) $S^{TV}[\mathring{P}]$. (b) Histograma correspondiente a $S^{TV}[\mathring{P}]$.

Figura 4.36: $S^{TV}[\mathring{P}]$ correspondiente a la imagen 4.34.



(a) → $0.45 < S^{TV}[\breve{P}] < 0.65$. (b) → $0.6 < S^{TV}[\mathring{P}] < 0.9$.

Figura 4.37: Comparación entre las segmentaciones realizadas a partir de $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$.

En la figura 4.37 se ve una comparación de los resultados obtenidos. Es posible apreciar que ambos resultados demarcan de forma aceptable las dos grandes regiones de dunas en la imagen, aunque presentan una menor precisión en la detección del grupo de menor tamaño.

4.4. Conclusiones de este capítulo

En este capítulo se propusieron cuatro distribuciones de probabilidad basadas en coeficientes multirresolución que capturan diferente información de las variaciones locales de una imagen a distintas escalas.

En primera instancia, estas distribuciones fueron probadas con dos tipos de imágenes sintéticas. Primero se utilizaron figuras formadas a partir de mBm, que poseen regiones de diferente regularidad. La idea de esta prueba era estudiar la respuesta de las distribuciones a texturas carentes de una dirección preferencial.

En general, la respuesta de las distintas distribuciones frente a estas texturas fue positiva. Las correspondientes entropías suavizadas presentaron histogramas con poblaciones marcadas, lo que permite segmentar las imágenes con facilidad. En este caso, la entropía basada en coeficientes de curvelet presentó un desempeño ligeramente menor a las otras clasificaciones.

En segundo lugar se realizaron pruebas con imágenes formadas por patrones sinusoidales para estudiar los efectos de la orientación de las texturas sobre las distribuciones. Los resultados de esta prueba permitieron observar que las entropías $S^{TV}[\widetilde{P}]$ y $S^{TV}[\widehat{P}]$ asignan valores diferentes a la misma textura en función de la dirección en la que se encuentra orientada. Por otra parte, $S^{TV}[\breve{P}]$ no muestra esta característica, designando valores a las texturas independientemente de su sentido.

Dado al buen desempeño de $S^{TV}[\breve{P}]$ frente a texturas sintéticas y teniendo en cuenta la intención de aplicarla a datos reales, se probó su respuesta a la presencia de ruido en los datos

de entrada. Los resultados mostraron que esta definición tiene, al menos en texturas sencillas, una robustez considerable frente a la contaminación por ruido.

Por su parte, $S^{TV}[\mathring{P}]$ caracterizó todas las texturas simples con la misma entropía debido a que estas estaban compuestas por oscilaciones con frecuencias únicas. A pesar de esto, esta entropía mostró ser de utilidad para casos de superposición de patrones sinusoidales.

Los resultados de las pruebas con imágenes sintéticas llevaron a descartar la aplicación de las entropías $S^{TV}[\widetilde{P}]$ y $S^{TV}[\widehat{P}]$ sobre imágenes reales debido a su dependencia con la orientación de las texturas. Por otro lado, las entropías $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$ fueron usadas para el estudio de texturas reales en imágenes de sensores remotos.

Se analizaron datos ópticos, correspondientes al programa NAIP de USDA y a la misión Sentinel 2 de ESA, y datos SAR, procedentes de las misiones ALOS 1 de JAXA y Sentinel 1 de ESA. Se trabajó con una variedad de texturas en función de las resoluciones espaciales de los sensores. De este modo, se estudiaron patrones de sembradíos a través de las imágenes NAIP, estructuras urbanas en el caso de los datos Sentinel 2, y texturas formadas por elementos naturales del paisaje en los sensores ALOS y Sentinel 1.

Como era esperable, las entropías adoptan valores mucho más heterogéneos en el caso de datos reales en comparación con las imágenes sintéticas de prueba. No obstante, las segmentaciones realizadas a partir de ambas entropías en las distintas imágenes fueron correctas, siendo las interfaces entre regiones las zonas más difíciles de clasificar.

Los resultados sobre imágenes ópticas mostraron que la distribución basada en curvelets parece tener una mayor sensibilidad a las pequeñas variaciones en las texturas, sobre todo en aquellas constituidas por patrones de franjas finas. Es posible suponer que eso se debe a la forma anisotrópica de sus funciones elementales.

La posibilidad de distinguir distintos patrones de edificación en el caso de las imágenes Sentinel 2 es un resultado de interés que podría conducir a una aplicación de utilidad en el

área del urbanismo. Se propone como trabajo a futuro explorar con mayor profundidad esta posibilidad.

Por último, son destacables las segmentaciones realizadas sobre las imágenes SAR debido a la dificultad que reviste el ruido inherente a esos datos. Si bien la separación entre valores de la entropía $S[\mathring{P}]$ no es tan notoria como en el caso de $S[\breve{P}]$, es suficiente para tener una buena segmentación de las texturas presentes. Dadas las características de estos sensores, obtener una segmentación apropiada es de utilidad en escenarios de desastres naturales o cuando no hay disponibilidad de datos ópticos.

Capítulo 5

Conclusiones generales

La segmentación de imágenes satelitales es una tarea de suma importancia para las disciplinas que hacen uso de estos datos. Permite identificar y clasificar coberturas de suelo y contribuye a evaluar los recursos disponibles y los efectos de desastres naturales. En particular, la segmentación de datos SAR es un área de investigación activa debido a sus potencialidades y a su mayor grado de dificultad en comparación con los datos ópticos. Los sensores SAR poseen la capacidad de obtener capturas de forma independiente a las condiciones climáticas y de iluminación solar. No obstante, el ruido speckle y los procesos físicos involucrados en la adquisición de estos datos los hacen difíciles de interpretar y procesar.

Si bien hay numerosos criterios para llevar adelante una segmentación, existe un amplio consenso sobre la dificultad de distinguir regiones de una imagen a partir de sus características texturales.

Dado que el principal objetivo de la tesis es construir métodos de segmentación de imágenes satelitales, con particular interés en la detección de texturas, una revisión bibliográfica motivó la orientación del trabajo hacia los métodos multiresolución, debido a que los mismos permiten caracterizar una región a partir de sus propiedades a distintas escalas. De ese modo, se

postularon las hipótesis generales de trabajo, H1 y H2, que derivaron en seis hipótesis específicas. Las dos primeras están relacionadas al uso de una estimación directa del espectro multifractal de imágenes para la detección de cuerpos de agua y, las restantes, asociadas con la combinación de la medida de información de Shannon y coeficientes UDWT y curvelets para la segmentación de texturas.

Se comenzó a trabajar sobre la detección de cuerpos de agua, tarea abordada principalmente por su relevancia en el campo de la alerta y prevención de inundaciones, fenómenos que provocan daños y amenazas crecientes para la vida, la propiedad y la infraestructura urbana y productiva. Por tal motivo, disponer de herramientas e información para comprender el riesgo de inundación local y tomar decisiones rentables para mitigar sus efectos se vuelve una tarea de suma importancia.

La detección de zonas inundadas resulta relativamente simple en el caso de imágenes ópticas con bajo nivel de cobertura nubosa, debido a que la intensidad en esas regiones es uniforme. No obstante, esta situación generalmente no se da en el caso de tormentas que pueden desencadenar inundaciones, donde las capturas suelen estar cubiertas en un gran porcentaje por nubes. Sin embargo, debido a que las nubes son prácticamente transparentes a la radiación de microondas, los sensores SAR pueden obtener capturas en estas circunstancias. Con el fin de obtener un método funcional en ambos tipos de datos se aplicó la teoría multifractal gruesa sobre escenas para las que se disponía de máscaras de agua para comparar los resultados.

Los primeros estudios realizados sobre imágenes ópticas con frecuencias del infrarrojo cercano permitieron observar un mínimo local en el espectro multifractal que, a través de la inspección de los valores de dimensión local de los píxeles de las imágenes, fue asociado con la frontera entre las regiones inundadas y otras coberturas de suelo. Esta característica del espectro ocurre cuando se considera un número apropiado de escalas en el análisis en función de la resolución de la imagen y cuando alguna de las regiones inundadas presentes poseen una dimensión

mayor a la de una estructura lineal. Bajo condiciones similares, se observó este comportamiento en los espectros estimados para imágenes SAR que presentaban cuerpos de agua libre en ausencia de oleaje superficial. En base a esta característica de los espectros se formuló un criterio para la segmentación de los cuerpos de agua, cuyos resultados fueron evaluados comparándolos con máscaras de agua. En el caso de las imágenes ópticas, se usaron máscaras de agua realizadas por el Instituto Nacional del Agua. Los resultados obtenidos para imágenes SAR se evaluaron con máscaras elaboradas a partir del uso de un índice normalizado diferencial de agua en datos Sentinel 2. En ambos casos las comparaciones dieron una alta coincidencia, avalando las hipótesis h1 y h2.

Para probar las hipótesis específicas restantes, se formularon cuatro distribuciones de probabilidad a partir de coeficientes multirresolución, para ser analizadas con la medida de información de Shannon. En primera instancia, las entropías resultantes fueron probadas con dos grupos de imágenes sintéticas, uno en el que las figuras presentan regiones de diferente regularidad y el otro formado por datos con variaciones sinusoidales de intensidad. Las cuatro distribuciones propuestas dieron resultados satisfactorios para las pruebas efectuadas en el primer conjunto de imágenes. Por otro lado, los ensayos sobre figuras con variaciones sinusoidales mostraron que $S^{TV}[\widetilde{P}]$ y $S^{TV}[\widehat{P}]$ asignan valores diferentes a una misma textura en función de su orientación. Dado que esta característica no es deseable, y a pesar del éxito en el primer conjunto de imágenes sintéticas, fue necesario descartar las dos distribuciones asociadas y, por lo tanto, rechazar las hipótesis h3 y h4.

En las pruebas con imágenes sintéticas, $S^{TV}[\breve{P}]$ le asignó valores de entropía las distintas texturas independientemente de su sentido. Por otro lado, $S^{TV}[\mathring{P}]$ mostró ser útil para distinguir texturas formadas por patrones sinusoidales superpuestos.

Luego de los resultados exitosos en texturas sintéticas, $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$ fueron aplicados a texturas reales presentes en imágenes de sensores remotos. Se estudiaron dos tipos de datos

ópticos, procedentes de programa NAIP y del sensor Sentinel 2, y dos casos de datos SAR, correspondientes a los sensores ALOS 1 y Sentinel 1. En todos los casos se seleccionaron capturas en las que las texturas son claramente diferenciables a partir de inspección visual, de modo que la evaluación de las clasificaciones pueda realizarse a partir de su comparación con los datos analizados.

Ambas distribuciones lograron obtener segmentaciones aceptables en los datos analizados, siendo $S^{TV}[\breve{P}]$ menos sensible al ruido y a pequeñas variaciones en las texturas. Con estos resultados se concluyó que las medidas $S^{TV}[\breve{P}]$ y $S^{TV}[\mathring{P}]$ son apropiadas para la segmentación de regiones con texturas uniformes, aceptando de ese modo las hipótesis h5 y h6.

Del presente trabajo pueden extenderse varias lineas de investigación futura. Por un lado, surge la posibilidad de implementar la teoría multifractal gruesa para estimar el espectro de singularidades de imágenes con información espectral distinta de la analizada. Eso podría ser de utilidad para realizar segmentaciones de otras coberturas de suelo además del agua en superficie.

Por otro lado, se plantea la posibilidad de estudiar las distribuciones de probabilidad propuestas con otras medidas de información, como la medida de Fisher, y con distintas medidas de complejidad. Resulta además interesante estudiar aplicaciones puntuales de estos métodos, por ejemplo, la posibilidad de utilizarlos para clasificar distintas morfologías urbanas.

Además, surge como futura tarea la optimización de los códigos desarrollados para los distintos cálculos. Esto brindaría la posibilidad de realizar comparaciones, tanto de calidad de los resultados como de rendimiento computacional de los algoritmos, con técnicas que constituyan el estado del arte de segmentación de datos de sensores remotos.

Apéndice A

Teoría de la medida

> *"Teach the ignorant as much as you can; society is culpable in not providing instruction for all and it must answer for the night which it produces. If the soul is left in darkness, sins will be committed. The guilty one is not he who commits the sin, but he who causes the darkness."*
>
> — Victor Hugo, *Les Misérables*

El conjunto potencia de un conjunto X se define como la familia de todos los subconjuntos de X. Se denota como 2^X.

Sea X un conjunto. Se llama σ-álgebra F sobre X a una colección no vacía de subconjuntos de X tales que:

I. todo X está en F

II. si un conjunto A se encuentra en F, su complemento también pertenece a F

III. si $A_1, A_2, \ldots$ pertenecen a F, entonces su unión está en F.

2^X es una σ-álgebra. Cualquier colección S de subconjuntos de X puede ser contenida por 2^X y por tanto por una σ-álgebra. Tomando la intersección de todas las σ-álgebras que contienen

a S se obtiene la menor σ-álgebra que contiene esta colección, llamada σ-álgebra generada por S.

Se define una medida externa ν sobre X como una función definida sobre cualquier conjunto de 2^X, con valores en $[0, \infty]$, tal que:

I. $\nu(\emptyset) = 0$

II. $\nu(A) \leq \nu(B)$ si $A \subset B$

III. si $A_1, A_2, \ldots$ es una secuencia finita o contable de conjuntos entonces

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

Una medida es una forma de asignarle un tamaño a un conjunto, de modo que si este es dividido en un número finito o contable de piezas, entonces el tamaño del conjunto original es la suma de los tamaños de las piezas.

Formalmente, una medida μ es una función definida sobre una σ-álgebra F de un conjunto X, que toma valores en $[0, \infty]$ tal que:

I. $\mu(\emptyset) = 0$

II. $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$

III. si $A_1, A_2, \ldots$ es una secuencia finita o contable de conjuntos disjuntos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

El σ-álgebra generada por la colección de todos los subconjuntos abiertos (o equivalentemente cerrados) de X se denomina álgebra de Borel sobre X, $\beta(X)$. Los conjuntos pertenecientes a $\beta(X)$ se denominan conjuntos de Borel con respecto a X.

Otra definición es, que un álgebra de Borel es la colección mas pequeña de subconjuntos de X con las propiedades:

I. Cualquier conjunto abierto o cerrado es un conjunto de Borel

II. La unión de cualquier colección finita o contable de conjuntos de Borel es un conjunto de Borel, y la intersección de cualquier colección finita o contable de conjuntos de Borel es un conjunto de Borel.

Se llama medida de Borel sobre X a una medida μ, o a la restricción de una medida externa a su conjunto medible, que sirve para medir los conjuntos de Borel de X.

El soporte de una medida μ, $\text{spt}(\mu)$, se define como el mayor subconjunto cerrado del conjunto χ para el cual todo vecindario abierto de todo punto tiene medida positiva.

En este trabajo se usará la *medida de suma*: sea $g(k,\ell)$ la intensidad en una escala de gris normalizada de un punto (k,ℓ); sea Ω el conjunto de todos los píxeles dentro de un vecindario centrado en el punto (m,n) de i píxeles de ancho. Entonces la medida se define como:

$$\mu_i(m,n) = \sum_{(k,\ell)\in\Omega} g(k,\ell). \tag{A.1}$$

Dado que la intensidad $g(k,\ell)$ se encuentra normalizada sobre la intensidad total del conjunto estudiado, la medida μ puede considerarse como una medida de probabilidad.

Apéndice B

Sistemas de función iterada

"Muchachos no olviden, cuando vayan al infierno, (...) de darle una mano a Sísifo. De decirle: hermano Sísifo, esta vuelta es mía."

— Alejandro Dolina, *La Venganza Será Terribe (13/11/2019)*

Sea D un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. Un mapa $S : D \to D$ se denomina contracción en D si hay un número c con $0 < c < 1$ tal que

$$|S(x) - S(y)| \leq c\,|x - y|\,, \quad \forall x, y \in D. \tag{B.1}$$

Si se cumple la igualdad, es decir, si $|S(x) - S(y)| = c\,|x - y|$, entonces S transforma conjuntos en conjuntos geométricamente similares, y llamamos a S una similaridad de contracción.

Una familia finita de contracciones $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$, con $m \geq 2$, se denomina sistema de función iterado o IFS por sus siglas en inglés. Llamamos a un subconjunto compacto no vacío $F \subset D$ un atractor (o conjunto invariante) para el IFS si

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F). \tag{B.2}$$

Los sistemas de funciones iteradas tienen la propiedad de determinar un atractor único, que generalmente es fractal.

Cuando la unión $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$ es disconexa, se dice que el IFS $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ satisface la condición de separación fuerte.

Sea $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ un IFS en $D \subset \mathbb{R}^n$ y sean $p_1, \ldots, p_m$ probabilidades asociadas a cada uno de los mapas, con $0 < p_i < 1$, $\forall i$ y $\sum_i p_i = 1$. El sistema conformado por el IFS con las probabilidades asociadas es llamado IFS probabilístico.

Un IFS con probabilidades define una única medida probabilística de Borel μ tal que

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{N} p_i \mu(S_i^{-1}(E)) \tag{B.3}$$

para todos los conjuntos E. Si el IFS está conformado por similiaridades, esta medida se denomina medida auto-similar. El soporte de esta medida es el atractor del IFS subyacente.

Consideremos una medida auto-similar μ definida por el IFS con probabilidades consistentes en los mapas $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ en $\mathbb{R}^2$ con factores de contracción $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ y probabilidades asociadas $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$. Sea $F = \mathrm{spt}(\mu)$ el atractor del IFS y supongamos que se cumple la condición de separación fuerte. Denotamos $\mathbf{i}$ a la secuencia $(i_1, \ldots, i_k)$ con $1 \leq i \leq m$.

Sea X un conjunto compacto no vacío con $S_i(X) \subset X$ para toda i y $S_i(X) \cap S_j(X) = \emptyset$ si $i \neq j$. Definimos $X_{\mathbf{i}} = X_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \ldots S_{i_k}(X)$. Por conveniencia asumimos que el diámetro de $|X| = 1$, entonces para $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ tenemos $|X_{\mathbf{i}}| = c_{\mathbf{i}} \equiv c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k}$ y

$$\mu(X_{\mathbf{i}}) = p_{\mathbf{i}} \equiv p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}. \tag{B.4}$$

El espectro multifractal $f(\alpha)$ para esta medida se puede calcular como la transformada de Legendre de una función auxiliar $\beta(q)$. Dado un número real q, definimos $\beta(q)$ como el número

positivo que satisface

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^q c_i^{\beta(q)} = 1. \tag{B.5}$$

$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función decreciente en q con

$$\lim_{q \to -\infty} \beta(q) = \infty, \tag{B.6}$$

$$\lim_{q \to \infty} \beta(q) = -\infty. \tag{B.7}$$

Asumiendo que la razón $\frac{\ln p_i}{\ln c_i}$ no es igual para todos los $i = 1, \ldots, m$, $\beta(q)$ es estrictamente convexa [45].

Considerando a $f(\alpha)$ como la transformada de Legendre de β,

$$f(\alpha) = \inf_{-\infty < q < \infty} \{\beta(q) + \alpha q\} \tag{B.8}$$

tenemos que $f : [\alpha_{\text{mín}}, \alpha_{\text{máx}}] \to \mathbb{R}$. Para un α dado, el ínfimo en (B.8) se alcanzará en un único q. Dicho ínfimo se logra cuando

$$\alpha = -\frac{d\beta}{dq}, \tag{B.9}$$

por lo que se tiene

$$f(\alpha) = \beta(q) + \alpha q = \beta(q) - \frac{d\beta}{dq} q. \tag{B.10}$$

Derivando (B.5) obtenemos

$$\alpha = \frac{\sum_{i_1}^{m} p_i^q c_i^{\beta(q)} \ln p_i}{\sum_{i_1}^{m} p_i^q c_i^{\beta(q)} \ln c_i}, \tag{B.11}$$

de donde puede verse que

$$\alpha_{\text{mín}} = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{\ln p_i}{\ln c_i}, \tag{B.12}$$

$$\alpha_{\text{máx}} = \max_{1 \leq i \leq m} \frac{\ln p_i}{\ln c_i}. \tag{B.13}$$

De allí, suponiendo que c_i es constante para todo $i = 1, \ldots, m$, se deduce que $\alpha_{\text{mín}}$ se encuentra determinado por $\text{máx}_{1 \leq i \leq m} p_i$, mientras que $\alpha_{\text{máx}}$ está asociado a $\text{mín}_{1 \leq i \leq m} p_i$. También se puede comprobar que $f(\alpha_{\text{mín}}) = f(\alpha_{\text{máx}}) = 0$.

B.1. Algoritmo para obtener una medida auto-similar

El algoritmo utilizado para obtener medidas multifractales se explica de manera más detallada en [55]. Considérense las contracciones

$$S_1(x_1, x_2) = (x_1/2, x_2/2), \tag{B.14}$$

$$S_2(x_1, x_2) = (x_1/2, x_2/2 + 1/2), \tag{B.15}$$

$$S_3(x_1, x_2) = (x_1/2 + 1/2, x_2/2), \tag{B.16}$$

$$S_4(x_1, x_2) = (x_1/2 + 1/2, x_2/2 + 1/2), \tag{B.17}$$

y probabilidades correspondientes $\{p_i\}$, $i = 1, \ldots, 4$. El factor de contracción es 0.5 en todos los casos.

El algoritmo comienza con una matriz cuadrada de $2^N \times 2^N$ píxeles de valor 1. El cuadrado inicial se divide en cuatro cuadrados y cada uno se multiplica por la probabilidad correspondiente a la contracción que representa cada cuadrado. Este proceso se repite en los cuadrados resultantes hasta N iteraciones (límite de resolución). Como resultado, cada píxel tiene asociado una medida definida por (B.4).

Definida esta medida, a partir de las ecuaciones (B.5), (B.10) y (B.11) es posible obtener el espectro multifractal teórico de esta medida.

Apéndice C

Datos de sensores remotos

"Big Brother is watching you."

— George Orwell, *1984*

En teledetección, la energía proveniente de la superficie terrestre se mide utilizando sensores montados sobre la plataforma de una aeronave o nave espacial. Esas mediciones se utilizan para construir imágenes del paisaje debajo de la plataforma.

En principio, cualquier energía proveniente de la superficie de la tierra puede usarse para formar una imagen. La mayoría de las veces se trata luz solar reflejada, por lo que la imagen registrada es, en muchos sentidos, similar a la vista que tendríamos de la superficie terrestre desde un avión, a pesar de que las longitudes de onda utilizadas a menudo están fuera del alcance de la visión humana. La energía también puede ser irradiada por la tierra debido a su propia temperatura finita. Alternativamente, es posible usar la energía irradiada por una fuente artificial, como un láser o un radar, que llega a un sensor luego de ser dispersada por la superficie terrestre.

Dado que la radiación con ciertas longitudes de onda es absorbida por los componentes de la atmósfera, las utilizadas para obtener imágenes están restringidas a las regiones del espectro

electromagnético donde hay poca o ninguna absorción, comúnmente conocidas como ventanas atmosféricas. Estas incluyen las longitudes de onda de la luz visible, las infrarrojas, las térmicas y las microondas.

Para una revisión profunda de los aspectos físicos involucrados en cada tipo se sensor se recomienda al lector revisar [15].

C.1. Sensores ópticos

En la jerga de teledetección define como sensores remotos ópticos a aquellos que capturan la radiación electromagnética en el rango espectral de los 0.3 a los 15 µm aproximadamente, es decir, a aquellos que operan en las frecuencias de la luz visible, el infrarrojo cercano y el infrarrojo térmico. En general estos sensores son pasivos, es decir, detectan la radiación reflejada o emitida por la superficie de la tierra[1]. Se caracterizan por poseer un nivel de ruido bajo en las capturas, siendo el mismo modelado de forma aditiva y siguiendo una distribución gaussiana.

C.1.1. Landsat 8

El satélite Landsat 8 lleva una carga útil de dos sensores: el *Operational Land Imager* (OLI) y el *Thermal Infrared Sensor* (TIRS). El satélite con sus dos sensores integrados se conoce como el observatorio Landsat 8.

El observatorio Landsat 8 opera en una órbita casi circular, casi polar y helio sincrónica con una altitud de 705 km en el ecuador. Tiene un ciclo de repetición de pasada de 16 días. En esta órbita, el observatorio Landsat 8 sigue una secuencia de pistas terrestres fijas (también conocidas como rutas) definidas por el segundo Sistema de referencia mundial (WRS-2)[2].

Los datos OLI y TIRS para cada escena WRS-2 se combinan para crear un solo pro-

[1] Como excepción podemos mencionar los sensores LiDAR, que poseen su propia fuente de iluminación.
[2] WRS-2 es un sistema de coordenadas de ruta / fila que se utiliza para catalogar todos los datos de imágenes científicas adquiridos de los satélites Landsat 4 - 8.

Banda	Denominación	Longitud de onda (µm)	Resolución espacial (m)
1	Costera - Aerosoles	0.435 - 0.451	30
2	Azul	0.452 - 0.512	30
3	Verde	0.533 - 0.590	30
4	Rojo	0.636 - 0.673	30
5	Infrarrojo cercano (NIR)	0.851 - 0.879	30
6	Infrarrojo de onda corta 1 (SWIR 1)	1.566 - 1.651	30
10	(TIR 1)	10.60 - 11.19	100
11	(TIR 2)	11.50 - 12.51	100
7	Infrarrojo de onda corta 2 (SWIR 2)	2.107 - 2.294	30
8	Pancromática	0.503 - 0.676	15
9	Cirrus	1.363 - 1.384	30

Tabla C.1: Bandas de Landsat 8 (Sensores OLI y TIRS)

ducto que contiene los datos de ambos sensores. Los datos se corrigen radiométricamente y se corregistran en una proyección cartográfica con correcciones para el desplazamiento del terreno, lo que da como resultado una imagen digital estándar ortorectificada llamada producto de nivel 1T. Cada escena cubre una superficie de 190 por 180 km.

El sensor OLI recolecta datos de nueve bandas espectrales sobre una pisada de 190 km con una resolución espacial de 30 m para todas las bandas con excepción de la banda pancromática de 15 m.

TIRS usa fotodetectores infrarrojos de pozo cuántico (QWIPs) para medir la energía de la longitud de onda del infrarrojo térmico emitida por la superficie de la tierra, cuya intensidad es una función de la temperatura de la superficie. Los QWIPs son sensibles a dos bandas de longitud de onda del infrarrojo térmico. El sensor TIRS recolecta imágenes de estas bandas con una resolución espacial de 100 m sobre una pisada de 190 km.

La tabla C.1 enlista las distintas bandas espectrales presentes en los datos procedentes del observatorio Landsat 8 y sus resoluciones espaciales.

Para una descripción técnica de las características del observatorio y de los sensores OLI y TIRS, el lector interesado puede dirigirse a [107].

Denominación	Identificador Landsat	WRS-2 (ruta / fila)	Fecha de adquisición (AAAA/MM/DD)	Nivel de procesamiento
Landast8-1	LC82250792016263LGN02	225/079	2016/09/19	L1TP[4]
Landast8-2	LC82250822016231LGN01	225/082	2016/08/18	L1TP
Landast8-3	LC82250832015196LGN01	225/083	2015/07/15	L1TP
Landast8-4	LC82270832015258LGN01	227/083	2015/09/15	L1TP

Tabla C.2: Datos del observatorio Landsat 8 utilizados en este trabajo.

El presente trabajo utilizó fragmentos de los datos Landsat 8 descritos en la tabla C.2. Estos fueron descargados del servidor web del U.S. Geological Survey[3] y calibrados para que los píxeles presenten valores de reflectancia. A los datos calibrados se les anexaron las máscaras de agua correspondientes elaboradas por los investigadores del Instituto Nacional del Agua (INA) y se recortaron los fragmentos estudiados.

C.1.2. NAIP

El Programa Nacional de Imágenes Agrícolas (NAIP), administrado por la Agencia de Servicios Agrícolas (FSA) del Departamento de Agricultura de los Estados Unidos (USDA) a través de la Oficina de Fotografía Aérea en Salt Lake City, adquiere imágenes aéreas durante las temporadas de cultivo agrícola en la zona continental de los Estados Unidos. Su objetivo principal es hacer que las fotografías ortodigitales estén disponibles para las agencias gubernamentales y el público dentro de un año de adquisición.

El programa comenzó en 2003 con un ciclo de adquisición de 5 años, luego en 2009 pasó a tener un ciclo de 3 años. Las primeras imágenes se adquirieron con cámaras de película, pero en 2008 se produjo una transición a sensores digitales.

Las imágenes NAIP se adquieren con una distancia de muestra del terreno (GSD) de un metro con una precisión horizontal que coincide dentro de los seis metros con los puntos de control en tierra identificables con foto.

[3] https://earthexplorer.usgs.gov/
[4] Level 1 Precision Terrain (Corrected)

Denominación	Identificador NAIP	Coordenadas (Lat. / Lon.)	Fecha de adquisición (AAAA/MM/DD)	Resolución espacial (m)
NAIP-1	m_3407714_ne_18_1_20160709	$34°50'37.50''N$ $77°16'52.54''O$	2016/07/09	1

Tabla C.3: Datos del programa NAIP utilizados en este trabajo.

Los productos NAIP están disponibles en forma de tejas de cuarto de cuadrante digital ortorectificadas (DOQQs) y como mosaico comprimido de condado (CCM). Cada teja individual cubre un cuadrilátero de 3.75×3.75 minutos de arco más un relleno de 300 metros en los cuatro lados. Los DOQQ poseen formato geotiffs y el área corresponde a los cuadrángulos topográficos del USGS.

La resolución espectral predeterminada es el color natural (rojo, verde y azul, o RGB), pero a partir de 2007, algunos datos se han entregado con cuatro bandas de datos: RGB y infrarrojo cercano.

Para mayor información sobre este programa el lector puede dirigirse a la pagina web del mismo[5] o al sitio del *Earth Resources Observation and Science (EROS) Center* de USDA[6].

C.1.3. Sentinel 2

SENTINEL-2 es una misión europea de imágenes multiespectrales de gran resolución. Consta de dos satélites gemelos, Sentinel-2 A y Sentinel-2 B, que vuelan en la misma órbita, con una diferencia de fase de 180°, dando una frecuencia de revisita de 5 días en el Ecuador.

Los satélites SENTINEL-2 llevan una carga útil de instrumentos ópticos conocida como Instrumento Multiespectral (MSI) que muestrea 13 bandas espectrales: cuatro bandas a 10 m, seis a 20 m y tres a una resolución espacial de 60 m. La tabla C.4 resume las características de las distintas bandas espectrales.

[5] https://www.fsa.usda.gov/programs-and-services/aerial-photography/imagery-programs/naip-imagery/index

[6] https://www.usgs.gov/centers/eros/science/usgs-eros-archive-aerial-photography-national-agriculture-imagery-program-naip

	S2A		S2B		
Banda	Longitud de onda central (nm)	Ancho de banda (nm)	Longitud de onda central (nm)	Ancho de banda (nm)	Resolución espacial (m)
1	442.7	21	442.2	21	60
2	492.4	66	492.1	66	10
3	559.8	36	559.0	36	10
4	664.6	31	664.9	31	10
5	704.1	15	703.8	16	20
6	740.5	15	739.1	15	20
7	782.8	20	779.7	20	20
8	832.8	106	832.9	106	10
8a	864.7	21	864.0	22	20
9	945.1	20	943.2	21	60
10	1373.5	31	1376.9	30	60
11	1613.7	91	1610.4	94	20
12	2202.4	175	2185.7	185	20

Tabla C.4: Bandas espectrales para los sensores SENTINEL-2 (S2A y S2B).

Los productos Sentinel-2 están disponibles para los usuarios en dos niveles de procesamiento:

- Nivel-1C: Reflectancia de la parte superior de la atmósfera en geometría cartográfica
- Nivel 2A: Reflectancia del fondo de la atmósfera en geometría cartográfica

Estos productos son ortoimágenes de 100×100 km^2 en proyección UTM / WGS84. Los productos Level-1C, que constituyen los principales datos descargables, son elaborados usando un modelo de elevación digital (DEM) para proyectar las imágenes en geometría cartográfica. Las mediciones radiométricas por píxel se proporcionan como reflectancias de tope de atmósfera (TOA).

Para una descripción más profunda de las características técnicas de los sensores Sentinel 2 así como de los detalles de la misión es posible consultar el manual de usuario [108] confeccionado por la Agencia Espacial Europea (ESA).

La tabla C.5 enlista las capturas utilizadas en este trabajo. Las imágenes Sentinel2-2 y Sentinel2-3 fueron usadas para elaborar las máscaras de agua con las que se compararon los

Denominación	Identificador Sentinel 2	Coordenadas (Lat. / Lon.)	Fecha de adquisición (AAAA/MM/DD)	Nivel de procesamiento
Sentinel2-1	S2B_MSIL1C_20190330T182939_N0207_R027_T11SMT_20190330T220628	$33°50'38.8''N$ $117°29'16.5''O$	2019/03/30	1 - C
Sentinel2-2*	S2A_MSIL1C_20190110T141041_N0207_R110_T19GFM_20190110T172914	$43°20'46.3''S$ $67°45'58.2''O$	2019/01/10	1 - C
Sentinel2-3*	S2B_MSIL1C_20181223T140049_N0207_R067_T20JPM_20181223T154139	$29°48'55.6''S$ $61°03'36.5''O$	2018/12/23	1 - C

Tabla C.5: Datos Sentinel 2 utilizados en este trabajo.

resultados de las segmentaciones de datos SAR en el capítulo 3. El proceso de elaboración de las máscaras consistió en el cálculo del Índice Normalizado Diferencial de Agua propuesto en [35] y la posterior aplicación del criterio de selección $NDWI > 0$.

C.2. Sensores de Radar de Apertura Sintética (SAR)

Los sensores de radar miden energía en la región de microondas del espectro electromagnético, que se extiende desde longitudes de onda de aproximadamente 1 mm hasta 1 m. En el contexto de la teledetección por imágenes podemos señalar dos grupos de estos sensores: los activos, que cargan su propia fuente de iluminación, y los pasivos, sensibles a la energía de microondas emitida por la superficie de la Tierra.

Los Radares de Apertura Sintética (SAR) son una clase particular de sensores activos de microondas que consisten en un radar pulsado que ilumina lateralmente la superficie terrestre a medida que la plataforma en la que se encuentra instalado se desplaza. El sistema de radar transmite pulsos electromagnéticos con alta potencia y recibe los ecos de la señal retrodispersada de forma secuencial. El pulso transmitido interactúa con la superficie de la Tierra y solo una parte de él se retrodispersa a la antena receptora. La amplitud y la fase de la señal retrodispersada dependen de las propiedades físicas (es decir, geometría, rugosidad) y eléctricas (es decir, la

Banda	Ka	Ku	X	C	S	L	P
Frequencia [GHz]	40–25	17.6–12	12–7.5	7.5–3.75	3.75–2	2–1	0.5–0.25
Longitud de onda [cm]	0.75–1.2	1.7–2.5	2.5–4	4–8	8–15	15–30	60–120

Tabla C.6: Bandas usadas para los sistemas SAR y frecuencias y longitudes de onda correspondientes.

permitividad dieléctrica) del objeto sensado [109].

Las bandas de frecuencia comúnmente utilizadas en los sistemas SAR y los rangos de longitud de onda asociados se muestran en la tabla C.6.

La dirección de vuelo se denota como acimut y la línea de visión como dirección de rango inclinado. Hasta los años 50, los radares de imágenes se denominaban SLAR (radar aerotransportado de mirada lateral) y no utilizaban el principio de la apertura sintética. Esto resultaba en una resolución azimutal moderada que se deterioraba a medida que aumentaba el rango. El nombre apertura sintética se debe a que estos sensores utilizan una combinación coherente de las señales recibidas para la construcción de una apertura virtual que es mucho más larga que la longitud física de la antena.

Los sensores SAR utilizan formas de onda pulsadas moduladas en frecuencia para la transmisión, conocidas como señales chirp. La amplitud de la forma de onda transmitida es constante durante el tiempo de pulso τ, mientras que la frecuencia instantánea varía de manera lineal a lo largo del tiempo t de acuerdo con $f_i = k_r \cdot t$ donde k_r se conoce como frecuencia de chirp, produciendo un ancho de banda $B_r = k_r \cdot \tau$. El tiempo de emisión del pulso es seguido por el tiempo de ventana de eco, durante el cual el radar recibe los ecos dispersos y almacena las señales adquiridas a bordo. El tiempo que dura el procedimiento de transmisión y escucha es conocido como intervalo de repetición de pulso (PRI).

La resolución en la dirección del rango inclinado δ_r es inversamente proporcional al ancho de banda del sistema de acuerdo con $\delta_r = c_0/(2B_r)$, donde c_0 es la velocidad de la luz. La resolución azimutal δ_a la proporciona la construcción de la apertura sintética, que es la longitud

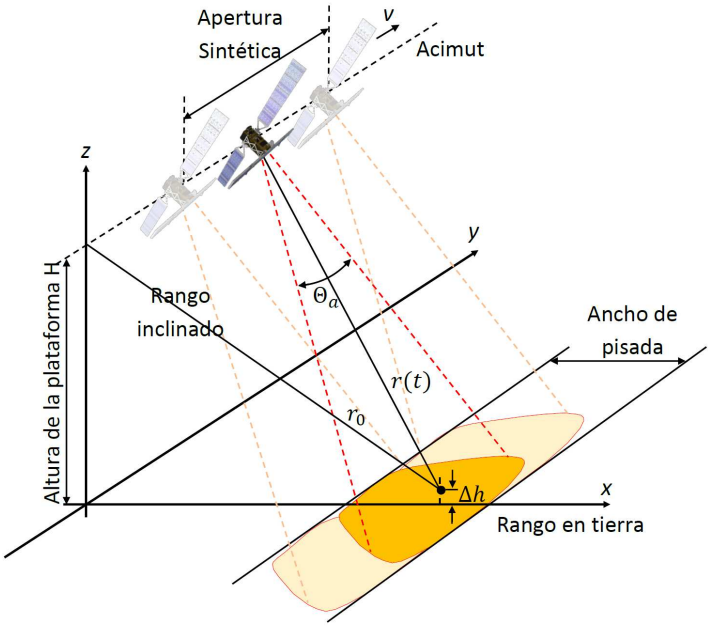


Figura C.1: Ilustración de la geometría de imágenes SAR. r_0 representa la distancia de aproximación más corta, θ_a para el ancho de haz de acimut y v para la velocidad del sensor.

de la trayectoria durante la cual el radar recibe señales de eco de un objetivo puntual. En estos dispositivos, la resolución acimutal puede calcularse en función de la dimensión real de la antena, d_a, como $\delta_a = d_a/2$ [109].

Los datos de la señal recibida forman una matriz de datos complejos. La primera dimensión corresponde a la dirección del rango. El radar adquiere una línea de rango cada vez que recorre una distancia $v \cdot PRI$ formando así la segunda dimensión de la matriz de datos, conocida como acimut.

A diferencia de los sensores ópticos, la visualización de datos brutos de SAR no proporciona ninguna información útil sobre la escena. Es solo después del procesamiento de la señal que se obtiene una imagen. El procesamiento completo puede entenderse como dos operaciones independientes de filtro adaptado a lo largo de las dimensiones de rango y acimut. El primer paso es comprimir las señales de chirp transmitidas a un pulso corto. En lugar de realizar una convolución en el dominio del tiempo, se adopta una multiplicación en el dominio de la frecuencia

debido a la carga computacional mucho más baja. Por lo tanto, cada línea de rango se multiplica en el dominio de frecuencia por el complejo conjugado del espectro del chirp transmitido. La compresión azimutal sigue el mismo razonamiento básico, es decir, la señal está convolucionada con su función de referencia, que es el complejo conjugado de la respuesta esperada de un objetivo puntual en el suelo. La variación de frecuencia de la señal de azimut resulta ser,al igual que para el dominio en rango, una señal de frecuencia con modulación lineal (chirp de acimut).

Comúnmente, las imágenes SAR se muestran en términos de valores de intensidad, de modo que cada píxel de la imagen da una indicación de la reflectividad del punto correspondiente en el suelo. Esto implica dos pasos adicionales luego de las convoluciones: calibración y geocodificación. La calibración asegura que el valor de intensidad realmente representa el valor de la sección eficaz de retrodispersión del radar normalizada al área, σ_0. La geocodificación, por otro lado, garantiza que la ubicación de cualquier píxel en la imagen SAR esté directamente asociada a la posición en el suelo. Por lo general, las imágenes SAR están distorsionadas geométricamente. La razón de esto es que el radar solo mide la proyección de una escena tridimensional en las coordenadas de radar de rango inclinado y acimut. Esto provoca efectos tales como sombras para áreas ocultas de la iluminación del radar, así como escorzos y inversiones de relieve que se manifiestan por un estiramiento y compresión del terreno inclinado. Estos efectos son corregidos a partir de la registración de la imagen con un modelo digital de elevación.

Un efecto particular que se observa en las imágenes SAR es el llamado *speckle* o moteado, que es causado por la presencia de muchos dispersores elementales con una distribución aleatoria dentro de una celda de resolución. La suma coherente de sus amplitudes y fases da como resultado fuertes fluctuaciones de la retrodispersión de celda de resolución a celda de resolución. En consecuencia, la intensidad y la fase en la imagen final ya no son deterministas. Este ruido es de carácter multiplicativo y no gaussiano. Para mitigar el *speckle* se utiliza una técnica conocida como *multilook*, que consiste en un promedio no coherente de la imagen de intensidad. Aunque

esto causa una degradación en la resolución de la imagen, reduce el efecto del ruido speckle aumentando la interpretabilidad de la captura.

Otra cualidad destacable de los sensores SAR es su capacidad de obtener información del terreno a través de ondas con diferentes polarizaciones. Muchos sensores actuales pueden emitir radiación polarizada linealmente en la dirección de la trayectoria de vuelo o perpendicular a ella, comúnmente llamadas polarizaciones horizontal (H) y vertical (V). A su vez también son capaces de recibir los ecos retrodispersados con estas dos polarizaciones. Por lo tanto, en función de la polarización de las ondas emitidas y recibidas podemos tener sensores mono polarimétricos, dual polarimétricos y full polarimétricos. Los monopolarimétricos emiten y reciben ondas con la misma polarización, HH (es decir emite una onda con polarización H y recibe la señal con polarización H) o VV. Los dual polarimétricos emiten ondas con una polarización y reciben la retrodispersión en las dos polarizaciónes, obteniéndose así un par de imágenes , ya sea HH y HV o VH y VV. Por último, los sensores full polarimétricos emiten y miden radiación polarizada en dos direcciones, obteniendo así cuatro conjuntos de datos, HH, HV, VV y VH.

C.2.1. Sentinel 1

Sentinel-1 es la primera constelación satelital del Programa Copernicus realizada por la Agencia Espacial Europea (ESA). Esta misión se compone de una constelación de dos satélites, Sentinel-1A y Sentinel-1B, que comparten el mismo plano orbital y llevan un instrumento de radar de apertura sintética de banda C. Este instrumento tiene una resolución espacial de hasta 5 m y un ancho de franja de hasta 400 km. La constelación se encuentra en una órbita helio-sincrónica, casi polar. La órbita tiene un ciclo de repetición de 12 días y completa 175 órbitas por ciclo.

El instrumento SENTINEL-1 SAR puede adquirir datos en cuatro modos:

El Stripmap (SM) es un modo de imagen donde una franja de tierra se ilumina con

una secuencia continua de pulsos, mientras que el haz de la antena apunta a un acimut y un ángulo de elevación fijos. En el modo llamado franja interferométrica amplia (IW), los datos se obtienen en tres franjas utilizando la técnica de imagen de observación de terreno con escaneo SAR progresivo (TOPSAR). En el modo IW, las ráfagas se sincronizan de pasada en pasada para garantizar la alineación de los pares interferométricos. IW es el modo operativo primario de SENTINEL-1 sobre tierra. En el modo Franja extra ancha (EW) los datos se obtienen en cinco franjas utilizando la técnica de imagen TOPSAR. El modo EW proporciona una cobertura de franja muy grande a expensas de la resolución espacial. Para el modo Wave (WV) los datos se obtienen en pequeñas escenas llamadas "viñetas", situadas a intervalos regulares de 100 km a lo largo de la pista recorrida por el sensor. Las viñetas se adquieren alternando, adquiriendo una viñeta en un ángulo de incidencia de rango cercano, mientras que la siguiente viñeta se adquiere en un ángulo de incidencia de rango lejano, conocidos como haces WV1 y WV2. WV es el modo operativo de SENTINEL-1 sobre mar abierto.

Los instrumentos Sentinel-1 admiten el funcionamiento en polarización simple (HH o VV) y polarización dual (HH + HV o VV + VH), implementado a través de una cadena de transmisión (conmutable a H o V) y dos cadenas de recepción paralelas para H y V polarización.

El modo IW adquiere datos con una pisada de 250 km a una resolución espacial de 5 m por 20 m.

Los productos adquiridos se distribuyen en tres niveles de procesamiento: Nivel-0, Nivel-1 y Nivel-2. Los productos de nivel 0 consisten en datos brutos comprimidos y desenfocados. Estos datos complejos son la base a partir de la cual se producen todos los demás productos de alto nivel.

Los productos de nivel 0 se transforman en un producto de nivel 1 mediante la aplicación de varios algoritmos de procesamiento y calibración que permiten obtener imágenes a partir de los ecos sensados (proceso de enfocado).

Los datos de nivel 1 se presentan como productos *Single Look Complex* (SLC) y / o *Ground Range Detected* (GRD). Los productos SLC se encuentran enfocados, geo-referenciados usando datos de órbita y actitud del satélite, y son provistos en la geometría de rango inclinado. Los productos están formados por muestras complejas (reales e imaginarias) preservando la información de fase y incluyen un único look en cada dimensión.

Los productos de Nivel-1 GRD consisten en datos enfocados, procesados con multilook y proyectados a rango de suelo utilizando el modelo de tierra elipsoidal WGS84. La proyección elipsoide de los productos GRD se corrige utilizando la altura del terreno especificada en la anotación general del producto. Las coordenadas del rango del suelo son las coordenadas del rango inclinado proyectadas sobre el elipsoide de la Tierra. Los valores de píxel representan la amplitud detectada, mientras que la información de fase se pierde. El producto resultante tiene aproximadamente píxeles de resolución cuadrada y espaciado de píxeles cuadrados con speckle reducido a un costo de reducir la resolución espacial.

Los productos SLC tienen resoluciones espaciales que dependen del modo de adquisición. En la tabla a continuación para los productos SLC SM / IW / EW, las resoluciones espaciales y el espacio entre píxeles se proporcionan en los ángulos de incidencia más bajos y más altos. Para los productos SLC WV, la resolución espacial y el espacio entre píxeles se proporcionan para las imágenes WV1 y WV2.

Los productos SM y WV SLC se muestrean en el espaciado natural de píxeles, lo que significa que el espaciado de píxeles se determina en acimut por la frecuencia de repetición de pulso (PRF) y en el rango por la frecuencia de muestreo del rango del radar. Por lo tanto, habrá ligeras variaciones alrededor de la órbita.

La tabla C.7 resume la resolución espacial y espaciado entre píxeles[7] de los productos

[7]La resolución espacial es una medida de la capacidad del sistema para distinguir entre objetivos adyacentes, mientras que el espacio entre píxeles es la distancia entre píxeles adyacentes en una imagen, medida en metros.

Modo de adquisición	Producto	Clase de resolución	Resolución Rg×Ac (m)	Espaciado de píxeles Rg×Ac (m)	Número de looks Rg×Ac	ENL
SM	SLC		1.7×4.3 a 3.6×4.9	1.5×3.6 a 3.1×4.1	1×1	1
	GRD	FR	9×9	3.5×3.5	2×2	3.7
		HR	23×23	10×10	6×6	29.7
		MR	84×84	40×40	22×22	398.4
IW	SLC		2.7×22 a 3.5×22	2.3×14.1	1×1	1
	GRD	HR	20×22	10×10	5×1	4.4
		MR	88×87	40×40	22×5	81.8
EW	SLC		7.9×43 a 15×43	5.9×19.9	1×1	1
	GRD	HR	50×50	25×25	3×1	2.8
		MR	93×87	40×40	6×2	10.7
WV	SLC		2.0×4.8 3.1×4.8	1.7×4.1 2.7×4.1	1×1	1
	GRD	MR	52×51	25×25	13×13	123.7

Tabla C.7: Resolución espacial y espaciado entre píxeles de los productos Sentinel 1 de nivel 1 en función de su modo de adquisición y tipo de producto.

Denominación	Identificador Sentinel 1	Coordenadas (Lat. / Lon.)	Fecha de adquisición (AAAA/MM/DD)	Modo y nivel de procesamiento	Espaciado de píxeles (m)
Sentinel1-1	S1B_IW_GRDH_1SDV_20181223T092124_20181223T092149_014167_01A53A_1D5B	$30°08'24.2''S$ $60°16'15.7''O$	2018/12/23	Nivel 1 IW - GRD	10×10
Sentinel1-2	S1A_IW_GRDH_1SDV_20190110T092559_20190110T092624_025413_02D09F_BB9C	$43°59'34.1''S$ $65°30'09.0''O$	2019/01/10	Nivel 1 IW - GRD	10×10
Sentinel1-3	S1A_IW_GRDH_1SDV_20190404T092534_20190404T092559_026638_02FD18_A6D9	$42°31'40.9''S$ $64°51'14.1''O$	2019/04/04	Nivel 1 IW - GRD	10×10

Tabla C.8: Datos Sentinel 1 utilizados en este trabajo.

Sentinel 1 de nivel 1 en función de su modo de adquisición y tipo de producto. Se presenta también una medida de calidad de los productos conocida como número equivalente de looks (ENL)[8]. Para los productos GRD, la resolución corresponde al valor de rango medio a una altitud de órbita media, promediada en todas las franjas. Para los productos SLC SM / IW / EW, la resolución y el espaciado entre píxeles se informan desde el ángulo de incidencia más bajo al más alto. Para los productos SLC WV, la resolución y el espacio entre píxeles se proporcionan para los haces WV1 y WV2. Para productos SLC, la coordenada de rango está en rango inclinado. Todos los demás productos están en rango en tierra. Para los productos GRD IW / EW, el número equivalente de looks corresponde a un promedio de todas las franjas.

La tabla C.8 resume las características de los productos Sentinel 1 utilizados en este trabajo. Estos datos fueron preprocesados utilizando el software SNAP de ESA.

El preproceso consistió en la calibración de los datos a valores de σ_0, su posterior conversión a unidades de decibeles (dB), y la georreferenciación y corrección de terreno delas capturas. Para el caso de los datos utilizados en los cálculos presentes en el capítulo 3, luego del preproceso, se les anexó una capa conteniendo la máscara de agua correspondiente.

Para una descripción de los aspectos técnicos de la misión Sentinel 1, sus plataformas y sensores se sugiere a los lectores dirigirse a los recursos en linea preparados por la Agencia Espacial Europea[9].

C.2.2. ALOS

El Satélite Avanzado de Observación de la Tierra (ALOS), también llamado Daichi, es un satélite japonés lanzado en 2006. La misión estuvo activa hasta 2011, año en el que la plataforma

[8] El número equivalente de looks independientes (ENL) para un tipo de producto es el número de looks estadísticamente independientes, igualmente pesados, que producirían las mismas estadísticas de ruido speckle que el procesamiento utilizado para generar el producto.

[9] Guía para usuarios: https://sentinel.esa.int/web/sentinel/user-guides/sentinel-1-sar
Guía técnica: https://sentinel.esa.int/web/sentinel/technical-guides/sentinel-1-sar

fue desactivada por problemas energéticos.

ALOS está equipado con tres instrumentos de teledetección: el *Panchromatic Remote-sensing Instrument Stereo Mapping* (PRISM) para medir con precisión la elevación de la tierra, el *Advanced Visible and Near Infrared Radiometer type 2* (AVNIR-2) para observar las distintas coberturas de la superficie terrestre, y el *Phased Array type L-band Synthetic Aperture Radar* (PALSAR) que permite observaciones terrestres de día y de noche y para todo clima. Los lectores interesados en una descripción completa de la misión ALOS y de las características técnicas de la plataforma pueden consultar [110].

PALSAR es un radar de apertura sintética de banda L. Sus datos están disponibles con tres niveles de procesamiento:

- Nivel 1.0: Datos de la señal reconstruidos y no procesados junto con coeficientes de corrección geométrica y radiométrica (añadidos pero no aplicados).
- Nivel 1.1: Datos complejos procesados en rango y acimut, proyectados en rango inclinado.
- Nivel 1.5: Imagen procesada con multilook, proyectada a coordenadas geográficas. Las latitudes y longitudes en el producto se calculan sin tener en cuenta la altitud.

Este sensor captura en cuatro modos: dos de haz fino, polarización simple (FBS) y polarización dual (FBD), un modo de polarización cuádruple, también conocido como modo polarimétrico (PLR), y un modo de haz ancho, ScanSAR, que funciona con una pérdida considerable de resolución. La tabla C.9 resume las características de los productos en los distintos modos de adquisición en el nivel de procesamiento 1.5.

En 2014 ASF comenzó un proyecto para realizar la corrección radiométrica de terreno de los productos ALOS PALSAR[10], que consistía en corregir la geometría y radiometría de los datos SAR para eliminar defectos tales como inversión de relieve y escorzo. Los datos ALOS PALSAR

[10] https://www.asf.alaska.edu/sar-data/palsar/terrain-corrected-rtc/

Denominación	Identificador ALOS 1	Coordenadas (Lat. / Lon.)	Fecha de adquisición (AAAA/MM/DD)	Modo y polarización	Espaciado de píxeles (m)
ALOS1-1	ALPSRP209696660 -RTC_HI_RES	$25°48'4.68''S$ $114°36'35.64''E$	2009/12/31	FBS (HH)	12.5×12.5

Tabla C.9: Datos ALOS 1 utilizados en este trabajo.

Modo de adquisición		FBS	FBD	ScanSAR	Polarimétrico
Polarizacion		HH o VV	HH + HV o VV + VH	HH o VV	HH + HV + VV + VH
Resolución espacial (m)	Rango	10	20	100	30
	Acimut	10 (2 looks) 20 (4 looks)	10 (2 looks) 20 (4 looks)	100	10 (2 looks) 20 (4 looks)
Ancho de pisada (km)		70	70	250-350	30
Espaciado entre píxeles (m)		6.25m (2 looks) 12.5 (4 looks)	12.5 (4 looks)	100	12.5 (4 looks)

Tabla C.10: Resolución espacial y espaciado entre píxeles de los productos ALOS 1 de nivel 1.5 en función de su modo de adquisición.

corregidos son distribuidos de forma libre por Instalación de satélite de Alaska (ASF)[11]. La tabla C.9 presenta los detalles de los datos ALOS 1 utilizados en el presente trabajo.

[11] https://vertex.daac.asf.alaska.edu/

Apéndice D

Optimización convexa

> *"Two ravens sit on his shoulders and bring to his ears all the news that they see or hear; they are called Hugins and Munin. He sends them out at daybreak to fly over the whole world, and they come back at breakfast-time; by this means he comes to know a great deal about what is going on"*
>
> — Snorri Sturluson, *The Prose Edda*

En 1992, Rudin et al. [111] propusieron un método de eliminación de ruido para imágenes consistente en un problema de optimización que involucra un funcional no uniforme denominado variación total (TV, por sus siglas en inglés). Este método favorece naturalmente los bordes afilados, eliminando las variaciones locales en regiones uniformes y dando como resultado una imagen restaurada con una naturaleza constante por trozos.

La idea de mejorar el aspecto de imágenes a través de la optimización de funcionales convexos que involucran la variación total junto con otras condiciones surgidas de la estadística de la imagen ha sido ampliamente estudiada y se han desarrollado numerosos algoritmos para tal fin. En este trabajo, se implementó un código basado en el algoritmo denominado Forward-Backward Primal-Dual (FBPD), propuesto por L. Condat en 2013 [112].

D.1. Descripción general

En [112] se propone un algoritmo para resolver el problema primario de optimización que consiste en hallar

$$\hat{x} \in \arg\min_{x \in \mathcal{X}} [F(x) + G(x) + H(L(x))], \tag{D.1}$$

donde $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son dos espacios de Hilbert, $F(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ es una función convexa, diferenciable en $\mathcal{X}$ y su gradiente es β-Lipschitz; $G \in \Gamma_0(\mathcal{X})$, $H \in \Gamma_0(\mathcal{Y})$[1] y $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

$L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un operador lineal acotado con adjunto L^* y norma inducida $\|L\| = \sup\{\|Lx\| : x \in \mathcal{X}, \|x\| \leq 1\} < +\infty$.

El problema dual asociado a (D.1) es

$$\hat{y} \in \arg\min_{y \in \mathcal{Y}} [(F + G)^*(-L^* y) + H^*(y)], \tag{D.2}$$

donde $(F + G)^*(-L^* y)$ es una convolución ínfima[2].

Los algoritmos propuestos por Condat (algoritmos 3.1 y 3.2 de [112]) resuelven de manera simultánea los problemas primario (D.1) y dual (D.1). Estos algortimos han sido empleados exitosamente por Pustelnik et al. en la segmentación de texturas scale-free [71].

D.2. Implementación a la entropía de Shannon

Bajo el supuesto de que a regiones con diferentes texturas les corresponden distintos valores de entropía, un algoritmo de eliminación de ruido que resulte en una clasificación constante por trozos es deseable. Por ese motivo aplicaremos este método a fin de obtener una mejora en la clasificación resultante de la entropía.

[1] $\Gamma_0(\mathcal{H})$ es el conjunto de funciones propias, semicontinuas por debajo y convexas de $\mathcal{H}$ a $\mathbb{R} + \{+\infty\}$

[2] Para $J \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, J^* denota el conjugado de Legendre: $J^*(s) := \sup_{s' \in \mathcal{H}} [\langle s, s' \rangle - J(s')]$.

Nuestro objetivo es obtener un conjunto de valores de entropía normalizada $s \in \mathcal{D} = [0, 1]$, asociadas a cada píxel de una imagen de dimensiones $N_1 \times N_2$.

La función objetivo de nuestro problema de minimización consiste en un término de fidelidad más un término de variación total

$$S^{TV} = \underset{S \in \mathcal{D}^{N_1 \times N_2}}{\arg\min} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} (\hat{S} - S)^2 + \lambda TV(S) \right\}, \tag{D.3}$$

donde $\hat{S}$ es la entropía estimada en cada píxel $\underline{k}$ de la imagen a partir de una distribución de probabilidad.

El primer término del funcional consiste en la suma de las diferencias al cuadrado entre $\hat{S}$ y la estimación optimizada S. Se trata de un término de fidelidad que limita la el resultado de la optimización a permanecer cerca de la estimación original.

El término de variación total viene dado por

$$TV(S) = \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} \sqrt{((D_1 S)(k_1, k_2))^2 + ((D_2 S)(k_1, k_2))^2}, \tag{D.4}$$

donde

$$(D_1 S)(k_1, k_2) = S(k_1 + 1, k_2) - S(k_1, k_2), \tag{D.5}$$

$$(D_2 S)(k_1, k_2) = S(k_1, k_2 + 1) - S(k_1, k_2). \tag{D.6}$$

Aquí, el parámetro $\lambda > 0$ determina el comportamiento constante por partes de la solución.

En definitiva, la idea del funcional es obtener un conjunto de valores de entropía próximos a los calculados a partir de los coeficientes multiescala, libres de oscilaciones espurias y preservando los bordes afilados.

Con el fin de usar el algoritmo propuesto, identificaremos nuestro problema con los diferentes elementos del la función general a optimizar. El primer término del problema (D.3) es un término de cuadrados mínimos con un gradiente Lipschitz, por lo que podemos identificarlo con la función $F(x)$ presente en el problema tratado por Condat, siendo $\mathcal{X}$ el espacio de las $S \in \mathcal{D}^{N_1 \times N_2}$.

Es posible identificar el operador lineal L con $(D_1, D_2)(S)$, por lo que $\mathcal{Y}$ es equivalente a $\mathcal{D}^{2\times N_1 \times N_2}$. Por tanto $TV(S)$ es identificada con $H(L(x))$. Suponiendo por último que $G(x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$ nuestro problema queda completamente identificado con el tratado por Condat, pudiendo entonces aplicar el algoritmo 3.1 propuesto en [112].

Este algoritmo trabaja con el gradiente de la función β-Lipschitz y los operadores lineales de forma directa, mientras que las funciones no suaves son trabajadas a partir de sus operadores proximidad[3].

En este caso, dijimos que $G(x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$, por lo que su operador proximidad es simplemente el operador identidad.

Por otro lado, el operador proximidad $\text{prox}_{\sigma H^*}$ puede ser reescrito en función de $\text{prox}_{H/\sigma}$ a través de la identidad de Moreau: $\text{prox}_{\sigma H^*}(y) = y - \sigma\, \text{prox}_{H/\sigma}(y/\sigma)$.

Dado que en nuestro caso $H \equiv \|\cdot\|_{2,1}$, el operador proximidad correspondiente tiene una forma cerrada dada en [114]

$$\text{prox}_{H/\sigma}(y) = \text{máx}\left(0, 1 - (\sigma \|y\|_2)^{-1}\right) y.$$

[3]Para el lector interesado en el tópico de operadores proximidad, puede hallar una descripción más profunda en [113] y sus referencias.

Apéndice E

Información computacional

Los cálculos presentados en este trabajo de tesis fueron realizados por medio de códigos computacionales escritos en lenguaje Matlab y y ejecutados en un equipo con las especificaciones indicadas en la tabla E.1.

Los códigos y archivos con los resultados de su implementación se encuentran disponibles a través del enlace https://drive.google.com/drive/folders/1ImbEtluOpTgwovhgQQKhU9zkdRiPOIst?usp=sharing. Los archivos del repositorio se encunetrar organizados de acuerdo al diagrama de la figura E.1. Cada una de las carpetas indicadas con el símbolo * en el diagrama contienen un archivo de extensión .mat con los resultados del análisis correspondiente y los programas, con extensión .m, necesarios para la ejecución del cálculo.

Es necesario aclarar que las imágenes originales de los sensores no se encuentran en el repositorio por cuestiones de tamaño de los archivos. No obstante, en la mayoría de las carpetas es posible encontrar el recorte estudiado. Además, los archivos de resultado poseen una copia de

Procesador:	Intel(R) Core(TM) i7 - 7700
Memoria RAM:	8.00 GB
Sistema operativo:	Windows 10 Home - 64 bit

Tabla E.1: Especificaciones del equipo en el que se ejecutaron los códigos de cálculo.

dicho segmento de la imagen original.

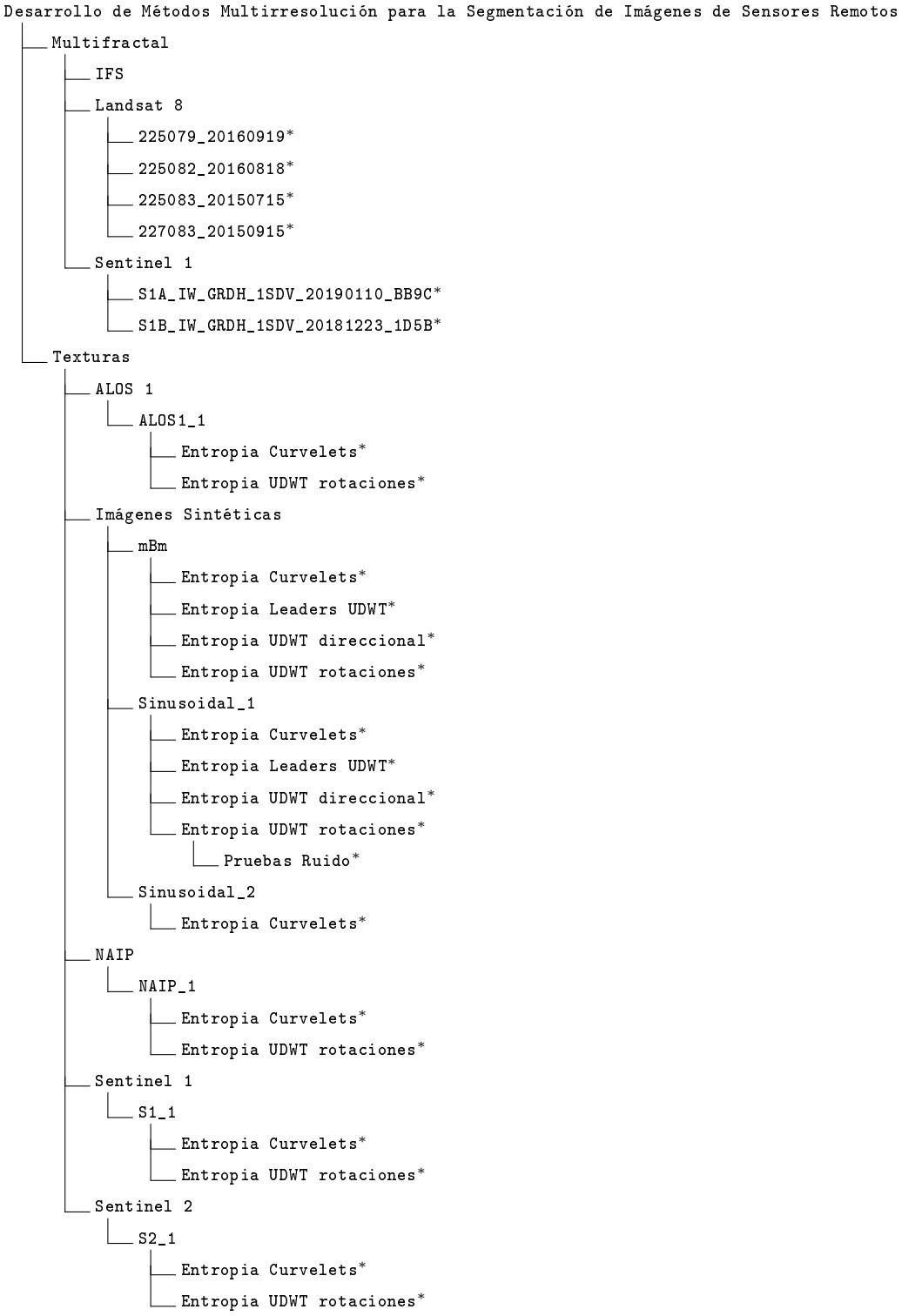


Figura E.1: Diagrama de la estructura de carpetas en el repositorio que contiene los archivos relacionados con el trabajo de tesis.

Bibliografía

[1] V. San Martin y A. Figliola, "Application of multifractal analysis to segmentation of water bodies in optical satellite images," *Papers in Physics*, vol. 9, p. 090007, 2017.

[2] J. Campbell y R. Wynne, *Introduction to Remote Sensing, Fifth Edition.* Guilford Publications, 2011.

[3] C. C. de Araujo Barbosa, P. M. Atkinson, y J. A. Dearing, "Remote sensing of ecosystem services: A systematic review," *Ecological Indicators*, vol. 52, pp. 430 – 443, 2015.

[4] Y. Ninomiya y B. Fu, "Thermal infrared multispectral remote sensing of lithology and mineralogy based on spectral properties of materials," *Ore Geology Reviews*, vol. 108, pp. 54 – 72, 2019.

[5] R. P. Gupta, *Remote sensing geology.* Springer, 2017.

[6] Z. Zhu, Y. Zhou, K. C. Seto, E. C. Stokes, C. Deng, S. T. Pickett, y H. Taubenböck, "Understanding an urbanizing planet: Strategic directions for remote sensing," *Remote Sensing of Environment*, vol. 228, pp. 164 – 182, 2019.

[7] Q. Weng, D. Quattrochi, y P. E. Gamba, *Urban remote sensing.* CRC press, 2018.

[8] Y. Li, S. Grimaldi, J. Walker, y V. Pauwels, "Application of remote sensing data to constrain operational rainfall-driven flood forecasting: A review," *Remote Sensing*, vol. 8, no. 6, p. 456, 2016.

[9] S. C. Steele-Dunne, H. McNairn, A. Monsivais-Huertero, J. Judge, P. Liu, y K. Papathanassiou, "Radar remote sensing of agricultural canopies: A review," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 10, no. 5, pp. 2249–2273, 2017.

[10] T. Adão, J. Hruška, L. Pádua, J. Bessa, E. Peres, R. Morais, y J. Sousa, "Hyperspectral imaging: A review on uav-based sensors, data processing and applications for agriculture and forestry," *Remote Sensing*, vol. 9, no. 11, p. 1110, 2017.

[11] G. P. Petropoulos y T. Islam, *Remote Sensing of Hydrometeorological Hazards*. CRC Press, 2017.

[12] M. S. Rahman y L. Di, "The state of the art of spaceborne remote sensing in flood management," *Natural Hazards*, vol. 85, no. 2, pp. 1223–1248, 2017.

[13] M. A.-A. Hoque, S. Phinn, C. Roelfsema, y I. Childs, "Tropical cyclone disaster management using remote sensing and spatial analysis: A review," *International Journal of Disaster Risk Reduction*, vol. 22, pp. 345 – 354, 2017.

[14] B. Leblon, J. San-Miguel-Ayanz, L. Bourgeau-Chavez, y M. Kong, "3 - remote sensing of wildfires," en *Land Surface Remote Sensing* (N. Baghdadi y M. Zribi, eds.), pp. 55 – 95, Elsevier, 2016.

[15] C. Elachi y J. J. van Zyl, *Introduction To The Physics and Techniques of Remote Sensing*. John Wiley & Sons, 2006.

[16] J. Peng, A. Loew, O. Merlin, y N. E. C. Verhoest, "A review of spatial downscaling of satellite remotely sensed soil moisture," *Reviews of Geophysics*, vol. 55, no. 2, pp. 341–366, 2017.

[17] L. Karthikeyan, M. Pan, N. Wanders, D. N. Kumar, y E. F. Wood, "Four decades of microwave satellite soil moisture observations: Part 1. a review of retrieval algorithms," *Advances in Water Resources*, vol. 109, pp. 106 – 120, 2017.

[18] M. Li, S. Zang, B. Zhang, S. Li, y C. Wu, "A review of remote sensing image classification techniques: the role of spatio-contextual information," *European Journal of Remote Sensing*, vol. 47, no. 1, pp. 389–411, 2014.

[19] S. Aksoy, J. Tilton, y Y. Tarabalka, "Image segmentation algorithms for land categorization," en *Remote sensing Handbook V. 1 Remotely sensed data characterization, classification, and accuracies*, pp. 317–342, Taylor & Francis, 2015.

[20] J. Canny, "A computational approach to edge detection," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-8, no. 6, pp. 679–698, 1986.

[21] I. Sobel, "Camera models and perception [Ph. D. thesis]. California: Artificial Intelligence Lab, Stanford University," 1970.

[22] R. A. Kirsch, "Computer determination of the constituent structure of biological images," *Computers and Biomedical Research*, vol. 4, no. 3, pp. 315 – 328, 1971.

[23] J. M. Prewitt, "Object enhancement and extraction," *Picture processing and Psychopictorics*, vol. 10, no. 1, pp. 15–19, 1970.

[24] G. Papari y N. Petkov, "Edge and line oriented contour detection: State of the art," *Image and Vision Computing*, vol. 29, no. 2, pp. 79–103, 2011.

[25] D. Oliva y E. Cuevas, "Digital image segmentation as an optimization problem," en *Advances and Applications of Optimised Algorithms in Image Processing*, pp. 43–91, Springer International Publishing, 2017.

[26] R. Gonzalez y R. Woods, *Digital Image Processing*. Pearson/Prentice Hall, 2008.

[27] W. K. Pratt, *Introduction to digital image processing*. CRC press, 2013.

[28] D. Gough, S. Oliver, y J. Thomas, *An Introduction to Systematic Reviews*. SAGE Publications, 2012.

[29] J. Jesson, L. Matheson, y F. Lacey, *Doing Your Literature Review: Traditional and Systematic Techniques*. SAGE Publications, 2011.

[30] M. D. Hossain y D. Chen, "Segmentation for object-based image analysis (OBIA): A review of algorithms and challenges from remote sensing perspective," *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. 150, pp. 115 – 134, 2019.

[31] M.-C. Mouchot, T. Alföldi, D. de Lisle, y G. McCullough, "Monitoring the water bodies of the mackenzie delta by remote sensing methods," *Arctic*, vol. 44, pp. 21–28, 1991.

[32] N. Otsu, "A threshold selection method from gray-level histograms," *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 9, no. 1, pp. 62–66, 1979.

[33] J. Li y S. Wang, "An automatic method for mapping inland surface waterbodies with radarsat-2 imagery," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 36, no. 5, pp. 1367–1384, 2015.

[34] H. Cao, H. Zhang, C. Wang, y B. Zhang, "Operational flood detection using sentinel-1 SAR data over large areas," *Water*, vol. 11, no. 4, p. 786, 2019.

[35] S. K. McFeeters, "The use of the normalized difference water index (ndwi) in the delineation of open water features," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 17, no. 7, pp. 1425–1432, 1996.

[36] A. S. Rogers y M. S. Kearney, "Reducing signature variability in unmixing coastal marsh thematic mapper scenes using spectral indices," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 25, no. 12, pp. 2317–2335, 2004.

[37] H. Xu, "Modification of normalised difference water index (ndwi) to enhance open water features in remotely sensed imagery," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 27, no. 14, pp. 3025–3033, 2006.

[38] G. Donchyts, J. Schellekens, H. Winsemius, E. Eisemann, y N. van de Giesen, "A 30 m resolution surface water mask including estimation of positional and thematic differences using landsat 8, srtm and openstreetmap: A case study in the murray-darling basin, australia," *Remote Sensing*, vol. 8, no. 5, p. 386, 2016.

[39] G. Kite y A. Pietroniro, "Remote sensing of surface water," en *Remote Sensing in Hydrology and Water Management* (G. A. Schultz y E. T. Engman, eds.), pp. 217–238, Springer Berlin Heidelberg, 2000.

[40] S. G. Dellepiane y L. Gemme, "Adaptive SAR image processing techniques to support flood monitoring from earth observation data," en *Flood Monitoring through Remote Sensing* (A. Refice, A. D'Addabbo, y D. Capolongo, eds.), pp. 115–134, Springer International Publishing, 2018.

[41] S. Martinis, C. Kuenzer, y A. Twele, "Flood studies using synthetic aperture radar data," en *Remote Sensing Handbook Volume III: Remote Sensing of Water Resources, Disasters, and Urban Studies* (P. S. Thenkabail, ed.), CRC Press, 2015.

[42] B. B. Mandelbrot, "How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension," *Science*, vol. 156, no. 3775, pp. 636–638, 1967.

[43] B. B. Mandelbrot, *Fractals: form, chance, and dimension*, vol. 706. WH Freeman San Francisco, 1977.

[44] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. WH freeman, 1983.

[45] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2004.

[46] R. Lopes y N. Betrouni, "Fractal and multifractal analysis: A review," *Medical Image Analysis*, vol. 13, no. 4, pp. 634 – 649, 2009.

[47] B. B. Mandelbrot, "Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 62, no. 2, p. 331–358, 1974.

[48] G. Parisi y U. Frisch, "A multifractal model of intermittency," en *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics : proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi course 88* (M. Ghil, R. Benzi, y G. Parisi, eds.), pp. 84–88, North-Holland, 1985.

[49] A. Chhabra y R. V. Jensen, "Direct determination of the f(α) singularity spectrum," *Physical Review Letters*, vol. 62, pp. 1327–1330, 1989.

[50] J. L. Vehel, P. Mignot, y J.-P. Berroir, "Multifractals, texture, and image analysis," en *Proceedings 1992 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 661–664, IEEE, 1992.

[51] J. Lévy Véhel y J.-P. Berroir, "Image analysis throught multifractal description," Research Report RR-1942, INRIA, 1993.

[52] J. Lévy Véhel y P. Mignot, "Multifractal segmentation of images," *Fractals*, vol. 2, no. 03, pp. 371–377, 1994.

[53] J. Lévy Véhel, "Introduction to the Multifractal Analysis of Images," en *Fractal Image Encoding and Analysis* (Y. Fisher, ed.), vol. 159, pp. 299–341, Springer, 1998.

[54] T. Stojić, I. Reljin, y B. Reljin, "Adaptation of multifractal analysis to segmentation of microcalcifications in digital mammograms," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 367, pp. 494–508, 2006.

[55] E. Nilsson, "Multifractal-based image analysis with applications in medical imaging [M. S. thesis]. Department of Computing Science, Umea University, Umea, Sweden," 2007.

[56] R. Korchiyne, A. Sbihi, S. M. Farssi, R. Touahni, y M. T. Alaoui, "Medical image texture segmentation using multifractal analysis," en *2012 International Conference on Multimedia Computing and Systems*, pp. 422–425, IEEE, 2012.

[57] V. San Martin y A. Figliola, "Estudio de la multifractalidad de imágenes satelitales sobre el río lujan," en *V Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, vol. 5, pp. 413 – 416, ASAMACI, 2015.

[58] M. Broniatowski y P. Mignot, "A self-adaptive technique for the estimation of the multifractal spectrum," *Statistics and Probability Letters*, vol. 54, no. 2, pp. 125 – 135, 2001.

[59] E. Medvedeva, I. Trubin, y E. Kurbatova, "Methods of filtering and texture segmentation of multicomponent images," en *Computer Vision in Control Systems-3: Aerial and Satellite Image Processing* (M. N. Favorskaya y L. C. Jain, eds.), pp. 97–118, Springer International Publishing, 2018.

[60] B. B. Chaudhuri y N. Sarkar, "Texture segmentation using fractal dimension," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 17, no. 1, pp. 72–77, 1995.

[61] Y. Xia, D. Feng, y R. Zhao, "Morphology-based multifractal estimation for texture segmentation," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 15, no. 3, pp. 614–623, 2006.

[62] M. Cimpoi, S. Maji, y A. Vedaldi, "Deep filter banks for texture recognition and segmentation," en *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, pp. 3828–3836, 2015.

[63] Y. Duan, F. Liu, L. Jiao, P. Zhao, y L. Zhang, "SAR image segmentation based on convolutional-wavelet neural network and Markov Random Field," *Pattern Recognition*, vol. 64, pp. 255 – 267, 2017.

[64] A. C. Frery, H. . Muller, C. C. F. Yanasse, y S. J. S. Sant'Anna, "A model for extremely heterogeneous clutter," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 35, no. 3, pp. 648–659, 1997.

[65] E. S. de Almeida, A. C. de Medeiros, O. A. Rosso, y A. C. Frery, "Generalized statistical complexity of sar imagery," en *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications* (L. Alvarez, M. Mejail, L. Gomez, y J. Jacobo, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 656–663, Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[66] J. Naranjo-Torres, J. Gambini, y A. C. Frery, "The geodesic distance between $\mathcal{G}_i^0$ models and its application to region discrimination," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 10, pp. 987–997, March 2017.

[67] D. Chan, J. Cassetti, y A. C. Frery, "Texture parameter estimation in monopolarized sar imagery, for the single look case, using extreme value theory," en *2016 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pp. 3266–3269, July 2016.

[68] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way.* Academic Press, Inc., 3rd ed., 2008.

[69] N. Pustelnik, H. Wendt, y P. Abry, "Local regularity for texture segmentation: Combining wavelet leaders and proximal minimization," en *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp. 5348–5352, 2013.

[70] N. Pustelnik, P. Abry, H. Wendt, y N. Dobigeon, "Inverse problem formulation for regularity estimation in images," en *2014 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pp. 6081–6085, 2014.

[71] N. Pustelnik, H. Wendt, P. Abry, y N. Dobigeon, "Combining local regularity estimation and total variation optimization for scale-free texture segmentation," *IEEE Transactions on Computational Imaging*, vol. 2, no. 4, pp. 468–479, 2016.

[72] D. F. Walnut, *An introduction to wavelet analysis.* Springer Science & Business Media, 2013.

[73] Y. Zhang, Z. Dong, A. Liu, S. Wang, G. Ji, Z. Zhang, y J. Yang, "Magnetic resonance brain image classification via stationary wavelet transform and generalized eigenvalue proximal support vector machine," *Journal of Medical Imaging and Health Informatics*, vol. 5, no. 7, pp. 1395–1403, 2015.

[74] Y. Zhang, S. Lu, X. Zhou, M. Yang, L. Wu, B. Liu, P. Phillips, y S. Wang, "Comparison of machine learning methods for stationary wavelet entropy-based multiple sclerosis detection: decision tree, k-nearest neighbors, and support vector machine," *Simulation*, vol. 92, no. 9, pp. 861–871, 2016.

[75] S. Wang, S. Du, A. Atangana, A. Liu, y Z. Lu, "Application of stationary wavelet entropy in pathological brain detection," *Multimedia Tools and Applications*, vol. 77, no. 3, pp. 3701–3714, 2016.

[76] M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, y P. Tchamitchian, "A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform," en *Wavelets* (J.-M. Combes, A. Grossmann, y P. Tchamitchian, eds.), pp. 286–297, Springer Berlin Heidelberg, 1990.

[77] M. J. Shensa, "The discrete wavelet transform: wedding the a trous and mallat algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 10, pp. 2464–2482, 1992.

[78] E. J. Candès y D. L. Donoho, "Curvelets: A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges," Technical Report, Stanford University, Department of Statistics, 2000.

[79] A. Figliola y E. Serrano, "Analysis of physiological time series using wavelet transforms," *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, vol. 16, no. 3, pp. 74 – 79, 1997.

[80] S. Blanco, A. Figliola, R. Q. Quiroga, O. A. Rosso, y E. Serrano, "Time-frequency analysis of electroencephalogram series. III. wavelet packets and information cost function," *Physical Review E*, vol. 57, pp. 932–940, 1998.

[81] O. A. Rosso, S. Blanco, J. Yordanova, V. Kolev, A. Figliola, M. Schürmann, y E. Başar, "Wavelet entropy: a new tool for analysis of short duration brain electrical signals," *Journal of Neuroscience Methods*, vol. 105, no. 1, pp. 65 – 75, 2001.

[82] M. Rosenblatt, E. Serrano, y A. Figliola, "An entropy based in wavelet leaders to quantify the local regularity of a signal and its application to analize the dow jones index," *Inter-*

national Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, vol. 10, no. 05, p. 1250048, 2012.

[83] M. Rosenblatt, A. Figliola, G. Paccosi, E. Serrano, y O. A. Rosso, "A quantitative analysis of an EEG epileptic record based on multiresolution wavelet coefficients," *Entropy*, vol. 16, no. 11, pp. 5976–6005, 2014.

[84] M. Rosenblatt, V. San Martin, A. Figliola, y E. Serrano, "Regularidad de imágenes aplicada al estudio de ríos de llanura," en *Acts del VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, vol. 6, pp. 464 – 467, ASAMACI, 2017.

[85] R. V. L. Hartley, "Transmission of information," *The Bell System Technical Journal*, vol. 7, no. 3, pp. 535–563, 1928.

[86] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, 1948.

[87] A. Khinchin, *Mathematical Foundations of Information Theory*. Dover Publications, 1957.

[88] L. Brillouin, *Science and Information Theory*. Dover Publications, 1956.

[89] E. T. Jaynes, "Information theory and statistical mechanics," *Physical Review*, vol. 106, pp. 620–630, 1957.

[90] E. T. Jaynes, "Information theory and statistical mechanics. II," *Physical Review*, vol. 108, pp. 171–190, 1957.

[91] C. Arndt, *Information Measures: Information and its Description in Science and Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.

[92] W. Poundstone, *Fortune's formula: The untold story of the scientific betting system that beat the casinos and Wall Street*. Hill and Wang, 2010.

[93] N. Merhav *et al.*, "Statistical physics and information theory," *Foundations and Trends® in Communications and Information Theory*, vol. 6, no. 1–2, pp. 1–212, 2010.

[94] A. Rényi, "On measures of entropy and information," en *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*, University of California Press, 1961.

[95] J. F. Muzy, E. Bacry, y A. Arneodo, "The multifractal formalism revisited with wavelets," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 04, no. 02, pp. 245–302, 1994.

[96] S. Jaffard, "Oscillation spaces: Properties and applications to fractal and multifractal functions," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 39, pp. 4129–4141, 1998.

[97] S. Jaffard, "Wavelet techniques in multifractal analysis," en *Fractal geometry and applications: a jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2*, vol. 72 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 91–151, Amer. Math. Soc., 2004.

[98] S. G. Mallat, "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$," *Transactions of the American mathematical society*, vol. 315, no. 1, pp. 69–87, 1989.

[99] Y. Meyer, *Wavelets and operators*, vol. 1. Cambridge university press, 1992.

[100] J. Starck, F. Murtagh, y J. Fadili, "Redundant wavelet transform," en *Sparse Image and Signal Processing: Wavelets and Related Geometric Multiscale Analysis*, p. 45–79, Cambridge University Press, 2015.

[101] E. J. Candès, "Harmonic analysis of neural networks," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 6, no. 2, pp. 197 – 218, 1999.

[102] E. J. Candès y D. L. Donoho, "New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C2 singularities," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 57, no. 2, pp. 219–266, 2004.

[103] E. Candès, L. Demanet, D. Donoho, y L. Ying, "Fast discrete curvelet transforms," *Multiscale Modeling & Simulation*, vol. 5, no. 3, pp. 861–899, 2006.

[104] K. Murota, *Discrete convex analysis*. SIAM, 2003.

[105] B. B. Mandelbrot y J. W. Van Ness, "Fractional brownian motions, fractional noises and applications," *SIAM review*, vol. 10, no. 4, pp. 422–437, 1968.

[106] R.-F. Peltier y J. Lévy Véhel, "Multifractional Brownian Motion : Definition and Preliminary Results," Research Report RR-2645, INRIA, 1995.

[107] U.S. Geological Survey (USGS), *Landsat 8 Data Users Handbook*, April 2019.

[108] European Space Agency (ESA), *SENTINEL-2 User Handbook*, Julio 2015.

[109] A. Moreira, P. Prats-Iraola, M. Younis, G. Krieger, I. Hajnsek, y K. P. Papathanassiou, "A tutorial on synthetic aperture radar," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine*, vol. 1, no. 1, pp. 6–43, 2013.

[110] Earth Observation Research and Application Center - Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA), *ALOS Data Users Handbook*, March 2008.

[111] L. I. Rudin, S. Osher, y E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 60, no. 1, pp. 259 – 268, 1992.

[112] L. Condat, "A primal-dual splitting method for convex optimization involving lipschitzian, proximable and linear composite terms," *Journal of optimization theory and applications*, vol. 158, no. 2, pp. 460–479, 2013.

[113] N. Parikh y S. Boyd, "Proximal algorithms," *Foundations and Trends in Optimization*, vol. 1, no. 3, pp. 127–239, 2014.

[114] G. Peyré y J. Fadili, "Group sparsity with overlapping partition functions," en *2011 19th European Signal Processing Conference*, pp. 303–307, 2011.