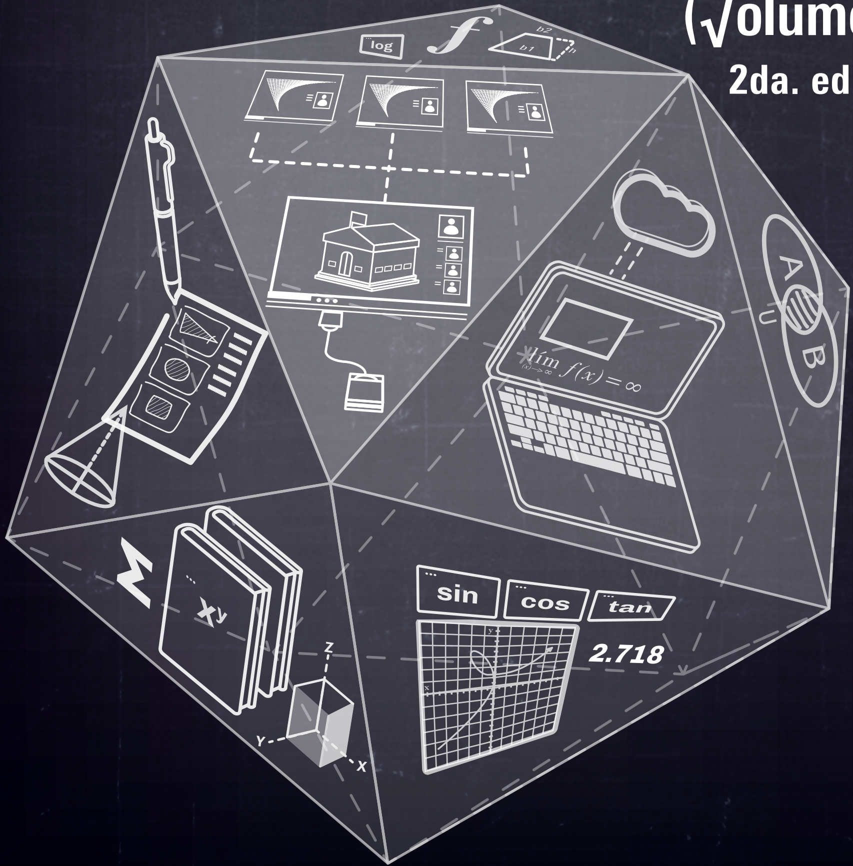
Colección Educación

Educación matemática

Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos

($\sqrt{}$olumen^2)

2da. edición



Mabel Rodríguez, Marcel Pochulu y Fabián Espinoza

(coordinadores)

EDICIONES UNGS

Universidad Nacional de General Sarmiento

Educación matemática

Mabel Rodríguez, Marcel Pochulu
y Fabián Espinoza
(coordinadores)

Educación matemática
Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos
Volumen 2
(2da. edición)

EDICIONES UNGS

Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

Educación matemática : volumen 2 : aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos / Marcel David Pochulu ... [et al.] ; Coordinación general de Mabel Rodríguez ; Marcel David Pochulu ; Fabián Espinoza. - 2a ed - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2024.
Libro digital, PDF - (Educación / 38)
Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-630-775-8
1. Matemática. 2. Educación. 3. Formación Docente. I. Pochulu, Marcel David, coord. II. Rodríguez, Mabel, coord. III. Espinoza, Fabián, coord.
CDD 510.711

EDICIONES **UNGS**

J. M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)
Prov. de Buenos Aires, Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507
ediciones@campus.ungs.edu.ar
ediciones.ungs.edu.ar

Diseño gráfico de colección: Andrés Espinosa Ediciones UNGS
Diseño de tapa: Daniel Vidable
Diagramación: Eleonora Silva
Corrección: Miriam Andiñach

Hecho el depósito que marca la Ley 11723.

L U A Libro Universitario Argentino

Índice

Introducción 9

Primera sección
Enfoques teóricos en educación matemática

1. Herramientas y constructos del enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos para el diseño y análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje 15
Marcel Pochulu y Vicenç Font Moll

2. Distintas formas de inclusión de la historia de la matemática en la enseñanza. Algunas ideas usando logaritmos.....................................49
Gustavo Carnelli

3. Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática...67
Jhony Alexander Villa-Ochoa, Jonathan Sánchez-Cardona y Mónica Marcela Parra-Zapata

4. Etnomatemática, un posible anuncio en educación matemática............91
Diana Jaramillo, Carolina Tamayo y Óscar Charry

5. La teoría antropológica de lo didáctico. Aportes a las tareas profesionales del profesor de matemática 119
Fabian Espinoza y Saúl Ernesto Cosmes Aragón

Segunda sección
Nuevas tecnologías bajo distintos enfoques teóricos

6. Análisis de una tarea matemática desde la resolución de problemas mediada por la tecnología 137
Patricia Barreiro, Paula Leonian y Claudia Zuliani

7. Análisis ontosemiótico de la resolución
de un problema geométrico 151
María Laura Distéfano y Mario Álvarez

8. Relación entre expresiones algebraicas de funciones
y sus representaciones gráficas desde una perspectiva cognitivista.............169
Cristina Camós y Lorena Guglielmone

9. Una situación para introducir un estudio general
de las funciones homográficas..183
Inés Casetta y Martín Chacón

10. Repensar la práctica docente haciendo uso de la tecnología.
Una visión socioepistemológica 205
Patricia Lestón y Daniela Veiga

11. Análisis de una tarea que promueve la alfabetización matemática
desde la educación matemática crítica y las nuevas tecnologías.................221
Víctor González y Mabel Rodríguez

Introducción

La enseñanza de la matemática es una tarea profesional compleja que requiere formación específica y la convicción de la necesidad de una continua actualización. A lo largo de los años de trabajo, cambian los contextos de los estudiantes, los recursos a los que se accede, los contenidos se actualizan, surgen nuevos enfoques didácticos, requerimientos regionales que atender, etcétera, y es el docente quien debe comprender cada situación, tomar decisiones, actuar en cada circunstancia, evaluar su propuesta y disponerse a ajustarla, si fuera el caso. Se hace necesario que los futuros profesores, en su formación inicial, adquieran herramientas no solo para enseñar matemática, sino también para comprender este tipo de cambios que se sucederán durante su desempeño profesional, acceder a materiales idóneos, estudiarlos y seleccionar o adaptar lo que consideren apropiado en función de las necesidades que deban atender. Entendemos que de igual modo debiera ocurrir con los docentes en ejercicio.

Entre los conocimientos que son clave para el trabajo del profesor de matemática, la educación matemática ocupa un lugar central. Es un campo que se expande desde hace años. Distintos enfoques teóricos se consolidan, se amplían los grupos de investigadores en distintas partes del mundo, se aplican y adaptan resultados, se genera teoría, se documentan experiencias de aula, etcétera. Las distintas perspectivas vigentes permiten estudiar fenómenos didácticos y dar respuestas que enfatizan en aspectos particulares de los mismos.

Este libro pretende acercar –a profesores formados y en formación– elementos de algunas de las líneas vigentes de la educación matemática. Fue concebido para dar continuidad a una primera obra que la Universidad Nacional de General Sarmiento y la Universidad Nacional de Villa María publicaron bajo el título *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, cuya primera edición fue en 2012.

En este texto, que hemos denominado *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Volumen 2*, incluimos dos grandes secciones concebidas del siguiente modo. La primera sección, presenta aspectos centrales de distintos enfoques del campo de la educación matemática. Algunos de ellos forman parte de líneas teóricas de la educación matemática. Otros, por su parte, brindan herramientas para pensar la enseñanza, aunque en su identidad no sean vistos como teorías de la educación matemática, como es el caso de la historia de la matemática.

De este modo, en la primera sección, "Enfoques teóricos en educación matemática", se retoma y amplía el texto anterior, presentando en el primer capítulo el tema del enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos, a cargo de Marcel Pochulu y Vicenç Font Moll; y en el segundo, el tema de la historia de la matemática a cargo de Gustavo Carnelli. El tercer capítulo aborda la modelización matemática desde la perspectiva de la enseñanza y fue elaborado por el equipo conformado por Jhony Alexander Villa-Ochoa, Jonathan Sánchez-Cardona y Mónica Marcela Parra-Zapata. El cuarto capítulo presenta la etnomatemática y se trata de otra producción en equipo, que estuvo a cargo de Diana Jaramillo, Carolina Tamayo y Óscar Charry.

Los autores de cada capítulo son investigadores de reconocida trayectoria en el campo de la educación matemática y han trabajado en las líneas cuya redacción ha estado a su cargo. Cabe destacar que han hecho una selección cuidada atendiendo a que el material resulte un aporte para la tarea docente y han logrado presentaciones accesibles que no requieren un conocimiento previo de cada enfoque.

La segunda sección del libro, "Nuevas tecnologías bajo distintos enfoques teóricos", tiene una doble pretensión. Por un lado, ofrece al lector un análisis de situaciones de enseñanza que dejan de manifiesto la significatividad del uso de las nuevas tecnologías (tic) al mostrar la riqueza matemática que podría lograrse si los estudiantes las utilizaran, en relación con las resoluciones en papel y lápiz. Las resoluciones que se incluyen son producciones desarrolladas por el o los autores, para comprender la situación y aportar a la discusión didáctica. Cabe resaltar que, desde una perspectiva experta, se incluyen resoluciones con herramientas matemáticas diversas y también anticipaciones a prácticas cercanas a las que podrían realizar los estudiantes.

Por otro lado, posteriormente se presenta un análisis de las situaciones presentadas, en términos de distintas líneas de la educación matemática. Cada capítulo considera un enfoque teórico y todos comparten una misma estructura de presentación: una *tarea* (un contexto de enseñanza, un objetivo de aprendizaje y una consigna), una discusión sobre resoluciones posibles en papel y lápiz –y posteriormente con uso de TIC– para finalmente presentar un análisis con elementos de la línea teórica específica. Este análisis se basa y fundamenta en algunos constructos, herramientas teóricas y metodológicas de la línea teórica que involucra. Es oportuno señalar que no es propósito del libro presentar un análisis exhaustivo que involucre todas las potencialidades de cada enfoque didáctico. Por el contrario, persigue los siguientes propósitos. Por un lado, invita a profesores y estudiantes de profesorado a incursionar en la teoría, a fin de avanzar en la elaboración, ejecución y evaluación de propuestas de enseñanza. Por otra parte, ofrece ejemplos de *análisis* (Rodríguez, 2017). En ellos se verán articulados: *juicios* que los autores han de sostener con *evidencias* y en vínculo con *teoría*. Estos tres elementos son los componentes fundamentales que todo análisis debería articular de manera coherente y relevante. Cada uno de los capítulos desarrolla uno de los ejemplos, poniendo en juego conceptos de la teoría seleccionada y permitiendo advertir la especificidad de las evidencias que se arraigan en la anticipación de resoluciones previamente desarrolladas.

Esta segunda sección persigue un propósito que esperamos que se vislumbre al hacer una mirada conjunta de los capítulos que la componen. El esfuerzo de los autores en mantener una misma estructura favorece *advertir el rol de las TIC como recurso más allá de la perspectiva teórica con la que se pretenda trabajar*.

El primero de los capítulos está a cargo del equipo conformado por Patricia Barreiro, Paula Leonian y Claudia Zuliani, y la perspectiva teórica con la que se enriquece el uso pertinente y significativo de las TIC es la resolución de problemas. El segundo tiene como responsables a María Laura Distéfano y Mario Álvarez, quienes abordan el análisis desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. El tercero lo elaboran Cristina Camós y María Lorena Guglielmone, quienes trabajan desde el enfoque cognitivo. Del cuarto capítulo son autores Inés Casetta y Martín Chacón, quienes ilustran el análisis desde la óptica de la teoría de las situaciones didácticas. El último capítulo está elaborado por Patricia Lestón y Daniela Veiga, quienes encuadran el trabajo en la socioepistemología.

Queremos destacar que intencionalmente el libro no ofrece secuencias de enseñanza. Esto se debe a que entendemos que la decisión de las secuencias a utilizar es una tarea insustituible de cada profesor. Es él quien conoce la institución, el grupo de estudiantes, los requerimientos institucionales, etcétera, y en ese marco, mediante sus conocimientos profesionales, diseña, adapta, modifica, sus propuestas de enseñanza. Aquí ofrecemos discusiones sobre cuestiones matemáticas y didácticas que podrían enriquecer los conocimientos de los docentes. Muchas de ellas, para que se trabajen en el aula, requieren intervenciones apropiadas. Queda a cargo del lector delinearlas, en función de las adaptaciones o secuencias que diseñe a partir de las ideas aquí compartidas. Para consideraciones generales y ejemplos, a este respecto, sugerimos ver el capítulo 5 del libro *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática* (Rodríguez, 2022), de libre acceso. Allí mismo se encuentran con detalle consideraciones para el diseño de tareas, redacción de consignas y uso pertinente y significativo de las TIC, en concordancia con las denominaciones y enfoques de este texto.

Por su parte, los dos libros: *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (Pochulu y Rodríguez, 2015) y el actual *Volumen 2* ofrecen, conjuntamente, un acercamiento inicial a trece teorías didácticas. Cada una de ellas permite ver y entender aspectos parciales de una complejidad inabarcable que puede ser interpretada y enriquecida a partir de múltiples miradas.

Esperamos que el texto pueda resultar útil no solo para estudiantes de profesorado o profesores, sino también para quienes se inician en investigación y necesiten disponer de una perspectiva amplia del campo de la educación matemática.

Mabel Rodríguez*

Referencias bibliográficas

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2015). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* EDUVIM y Ediciones UNGS.

Rodríguez, M. (Coord.) (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.

* Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

Primera sección
Enfoques teóricos en educación matemática

1. Herramientas y constructos del enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos para el diseño y análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje

*Marcel Pochulu y Vicenç Font Moll**

Introducción

En este capítulo describimos y ejemplificamos las diferentes herramientas y constructos que tiene el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (EOS), para el diseño y análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje llevados a cabo en una clase de matemática.[1]

En el EOS, las cuestiones instruccionales se estudiaron partiendo de las teorías y marcos disponibles –entre otras, la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1998)– proponiendo un conjunto de herramientas y constructos que, en parte, son el resultado de una hibridación (Godino, 2017) de constructos teóricos generados en dichos marcos para el análisis de los procesos instruccionales. Los problemas y preguntas iniciales que conformaron la base del EOS se

---

* *M. Pochulu*: Universidad Nacional de Villa María, Argentina.
V. Font Moll: Universidad de Barcelona, España.

[1] Para el lector que quiera ampliar en fundamentos y principios de esta línea de la didáctica de la matemática, puede recurrir a los trabajos de síntesis que se hallan en la siguiente dirección URL: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/.

pueden sintetizar en dos: el problema epistemológico y el problema semiótico cognitivo asociado. Posteriormente, se le sumaron y perfilaron el problema ontológico, el problema educativo-instruccional, el problema ecológico y el problema de optimización del proceso de instrucción, conformando los problemas, principios y métodos de investigación en didáctica de la matemática, como puede verse en Godino, Batanero y Font (2020).

El problema epistemológico parte de cuestionarse: ¿qué es un objeto matemático? O de manera equivalente, ¿cuál es el significado de un objeto matemático en un contexto o marco institucional determinado? En tanto, el problema epistemológico se complementa dialécticamente con el problema semiótico cognitivo asociado, cuando se busca responder a las preguntas: ¿qué es conocer un objeto matemático? ¿Qué significa el objeto para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

El EOS propone que el análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje (planificado o implementado) se realice teniendo en cuenta cinco tipos de análisis (ver figura 1).

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos);
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos;
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas;
4. Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa);
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 132).

Figura 1. Tipos de análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje

Fuente: adaptación de Godino, Font y Whihelmi (2008, p. 39).

Los primeros cuatro tipos de análisis corresponden a una didáctica descriptivo-explicativa, permitiendo comprender y explicar lo que está ocurriendo en un determinado sistema didáctico (análisis del sistema de prácticas; análisis de los objetos que intervienen y emergen de dichas prácticas; análisis de la gestión de la trayectoria didáctica en la que se realizan dichas prácticas, y análisis de las normas y metanormas que regulan todo el proceso).

El quinto tipo (análisis de la idoneidad didáctica), en tanto, permite avanzar de una didáctica descriptiva a otra prescriptiva, proporcionando un sistema de criterios de intervención, sobre los cuales existe un consenso en la comunidad de educación matemática, para valorar y producir mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Cada uno de estos cinco tipos de análisis conlleva, de acuerdo con Godino, Font y Whihelmi (2008), las siguientes acciones:

1. *Sistemas de prácticas (previos y emergentes).* Se aplica a la planificación que realiza el profesor y a la implementación que lleva a cabo. Es necesario descomponer los procesos de enseñanza y aprendizaje en una secuencia de episodios, desarrollados en el tiempo, para describir las prácticas realizadas.

2. *Configuraciones ontosemióticas.* Se describen los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas orientadas a la resolución de un tipo de situaciones-problema, y de los significados matemáticos involucrados.
3. *Configuraciones y trayectorias didácticas.* Se describen los patrones de interacción (alumno-alumno, alumno-profesor) y el modo en que se relacionan con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas). Asimismo, se describen y explican los conflictos semióticos que se producen en la clase.
4. *Sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio.* Se describe, estudia y explica la trama de normas que soportan y condicionan las configuraciones didácticas, así como su articulación en trayectorias didácticas (según las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica). En particular, en este tipo se propone un procedimiento sistemático para reconocer el sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemática.
5. *Idoneidad didáctica del proceso de estudio.* Se aplican los criterios de idoneidad didáctica que permiten valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y guiar su mejora. En Breda, Font y Pino-Fan (2018) se halla una explicación de cómo se generó esta noción.

El primer y segundo tipo de análisis son fundamentales en el diseño de la planificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El tercer y cuarto tipo son útiles en la fase de planificación, pero, sobre todo, en el análisis de la implementación realizada por el profesor. El quinto tipo hay que tenerlo en cuenta tanto en la fase de planificación como en la valoración de los procesos de instrucción. Ejemplos de análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje pueden verse en Godino, Font y Whihelmi (2008) y en Pochulu y Font (2011).

A su vez, Godino (2013a) propone una serie de componentes e indicadores que permiten valorar la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, y los define de la siguiente manera:

> *Idoneidad epistémica.* Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

> *Idoneidad cognitiva.* Expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
>
> *Idoneidad interaccional.* Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
>
> *Idoneidad mediacional.* Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
>
> *Idoneidad afectiva.* Grado de implicación (interés, motivación, entre otros) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
>
> *Idoneidad ecológica.* Grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla (p. 116).

En Breda y Lima (2016), Breda, Pino-Fan y Font (2017) y Breda (2020) se realizó una adaptación de los componentes e indicadores desarrollados en Godino (2013a) para ser usados en la formación de profesores.

El diseño de procesos de enseñanza y aprendizaje

Entre las tareas habituales de un profesor se encuentra la planificación de procesos de enseñanza y aprendizaje, el diseño de secuencias didácticas, la gestión de la clase y la evaluación de los aprendizajes. No entraremos en detalles sobre la planificación ni cómo desarrollarla, pero entendemos que involucra articular de manera coherente seis elementos o componentes básicos: fundamentación, objetivos, contenidos, metodología o estrategias de enseñanza, evaluación y bibliografía.

Para el diseño de la planificación habrá que tener en cuenta, entre otros aspectos, las prácticas matemáticas que se pretende que los alumnos realicen, los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas, una posible manera de gestionar el proceso (por ejemplo, cómo afrontar los conflictos semióticos que se puedan producir). Además, hay que tener en cuenta ciertos criterios que orientarán dicha planificación (idoneidad didáctica del proceso de instrucción). Como no es posible realizar y mostrar en este capítulo una planificación completa para un curso escolar, ejemplificaremos el uso de algunas herramientas con el diseño de una tarea escolar.

La relación entre diseño de tareas y formación de profesores ha sido discutida por muchos investigadores (Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Serrazina, 2010; Sousa, Gusmão, Font & Landa, 2020). La investigación también muestra que el uso de tareas adecuadas, contextualizadas y enfocadas en el desarrollo de la cognición influye fuertemente en el aprendizaje de los estudiantes (Moreira, Gusmão e Font, 2018a y 2018b; Stein y Smith, 2009). Pero ¿qué son las tareas? Lejos de la visión del sentido común (que entiende como "tarea", ejercicio, la repetición "mecánica" de procedimientos), en este trabajo nos anclamos a la concepción de que las tareas son situaciones de aprendizaje propuestas por el docente, como detonantes de la actividad matemática del alumno, y son vistas como "una secuencia de momentos didácticos" para ser utilizados en un "contexto de aula", los cuales incluyen desde la planificación de las actividades hasta los procesos comunicativos y la resolución de conflictos de significado.

Más en concreto, en este trabajo entendemos una tarea, acorde con lo planteado por Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (en Rodríguez, 2022), como una estructura compuesta por un contexto, objetivos y la consigna. Dado un contenido de matemática, deberíamos considerar un contexto que nos ubica en el tipo de trabajo que vienen realizando los alumnos, los conocimientos previos que disponen, el tipo de consignas que han venido realizando, el momento en que se plantearía o llevaría a cabo esa consigna (por ejemplo, antes o después de haber explicado un tema nuevo), la modalidad de trabajo que se propone para abordarla (individual, grupal, la coordinará el docente, etcétera) y una anticipación de lo que se trabajará luego.

El objetivo que el profesor plantea es el objetivo de aprendizaje, es decir, lo que él quiere que los alumnos aprendan (o comiencen a aprender) a partir de la clase. Vale la pena distinguir que los objetivos no son los propósitos que plantea el docente. Con esta última terminología nos referimos a cuestiones que le interesan al profesor y que intentará lograr en su clase, aunque no necesariamente tenga éxito, y se relacionan con los criterios, componentes e indicadores de la idoneidad didáctica. Un propósito podría ser favorecer la comunicación entre estudiantes. Los objetivos, en tanto, plasman logros irrenunciables que el docente pretende que sus estudiantes alcancen y los tendrá que evaluar.

Por último, tenemos la consigna, que es el enunciado de la situación problema que se le da al estudiante. Asumimos que la tarea debe tener coherencia entre sus partes, en el sentido de que el objetivo tendrá que estar en consonancia con el contexto, y la consigna debe responder al objetivo y ser razonable para el contexto. De no darse esta coherencia, habría una dificultad inicial en la formulación de la tarea que deberá corregirse.

En la realización de la tarea los estudiantes llevarán a cabo prácticas matemáticas, entendidas como “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etcétera) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. En el estudio de la matemática, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas, discursivas y normativas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas.

No obstante, el EOS hace la distinción entre prácticas institucionales y personales. Estas últimas (las personales) las entendemos como prácticas que llevan a cabo los estudiantes. Las prácticas institucionales, en tanto, están ligadas a las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas, en ellas tendríamos al profesor, la matemática como ciencia, un libro de texto, una sociedad de educación matemática, entre otros. La distinción entre prácticas personales e institucionales permite tomar conciencia de las relaciones dialécticas entre las mismas, las que se ven implicadas en la resolución de situaciones problemas, más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios rutinarios, etcétera. Estas situaciones problemas inducen la actividad matemática y se realiza en un contexto institucional mediante la articulación de secuencias de prácticas operativas, discursivas y normativas. Hay que señalar que esta distinción entre estos dos tipos de prácticas no quiere decir que haya dos tipos de prácticas diferentes, sino, más bien, que las prácticas se pueden mirar desde la perspectiva personal o institucional, lo cual es una mirada diferente de la misma práctica. Por ejemplo, la práctica personal que realiza el alumno en la pizarra al resolver un problema se convierte en institucional si el profesor la valida.

Consideremos que el contenido u objeto matemático elegido para trabajar con los estudiantes en una clase de matemática es la divisibilidad. Nos podríamos preguntar: ¿qué significa que un número sea divisible por otro?, ¿qué es un divisor?, ¿qué es un múltiplo?, ¿qué es un número primo?, entre tantos otros interrogantes. En todos ellos está involucrada la noción de significado, que Godino, Batanero y Font (2007) la entienden como el sistema de prácticas que realiza una persona (conformaría el significado personal) o compartidas en el seno de una institución (refiere al significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales interviene el objeto matemático en cuestión (divisibilidad).

En consecuencia, no tenemos que confundir la noción de significado circunscripta a la definición o lo expresado por un diccionario. Para clarificar esta diferencia, pensemos en el significado del símbolo: $a|b$. Una respuesta habitual es que el significado de este símbolo es el correspondiente a una relación entre números: la "relación de divisor" o la "relación divide". Se puede asumir esta concepción como una manera elemental de responder el problema. Desde este punto de vista, para especificar el significado de $a|b$ solo basta dar una definición. Otra posible forma de afrontar el problema de atribución de significados al símbolo en cuestión es hacerlo de manera pragmática, teniendo en cuenta lo que se puede hacer con él. Esta concepción nos da una perspectiva sistémica, relacional, al considerar que el significado de $a|b$ es el conjunto de prácticas matemáticas en las que el uso de esta expresión (u otras que se consideran equivalentes) es determinante para su realización. Por lo tanto, el significado de divisor no aludiría solo a la definición del objeto matemático, sino también al conjunto de prácticas (operativas y discursivas) que realiza un sujeto (ya sea institucional si aludimos al profesor, libro de texto o materiales de estudio, o personal, si hacemos referencia a un estudiante).

Teniendo en claro esta noción, podemos avanzar en una tipificación y caracterización de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, lo cual lleva a introducir una tipología básica que tiene un triple condicionamiento: institucionales, personales y temporales (figura 2). Estos últimos (los temporales) devienen de considerar los diferentes momentos en los que se presentan los dos primeros (institucionales y personales). Los significados institucionales se articulan mediante el sistema de prácticas (operativas y discursivas) más un acoplamiento entre ellos. Entre el acoplamiento y la participación podremos analizar el proceso de enseñanza, mientras que, entre el acoplamiento y la apropiación, tenemos el proceso de aprendizaje.

Figura 2. Significados institucionales y personales

Fuente: adaptación de Godino, Font y Whihelmi (2008, p. 30).

La idea de significado institucional de referencia de un objeto o tema de estudio orienta el análisis sistemático de la literatura hacia la identificación de los diversos significados contextuales de los objetos, conformando el significado global, holístico u holosignificado. Este significado se articula con la población de referencia (de situaciones problemas) de la cual se seleccionarán muestras adecuadas a las circunstancias particulares de los procesos de enseñanza que se pretenden diseñar, conformando el significado global de referencia.

Con estas herramientas el EOS trata de responder a las cuestiones ontológicas y epistemológicas siguientes: ¿Cuáles son los diversos significados de un objeto matemático en un contexto o marco institucional determinado? ¿Qué significa el objeto para un sujeto en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo emergen los objetos a partir de las prácticas matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional como personal? Asimismo, esto nos permite cuestionarnos sobre la importancia que tiene enseñar ese objeto matemático en particular, el tipo de situaciones problemas que resuelve, los contextos en que surgió y los que les dan sentido a las prácticas matemáticas, entre otros.

Veamos cómo se materializan estos significados en el diseño de una tarea de matemática. Cuando planificamos una clase sobre el objeto matemático, comenzamos a delimitar lo que dicen las instituciones matemáticas y didácticas acerca de él. Por lo general, acudimos a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, a lo expresado por los "expertos" en las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, así como a los conocimientos personales previamente adquiridos. A partir de este significado global de referencia, seleccionamos, ordenamos y delimitamos la parte específica que vamos a proponer a los estudiantes durante un proceso de estudio. Asimismo, tomamos en cuenta el tiempo asignado a la materia, los conocimientos previos de los alumnos y los medios y recursos instruccionales disponibles. De este modo, logramos un sistema de prácticas planificadas sobre el objeto matemático para cierto proceso instruccional, que conforma el significado institucional pretendido. Posteriormente, al desarrollar la clase volvemos a realizar ajustes y pueden existir diferencias entre lo que pretendíamos y lo que efectivamente ocurrió en el aula. Este conjunto de prácticas realizadas en la clase de matemática sirve de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes, y constituyen el significado institucional implementado. Por último, las respuestas a una colección de tareas o cuestiones que incluimos en las pruebas de evaluación conforman una muestra del significado institucional evaluado.

Si bien conviene distinguir conceptualmente estos tipos de significados institucionales, en los procesos de instrucción reales se mezclan e interactúan constantemente entre ellos, razón por la cual no siempre es tan clara la línea que los separa en un momento dado. No obstante, realizar un análisis didáctico de ellos nos puede aportar algunas pautas de dificultades que se presentan cuando damos clases. Por ejemplo, podría ser que los significados evaluados no estén completamente contenidos en los significados implementados y sí en el pretendido, lo cual explicaría algunas dificultades que tuvieron los alumnos. Cuando los significados pretendidos/implementados no concuerdan con los significados de referencia, podríamos encontrar errores que se introdujeron en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por otra parte, si tenemos en cuenta a los estudiantes, podríamos considerar la totalidad del sistema de prácticas personales que son capaces de manifestar potencialmente sobre un objeto matemático, lo que involucra sus conocimientos previos, y nos daría una muestra del significado personal global que cada uno de ellos tiene. Al abordar la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático particular, los estudiantes darán cuenta, a través de un conjunto de prácticas efectivamente expresadas en las evaluaciones y actividades de clase (sean estas correctas o incorrectas) el significado que le confieren al mismo. Nos encontramos en este caso con el significado personal declarado. Por último, si analizamos el cambio que han sufrido los significados personales que tuvieron lugar al inicio, o previos de los estudiantes, con el que finalmente alcanzaron, nos encontraremos con un conjunto de prácticas manifestadas que guardan relación con la pauta institucional establecida, lo que constituye el significado personal logrado. Si incluimos el factor temporal, podríamos discriminarlo en significado personal logrado inicial o final.

Se asume que las prácticas matemáticas se realizan en un trasfondo ecológico (material, biológico y social) que determina una relatividad institucional, personal y contextual de las prácticas, los objetos y significados, esto es, relatividad respecto de los juegos de lenguaje y formas de vida.

Determinación del significado global de referencia para las tareas

Previo a definir la primera tarea sobre divisibilidad, tendremos que determinar el significado global de referencia. Para ello, recurrimos a estudios específicos realizados sobre la temática elegida (en nuestro caso divisibilidad), recuperando aspectos históricos sobre el tratamiento que tuvieron los objetos matemáticos, familias de problemas, así como también, los errores y dificultades que habitualmente presentan los estudiantes y el diseño de propuestas de enseñanza que surgen de procesos de investigación.

Situándose en la enseñanza de la divisibilidad para la escuela secundaria de la Argentina, Espinoza (2019, p. 69) revisó los textos escolares de aritmética (ocho destinados a estudiantes de escuela secundaria, básica o media y cinco para la formación de maestros y profesores de matemática), diseños curriculares jurisdiccionales y las investigaciones que se hicieron sobre la temática, identificando los siguientes contenidos como los más destacados: "División; Múltiplos y divisores de un número. Relación con los objetos 'factor', 'divisible' y 'divide'; Factorización y factorización prima; Propiedades de los múltiplos y divisores; Criterios de divisibilidad; Números primos y compuestos; Mínimo común múltiplo; Máximo común divisor". Asociados a estos contenidos, surgen las siguientes situaciones problemas detalladas en Espinoza y Pochulu (2020, pp. 302-303):

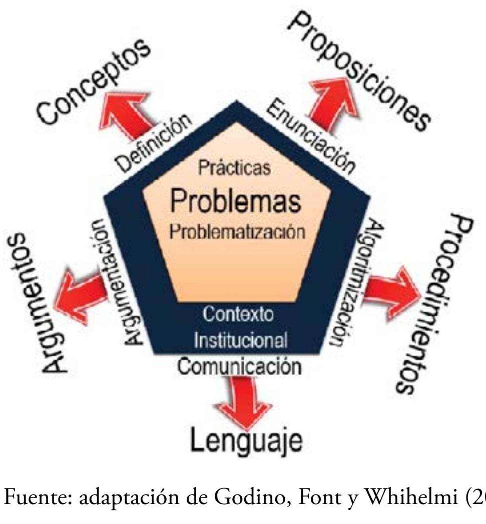
- Dado el cardinal de una colección que se pretende subdividir en subcolecciones equipotentes, determinar el número de subcolecciones de la partición, el cardinal de cada subcolección y el resto.
- Determinar si un número *a* es divisor o factor de otro *b*, cuando *b* está expresado en base decimal, como producto de factores primos, con base en el algoritmo de la división o la propiedad distributiva.

- Determinar si *a*, número natural o entero, está expresado como producto de factores primos, con base en el algoritmo de la división o en la propiedad distributiva.
- Determinar si 0 es divisor o múltiplo de todos los números.
- Determinar si 1 es divisor o múltiplo de todos los números.
- Caracterizar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, cuando *a* es divisor de *b*, siendo *a* y *b* números no simultáneamente nulos.
- Determinar en qué condiciones, en una división, el divisor de la división es divisor del dividendo.
- Hallar múltiplos de un número.
- Hallar un número conociendo una lista finita, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos.
- Hallar todos los divisores de un número.
- Dados los divisores (naturales o enteros), encontrar el número correspondiente.
- Decidir si un número es primo, compuesto, cuadrado perfecto.
- Determinar la cantidad de divisores de un número.
- Determinar la paridad de la cantidad de divisores de un número.
- Hallar un número con una determinada cantidad de divisores.
- Encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más números.
- Encontrar el máximo común divisor de dos o más números.
- Determinar si dos números son coprimos.

Teniendo en cuenta la tipología de situaciones problemas que conllevan a la divisibilidad, plantearemos una primera tarea. El profesor tendrá que tomar la decisión si propone el enunciado de la consigna o realiza una adaptación de alguna situación problema ya existente. Al realizar un análisis *a priori* de esa consigna, pondremos en juego otros objetos primarios (pueden ser algunos o todos ellos) y diferentes procesos. De este modo, se involucrarán conceptos o definiciones y con ellos asociamos el proceso de definición. ¿Qué más interviene en una resolución de una situación problema? Proposiciones, propiedades, lemas y teoremas, los que conllevan a un proceso de enunciación. También intervienen procedimientos, algoritmos, técnicas y rutinas propias de la matemática, dando lugar a procesos de algoritmización. En la resolución de la situación problema será necesario utilizar argumentos, que están condicionados por las definiciones, las proposiciones y los procedimientos. En un argumento necesariamente intervienen alguno, o todos, de estos elementos, pues argumentamos apoyándonos en una definición, una proposición y un procedimiento propio de la matemática. Entrará en acción un proceso de justificación y argumentación.

Por supuesto, resulta imposible no pensar en el lenguaje o entidades lingüísticas (términos, expresiones, notaciones, gráficos) que vienen dados en forma escrita o gráfica, aunque en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual) para describir los objetos propios de la matemática. Esto da lugar a un proceso de comunicación en matemáticas. Estos seis elementos, que podemos calificar de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática (ver figura 3), son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etcétera.

Figura 3. Objetos y procesos primarios



Fuente: adaptación de Godino, Font y Whihelmi (2008, p. 30).

A su vez, estos seis objetos primarios se relacionan entre sí formando configuraciones (ver figura 4), definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, constituyendo los elementos del significado de un objeto matemático.

Figura 4. Configuración epistémica y cognitiva

Fuente: adaptado de Pochulu y Font (2011, p. 371).

Estas configuraciones pueden ser epistémicas si son redes de objetos institucionales, o cognitivas si representan redes de objetos personales. Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional.

En las configuraciones epistémicas o cognitivas, las situaciones problemas son el origen o razón de ser de la actividad, y las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. En este conjunto de reglas tenemos las definiciones que son introducidas mediante descripciones, como recta, punto, número, media, función. Las proposiciones, propiedades, atributos, lemas, teoremas y enunciados que hacemos sobre los objetos definidos. Los procedimientos, algoritmos, operaciones, acciones, técnicas de cálculo o rutinas. El conjunto de reglas, regulan el uso del lenguaje, términos, expresiones, notaciones, gráficos, que sirve de instrumento para la acción, razón por la cual expresa y soporta el conjunto de reglas.

Al resolver una situación problema, el lenguaje puede aparecer de manera verbal (oral o escrita), por ejemplo, si enunciamos un criterio de divisibilidad; o simbólica, cuando utilizamos las expresiones que nos permiten realizar los cálculos; o gráfica, si hacemos las representaciones correspondientes. Finalmente, tenemos los argumentos que justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan las definiciones entre sí, todo lo cual viene a regular el uso del lenguaje que, por su parte, sirve de instrumento para la comunicación. Asimismo, el conjunto de reglas son los que intervienen y condicionan los argumentos.

Es de destacar que cada objeto matemático, dependiendo del tipo de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos. Por ejemplo, un argumento, que es un objeto matemático para el EOS, puede poner en juego definiciones, proposiciones, procedimientos y, obviamente, está soportado por el lenguaje. Por último, todo este proceso viene a resolver la situación problema que dio origen a la actividad matemática.

El diseño y análisis didáctico de una tarea sobre divisibilidad

Pasemos a un ejemplo en que usamos la herramienta configuración epistémica y cognitiva que propone el EOS. Consideremos una tarea que se enmarca en una situación problema del significado global de referencia del tipo: “encontrar el máximo común divisor de dos o más números”. Las tres partes que componen la tarea son las siguientes.

Contexto

Los alumnos manejan operaciones con naturales (suma, resta, multiplicación y división, potenciación y radicación) y propiedades (asociativa, conmutativa, distributiva, elemento neutro), y principios de conteo. Saben calcular el máximo común divisor de un número, conocen reglas de la divisibilidad, descomponer en factores primos y determinar los divisores de un número. Están acostumbrados a trabajar en grupos y a argumentar sus respuestas. El docente viene trabajando con Divisibilidad y tiene pensado trabajar el cálculo del máximo común divisor entre dos números relativamente grandes. Les propone trabajar en grupo y defender la resolución en una puesta en común al final de la clase.

Objetivos

Que los alumnos:

- Propongan formas de encontrar el máximo común divisor entre dos números.
- Argumenten sobre la validez de distintas formas de encontrar el máximo común divisor.

Consigna

Tenemos dos trozos de alambre de acero inoxidable símil plata (gris oscuro en la imagen) y oro (gris claro en la imagen), de 240 cm y 396 cm de longitud respectivamente. Con ellos se quiere realizar un accesorio de joyería para pendientes, tal como muestra la imagen. ¿Cuál será la mayor longitud en que se puede cortar estos alambres, de forma tal que la longitud de corte sea la misma en ambos trozos y que no sobre material? Fundamenta tu respuesta.

La situación problema es contextualizada (encontrar el trozo de alambre de acero inoxidable de mayor longitud que entre en partes enteras iguales en otros dos trozos dados), para lo cual la resolución se reduce a hallar el máximo común divisor entre dos números naturales que son relativamente grandes para los estudiantes.

Como tenemos que cortar trozos de alambre de la misma longitud, inicialmente tendríamos muchas opciones como, por ejemplo, cortarlos en trozos de

0,5 cm, de 1 cm, de 2 cm, etcétera, pues el problema no establece condición alguna para ello. No obstante, asumiremos que serán cortados en trozos que resulten tener una longitud entera y como debemos encontrar la mayor longitud que sea común, recurriremos al cálculo del máximo común divisor, ya que nos ofrece esta posibilidad.

Para determinar una configuración epistémica y cognitiva, tendremos que realizar una resolución experta, estableciendo los diferentes caminos que podrían ser tomados por los estudiantes para encontrar una solución a la situación problema e identificando los objetos primarios involucrados.

Sabemos que un número *d* es el máximo común divisor (MCD) de los números *a* y *b* (concepto), cuando:

d es divisor común de los números *a* y *b*, y

d es divisible por cualquier otro divisor común de los números *a* y *b*.

Para encontrar el MCD podemos realizar la descomposición en factores primos de cada número, expresándolo como el producto de potencias de números primos (*procedimiento*), o usar el algoritmo de Euclides (*concepto y procedimiento*) que es más eficiente cuando se trata de números grandes. No obstante, cabe destacar que este procedimiento no se considera un conocimiento previo de todos los estudiantes.

Al tener dos números naturales, podemos encontrar el MCD a través de la descomposición en factores primos (procedimiento usual en los estudiantes). Para ello, realizamos divisiones del número recurriendo al menor número que lo divide (*procedimiento*) y tendremos en cuenta algunos criterios de divisibilidad (proposición) involucrados. En nuestro caso resulta:

$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 308 & 2 \\ 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \qquad\qquad 308 = 2^2 \times 7 \times 11$$

Para el cálculo se podrían tener en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

- Un número es divisible por 2, cuando termina en una cifra par (*proposición*).
- Un número es divisible por 5, cuando termina en 0 o 5 (*proposición*).
- Un número es divisible por 7, cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 o un múltiplo de 7 (*proposición*).
- Un número es divisible por 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares impares y la de los pares es 0 o un múltiplo de 11 (*proposición*).

Notemos que podríamos no haber utilizado los criterios de divisibilidad. Por ejemplo, podemos darnos cuenta que el 77 es divisible entre 7, pero ignorando el criterio de divisibilidad. Lo mismo acontece con números como el 11. Teniendo la descomposición en factores primos de cada uno de los números, encontramos el MCD determinando los factores comunes con su menor exponente (*procedimiento*), esto es:

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \quad 308 = 2^2 \times 7 \times 11$$

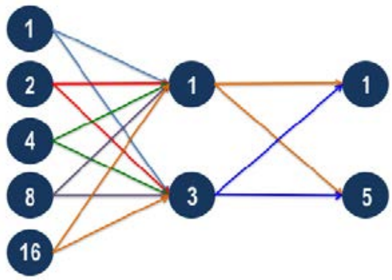
$$MCD\ (240{,}308) = 2^2 = 4$$

En síntesis, y para fundamentar la respuesta, el trozo de alambre de 240 cm podría ser cortado en longitudes enteras con las siguientes medidas:

$$\text{Longitudes}_{\{240\}} = \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,20,24,30,40,48,60,80,120,240\}$$

Estas medidas surgen de considerar los divisores de 240 que se obtienen por aplicar principios de conteo (*procedimiento*) entre los divisores positivos de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima. Sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número *a*, también son divisores de *a* (*proposición*).

Así, 2^4 tiene 5 divisores: {1,2,4,8,16}, mientras que el 3 tiene a {1,3} y el 5 a {1,5}. En total tendremos $5 \times 2 \times 2 = 20$ divisores, que surgen de las siguientes combinaciones.



Resultan ser divisores del 240 los siguientes números:

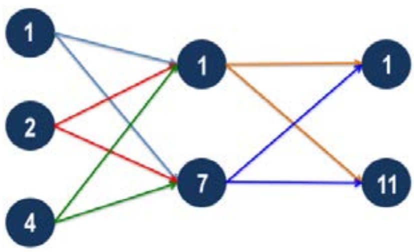
$$D(240) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240\}$$

El trozo de 308 cm podría ser cortado en longitudes enteras con las siguientes medidas:

$$Longitudes_{\{308\}} = \{1, 2, 4, 7, 11, 14, 22, 28, 44, 77, 154, 308\}$$

Estas medidas surgen de considerar los divisores de 308 que se obtienen por aplicar principios de conteo (*procedimiento*) entre los divisores positivos de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima, pues sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número *a*, también son divisores de *a* (*proposición*).

Así, 2^2 tiene 3 divisores: {1,2,4}, mientras que el 7 tiene a {1,7} y el 11 a {1,11}. En total tendremos $3 \times 2 \times 2 = 8$ divisores, que surgen de las siguientes combinaciones:



Resultan ser divisores del 308 los siguientes números:

$$D(308) = \{1, 2, 4, 7, 11, 14, 22, 28, 44, 77, 154, 308\}$$

Los divisores comunes de ambos números son 1, 2 y 4. Por ello, los trozos de alambre podrían ser cortados en longitudes de 1, 2 y 4 cm, cuyos valores numéricos son los divisores comunes del 240 y 308, y como el 4 es el mayor de ellos en tanto $MCD(204,308) = 4$, resultando ser el modo óptimo de hacerlo (*argumento*), esto es, cortar cada alambre en tramos de 4 cm.

Ahora bien, ¿son los únicos procedimientos que tenemos para encontrar el MCD? Ciertamente no, y vale la pena analizar algunos que resultan más intuitivos e involucran mucha riqueza matemática. Podríamos usar la definición de divisor: "Un número natural 'a' es divisor de un número natural 'b', si existe un número natural 'c' tal que $a = b \times c$". En consecuencia, el 2 es un divisor y podemos descomponer al 240 como $240 = 2 \times 120$. Si un estudiante solo advierte que el 2 es un divisor y no el 120, no está articulando adecuadamente la *definición* con una *proposición*, la cual establece que tanto "b" como "c" son divisores. Aquí surge un detalle relevante para profundizar la comprensión alcanzada en divisibilidad por parte de un estudiante: ¿es posible que exista algún otro divisor de 240 mayor a 120? La respuesta es no, pero el fundamento implica entender profundamente la divisibilidad. Si existiera un divisor de 240 mayor a 120, tendría que existir otro natural que multiplicado por él sea casualmente 240. Pero si $2 \times 120 = 240$ y $1 \times 240 = 240$, entonces deberíamos multiplicar a este número (mayor a 120) por un natural comprendido entre 1 y 2, lo cual no existe.

Ahora, si 3 y 80 son divisores de 240, entonces tampoco existen otros divisores entre 80 y 120. Si admitimos que existe un natural m, con $80 < m < 120$, que es divisor de 240, tendríamos que encontrar otro número natural que multiplicado por m sea exactamente igual a 240. Esto no es posible pues:

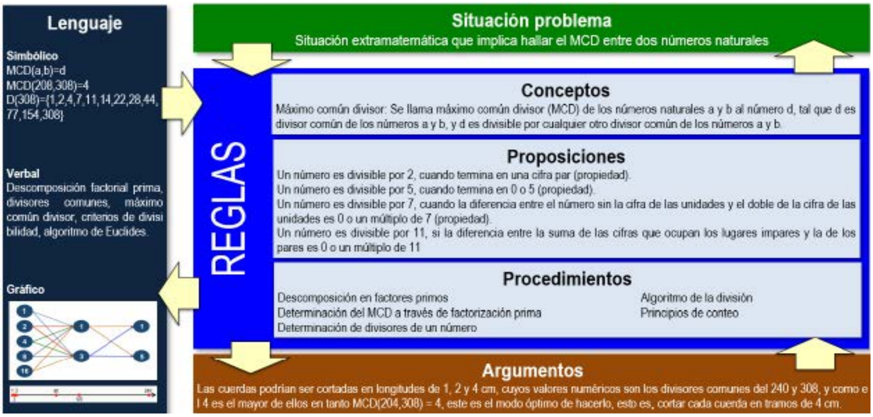
$$80 = 80 \bullet 1 < m \bullet 1 < 120 \bullet 1 = 120$$

$$160 = 80 \bullet 2 < m \bullet 2 < 120 \bullet 2 = 240$$

$$240 = 80 \bullet 3 < m \bullet 3 < 120 \bullet 3 = 360$$

Resulta muy interesante que se establezca este debate con los estudiantes, porque ayuda a que se articulen proposiciones (propiedades), definiciones (conceptos) y procedimientos vinculados a divisibilidad.

Ya tenemos segregados todos los objetos primarios para estructurar la *configuración epistémica* asociada a la situación problema. Asimismo, podríamos discriminar los elementos lingüísticos en sus diferentes registros (verbal, simbólico, gráfico), y el de los argumentos que devienen de la situación problema.



Pero ¿para qué sería útil la configuración epistémica y cognitiva en el diseño de una tarea que realiza el profesor? Entre las ventajas de esta herramienta tenemos:

- Se establecen los objetos matemáticos que entran en juego en la situación problema. Una dificultad habitual suele encontrarse en la imposibilidad de distinguir, en algunos casos, si el objeto involucrado es una definición (explícita o implícita), proposición (propiedad) o procedimiento, o asume un doble rol en la resolución.
- Se ponen en evidencia los nuevos objetos matemáticos que emergen de la situación problema.
- Permite visualizar de manera simple los objetos matemáticos que intervienen, dando lugar a modificar la situación problema para convertirla en una más rica o que desafíe cognitivamente al estudiante.
- Ayuda a comparar los objetos matemáticos involucrados ante otra situación problema perteneciente al mismo tipo, ya sea en un contexto intramatemáticos como contextualizados.
- Permite valorar la comprensión alcanzada por cada estudiante en la situación problema al estructurar la configuración cognitiva y compararla con la epistémica.

Cabe destacar que, si se tienen pocos estudiantes, es fácil obtener datos a través de sus prácticas operativas y discursivas, con lo cual vamos estructurando el modo en que cada uno de ellos articula los seis objetos primarios en redes de significado (configuración cognitiva). Si el número de estudiantes es cuantioso, prácticamente es difícil llevar a cabo un estudio personalizado de lo que acontece en la estructura cognitiva de cada uno de ellos. Un camino posible es recurrir a las narrativas pedagógicas o diarios de clase. Entendemos a la narrativa pedagógica como:

> … instrumento que permite recoger datos significativos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, además de la reflexión sobre los mismos, su análisis y sistematización. Asimismo, una narrativa permite recolectar opiniones, argumentos, destrezas y actitudes presentes en situaciones reales de aprendizaje, y posibilita el rescate de las discusiones espontáneas entre los estudiantes en las puestas en común iniciales (Pochulu, 2018, p. 17).

A su vez, el proceso de análisis de una narrativa no culmina en un único momento. Es recomendable que retorne al estudiante con nuevos comentarios y preguntas, con el firme propósito de mejorar los procesos de argumentación, revisar definiciones, procedimientos o técnicas que ha empleado, reflexionar sobre lo aprendido y que se planteen nuevos desafíos. Los análisis posteriores de las narrativas que son mejoradas por los estudiantes darán pistas sobre la comprensión que efectivamente alcanzan con los contenidos involucrados en la tarea, al estructurarse la correspondiente configuración cognitiva y compararla con la epistémica. No debe perderse de vista que una narrativa pedagógica es una herramienta que nos permite valorar los aprendizajes de los estudiantes y realizar una evaluación continua. Asimismo, no debe confundirse esta herramienta de evaluación con la calificación o nota que se busca poner al trabajo realizado por el estudiante.

Indicadores de idoneidad didáctica para el diseño y análisis de tareas

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios o indicadores y el desglose operativo fueron introducidos en diferentes trabajos (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, 2013a y 2013b; Breda, Font y Pino-Fan, 2018) como herramientas del EOS que permiten tanto el diseño como el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Los criterios de idoneidad didáctica (CI) propuestos en el marco teórico EOS, pretenden ser una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar competencias matemáticas de los alumnos, y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de estas competencias? Los CI pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y, segundo, para valorar sus implementaciones. Los CI son útiles en dos momentos de los procesos de instrucción. *A priori*, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". *A posteriori*, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado.

En el EOS se consideran los siguientes CI (Font, Planas y Godino, 2010):

- *Idoneidad epistémica.* Para valorar si la matemática que está siendo enseñada es "buena matemática".
- *Idoneidad cognitiva.* Para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben y, después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar.
- *Idoneidad interaccional.* Para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.
- *Idoneidad mediacional.* Para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
- *Idoneidad emocional.* Para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad ecológica.* Para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

La operatividad de los CI exige definir indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de ellos. En Breda y Lima (2016); Breda, Pino-Fan y Font (2017) y Breda (2020) se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. Cada uno de estos criterios se desglosa en componentes e indicadores a manera de rúbrica, con el fin de hacerlos operativos. A continuación, en el cuadro 1 se detallan los criterios y componentes de idoneidad didáctica (por cuestiones de espacio no se detallan los indicadores).

Cuadro 1. Criterios y componentes de idoneidad

Criterio de idoneidad	Componente
Epistémica	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad
Cognitiva	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectiva	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológica	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

Fuente: basado en Breda y Lima (2016).

El uso de los criterios de idoneidad didáctica en la formación de profesores

Planteamos en esta sección cómo puede usarse el constructo criterios de idoneidad didáctica (CI) en la formación inicial de profesores, principalmente cuando se desconocen las herramientas del EOS. Para ello, proponemos y fundamentamos un ciclo formativo que toma como base diferentes experiencias e investigaciones realizadas al respecto.

Sabemos que las diversas tendencias sobre la formación de profesores proponen la investigación del profesorado y la reflexión sobre su práctica como una estrategia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. Entre dichas tendencias destacamos la investigación, acción (Eliot, 1993), la práctica reflexiva (Schön, 1983) y el estudio de lecciones (Hart, Alston & Murata, 2011). En esta línea de lograr potenciar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, el constructo CI (y su desglose en componentes y descriptores) se ha utilizado como herramienta para organizar la reflexión del profesor, tal como se viene haciendo en diferentes procesos de formación en algunos países de Iberoamérica. En estas experiencias se ha evidenciado que los CI constituyen un instrumento metodológico útil para promover y apoyar en los profesores la reflexión sobre su propia práctica. Por otra parte, estas herramientas pueden ser impartidas como parte de la formación del profesorado y ser incorporadas como herramientas para organizar la reflexión sobre la propia práctica.

En Breda, Font y Lima (2015) se explica cómo surgió la noción de idoneidad didáctica y su uso en diferentes investigaciones y procesos de formación, en especial en Latinoamérica. Garcés, Flores, Morales-Maure y Seckel (2018) continuaron estudiando el impacto de los CI en la formación de profesores a partir de 2015 en Latinoamérica. Para ello, realizaron una búsqueda, en diferentes bases de datos, tomando como criterio la aparición en títulos, resúmenes y palabras claves del término "criterios de idoneidad didáctica" (en español o en inglés), completada con otras fuentes de información (por ejemplo, la revisión realizada por Kaiber, Lemos e Pino-Fan, 2017). Estos autores encontraron dos usos de los CI:

1. Para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, por parte de investigadores, pero no son enseñados a los participantes. Por ejemplo, en las investigaciones de Moreira, Gusmão y Font (2018a) o en Morales-López y Font (2017 y 2019).
2. Como contenido a explicar para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica y para organizarla. Esto aconteció en dos posgrados: un máster de formación de profesores de secundaria en servicio en Ecuador y un diplomado para maestros de primaria en servicio en Panamá.

Tomando como base el segundo uso de los CI, se desarrolló un ciclo formativo para la capacitación de profesores, cuya primera vez fue implementado por Rubio (2012) con profesores de secundaria de España y rediseñado por Seckel (2016) para la formación de futuros profesores de primaria de Chile. Si los profesores, o futuros profesores, desconocen las herramientas y constructos del EOS, este ciclo implica la siguiente secuencia:

1. *Análisis de casos (sin teoría)*. Se propone a los futuros profesores la lectura y análisis de episodios de clase para que hagan un análisis a partir de sus conocimientos previos.

2. *Emergencia de los tipos de análisis didácticos propuestos por el EOS.* La puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos permite observar cómo el gran grupo contempla los diferentes tipos de análisis didácticos propuestos por el EOS, aunque cada grupo solo llegue a proponer alguno de ellos.
3. *Tendencias en la enseñanza de la matemática.* El episodio analizado se selecciona de manera que los asistentes apliquen de manera implícita alguna de las tendencias actuales sobre la enseñanza de la matemática o prescriptas en los currículos escolares. Seguidamente se les hace observar a los asistentes que han utilizado esta tendencia de manera implícita. A continuación, se hace un resumen de las principales tendencias en la enseñanza de la matemática.
4. *Teoría (criterios de idoneidad).* Se explican y ejemplifican los CI propuestos en el EOS (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica).
5. *Análisis de trabajos de cursos anteriores.* Los futuros profesores utilizan los CI para valorar la unidad didáctica de procesos de estudio implementados y documentados. También se solicita a los futuros profesores que propongan una mejora de alguna tarea mostrada en esos trabajos, explicitando los CI que tuvieron en cuenta.

Recientemente se han realizado experiencias de formación de profesores que combinan la metodología de la *Lesson Study* con los CI. Las experiencias de *Lesson Study* son una metodología para la formación del profesorado desarrollada inicialmente en Japón, que consiste básicamente en el diseño colaborativo y cuidadoso de una clase, de su implementación y observación directa en el aula, y de un análisis conjunto posterior (Hart, Alston & Murata, 2011).

Las *Lesson Studies* son metodologías de trabajo docente apoyadas en actitudes investigativas y prácticas colaborativas entre profesores, que buscan, al mismo tiempo, la mejora de la práctica docente y del aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo profesional de los profesores. Una de sus virtudes es que sitúa a los profesores en el epicentro de su actividad profesional: el diseño, implementación y rediseño de secuencias de tareas con el objetivo de, primero, comprender mejor el aprendizaje de los alumnos sobre la base de sus propias experiencias de enseñanza y, segundo, mejorar este aprendizaje. La idea es que los profesores se reúnan con una duda en común sobre el aprendizaje de sus alumnos, planifiquen una clase para que los estudiantes aprendan, y examinen y discutan lo que observan en la implementación de esta lección. A través de múltiples iteraciones del proceso, los profesores tienen muchas oportunidades para discutir el aprendizaje de los alumnos y cómo su enseñanza incide sobre el aprendizaje. Básicamente se desarrollan en cuatro etapas:

1. *Planificación de la clase*. Un grupo de profesores elige los temas a desarrollar; establece los objetivos para los aprendizajes y el desarrollo de los alumnos; elige el material didáctico; y apunta las expectativas sobre posibles respuestas y el comportamiento de los estudiantes frente a las cuestiones propuestas.
2. *Realización y observación de la clase*. Un profesor comparte su clase mientras los demás observan y registran el proceso de enseñanza y aprendizaje. La participación de los otros miembros del grupo es activa en cada etapa de resolución de las cuestiones propuestas, desde la comprensión del problema, el establecimiento de estrategias y análisis de la resolución, estimulando el cuestionamiento y el descubrimiento de los estudiantes.
3. *Reflexión conjunta sobre los datos registrados*. Después de la clase, los profesores (observados y observadores) se reúnen para evaluar los procesos de enseñanza observados, reflexionando acerca de las actitudes y aprendizajes de los alumnos y del profesor durante la clase. El grupo hace un análisis de la clase, teniendo en cuenta sus perspectivas, tanto de enseñanza y del área en sí.
4. *Rediseño*. A partir de las discusiones realizadas en la etapa anterior el plan de clase es reestructurado. Se aplica en otra clase y se inicia un nuevo ciclo.

El diseño de los dispositivos formativos que pretenden enseñar el uso de los CI se basa en la suposición, observada en diversas investigaciones (Breda, 2016), de que los CI funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que diseñar y valorar secuencias didácticas orientadas a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, incluso sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Por tanto, se supone que, en las fases iniciales de estos dispositivos formativos, los participantes formulan y usan de manera implícita algunos indicadores y componentes de los CI. Esta suposición ha funcionado como una regularidad en las diversas experiencias realizadas, pero en ellas se ha hecho evidente que esta fase inicial de reflexión no pautada es relativamente corta y que sería conveniente que fuese más amplia. Por otra parte, la metodología de las *Lesson Studies*, en cierta manera, se puede considerar como una fase de reflexión no pautada muy amplia que está orientada a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, por tanto, es de esperar que en la fase de planificación, en la de observación, en la de reflexión y en la de rediseño orientada a la mejora, los participantes usen de manera implícita muchos de los indicadores y componentes de los CI para hacer valoraciones positivas de algunos aspectos de la experiencia realizada. Por tanto, en una experiencia de *Lesson Study* van a surgir consensos implícitos entre los participantes sobre aspectos que se valoran positivamente, los cuales se pueden reinterpretar en términos de indicadores y componentes de los CI.

Dicho de otra manera, la metodología de estudio de clase se puede convertir en un tipo de dispositivo de formación que favorece que algunos de los indicadores y componentes de los CI surjan como consensos de la reflexión del grupo de profesores. Esto da pie a la ampliación de la *Lesson Study* con un ciclo formativo que introduzca los indicadores, componentes y CI, tal como se relató en las experiencias de formación comentadas.

Los dispositivos formativos que pretenden enseñar los CI también parten de la suposición de que estos pueden ser enseñados como herramienta para organizar la reflexión del profesor y, por tanto, la mayor parte del ciclo formativo se dedica a implementar un proceso de enseñanza y aprendizaje de estas nociones con los participantes. En cambio, en las *Lesson Studies* no se realiza este proceso de generación de una pauta organizada en criterios, componentes e indicadores como herramienta para organizar la reflexión. Por tanto, si la metodología *Lesson Study* puede ser muy útil para mejorar la fase inicial de la metodología de los CI, esta última puede ser una ampliación de la metodología *Lesson Study* para generar una pauta con el fin de organizar la reflexión del profesor. En consecuencia, la estructura del dispositivo formativo que permite combinar la *Lesson Study* con los CI es la siguiente:

- Primera etapa: *Lesson Study*.
- Segunda etapa: hacer observar a los participantes que en la fase del estudio de clase usaron de manera explícita o implícita algunos de los componentes e indicadores de los CI.
- Tercera etapa: enseñanza de los CI.

- Cuarta etapa: uso de los CI como herramienta metodológica que permite organizar y mejorar la reflexión realizada en la fase de la *Lesson Study*, lo cual repercute en mejores propuestas de rediseño de la secuencia de tareas confeccionada en la *Lesson Study* (Hummes, Font & Breda, 2019).

Reflexiones finales

Por medio del ejemplo de una tarea logramos mostrar y ejemplificar algunas herramientas del EOS, en particular, el constructo configuración epistémica y cognitiva y cómo se articulan los diferentes objetos primarios. Esto le permite al profesor identificar conocimientos previos y emergentes de sus estudiantes, caracterizar las argumentaciones que podrían estar presente y advertir los diferentes registros de representación que emplearán en la resolución. No obstante, cabe destacar que la situación problema propuesta surgió después de estructurar un marco epistémico y didáctico de referencia, y en el contexto de una tesis de doctorado, lo cual no es común en la realidad de los profesores que diseñan tareas de matemática.

La conformación de este marco epistémico y didáctico de referencia tiene dos propósitos centrales para quienes formamos profesores de matemática. El primero de ellos es poner en evidencia lo que se ha investigado sobre una temática y el acceso a las revistas y tesis de didáctica de la matemática. De alguna manera, buscamos que el futuro profesor pueda iniciar un proceso de cuestionamiento sobre el objeto matemático, su enseñanza y las implicaciones educativas, preguntándose: ¿qué es este objeto que quiero enseñar y cuáles son sus significados?, ¿por qué debería enseñar este objeto matemático?, ¿existen otras maneras de enseñarlo?, ¿cómo evitamos la reproducción de modelos que seguramente estuvieron presentes en la formación previa de los estudiantes?

Aunque la selección, adaptación y reformulación de tareas es una actividad habitual del profesor de matemática, es necesario tener una perspectiva más amplia de la planificación y contemplar los procesos de enseñanza y aprendizaje en su conjunto. En este sentido, los CI se vuelven un constructo potente para el diseño, análisis y valoración de un proceso de estudio, tanto en el estudio *a priori* como *a posteriori*. A estos CI se le incorporaron indicadores empíricos que se encuentran sintetizados y ejemplificados en diferentes trabajos del EOS que citamos oportunamente. No obstante, Godino (2013b) expresa que:

> El foco de atención en el diseño de las tareas debe orientarse a mostrar cómo la realización de las mismas influye o determina el aprendizaje matemático, el cual depende de múltiples factores, no solo de las tareas matemáticas seleccionadas. Por ello la herramienta "configuración de objetos y procesos" que ha desarrollado el EOS se revela como un recurso útil ya que ayuda a identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego, prever conflictos potenciales y, en consecuencia, tomar decisiones sobre estrategias instruccionales (p. 12).

En síntesis, a través del diseño de una secuencia de tareas, el profesor podrá dar sentido a los diferentes CI propuestos desde el EOS y establecer conexiones con los objetos matemáticos de los diversos bloques temáticos, lo cual contribuirá a otorgar alta idoneidad didáctica a su planificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de formación de profesores PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias bibliográficas

Breda, A. (2016). *Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado profmat no Rio Grande do Sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso.* [Tesis de Doctorado]. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. https://www.researchgate.net/publication/305681739_Melhorias_no_ensino_de_matematica_na_concepcao_de_professores_que_realizam_o_mestrado_Profmat_no_Rio_Grande_do_Sul_uma_analise_dos_trabalhos_de_conclusao_de_curso_Tese_de_doutorado_nao_publicada_Ponti.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88.

Breda, A., Font, V. e Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278.

Breda, A. y Lima, V. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(1), 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L. R. & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*, 1893-1918.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Elliott, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Ediciones Morata.

Espinoza, R. F. (2019). *La comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad.* [Tesis de doctorado]. Universidad Nacional de Misiones, Posadas, Argentina.

Espinoza, R. F. y Pochulu, M. (2020). Diseño de un instrumento para valorar la comprensión alcanzada en divisibilidad por futuros profesores de matemática. *Bolema*, *34*(66), 294-313.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *26*, 9-25.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Garcés, W., Flores, M. J., Morales-Maure, L. y Seckel, M. J. (2018). El uso de los criterios de idoneidad en grados y postgrados de formación de profesores de Latinoamérica. En M. Guillot-Valdés y A. Guillén-Riquelme (Comp.), *XV Foro internacional sobre la evaluación de la calidad de la investigación y de la educación superior* (pp. 254-259). Granada: Asociación Española de Psicología Conductual.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). SEIEM.

Godino, J. D. (2013a). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D. (2013b). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico. del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-20). Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37- 42.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El Enfoque Ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(2), 3-15.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *XXVII*(2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J., Font, V. y Whihelmi, M. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el Enfoque Ontosemiótico. *Publicaciones*, *38*(1), 25.48.

Hart, L. C., Alston, A. & Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education*. Springer.

Hummes, V. B., Font, V. & Breda, A. (2019). Combined Use of the Lesson Study and the Criteria of Didactical Suitability for the Development of the Reflection on the own Practice in the Training of Mathematics Teachers. *Acta Scientiae*, *21*(1), 64-82.

Kaiber, T., Lemos, A. e Pino-Fan, L. (2017). Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS): um panorama das pesquisas na América Latina. *Perspectivas da Educação Matemática, 10*(23), 531-552.

Morales-López, Y. y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, *19*(1), 122-137.

Morales-López, Y. & Font, V. (2019). Evaluation by a teacher of the suitability of her mathematics class. *Educaçao e Pesquisa, 45,* 1-19.

Moreira, C., Gusmão, T. e Font, V. (2018a). Pra lá e pra cá, vou a qualquer lugar! O papel do corpo e do seu movimento no contexto das tarefas para o desenvolvimento da percepção espacial na Educação Infantil. *Unión, 52*, 144-166.

Moreira, C., Gusmão, T. e Font, V. (2018b). Tarefas matemáticas para o desenvolvimento da percepção de espaço na educação infantil: potencialidades e limites. *Bolema*, *32*(60), 231-254.

Pochulu, M. (2018). Las narrativas de los estudiantes como instrumento para valorar la comprensión. En M. Pochulu (Comp.), *Relatos de investigación y experiencias docentes en Educación Matemática* (pp. 15-22). GIDED-UNVM.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 361-394.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 71-98.

Rodríguez, M. (Coord.) (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática.* Ediciones UNGS.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* [Tesis doctoral]. Universitat de Barcelona.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.* [Tesis doctoral]. Universitat de Barcelona.

Schon, D. A. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action*. Basic Books.

Serrazina, M. (2010). A Formação Contínua de Professores em Matemática: o conhecimento e a supervisão em sala de aula e a sua influência na alteração das práticas. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, *2*, 2-24.

Sousa, J. R., Gusmão, T., Font, V. & Landa, J. C. (2020). Task (re)design to enhance the didactic-mathematical knowledge of teachers. *Acta Scientiae, 22*(4), 97-123.

Stein, M. H. e Smith, M. S. (2009). Tarefas Matemáticas como quadro para reflexão. *Educação e Matemática*, *105*, 22-28.

2. Distintas formas de inclusión de la historia de la matemática en la enseñanza
Algunas ideas usando logaritmos

*Gustavo Carnelli**

Introducción

Una pregunta de interés para quien enseña matemática en el nivel secundario es: ¿cómo incluir la historia de la matemática en las propuestas de enseñanza? En este capítulo avanzaremos sobre algunos aspectos de este asunto. Veremos primero qué lugar tiene la historia de la matemática en la formación docente inicial; luego, daremos un vistazo a la producción académica acerca de posibles formas de incluirla en la enseñanza y, por último, daremos algunas ideas para su efectiva implementación en las aulas.

En la bibliografía disponible solemos encontrar ideas generales acerca del uso de la historia en la enseñanza para algunos contenidos, pero cuya expresión concreta en actividades para el aprendizaje no se percibe simple. Incluiremos aquí algunas de estas ejemplificaciones generales ya que pueden aportar ideas para que el docente tome, pero también mostraremos algunas actividades para el aula que pretenden ejemplificar los distintos usos de la historia que hemos encontrado.

Es cierto que hay una pregunta previa: ¿por qué incluir la historia en la enseñanza? A lo largo del capítulo tomaremos, en algunas ocasiones, la palabra

---

* Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

de Juan Nápoles Valdés. A propósito, este investigador argentino da respuestas a este interrogante: entre ellas, que el conocimiento de la evolución de las ideas matemáticas da al docente elementos para reconocer y atender a los obstáculos epistemológicos en la formación de ciertas nociones y también que favorece la reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de las dificultades inherentes a las nociones (Nápoles Valdés, 2015). No nos detendremos en esto, no abordamos aquí los fundamentos del uso de la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática, pero a partir de estas respuestas, pensamos que contemplar la historia en la enseñanza no solo puede verse en su manifestación explícita en las consignas de las actividades para la clase, sino también en el aporte a la formación continua del docente que le permita diseñar una propuesta más rica para la enseñanza de un cierto tema.

Una mirada a la formación docente

Si pensamos en incluir la historia en la enseñanza, podemos preguntarnos qué acceso a la historia de la matemática tiene un docente en su formación. Para esto –apenas para un abordaje preliminar–, resulta de interés mirar cómo aparece este campo de conocimientos en la formación docente inicial. La inclusión de la historia de la matemática adquiere, con frecuencia, la forma de un espacio curricular en los últimos años de la carrera de profesorado de matemática. Recorramos algunos casos.

- Diseño curricular para la formación docente en matemática de CABA: aparece el bloque "Historia, fundamentación y profundización del conocimiento matemático", dentro del campo de la formación específica. En la descripción del bloque, algunas de las finalidades formativas son: "comprender la evolución histórica de los conceptos y conceptualizaciones fundamentales de la matemática y su interrelación, promover la inclusión de temas históricos en la enseñanza de la matemática y vincular a los alumnos con algunos de los diferentes procesos que dieron origen a los conocimientos matemáticos, así como las problemáticas que motivaron tales aspiraciones" (Diseño curricular jurisdiccional para la formación docente del profesorado de educación superior en matemática, 2014).

- Diseño de la provincia de Buenos Aires: plantea una asignatura anual de 64 horas, ubicada en el tercer año. Los contenidos se presentan organizados según un criterio cronológico. Entre los propósitos que se enuncian, podemos destacar; "promover la valoración crítica de las condiciones socioculturales que incidieron en el desarrollo del conocimiento matemático, para concluir en las relaciones que se establecen entre los procesos sociales y el conocimiento matemático específico" (Diseño curricular jurisdiccional del profesorado de educación secundaria en matemática, 2017).
- Universidad Nacional de General Sarmiento, Universidad Nacional de La Plata y Universidad del Comahue: no hay una asignatura de historia de la matemática.
- Universidad Nacional de Villa María: en el tercer año de la carrera hay Historia y Fundamentos de la Matemática.
- Universidad Nacional de La Pampa: en el cuarto año de la carrera hay Historia y Filosofía de la Matemática.
- Universidad de Buenos Aires: hay Historia de la Matemática, que incluye algo novedoso entre sus contenidos: la matemática en la Argentina.
- Universidad Tecnológica Nacional (el Instituto Superior del Profesorado Técnico) e Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González: hay Historia de la Matemática en tercer año.

Corresponde mencionar que aquellos planes de estudios que no incluyen una asignatura, podrían contemplar la inclusión de la historia de la matemática dentro de las asignaturas de matemática o de la didáctica de la matemática. Por ejemplo, esto se observa en algunos programas de la carrera que ofrece la Universidad Nacional del Comahue. También conocemos algunas experiencias en las que, al planificar la enseñanza de un cierto contenido en asignaturas de la didáctica disciplinar, se debe realizar un recorrido histórico y epistemológico de la noción a enseñar, con vistas a reconocer obstáculos epistemológicos, orígenes del tema y avances y estancamientos en su evolución, para tener un panorama más completo al diseñar una secuencia para el aprendizaje y prever posibles dificultades de los estudiantes.

La ubicación de la asignatura en el tramo final de la carrera permite suponer que se espera un estudiante con amplia formación matemática para abordar el estudio de la historia.

Una tarea que puede tener que realizar un docente de matemática en su actividad profesional es enseñar una asignatura de la historia de la matemática en el nivel superior. En lo recorrido, vemos que la organización temática usual es cronológica. Entendemos que podría combinarse –o sustituirse– con un criterio de organización por asuntos matemáticos. Por ejemplo, el surgimiento y evolución del cálculo, el pasaje de la aritmética al álgebra, la resolución de ecuaciones polinómicas, el infinito, etcétera.

Uso de la historia en la enseñanza

Comentamos al principio que nos interesamos aquí por ver de qué modos puede ser contemplada la historia de la matemática en las propuestas de enseñanza. González Urbaneja (2004), Protti (2003) y Maza Gómez (1994) están entre quienes proponen diversos usos, que organizamos de la siguiente manera:

- Preceder el desarrollo de un tema con una introducción histórica, o bien, añadir resúmenes o notas históricas, de modo de situar los contextos científico y cultural de su origen y la evolución de los problemas que se van a abordar.
- Indicar, durante el desarrollo del tema, a qué matemáticos o corrientes matemáticas se debe la introducción de la nueva noción, la demostración de un teorema o la resolución de un problema o ubicarlo temporalmente.
- Tomar un cierto problema y analizar cómo fue resuelto en el momento histórico correspondiente.
- Aplicar el método genético, que pretende que el estudiante replique, a grandes rasgos, el proceso histórico que se ha desarrollado hasta la formulación actual del concepto.

González Urbaneja (2004) también destaca la influencia que la historia de la matemática tiene en la historia del pensamiento a través de las relaciones e influencias recíprocas que la matemática ha establecido con otros campos de conocimiento, en particular, con las humanidades. Con esto, podemos pensar en un quinto uso de la historia:

- Incluir situaciones extramatemáticas que sirvieron de emergentes de nuevos conocimientos matemáticos o que son aplicaciones centrales de ellos.

A partir de lo desarrollado, organizamos los usos de la historia en dos grandes grupos: *usos ilustrativos* y *usos significativos* de la historia en la enseñanza. Los usos ilustrativos de la historia de la matemática son aquellos en los que esta aparece como complementaria o accesoria en el desarrollo del tema y pretende, principalmente, funcionar como motivante para el estudiante. Podría suprimirse sin que la actividad se viera modificada sustantivamente en cuanto a lo matemático. Estos usos hacen más atractiva, más convocante, a la actividad y aportan información nueva que vincula al contenido con elementos de su historia. Pero estos usos reciben críticas: entre ellas, riesgo de reducir la historia de la matemática a anécdotas y favorecer la idea de que los conocimientos matemáticos son una especie de milagro o están asociados a personajes endiosados (Nápoles Valdés, 2009). Los tres primeros usos de los cinco mencionados entran en esta categoría.

Los usos significativos de la historia de la matemática son aquellos en los que su inclusión transforma el tratamiento del contenido y, en alguna medida, es medular y constitutiva del contenido. El cuarto de los cinco usos detallados, el método genético, es un ejemplo; el último de los cinco, el de las aplicaciones, es otro. Eventualmente, el tercero podría tener una elaboración tal que corresponda a este uso. Para Nápoles Valdés, este tipo de usos tiene como ventajas favorecer el flujo entre la ciencia y la cultura, apreciar el arte de los procesos de creación matemática, mostrar la interdependencia de las diferentes partes de la matemática, humanizar la enseñanza de la matemática, etcétera (Nápoles Valdés, 2009).

En cuanto al uso del método genético pensamos que la elaboración de actividades que permitan recrear el proceso de creación y evolución de una noción de un modo más o menos completo, requiere de un trabajo de elaboración didáctico-matemático muy profundo. Aceptamos, entonces, que en la aplicación del método genético se hagan ciertos recortes y simplificaciones del proceso histórico. Esto es explicitado, por ejemplo, en la propuesta didáctica que realizan Abrate y Pochulu (2007) para el abordaje de los logaritmos.

Entre las muchas producciones que pueden tomarse para diseñar actividades acordes con el método genético –elaboración docente mediante– podemos mencionar a Galán Atienza (2012), que realiza una propuesta para abordar el tema de cambios de unidades. Para ello describe varias ideas y da algunos elementos históricos, aunque no se presentan ejemplos de consignas para su bajada al aula. Entendemos que las ideas presentadas son fértiles para diseñar actividades para el aprendizaje que se enmarquen en el método genético. Otro ejemplo: hay un trabajo de González Urbaneja (2008) que da ideas para la elaboración de actividades acerca de la irracionalidad de ciertos radicales. Y uno más, de Palenzuela Rodríguez (2017), quien describe varias situaciones: las notas musicales y su vínculo con la suma de fracciones, las producciones de Euclides vinculadas a los números primos, la anécdota de Gauss en la escuela y su relación con las sucesiones aritméticas, etcétera. En todos los casos, con menor labor, pueden diseñarse actividades para un uso ilustrativo de la historia. En la tabla 1 se muestra un resumen.

Tabla 1. Tipos y caracterizaciones de los usos de la historia

Tipos	**Caracterización**
Usos ilustrativos de la historia en la enseñanza	Proponer una introducción histórica del tema.
	Incluir resúmenes, notas históricas, referencias a los matemáticos o corrientes matemáticas asociados a la noción trabajada, durante su desarrollo.
	Analizar un problema, vinculado a alguna noción, y ver cómo fue resuelto en el momento histórico correspondiente.
Usos significativos de la historia en la enseñanza	Hacer recorrer (en forma adaptada) al estudiante el proceso histórico de la noción.
	Trabajar aplicaciones centrales de la noción en otras disciplinas.

En lo que resta del capítulo desarrollamos algunas propuestas para el uso de la historia en la clase de matemática del nivel secundario. Los logaritmos son un tema fértil para nuestro fin y los tomaremos para ejemplificar los distintos usos.

En el nivel medio, los logaritmos tienen uno de estos dos tratamientos: un enfoque funcional, a partir de la necesidad de darle entidad a la función inversa de la exponencial, previamente trabajada; o un enfoque numérico. La presentación de los logaritmos a partir de lo numérico puede ser muy rica si se conoce cómo surgieron en la historia de la matemática. A grandes rasgos, los logaritmos surgieron con el fin de simplificar la realización de multiplicaciones y divisiones a partir de una transformación conveniente en sumas y restas (Abrate y Pochulu, 2007). Sin embargo, suele verse partir de la definición de logaritmo, aplicarla en la resolución de cálculos y dar las propiedades con ejercitación de aplicación. De esta forma quedan ocultas las situaciones que dieron origen a los logaritmos.

Ejemplos de actividades

A continuación, presentamos ejemplos de actividades sobre logaritmos con distintos usos de la historia. Las actividades están redactadas de un modo genérico, más bien para que el docente entienda su idea. Su transformación efectiva en actividades para el aprendizaje requiere una reformulación para su adaptación a las intencionalidades del docente.

La primera actividad es un ejemplo de uso ilustrativo de la historia. Conocido ya qué es un logaritmo, se propone trabajar específicamente con los logaritmos decimales, añadiendo apostillas de su creación.

Actividad 1

Los logaritmos en base 10 se llaman decimales y se los simboliza sin indicar la base. Por ejemplo, cuando escribimos *log* 37, queremos decir 37.

a) Leer la reseña histórica que acompaña la actividad.

b) Calcular sin usar calculadora:
1) *log* 1000
2) *log* (10^7)
3) *log* (10^(-6))
4) *log* 0,00001

c) Considerando *log* 4500,
1) Sin usar calculadora, decir entre qué dos enteros consecutivos se encuentra.
2) Usando calculadora, dar una aproximación con dos cifras decimales.

d) Usando propiedades de los logaritmos, calcular:
1) *log* 20 + *log* 50.
2) *log* 200 - *log* 20.

Reseña histórica: Briggs, Neper y los logaritmos

Los nuevos logaritmos de Neper implicaban una simplificación en los cálculos. Briggs, profesor de geometría en Londres, pensó que debía reunirse con Neper y mejorar aún más esa idea. Ambos se reunieron dos veces en los veranos de 1615 y 1616.

En el primer encuentro, pasaron casi un cuarto de hora observándose el uno al otro con admiración, hasta que una palabra fue dicha. Al fin, Briggs empezó: "he emprendido este largo viaje a propósito para ver a su persona y saber por qué método de ingenio o inventiva llegó a pensar en la más excelente ayuda para la astronomía, o sea, los logaritmos. Pero mi Lord, habiendo sido descubiertos por usted, me pregunto si nadie más los encontró antes cuando siendo conocidos ahora, son tan fáciles".

Ambos personajes llegaron a la conclusión que la reformulación de los logaritmos era una buena idea y Briggs fue el encargado de llevarla a cabo. Así, en 1617 publicó una obra en que vieron la luz los logaritmos decimales de los números naturales entre el 1 y el 1 000 con 14 cifras decimales. En 1624, Briggs completó su trabajo dando los logaritmos decimales del 1 al 20 000 y del 90 001 al 100 000, también con 14 cifras decimales. Además, hubo algunas ediciones de sus tablas que incluyeron un apéndice con los logaritmos del 100 001 al 101 000. Los logaritmos pasaron a ser para él una obsesión y, en 1625, llegó a contactar con Kepler para discutir con él sobre el uso de los logaritmos en la astronomía.

(Adaptado de "El impacto de la invención de los logaritmos en el siglo XVII", de Carlos Dorce Polo).

La siguiente actividad puede pensarse como la resolución de un problema en un momento de la historia. El problema es una de las preguntas principales que podemos hacernos: ¿cómo se calcula el logaritmo de un número cualquiera? Actualmente, tenemos el problema resuelto por la existencia de las calculadoras científicas, pero ¿si vamos atrás en el tiempo? La actividad propone el trabajo con tablas de logaritmos, ampliamente difundidas en la escolaridad secundaria y el nivel superior hasta algunas décadas atrás. En este caso, consideramos que es un uso significativo de la historia ya que atiende a cómo fue resuelto el problema en un cierto momento histórico. Por su centralidad en el recorrido histórico de la noción, también podemos enmarcar la situación en el método genético.

Actividad 2

Imaginemos por un rato que estamos en el secundario en una clase de matemática en 1980 (o antes aún). En ese entonces, las calculadoras no estaban difundidas en forma amplia y menos aún las científicas. Muy pocos estudiantes disponían de este recurso. En este contexto, imaginemos que nos asignaron resolver la ecuación:

$$0{,}2^x = 2153$$

Entonces, realizamos los siguientes pasos:

$$0{,}2^x = 2153$$

$$log\,(0{,}2^x) = log\,2153$$

$$x\,.log\,0{,}2 = log\,2153$$

$$x = \frac{(log\,2153\,)}{(log\,0{,}2)}$$

Hasta acá logramos “despejar x”, pero ¿cómo calculamos *log* 2153? ¿Y *log* 0,2? Para calcular logaritmos cuando no se disponía de recursos tecnológicos que lo hicieran, se usaban unas extensas tablas, llamadas tablas de logaritmos. Usaremos aquí la tabla de logaritmos a cinco decimales de Hoüel (1989). Es importante precisar que la tabla nos dará resultados aproximados. En esta tabla se toman en cuenta solo hasta las cuatro primeras cifras del número (esto significa que, por ejemplo, obtendremos la misma aproximación si calculamos el logaritmo de 56928 y de 56924).

Sabemos que los logaritmos decimales de números mayores que 1 dan positivos y que los logaritmos de los números que están entre 0 y 1 dan negativos. Por esto, hay un procedimiento para los primeros y otro procedimiento para los otros. Veamos el primero de los casos: números mayores que 1. Para calcular *log* 2153, seguimos este procedimiento:

Tomamos el número 2153. Contamos cuántas cifras significativas tiene el número que está a la izquierda de la coma y, luego, restamos 1. Resulta: 4 - 1 = 3. Al valor obtenido lo llamamos *característica del logaritmo*.

Ahora buscamos lo que llamamos *mantisa*, que será la parte decimal del logaritmo buscado. Esto se hace usando la tabla siguiente (mostramos la imagen de una parte de la tabla).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3285	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tomamos las dos primeras cifras significativas del número (21), buscamos en la tabla la fila 21 y, luego, moviéndonos en ella, vamos a la columna correspondiente a la tercera cifra (5) y registramos el valor: 3324. Continuamos deslizándonos por la fila 21, buscamos la cuarta cifra (3) en las columnas de la parte proporcional y registramos el valor: 6. Así, el resultado es:

$$0{,}3324 + 0{,}0006 = 0{,}3330.$$

El logaritmo buscado se obtiene sumando la característica y la mantisa:

$$log\ 2153 \approx 3 + 0{,}3330 = 3{,}3330$$

(usando los recursos de la actualidad, una calculadora arroja: 3,333044…).

Algunas consignas antes de avanzar:

a. ¿Cuánto vale la mantisa de 21530000? ¿Y de 21530? ¿Y de 2153683? ¿Y de 21,53748?
b. Calcular los logaritmos de cada uno de los números indicados en (a).
c. ¿Qué puede conjeturarse de lo respondido en (a)? Explicarlo usando la noción de mantisa y también usando las propiedades que conocemos del logaritmo.

Veamos ahora el caso de logaritmos de números que están entre 0 y 1, que sabemos que son negativos. Consideremos un número vinculado al ejemplo anterior. Calculemos *log* 0,2153. Observemos que:

$$0{,}2153 = \frac{2{,}153}{10} = \frac{10^{0{,}3330}}{10} = 10^{0{,}3330-1} = 10^{-0{,}6670}$$

Lo realizado tiene alcance general (obviamente, no lo estamos probando). Por lo tanto, la mantisa de un número entre 0 y 1 se calcula restando 1 al valor obtenido en la tabla; en este caso: 0,3330 - 1 = -0,6670.

La característica, en estos casos, se obtiene contando los ceros después de la coma hasta la primera cifra significativa: no hay ningún 0; entonces: 0. Luego: *log* 0,2153 ≈ 0 - 0,6670 = -0,6670.

Veamos otro ejemplo, el del logaritmo que aparece en la ecuación inicial: *log* 0,2.Tomamos el número 0,2.

Característica: no hay ningún 0 hasta la primera cifra significativa; entonces: 0.

Mantisa: completamos 0,2 con ceros hasta tres cifras significativas para buscarlo en la tabla: 200.

Buscamos en la tabla: 200.

Obtenemos: 3010.

Entonces: 0,3010 - 1 = -0,6990.

Entonces: *log* 0,2 ≈ -0,6990

(en la calculadora: -0,698970…).

Para finalizar, podemos dar una aproximación del valor de x de la ecuación inicial:

$$x = \frac{log\ 2153}{log\ 0{,}2} \approx \frac{3{,}3330}{-0{,}6990} \approx -4{,}768$$

d. Calcular, en forma aproximada, los siguientes logaritmos usando las tablas:

1) 84781
2) 84786
3) 3,12
4) 0,123

En (a) y (b) vemos que los logaritmos de esos números (en rigor, las aproximaciones que nos da la tabla) tienen la misma mantisa y difieren en su característica. Por lo tanto, podemos conjeturar en (c) que dos números mayores que 1, que tienen las mismas primeras cuatro cifras significativas, tienen logaritmos (de tabla) con igual mantisa.

La igualdad de las mantisas se da porque todos ellos tienen las mismas primeras cuatro cifras significativas, por lo que debemos buscar en la tabla los mismos valores.

Lo mencionado no es válido para los valores exactos del logaritmo. Pero sí tiene alcance para el caso de los números a y $10^n.a$. En términos de las propiedades de los logaritmos, vale que $log\,(10^n.a) = log(10^n) + log\;a = n\;.\;log\;10 + log\;a = n + log\;a$, siendo n natural y a un real mayor que 1. Llegamos entonces a que $log\,(10^n.a)$ y $log\;a$ difieren en n. Como n es natural, tienen la misma mantisa.

Todas las actividades que siguen corresponden a usos significativos de la historia. En particular, la actividad 3 propone trabajar la noción de logaritmo recreando el interés que la originó.

Actividad 3

1) Resolver el cálculo 65536 . 4096 bajo los siguientes supuestos:
- No disponemos de calculadoras.
- No recordamos el algoritmo de la multiplicación usual, el que aprendimos en la escuela primaria.

Para ello, diseñar en Excel una tabla de doble entrada que muestre los resultados de 2^n, 3^n, 4^n, 5^n y 6^n para valores naturales de n hasta 20. Ver que los números del cálculo propuesto aparezcan en la tabla.

2) Siguiendo la misma idea que en 1), calcular:
a) 1024 . 16384
b) 10077696 : 1296
c) 16777216 : 256

En (1), podemos ver en la tabla que $65536 = 4^8$ y que $4096 = 4^6$.

Entonces $4^8 . 4^6 = 4^{14}$, que en la tabla vemos que es $4^{14} = 268435456$.

En (2.a), $1024 . 16384 = 2^{10} . 4^7 = 2^{10} . (2^2)^7 = 2^{10} . 2^{14} = 2^{22} = 16777216$.

En (2.b), $10077696 : 1296 = 6^9 : 6^4 = 6^5 = 7776$.

En (2.c), $16777216 : 256 = 4^{12} : 2^8 = (2^2)^{12} : 2^8 = 2^{24} : 2^8 = 2^{16} = 65536$.

Para resolver estos cálculos usando la tabla de potencias, resulta necesario localizar la fila en la que se encuentran las potencias dadas y la resultante. Esto justifica darle entidad al número de fila, que es el *logaritmo*. Por ejemplo, como a 65536 se lo encuentra en la columna de las potencias de 4 y en la fila 8, decimos que $65536 = 8$.

Esta actividad habilita otros avances con las propiedades de las potencias. Abrate y Pochulu (2007) muestran un cuidado desarrollo con vistas a trabajar con los logaritmos desde un enfoque numérico, atendiendo a su surgimiento.

La actividad 4 pretende recrear parte del proceso de la construcción de tablas de logaritmos.

Actividad 4

Henry Briggs fue un religioso y matemático inglés que vivió entre 1561 y 1630 y enseñaba geometría en la universidad de Oxford. En un momento se reunió en Edimburgo (Escocia) con John Neper, otro matemático de la época y que también venía trabajando con los logaritmos. En ese encuentro acordaron que el logaritmo de 1 debía valer 0 y que el de 10 debía valer 1. Así nacieron los que hoy llamamos logaritmos decimales, y la tarea fue, entonces, construir tablas de logaritmos en base 10. Una aproximación de Briggs para este tema fue la siguiente:

a. Completar la siguiente tabla, expresando los valores de la columna B en forma aproximada con cuatro cifras decimales.

	A	B	
Sucesión aritmética de razón $\frac{-1}{8}$	1	10	Sucesión geométrica de razón $10^{-1/8}$

b. ¿Cómo se interpretan los logaritmos decimales en esta tabla?

c. Si se suman dos elementos de la columna A, tales que su resultado se encuentre en ella, ¿qué relación tienen con los correspondientes elementos de la columna B? Y en términos de logaritmos, ¿qué relación tienen?

d. Construir una tabla análoga de modo de poder calcular el logaritmo decimal de $\frac{a}{13}$, con *a* natural de 0 a 13.

Entre las aplicaciones que podemos considerar centrales de los logaritmos, está el interés compuesto. La actividad 5 propone trabajar una situación sobre este tipo de interés, lo que la encuadra en un uso significativo de la historia.

Actividad 5

Juan depositó \$ 18000 a plazo fijo en un banco que le ofrecía una tasa mensual de 3%. Renovó la inversión una cierta cantidad de veces –sin retirar nada–, hasta obtener un total de \$ 24916. ¿Cuántos meses duró la inversión?

El *interés compuesto* es una aplicación del crecimiento exponencial ya que el monto y el tiempo se relacionan a través de la fórmula $M = C \cdot (1+i)^n$, donde M es el monto, C es el capital, n es la cantidad de períodos de la inversión e i es la tasa expresada en la misma unidad que el tiempo. Así, cuando la incógnita es la duración de la inversión, se requiere de los logaritmos: n = $-1 + \log\left(\frac{M}{C}\right)$. El conocimiento de la fórmula de interés compuesto puede ser previo o puede verse en el contexto de la actividad.

Otra de las aplicaciones de los logaritmos, de las principales en otros campos disciplinares, es la noción de *potencial de hidrógeno*, más conocido por su abreviatura: pH. En la actividad siguiente se trabaja sobre ella.

Actividad 6

En experimentos de electrólisis, se descubrió que las soluciones acuosas estaban formadas por iones hidrógeno H^+ e iones hidroxilo OH^- y que el agua pura tiene el mismo número de ambos iones (a este tipo de soluciones se las llamó neutras).

Las soluciones neutras tienen una concentración de iones hidrógeno de 10^{-7} moles / litro. A las que tienen una concentración mayor de iones hidrógeno que ese valor se las llama *ácidas* y, a las que tienen una concentración menor, *básicas* o *alcalinas*.

a) Clasificar a las siguientes sustancias en ácidas o alcalinas, a partir de la información de su concentración de iones hidrógeno.

Amoníaco: $10^{-11,9}$
Leche: $10^{-6,4}$
Jugo de limón: $10^{-2,4}$
Leche de magnesia: $10^{-10,5}$

b) Las siguientes sustancias son ácidas. Ordenarlas de menor a mayor acidez a partir de la información dada y sabiendo que cuanto más lejos está de ser una solución neutra, mayor es su acidez.

Café: 10^{-5}
Cerveza: $10^{-4,5}$
Jugo gástrico: $10^{-1,5}$

c) Las siguientes sustancias son alcalinas. Ordenarlas de menor a mayor alcalinidad a partir de la información dada y sabiendo que cuanto más lejos está de ser una solución neutra, mayor es su alcalinidad.

Solución de detergente: 10^{-10}
Hipoclorito de sodio: $10^{-12,5}$
Agua de mar: 10^{-8}

d) Considerar dos sustancias tales que una es diez veces más ácida que la otra. Dar un ejemplo de los valores de la concentración de iones hidrógeno que cumplan esa condición.

e) Ídem d) para dos sustancias alcalinas.

f) Analizar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

- A medida que aumenta la concentración de iones hidrógeno de una sustancia, esta es más ácida.
- Dos sustancias tienen una concentración de iones hidrógeno de 10^a y 10^b, respectivamente. Si $a > b$, la primera sustancia es más ácida que la segunda.

Puede pensarse que es más práctico evitar el uso de números expresados en notación exponencial. Por ejemplo, para 10^{-7}, sería mejor usar -7 o mejor aún usar 7; para 10^{-9}, usar -9 o mejor 9. Esto hace pensar en los logaritmos:

$log\,(10^{-7}) = -7$; entonces $-log\,(10^{-7}) = 7$
$log\,(10^{-9}) = -9$; entonces $-log\,(10^{-9}) = 9$

Así, en 1909, el químico danés Sorensen definió el *potencial de hidrógeno* (abreviado pH) como el opuesto del logaritmo de la concentración molar de los iones hidrógeno:

$pH = -log\,(H^\wedge+)$

g) La concentración de iones hidrógeno en la sangre toma valores que pueden ir de $10^{-7,45}$ a $10^{-7,35}$. Si se alejara de ese rango, estarían comprometidas funciones vitales de la persona. Entonces, ¿entre qué valores se espera que varíe el pH de la sangre?

h) ¿Podría ser negativo el pH de una sustancia?

i) Una sustancia es cien veces más ácida que otra. ¿En cuánto difieren sus pH?

j) Ídem (i) para el caso de sustancias alcalinas.

A modo de cierre

La bibliografía especializada reconoce la importancia de la inclusión de la historia de la matemática en la enseñanza, aunque los usos que mayormente se mencionan son los que aquí hemos llamado ilustrativos. Si bien hemos reconocido cierto valor en ellos, limitarse a estos usos no enriquece sustancialmente nuestras propuestas de enseñanza. En cambio, los usos significativos de la historia permiten comprender –en alguna medida– cómo se construyeron y qué dificultades hubo en la evolución de ciertos objetos matemáticos y, por lo tanto, dan elementos para otorgarle sentido.

A lo largo del capítulo se brindan elementos para que quien enseña matemática pueda cuestionarse acerca del uso de la historia en la enseñanza y pueda discernir entre usos ilustrativos y significativos. También, con las actividades presentadas, le brindamos al docente un material para que lo transforme en actividades de enseñanza, le dé pistas para diseñar nuevas actividades y, además, le aporte una visión más amplia de evolución de las nociones matemáticas, en nuestro caso, los logaritmos.

Referencias bibliográficas

Abrate, R. y Pochulu, M. (2007). Ideas para la clase de logaritmos. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 10,* 77-94.

Diseño curricular jurisdiccional para la formación docente del profesorado de educación superior en matemática (2014). buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/res_3931_fd_matematica_5.pdf.

Diseño curricular jurisdiccional del profesorado de educación secundaria en matemática (2017). instituto20.com.ar/archivos/Profesorado%20de%20Educacion%20Secundaria%20en%20Matematica.pdf.

Dorce Polo, C. (2014). El impacto de la invención de los logaritmos en el siglo XVII. *Suma. Revista para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, 76*, 17-25.

Galán Atienza, B. (2012). *La Historia de las Matemáticas. De dónde vienen y hacia dónde se dirigen*. repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1764/Gal%C3%A1n%20Atienza%2C%20Benjam%C3%ADn.pdf?sequence=1.

González Urbaneja, P. (2004). La Historia de las Matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente la enseñanza. *Suma. Revista para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, 45,* 17-28.

González Urbaneja, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *Sigma: revista de matemáticas, 33,* 101-129.

Hoüel, J. (1989). *Tablas de Logaritmos a Cinco Decimales*. El Ateneo.

Maza Gómez, C. (1994) Historia de las Matemáticas y su enseñanza: un análisis. *Suma. Revista para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, 17*, 17-26.

Nápoles Valdés, J. (2003). La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque histórico. *Revista Educación y Pedagogía, 15*(35), 163-181.

Nápoles Valdés, J. (2009). *Elementos para una historia de las matemáticas griegas*. edutecne.utn.edu.ar/napoles-valdes/hist_matem_griega.pdf.

Nápoles Valdés, J. (2015). La Historia de la Matemática y el futuro de la Educación Matemática. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 249-268). Eduvim y Ediciones UNGS.

Palenzuela Rodríguez, H. (2017) *¿Por qué incluir la historia de las matemáticas en el aula?* repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/6028/14375_Helena%20Palenzuela%20Rodr%C3%ADguez%20%281%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Protti, O. (2003). La historia de las matemáticas como instrumento pedagógico. *Uniciencia, 20*(2), 251-257.

3. Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática

*Jhony Alexander Villa-Ochoa, Jonathan Sánchez-Cardona y Mónica Marcela Parra-Zapata**

Introducción

Escribir sobre modelación matemática (o modelización, como se denomina en otras partes de Iberoamérica) sugiere una reflexión en torno a su significado para los distintos usuarios del término. Para un matemático aplicado, la modelación (empleamos la palabra modelación para hacer alusión a la modelación matemática) representa el proceso que se origina en la delimitación de un problema relevante para algún área del conocimiento. Es un proceso que, generalmente, involucra equipos interdisciplinarios y transcurre por fases o etapas; entre ellas: el *reconocimiento de un fenómeno de interés*, la observación, la selección de variables, la formulación de hipótesis; la *formulación del modelo* cuyo propósito es formular una descripción de un mecanismo en términos cuantitativos; la *reducción, análisis, cálculo y validación* del modelo (Fowler, 1998). Para los educadores matemáticos, la modelación representa un dominio de investigación en el que conviven diversidad de intenciones, propósitos y perspectivas teóricas (Niss, Blum y Galbraith, 2007). Cada una de estas intenciones y perspectivas

* *J. A. Villa-Ochoa*: Universidad de Antioquia, Colombia.
J. Sánchez-Cardona: Universidad de Antioquia, Colombia.
M. M. Parra-Zapata: Universidad de Antioquia, Colombia.

teóricas pueden determinar diferentes tipos de tareas y distintas maneras de implementar la modelación en la cotidianidad escolar. Para los profesores, la modelación se convierte, entre otras cosas, en una oportunidad para *aplicar* matemática y mostrar su utilidad a los estudiantes. Villa-Ochoa (2015) encontró que existen profesores que se apoyan en la idea de *solucionar problemas de la realidad* para reducir la modelación a la búsqueda de una solución de cualquier tarea en un contexto determinado (generalmente imaginado) o una tarea en la que se busque la construcción de una representación matemática.

Lo anterior es evidencia de que existe diversidad de actores y de visiones con respecto a lo que se entiende por modelación y la manera de integrarla en la cotidianidad escolar. En esta cotidianidad, también se involucra una diversidad de contextos educativos que, a su vez, condicionan la toma de decisiones en cuanto a los contextos, problemas y modelos matemáticos que se desean construir en la clase de matemáticas.

En este capítulo ofrecemos un panorama de significados de la modelación en el interior de la investigación en educación matemática y algunos aportes de nuestra mirada teórica y metodológica. Finalmente, presentaremos algunos ejemplos derivados de las investigaciones que hemos realizado y profundizaremos en un ambiente que desarrollamos en un programa de formación de futuros profesores de matemática.

Visiones teóricas de la modelación matemática en educación matemática

Una de las comprensiones más amplias de la modelación radica en concebirla como la resolución de problemas del mundo real con el fin de comprender y explicar una situación, un fenómeno o para controlar y anticipar los comportamientos de las variables estudiadas bajo las condiciones en que se modelaron. Estos aspectos hacen que exista una diferencia entre modelación y las aplicaciones matemáticas. Para Stillman (2019), la modelación reconoce un problema del mundo real el cual es estudiado y analizado, a partir de diversas posturas y con propósitos diferentes. Por su parte, las aplicaciones matemáticas también involucran un problema del mundo real en el que se usan las matemáticas, pero después de haber encontrado la solución, ya no se piensa en el problema inicial, excepto para verificar si la respuesta tiene sentido.

Stillman (2019) identificó que en la literatura de educación matemática se valora la modelación a partir de un punto de vista matemático y para el ejercicio de la ciudadanía. Para la autora, frente al primer punto de vista, la modelación puede ser el vínculo para enseñar conceptos y procedimientos matemáticos; enseñar modelos matemáticos y maneras de aplicar las matemáticas como contenido matemático y promoverlas como una actividad humana que responda a problemas de diferente naturaleza que den lugar a la aparición de conceptos, nociones y procedimientos. Desde el punto de vista de la ciudadanía, Stillman (2019) encontró que las investigaciones se han preocupado por brindar experiencias que contribuyan a la educación para la vida después de la escuela, como analizar problemas sociales, promover la educación en valores, cuestionar el papel de los modelos matemáticos en la sociedad y el medio ambiente, así como asegurar o avanzar la sostenibilidad de la salud, la educación y el bienestar ambiental, y la reducción de la pobreza y las desventajas.

La modelación matemática como un proceso en la clase de matemáticas

Dentro de la educación matemática existen investigadores que reconocen en la actividad del matemático aplicado una oportunidad para resolver problemas reales en el aula y desarrollar conocimientos matemáticos en los estudiantes (Bassanezi, 2002). Fundamentados en esta visión se ha asumido la modelación como un conjunto de fases sucesivas de un fenómeno y, a partir de ello, se han construido diagramas que presentan ciclos de modelación y que buscan describir la *actividad del matemático aplicado* con el fin de promover su integración en el aula. La mayoría de estos ciclos incluyen la selección o presentación de un problema real para resolver, la descripción de algunas etapas por las que se espera que los resolutores atraviesen hasta llegar a una respuesta satisfactoria a sus intereses. Entre las etapas descriptas, se encuentran:

- *Simplificación/delimitación*. Los problemas, tal y como se presentan en las ciencias o en la cotidianidad, tienen una gran cantidad de factores, variables y relaciones que no pueden considerarse en su totalidad, o incluso, en ocasiones, ni siquiera son percibidas por quienes intervienen en este proceso. Por tanto, se requiere que, quienes modelan, se focalicen en las variables y relaciones de interés acorde con el problema o situación a resolver. Esta característica es principalmente importante, pues exige reconocer que los resultados del proceso de modelación no son un retrato de la realidad ni son absolutos ni infalibles. Más allá de ello, son modelos que funcionan acorde con las condiciones en las cuales se construyó. Nuevas condiciones y variables hacen que se deba reorganizar o reconstruir el modelo para que atienda a ellas.

- *Construcción del modelo*. Esta etapa del proceso puede incluir el uso de razonamientos (por ejemplo, inductivos) y técnicas (por ejemplo, regresiones o interpolación) para la construcción de una representación matemática. En ocasiones, existen modelos que se han derivado de otros problemas y que se pueden ajustar y usar en el problema que se está tratando. Un aspecto que vale la pena resaltar es la naturaleza de lo que se denomina *modelo matemático*. En la perspectiva de Villa-Ochoa (2016), se reconoce que un modelo es la conjunción de tres elementos; ellos son: una representación, un objeto representado y un usuario. Entre estos tres elementos intervienen diferentes relaciones cuando se trabaja en la clase de matemáticas. En ese sentido, un modelo se manifiesta en una representación, pero no toda representación es un modelo.
- *Validación del modelo y de los resultados*. Esta etapa involucra el uso de criterios para dar cuenta de que la construcción matemática satisfaga la situación (por ejemplo, criterios de la lógica, procedimientos, consistencia en los gráficos y pruebas matemáticas y estadísticas), de confrontación y coherencia de los resultados arrojados por el modelo con las necesidades, problemas o situaciones que dieron origen al proceso de modelación. En la clase de matemáticas, también pueden intervenir especialistas en las temáticas que puedan dar cuenta de la pertinencia de los resultados.

Otras etapas pueden identificarse en los trabajos de los investigadores, algunos mencionan abstracción, matematización, comunicación, trabajo matemático. En el trabajo de Perrenet y Zwaneveld (2012) puede encontrarse una discusión de varios diagramas de la modelación y de la diversidad de representaciones que pueden tener profesores y estudiantes de estos ciclos.

Conforme mencionamos anteriormente, existen trabajos de modelación cuyos intereses no se centran en la creación y validación de un modelo matemático (Parra-Zapata y Villa- Ochoa, 2016; Barbosa, 2006; Araújo, 2012). En estas investigaciones, la modelación en el ámbito de la educación matemática se configura como un ambiente de aprendizaje en el que se estudian y se aproxima a la solución de situaciones de interés por medio de las matemáticas. En esta mirada, las acciones de los estudiantes no necesariamente se ajustan con los ciclos convencionalmente descriptos, sino que están en correspondencia con las necesidades que se delimitan en el problema y las condiciones escolares, entre ellas, la interacción con los profesores y especialistas en la temática. Un ejemplo de ello puede encontrarse en el trabajo de Rendón-Mesa y sus colaboradores (2016), quienes trabajaron con estudiantes de ingeniería de diseño, y a partir de las necesidades e intereses de los estudiantes y de la profesión, pudieron identificar otras fases y características de la modelación.

Tipos de tareas de modelación matemática

La modelación, vista como una actividad que refleja principalmente las acciones de los profesionales en matemáticas, tiene una complejidad que se caracteriza en aspectos como: la amplitud y la cobertura del problema identificado, el trabajo interdisciplinario, la búsqueda y la obtención de datos, la disponibilidad de recursos para el tratamiento de datos, los tiempos para la solución del problema, los alcances de los resultados, entre otros. Eso hace que replicar esa actividad en las clases de matemáticas no siempre sea posible. Al respecto, en la investigación se han delimitado varias perspectivas, Kaiser (2017) apunta cuatro grandes propósitos que se encuentran en la investigación en modelación, a saber:

- *Metas pedagógicas*. Promover habilidades que les permitan a los estudiantes comprender mejor los aspectos centrales de su mundo.
- *Objetivos psicológicos*. Fomentar y mejorar la motivación y la actitud de los alumnos hacia las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas.
- *Objetivos relacionados con la asignatura*. Estructuración de procesos de aprendizaje, introducción de nuevos conceptos y métodos matemáticos, incluida su ejemplificación.
- *Objetivos relacionados con la ciencia*. Impartir una imagen realista de las matemáticas como una ciencia, dando una idea de la superposición de las consideraciones matemáticas y extramatemáticas en el desarrollo histórico de las matemáticas.

Estos cuatro propósitos muestran que resolver problemas reales no es la única ni la principal meta de la modelación en la matemática escolar. También se resalta el uso y la comprensión de las ideas matemáticas y de otros contextos y áreas del conocimiento, además de la formación de ciudadanos críticos. Para dar cuenta de estos propósitos se requiere de diversas acciones en el aula y del diseño de diferentes tareas de modelación. Frente a ello, Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017) identificaron cuatro tipos de tareas. Cada tipo pone diferentes énfasis en alguno de estos propósitos. Estos tipos de tareas son: i) enunciados verbales, ii) construcción de representaciones, iii) modelación a través de proyectos, y iv) uso y análisis de modelos. La caracterización realizada por los autores permite identificar el contexto y la noción de realidad que ofrece cada enunciado, el propósito orientado a la enseñanza de las matemáticas, el desarrollo de habilidades o competencias, así como los alcances y limitaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Con esta clasificación, los autores proporcionan insumos para tomar decisiones en la implementación de la modelación tanto en el ámbito escolar como en la investigación.

Modelación matemática en una perspectiva situada

La modelación, por su naturaleza, considera el estudio de fenómenos en contextos y situaciones de interés para los sujetos en la sociedad o en algún área de conocimiento; de alguna manera, esto refleja un carácter situado de la modelación; sin embargo, como mencionamos anteriormente, no siempre la actividad de modelación pone de relieve los conocimientos y la pertinencia de los contextos. En su investigación, Rendón-Mesa (2016) informó que, en ocasiones, la modelación se usa para la formación matemática de profesionales (ingenieros) sin una reflexión de los intereses y necesidades relativos al campo de acción de esos futuros profesionales. La autora propuso el término *modelación situada*, como una manera de llamar la atención en la necesidad de diseñar ambientes de aprendizaje de modelación acordes a los intereses y necesidades de los estudiantes.

En esta perspectiva, en las investigaciones desarrolladas por nuestro colectivo[1] entendemos que la modelación no se reduce a una estrategia para enseñar

[1] Grupo de Investigación MATHEMA-Formación e Investigación en Educación Matemática de la Universidad de Antioquia.

un contenido, sino que, más allá de ello, busca que sea un ambiente en el que se tengan en cuenta:

- Las ideas fundamentales de las matemáticas y su relación con los contextos, significados y procedimientos a partir de los cuales se construyó.
- El uso de datos reales que les permita a los estudiantes matematizar; es decir, plantear y representar relaciones entre los diferentes objetos y cantidades.
- El diseño de ambientes de clase que promuevan la participación, discusión, razonamiento y la toma de decisiones de los aspectos relevantes en el ambiente.
- Promover diferentes conocimientos (matemáticos y no matemáticos) y usarlos según la naturaleza de la situación, sin subordinarlos entre sí.
- Reconocer que los resultados proporcionados por los modelos son relativos y que operan bajo las condiciones y supuestos en los que se realizó el proceso.
- Promover un discurso en el aula que incluya argumentos matemáticos y que se fundamenta en ideas y procedimientos matemáticos.
- El vínculo directo y constante con expertos (conocedores o profesionales en distintas áreas) que participen en diferentes momentos del proceso de modelación.
- La evaluación debe, a su vez, promover el aprendizaje no solo de los contenidos matemáticos, sino de otros conocimientos propios del contexto en el que se desarrolla la tarea y de las habilidades asociadas a la modelación.

En el siguiente apartado presentamos algunos aspectos metodológicos que se involucran en los ambientes modelación para la clase de matemáticas.

Aspectos metodológicos

De acuerdo con las consideraciones teóricas que describimos en el apartado anterior, a lo largo de los últimos quince años, en el grupo de investigación MATHEMA, hemos desarrollado investigaciones que aportan a la configuración de escenarios de clase, para dar lugar a que se integre la modelación en varios de sus propósitos y alcances.

Como ejemplo de estas investigaciones, Parra-Zapata *et al.* (2016) diseñaron un ambiente en el que niños y niñas de quinto grado (10-11 años) estudiaron el modelo del índice de masa corporal. El ambiente incluyó un trabajo en equipo en el que los estudiantes discutieron acerca de los problemas de la obesidad en Colombia, y fueron partícipes de un espacio de diálogo y discusión con una profesional en nutrición en torno a la problemática en cuestión, quien ofreció sus comprensiones. Y, en conjunto, los estudiantes y los profesores analizaron los usos y limitaciones del modelo. En términos de la perspectiva situada se entiende que los niños y las niñas, más allá de atravesar por un conjunto de ciclos y de la construcción de sistemas consistentes de ecuaciones y representaciones, participaron en el ambiente para hacer de la modelación una oportunidad para *matematizar la realidad*. Esta matematización de la realidad, se presenta en Parra-Zapata (2015) como un componente particular de la modelación en educación primaria, que obedece a un proceso de investigación científica que se relaciona con observar, experimentar, conjeturar, sistematizar, validar, entre otros. Este proceso no se reduce a la traducción matemática, como suelen presentarse las tareas contextualizadas en los libros de texto, sino que involucra procesos que se llevan a cabo para lograr algunos desarrollos matemáticos; máxime si se tiene en cuenta que matematizar no implica solamente cuantificar, ni el número es el referente de la matematización.

Por su parte, una comprensión situada de la modelación le permitió a Villa-Ochoa (2016) usar el modelo de crecimiento fetal para que los futuros profesores no solo reconocieran los aspectos matemáticos que permiten comprender cómo cambia el peso y el tamaño de un feto, sino que también promovió en estos futuros profesores cuestionamientos de su propio conocimiento del uso que otros profesionales hacen de los modelos. Con base en ello, estos estudiantes proyectaron posibles cuestiones para su desempeño como profesores de matemáticas. El ambiente proporcionado en este caso incluyó el trabajo en equipo, el planteamiento de preguntas relativas al fenómeno de estudio, la exploración de posibles solicitudes, la confrontación y la discusión de sus soluciones con otros estudiantes y con el profesor, la reformulación de sus afirmaciones, la reflexión de sus aprendizajes y la manera en que se aprendieron.

Con otra forma de implementar la modelación, Villa-Ochoa y Berrío (2015) realizaron una salida de campo con sus estudiantes. A través de la pregunta: “¿Qué depende de qué?”, los estudiantes describieron un amplio conjunto de cantidades que covarían con otras cantidades. En su experiencia, los autores describen la manera en que los estudiantes llegaron a acuerdos para delimitar el tema a estudiar. Los autores también describen las acciones implementadas por los estudiantes para delimitar las relaciones entre cantidades y los conocimientos no matemáticos que fueron necesarios. En este ejemplo fue posible evidenciar que cuando se estudian problemáticas cercanas a las experiencias de los estudiantes, no solo se requiere de conocimientos matemáticos, sino también de otros conocimientos propios de la cultura y que, en la modelación, todos ellos se conjugan para resolver los asuntos relevantes.

En los tres ejemplos anteriores, los profesores han aplicado modelos matemáticos que usan profesionales en alguna disciplina. A continuación, se presenta un ejemplo de otro tipo de ambiente en el que los estudiantes se comprometen con la comprensión de un fenómeno a través de la construcción y validación de un modelo matemático.

Un ambiente de modelación: concentración de un medicamento en la sangre

El ambiente que describimos a continuación corresponde a una reformulación de una tarea que se puede encontrar en libros de texto como aplicación de las funciones exponenciales. En términos de Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017), la tarea se presenta inicialmente como un enunciado verbal realista; es decir, tareas que evocan aspectos realistas o imaginados sin que necesariamente vinculen contextos cercanos a la experiencia del estudiante. La tarea generalmente se encuentra en los textos como un enunciado que proporciona información de la vida media de un medicamento y solicita a los estudiantes la construcción de la función exponencial que describe su comportamiento en la sangre.

El ambiente lo desarrollamos dentro de un curso de modelación con estudiantes (futuros profesores de matemáticas). El curso es orientado por un colectivo de tres profesores, en el que se discuten aspectos teóricos y metodológicos de la modelación y se viven experiencias como modeladores matemáticos a partir de diferentes tareas y ambientes.

El ambiente propuesto inicia con un diálogo acerca del papel de las matemáticas en diferentes áreas y en particular de la medicina. Al respecto, los estudiantes mencionan aspectos generales de la aplicación de las matemáticas en muchos fenómenos. En nuestra experiencia, hemos encontrado que los ejemplos que proponen son meramente informativos, por ejemplo: "*Sé que existe una fórmula que usan los médicos para saber cuánto medicamento les dan a los pacientes*" (comentario de Carlos, 22 de junio de 2018).[2] Cuando se cuestiona a los estudiantes por las variables y relaciones que intervienen en el contexto, generalmente, no ofrecen una mayor ampliación. Este hecho se comprende pues, en la mayoría de los casos, los problemas que los estudiantes resuelven en sus cursos de matemáticas aparecen como ejercicios de aplicación al finalizar un tema. Estos ejercicios generalmente solo hacen mención a un contexto real de manera nominal o, en algunos casos, se presentan de manera simplificada para que las acciones de los estudiantes se limiten a la identificación de las variables y la construcción de representaciones.

Con el fin de promover en los estudiantes otro tipo de acciones, se les propone estudiar con mayor detalle los aspectos que están involucrados con el uso de las matemáticas en algunos fenómenos de las ciencias; por ejemplo, en la concentración de un medicamento en la sangre. Para ello, se les pide a los estudiantes que realicen consultas del fenómeno, y que describan cómo los profesionales podrían usar las matemáticas allí.

Para el caso de la concentración de un medicamento en la sangre, los estudiantes generalmente se remiten a internet. Después de la consulta, se les propone una discusión colectiva de sus hallazgos. En una experiencia desarrollada con futuros profesores en junio de 2018, los estudiantes formularon preguntas como:

- ¿Qué factores pueden determinar la efectividad de un medicamento?
- ¿Cuáles son los efectos secundarios de un medicamento y cómo determinarlos?
- ¿Cuál es la composición química de un medicamento como la fluoxetina?
- ¿La vida media de un medicamento puede depender de la composición química y de la cantidad?
- ¿Cuáles son las características o rasgos de una persona con depresión?

[2] En este capítulo, los participantes se nombran con seudónimos.

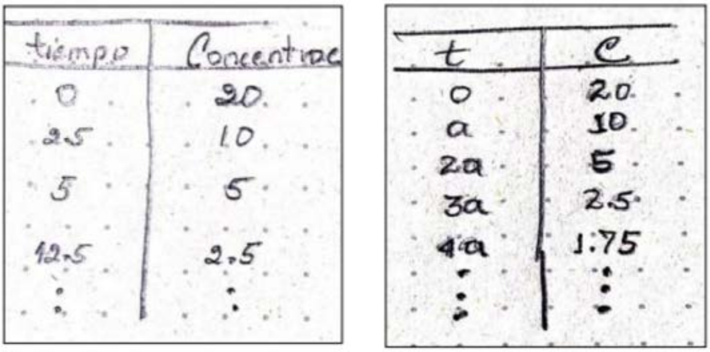
En la experiencia mencionada, cuestionamos a los estudiantes por el rol de las matemáticas para resolver sus preguntas. Como resultado, los estudiantes señalaron aspectos como:

- *"Se requiere más de conocimientos de otras áreas que de las matemáticas mismas"* (Karla, 22 de junio de 2018).
- *"Para responderlas* [las preguntas propuestas antes] *se debe trabajar con médicos, químicos y otros profesionales"* (Juan, 22 de junio de 2018).
- *"En varias de ellas* [preguntas] *se puede usar estadística para determinar los efectos de una cosa en otra"* (Guillermo, 22 de junio de 2018).

Esta parte del ambiente de modelación tiene como propósito que los estudiantes reconozcan que las situaciones o fenómenos a estudiar involucran conocimientos y procesos de otras disciplinas; además, permite cuestionar la idea de que las matemáticas están en todo o que permiten dar respuesta a cualquier pregunta. En ocasiones, este tipo de discusiones ofrece oportunidades para que los estudiantes se encaminen hacia el desarrollo de proyectos acorde con sus propios intereses. Por ejemplo, ha sido motor para que, en 2016, un grupo de estudiantes decidiera estudiar el comportamiento del Ritalín y, en 2019, que otra estudiante se inspirara en su condición personal para estudiar el comportamiento y efectos de la Aspirina.

En el caso de la experiencia que describimos, los estudiantes se enfocaron en la pregunta que, a su juicio, representaba una mayor presencia de la matemática, es el caso de: ¿Cómo se comporta la concentración de la fluoxetina en la sangre? Para responder esta pregunta, identificaron en internet que este medicamento tiene una vida media de dos a tres días y que la presentación de esta es de cápsulas de 20 miligramos. Después de comprender el significado del término *vida media*, la primera estrategia a la que se refirieron los estudiantes fue a la construcción de una tabla de valores. En las figuras 1a y 1b se presentan las tablas construidas por dos grupos de estudiantes.

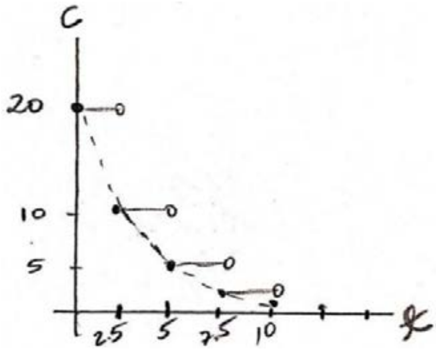
Figuras 1a y 1b. Concentración de la fluoxetina en la sangre



Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

Las figuras 1a y 1b muestran dos comprensiones diferentes de los estudiantes; por un lado, parecen ver la vida media como un fenómeno de variación discreta cuyo aumento se daba en cada intervalo de 2,5 días (figura 1a); y por otro, entienden el uso de la letra *a* como un parámetro de una *constante que cambia* (figura 1b). Frente al primer aspecto, uno de los profesores del curso hizo en el tablero un gráfico cartesiano (tomando a = 1) correspondiente a los valores de la tabla de la figura 1b. Luego de ello, preguntó por el cambio, cuestionó si en cada intervalo la concentración permanecía constante hasta que se cumpliera el siguiente tiempo de vida media (ver parte entera en la figura 2). Los estudiantes indicaron que la gráfica debía ser una función continua como una curva suave de forma exponencial. Frente al uso de la letra *a,* uno de los profesores generó una reflexión sobre el significado de la letra y las implicaciones que tendría construir una función con esa representación o solo con un valor particular de ese parámetro. Otras reflexiones sobre el uso de las letras en el álgebra escolar también se hicieron presentes.

Figura 2. Gráfico cartesiano de los valores de la tabla (figura 1a)



Fuente: producción de un profesor en el tablero, 2018.

De la discusión generada a partir de la gráfica de la figura 2, sobre comportamiento suave de la relación entre la concentración del medicamento en la sangre y el tiempo, los estudiantes reformularon sus tablas y surgió la necesidad de crear una variable auxiliar "*n*" (ver figura 3).

Figura 3. Variable auxiliar, concentración de la fluoxetina en la sangre

n	t	C
0	0	20
1	a	10
2	$2a$	5
3	$3a$	2.5
⋮	⋮	⋮
n	na	$20/2^n$

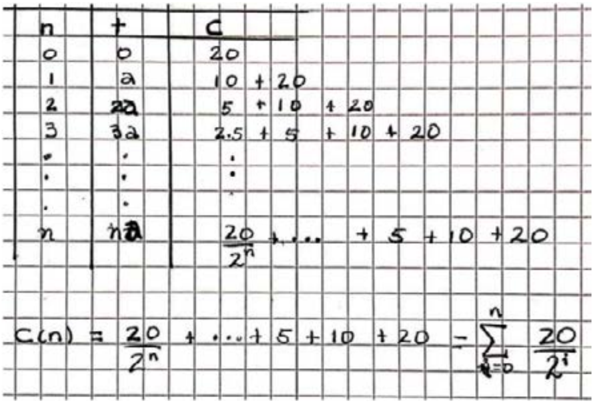
Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

Conforme describimos en el apartado de visiones teóricas, un aspecto importante de un ambiente de modelación es el uso de técnicas y procedimientos acordes con las necesidades que surgen de acuerdo con el proceso y el contexto. Por tanto, se cuestionó el significado de la letra *n* (variable auxiliar en la tabla de la figura 3). Algunos estudiantes dijeron "*representa como pasos*, *grupos de vida media*". Uno de los profesores del curso dio pasos a medida que se listaban los valores que podría tomar la variable auxiliar *n*; ello contribuyó para que los estudiantes reconocieran su significado como *un contador que dice cuántos períodos de vida media se llevan*. Con base en la nueva tabla (figura 3), los estudiantes realizaron un proceso inductivo y construyeron la fórmula (sin otra mención al significado de las letras utilizadas): $C(n) = \frac{20}{2^n}$.

Después de ello, uno de los profesores cuestionó los procesos seguidos para construir el modelo. Los estudiantes resaltaron que la variable *n* les había ayudado a *ver* un patrón y, por tanto, lo pudieron representar algebraicamente. Al respecto, el profesor les hizo notar el papel de la tabla en sus razonamientos y en la construcción de los modelos; también mencionó que el razonamiento fue posible gracias al significado de la *vida media*; que ese valor, por sí mismo, también representa un modelo matemático, y pidió a los estudiantes que conjeturaran del proceso que pudo haberse seguido para su construcción. Posteriormente, uno de los profesores pidió a los estudiantes que representaran la concentración del medicamento en términos del tiempo; los estudiantes observaron la tabla de la figura 3 y generaron sus interpretaciones, por ejemplo, Carlos, uno de los estudiantes mencionó "*es como una composición de funciones*". Con base en las indicaciones, los estudiantes lograron construir la siguiente fórmula: $C(t) = \frac{20}{2^{\frac{t}{a}}}$.

La segunda parte de la tarea consistió en dar cuenta del comportamiento de la concentración del medicamento para un tratamiento prolongado. Frente a ello, los estudiantes consultaron en internet la posología que se recomienda en un tratamiento; encontraron que la depresión, *"generalmente requiere un tratamiento por bastante tiempo en el que se debe tomar una o a veces dos pastillas* [cápsulas] *cada día"* y agregaron *"se debe tener cierta concentración en la sangre para que pueda hacer efecto"*. Basado en ello, uno de los profesores les pidió que construyeran un modelo que permitiera describir la situación. Para los estudiantes, esa situación representó un desafío, pues les implicó comprender el comportamiento de decrecimiento de la concentración de una cápsula del medicamento, pero al mismo tiempo, el aumento que implicaba tomar una nueva cápsula según el tratamiento. Dos tipos de respuestas se presentaron; por un lado, una parte de los estudiantes que, para comprender el fenómeno y simplificar su complejidad, supuso que el consumo de cada cápsula coincide con el de la vida media (*a*). En la figura 4, se muestra la construcción de la tabla y de una representación del modelo en términos de la variable auxiliar *n*.

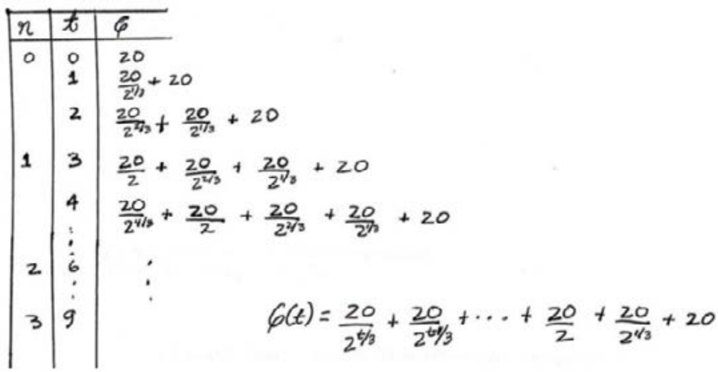
Figura 4. Tabla y expresión algebraica construidas



Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

Por otro lado, la figura 5 ilustra otro tipo de construcciones en las que los estudiantes buscaron dar cuenta del comportamiento de la concentración cuando se tiene en cuenta el consumo de una cápsula diaria. En este caso, los estudiantes recurrieron al modelo construido en la tarea 1, para describir la manera en que decrece la concentración del medicamento contenido en una cápsula.

Figura 5. Tabla y modelo construido



Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

En la clase, los profesores estuvieron atentos a las dificultades de los estudiantes en la identificación de los patrones y buscaron alternativas para apoyarlos. Por ejemplo, llamaron la atención de la importancia de la tabla en la identificación de las relaciones numéricas entre las variables y del patrón en la construcción de la expresión algebraica. También de la información que arroja el modelo escrito en forma recursiva (figuras 4 y 5) y la posibilidad y necesidad de construir otras representaciones del modelo.

Un elemento importante fue la reflexión en torno al razonamiento inductivo realizado para la construcción del modelo. Por ejemplo, algunos estudiantes lograron construir las secuencias 20 + 10 + 5 + 2.5 + … $\frac{20}{2^n}$ con n = 0, 1, 2, … como modelo matemático. Los profesores les sugirieron reescribir en términos de las operaciones realizadas. Llegaron a una expresión como $\frac{20}{2^0}+\frac{20}{2^1}+\frac{20}{2^2}+\frac{20}{2^3}+\ldots+\frac{20}{2^n}$.

Los estudiantes, al respecto, mencionaron que el hecho de poder escribirla de esa manera les había permitido "*ver qué se conserva...*". Por ejemplo, uno de los estudiantes apuntó que "*yo pude ver que, de un término a otro, se multiplica por ½*". Como una manera de promover la reflexión de la propia experiencia, uno de los profesores les comentó "*ver un patrón no es automático, eso que les ha pasado a ustedes también les puede pasar a sus* [futuros] *estudiantes, reescribir las expresiones y centrar la atención en las operaciones y no solo en el resultado puede ser una estrategia que ayuda a los estudiantes para ver las relaciones* [y] *los patrones*".

Los profesores propusieron la discusión de los alcances y limitaciones de los dos modelos construidos por los estudiantes; para ello, uno de los profesores formuló a los estudiantes preguntas como ¿qué modela el modelo?, ¿cuál es la diferencia entre los dos modelos construidos? Al respecto, uno de los estudiantes señaló: *"fue hecho suponiendo que la pastilla se toma cada 'a' días* [refiriéndose al valor 'a' en el modelo de la figura 4], *pero eso no es real, fue para ver más simple la relación"* (Santiago, 22 de junio de 2018). En relación con el uso del modelo, mencionaron que los modelos "*deberían funcionar en el caso de personas que verdaderamente tengan un organismo que conserve esa vida media*" (Karla, 22 de junio de 2018), y en caso de que no, los estudiantes dijeron que "*igual se reemplaza* a *por otro valor*".

Los estudiantes también reconocieron que los alcances del modelo dependen, entre otras cosas, de que el organismo responda al tratamiento, pues esto no sucede en todas las personas: "*Por ejemplo yo encontré* [en Google] *que el tratamiento debe funcionar en cuatro o seis semanas*" (ver figura 8), y agregó que "*si en diez semanas no se siente mejoría, entonces se debe cambiar el tratamiento,* *es que no todos los organismos responden de la misma manera al medicamento*" (Guillermo, 22 de junio de 2018).

En otro momento del ambiente de clase, los profesores promovieron en los estudiantes el reconocimiento de una necesidad de construir otras expresiones algebraicas; para ello, los estudiantes utilizaron las características de las series geométricas y, con la ayuda de uno de los profesores, construyeron una representación no recursiva del modelo. En la figura 6 se presenta la fórmula construida en colectivo, en que *S* representa la suma de los términos de la serie que sería C (t).

Figura 6. Fórmula no recursiva para C (t), para el caso de la vida media (a = 3)

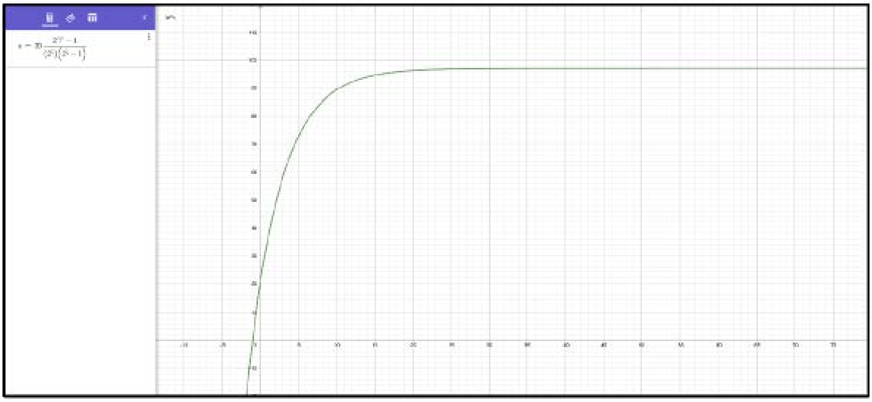
$$S = \frac{20\left(2^{\frac{t+1}{3}}-1\right)}{2^{t/3}\left(2^{1/3}-1\right)}$$

Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

La parte final de la tarea se motivó a través de un cuestionamiento de la manera en que crece la concentración del medicamento. Al respecto, uno de los profesores pidió a los estudiantes describir la manera en que varía esa magnitud. A cerca de esto, los estudiantes anotaron aspectos como: *"la cantidad de medicamento de una cápsula decrece, pero la concentración total crece porque cada día se toma una cápsula de más"* (Karla, 22 de junio de 2018). A partir de este comentario, el profesor replicó: *"muy bien, crece, pero ¿qué tan rápido crece? Por ejemplo, si el tratamiento se prolongara indefinidamente, ¿podría llegar el momento en que en el cuerpo haya doscientos miligramos de concentración? ¿O quinientos miligramos o mil miligramos?"*.

Los estudiantes se dispusieron en grupos para discutir y presentar una respuesta. La principal manera de solución involucró la construcción de gráficas y el análisis de sus concavidades, también aparecieron diferentes formas de operar con la noción de límite, algunos de manera intuitiva, otros utilizaron procedimientos formales y otros usaron el software GeoGebra para graficar la función que modela la concentración en términos del tiempo (ver figura 7). Basados en ello, los estudiantes reconocieron la existencia de una asíntota horizontal. En la figura 7 se presenta el gráfico propuesto por un grupo de estudiantes.

Figura 7. Gráfica de la función $s(x) = 20.\dfrac{2^{\frac{x+1}{3}}-1}{2^{\frac{x}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}$ en GeoGebra



Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

Con el ánimo de usar el modelo para comprender la situación pedimos a los estudiantes describir el fenómeno a la luz de los modelos construidos. Para los estudiantes, la concentración "*crece, pero cada vez más despacio*", además "*tiene una asíntota horizontal, o sea que no se pasa de ese valor que es más o menos noventa y siete miligramos* [eso indica que] *nunca llegaría ni a cien ni a quinientos ni mil miligramos*" (Juan, 22 de junio de 2018). Para validar sus afirmaciones, se propusieron buscar en Internet algunas indicaciones de cuál sería la concentración máxima; no lograron encontrar el dato. Sin embargo, encontraron que un tratamiento puede hacer efecto entre las semanas 4 y 6 del tratamiento (ver figura 8). Los estudiantes interpretaron ello como: "*se debe estar muy próximo al valor máximo, es decir, al valor de la asíntota horizontal*" (Juan, 22 de junio de 2018), "*en la gráfica que ve que* [después] *de veinticinco se ve muy cerca de la asíntota*" (Cristina, 22 junio de 2018).

Figura 8. Captura de pantalla de Google de la fluoxetina

¿Cuánto tiempo tarda en hacer efecto los antidepresivos?

P. **¿Cuánto tiempo tardan en hacer efecto** los medicamentos para la depresión? R. Los **antidepresivos tardan** en empezar a **hacer efecto** de 4 a 6 semanas, aunque algunos pacientes pueden empezar a experimentar cierta mejoría en la segunda o tercera semana de tratamiento.

FAQ Depresión - Neria Morales PsicologíaPsiquiatras Valencia ...
neriamoralespsiquiatra.com › services › faq-depresion

Fuente: captura de pantalla de búsqueda en Google por parte de los estudiantes, 2018.

Para confirmar sus interpretaciones, los estudiantes utilizaron el software GeoGebra para hacer algunos cálculos, por ejemplo, el valor de la concentración entre las semanas 4 y 6, y en valores muy altos según las posibilidades que les presentaba el software (figura 9).

Figura 9. Cálculos realizados con el software GeoGebra

$$s(x) = 20 \cdot \frac{2^{\frac{x+1}{3}} - 1}{2^{\frac{x}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)}$$

$a = s(32)$

$\rightarrow$ 96.8991049073605

$b = s(42)$

$\rightarrow$ 96.9417455991488

$c = s(3000)$

$\rightarrow$ 96.946442037264

Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

En la discusión general los estudiantes señalaron que para que el medicamento surta efecto, se debe estar cerca del valor de la asíntota y sostener ese valor para no generar una pérdida de concentración del medicamento.

Consideraciones finales

En los últimos diez lustros, las investigaciones en modelación en la perspectiva de la educación matemática han producido una amplia cantidad de investigaciones que dan cuenta de una diversidad de comprensiones, posibilidades, limitaciones, usos, metodologías y necesidades para la formación de estudiantes y profesores. Las diferentes maneras de comprender la modelación sugieren que, en los salones de clase, los profesores pueden configurar ambientes para que los estudiantes aprendan a modelar matemáticamente, aprendan matemáticas a través de la modelación, pero más allá de ello, reconozcan los usos y alcances de los modelos matemáticos y de las matemáticas en la solución de cuestiones relevantes en el ámbito académico y social.

De un modo general, en este capítulo se enunciaron tres ejemplos de posibles tareas que los profesores pueden desarrollar en sus clases, por ejemplo, a través de proyectos, los estudiantes pueden elegir los temas acorde con sus intereses; de acuerdo con Villa-Ochoa y Berrío (2015), la participación de los estudiantes en los proyectos ofrece posibilidades para promover no solo los aprendizajes matemáticos, sino también una manera de reconocer otros conocimientos propios del contexto (y de la cultura) que son relevantes en el proyecto. Por otro lado, el trabajo de Parra-Zapata *et al.* (2016) muestra que, en la educación primaria, la modelación puede ser vista como el desarrollo de un interés y sensibilidad por una *matematización de la realidad,* que permite entre otras acciones, la problematización y el cuestionamiento de asuntos inmersos en la situación y que posibilita reconocer el uso, alcance y limitaciones de los modelos en contextos particulares. Finalmente, el estudio de Villa-Ochoa (2016) reconoció la importancia de conceptualizar los modelos como la conjunción de representaciones, objetos representados y usuarios. Reconocer la diversidad de tareas implica también un reconocimiento de sus alcances (Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona, 2017) y la diversidad de posibilidades que se pueden tener en cuenta acorde con los requerimientos y condiciones académicas e institucionales impuestas por el entorno escolar (Romo-Vázquez, Barquero y Bosch, 2019).

En el caso particular de este capítulo, se presentaron con un poco más de detalle algunas posibilidades para configurar un ambiente de modelación que, a partir de una tarea realista, pueda constituir otras posibilidades de hacer matemáticas con futuros profesores. En el ejemplo, se promovió que los estudiantes (futuros profesores) participaran en la construcción de los modelos, reconocieran las condiciones en las que fueron construidos, sus limitaciones, sus alcances; pero sobre todo, reflexionaran acerca de su propia experiencia con el fin de proyectar acciones para su futura práctica como profesores. Estas y otras acciones han sido reconocidas en la literatura como aspectos clave para el aprendizaje de la modelación por parte de los profesores (Romo-Vázquez, Barquero y Bosch, 2019; Rosa y Orey, 2019; Villa-Ochoa, 2016).

En el ambiente descripto, los estudiantes pudieron explicar el comportamiento de un fenómeno a la luz de sus propias interpretaciones e indagaciones, a partir de las cuales generaron sus propios modelos y cuestionaron su pertinencia en relación con la situación que se les planteó. En esta medida, el ambiente permitió la participación de los estudiantes en tanto ellos se involucraron y comprometieron con la problematización de sus ideas en diferentes momentos de la tarea. Por su parte, el ambiente implicó para los profesores estar atentos a cuestiones propias del conocimiento matemático y el cuestionamiento constante de las ideas de los estudiantes hacia la comprensión del modelo. En este sentido, el ambiente proporciona a los estudiantes experiencias para identificar cuestiones que puedan estudiarse con las matemáticas, permite la exploración de tales cuestiones y reconocer cómo las matemáticas aportan y tienen limitaciones frente a la comprensión o explicación del fenómeno de estudio.

A partir de lo anterior podemos concluir que los ambientes de modelación como espacios que promueven un compromiso de los estudiantes con el proceso, la interacción y la reflexión (Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016) no dependen solamente de la tarea propuesta a los estudiantes, sino también de la conjunción de la tarea propuesta, la gestión del profesor y la participación de los estudiantes.

La modelación situada en el ámbito de la formación de profesores implica que confluyan en los ambientes propuestos las ideas matemáticas, el uso de datos reales, los espacios de participación, el uso de diferentes conocimientos matemáticos, el reconocimiento de resultados, el uso de argumentos y procedimientos matemáticos, el diálogo con expertos y la evaluación para promover el aprendizaje. De acuerdo con esto concluimos que, situar la modelación en este ámbito conlleva a proporcionarles a los estudiantes (futuros profesores) experiencias de primera mano de lo que puede ser la modelación y de cómo puede implementarse en clase de matemáticas, esto es, posibilitar un reconocimiento de aspectos que se pueden considerar en el ambiente, sus alcances en el aprendizaje y en los contextos y problemas que se desarrollan, pero también, implica reconocer las posibilidades que ofrece en su futuro desempeño como profesor.

Referencias bibliográficas

Araújo, J. de L. (2012). Ser Crítico em Projetos de Modelagem em uma Perspectiva Crítica de Educação Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(43), 839-859. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000300005.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM - Mathematics Education*, *38*(3), 293-301. https://doi.org/10.1007/BF02652812.

Fowler, A. C. (1998). *Mathematical models in the applied sciences*. Cambridge University Press.

Kaiser, G. (2017). The Teaching and Learning of Mathematical Modeling. In J. CAI (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 267-291). NCTM.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, W. Hen & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 3–32). Springer US.

Parra-Zapata, M. M. (2015). Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática: reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática. [Tesis de Maestría]. Universidad de Antioquia.

Parra-Zapata, M. M. & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Interacciones y contribuciones. Formas de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas En Educación*, *16*(3), 1-27.

Parra-Zapata, M. M., Parra-Zapata, J. N., Ocampo-Arenas, M. C. y Villa-Ochoa, J. A. (2016). El índice de masa corporal. Una experiencia de modelación y uso de modelos matemáticos para el aula de clase. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *92*, 21-33.

Perrenet, J. & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Applications, 1*(6), 3-21.

Rendón-Mesa, P. A. (2016). *Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: aportes de la modelación matemática*. Universidad de Antioquia.

Rendón-Mesa, P. A., Duarte, P. V. E. y Villa-Ochoa, J. A. (2016). Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: componentes de un proceso de modelación matemática. *Revista de La Facultad de Ingeniería U. C. V.*, *31*(2), 21-36.

Romo-Vázquez, A., Barquero, B., y Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-pluriversidad*, *19*(2), 161-183, doi: 10.17533/udea.unipluri.19.2.09.

Rosa, M. & Orey, D. C. (2019). Mathematical modelling as a virtual learning environment for teacher education programs. *Uni-pluriversidad*, *19*(2), 80-102. Doi: 10.17533/udea.unipluri.19.2.04.

Stillman, G. A. (2019). State of the Art on Modelling in Mathematics Education. Lines of Inquiry. In G. Stillman & J. Brown (Eds). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 1-20). https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-14931-4_1.

Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, *8*(16), pp. 133-148. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe.

Villa-Ochoa, J. A. (2016). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como ejemplo. In J. Arrieta & L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 109-138). Gedisa.

Villa-Ochoa, J. A. & Berrío, M. J. (2015). Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. In G. A. Stallman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning* (pp. 241-250). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_19.

Villa-Ochoa, J. A., Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, *18*(36), 219-251.

4. Etnomatemática, un posible anuncio en educación matemática

*Diana Jaramillo, Carolina Tamayo y Óscar Charry**

Una presentación

Pretendemos en este capítulo introducir algunos elementos epistemológicos que nos llevan a encontrar en la etnomatemática una posibilidad para establecer una dialogía[1] entre las prácticas sociales y las prácticas escolares. De igual manera, pretendemos mostrar una posibilidad para recuperar al sujeto y su subjetividad en el acto educativo a la hora de la producción y objetivación[2] de conocimien-

* *D. Jaramillo*: Universidad de Antioquia, Colombia.
C. Tamayo: Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, y Universidad de Antioquia, Colombia.
O. Charry: Universidad de Antioquia, Colombia.

[1] Dialogía comprendida en el sentido propuesto por Bakhtin (2000). Para este autor, en la dialogía hay dos voces, dos conciencias, pero ninguna de las voces ni de las conciencias se superpone ante la otra. En la dialogía no hay superposición de poderes.

[2] Asumimos aquí el término "objetivación" en diálogo con Radford (2000, 2006, 2008). La objetivación de conocimientos matemáticos, en esta perspectiva histórico-cultural, es considerada un proceso, en que dicho conocimiento no es producido por el sujeto que aprende como una mera apropiación desde lo externo al sujeto. En esta perspectiva, el conocimiento –que emerge, entre otras cosas, de la interacción social, de la dialéctica entre ser humano y naturaleza, y entre individuo y colectivo– y las formas como el sujeto accede a él, se constituyen como unidad y, al mismo tiempo, reconstituyen al propio sujeto, a su subjetividad.

tos[3] matemáticos, idea fundamental en una perspectiva histórico-cultural de la educación matemática. Comprendemos que esos sujetos, esas subjetividades y esas prácticas sociales son diversos.

Para ello, en primer lugar, mostraremos algunas tensiones que maestros e investigadores venimos percibiendo dentro de la escuela y del currículo, resultado de la inmersión del modelo neoliberal, también, en la educación. Eso a modo de denuncia. En segundo lugar, delinearemos algunos futuros posibles, dejando ver la importancia de establecer una dialogía entre las prácticas sociales y las prácticas escolares a la hora de la producción y objetivación de conocimientos matemáticos. Producción y objetivación en las que se hace fundamental la recuperación de la subjetividad del ser humano. Eso a modo de anuncio. Denuncia/anuncio, utilizaremos esta díada de palabras expresada por Freire (2000). Se denuncia una realidad, pero, para anunciar otra posibilidad, otro sueño, otra utopía. A continuación, haremos algunas aproximaciones al término etnomatemática, como una posibilidad en una perspectiva histórico-cultural de la educación matemática. Posteriormente, presentaremos algunas investigaciones realizadas en esta perspectiva, solo a modo de ejemplo, por el grupo de investigación "Matemática, Educación y Sociedad-MES", adscripto a la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). Por último, dejaremos algunas reflexiones, tal vez desafíos.

Unas tensiones… posibles denuncias…

En el interior de la sociedad, de la escuela y del currículo, maestros e investigadores hemos identificado algunas tensiones, resultado de la intervención del modelo neoliberal en la educación (Mejía, 2001). Comprender ese modelo se hace necesario para entender cómo se transforman los currículos y otros aspectos inherentes a él (ciencias, conocimientos, prácticas pedagógicas y conocimientos matemáticos).

Una de esas tensiones es la producida por el deseo de mantener, por una parte, la homogenización en las instituciones escolares, y respetar, por otra, la diversidad social y cultural de los estudiantes. En el intento de superar esta tensión, diferentes discusiones y movimientos académicos se vienen generando

[3] Al realizar una aproximación al trabajo de Santos (2018), en este documento se usarán las palabras "saberes" y "conocimientos" como si fueran sinónimos. Aunque este autor reconoce que existen "diferencias sutiles entre ellas que se manifiestan en el uso de la lengua" (p. 24).

entre maestros e investigadores en el ámbito internacional. Por ejemplo, el debate sobre la relación entre saberes escolares, reconocidos y legitimados por las comunidades académicas, y los saberes cotidianos, reconocidos y legitimados desde y por las prácticas sociales de las diferentes comunidades no académicas. Es decir, se hace explícita la dicotomía entre los saberes considerados académicos y aquellos considerados como no académicos (Jaramillo, 2011). En este sentido, se han identificado dos tendencias en una posible organización curricular. En primer lugar, los saberes escolares se superponen sobre los saberes cotidianos. Esta superposición puede ser consecuencia de relaciones de poder vinculadas a la colonialidad, siendo uno de los elementos constitutivos y específicos del patrón mundial de poder capitalista. Quijano (2007) esclarece cómo esta dicotomía, sustentada por el proyecto de la modernidad, está estrictamente vinculada a una estructura de dominación y explotación; en que una comunidad determinada asume el control o dominación de la autoridad política, de los recursos de producción, de la producción de conocimiento y del trabajo, para dominar o explotar a otra comunidad que se asume como diferente. Los procesos de colonización implicaron la destrucción de la estructura social existente en los pueblos no europeos; de igual forma, la población colonizada fue despojada de su conocimiento intelectual y de sus medios culturales de expresión. Los colonizados fueron reducidos a la condición de individuos rurales y analfabetos. En esa dirección, Tamayo-Osorio (2017) muestra cómo estructuras de poder permean la escuela y la dejan ver como una institución al servicio del Estado. Así, pareciera que las estructuras curriculares legitiman apenas los saberes escolares –que, a su vez, fueron impuestos a los pueblos colonizados con base en el proyecto de la modernidad–, impidiendo la inclusión de los saberes cotidianos al currículo.

En segundo lugar, las estructuras curriculares, a través de las evaluaciones externas, ejercen acciones de poder y de control sobre las instituciones escolares, los maestros y los estudiantes.

Estas tensiones, como lo sugieren Santos (1996), Monteiro (2005) y Jaramillo (2011), evidencian algunas cuestiones relacionadas con procesos de exclusión; cuestiones que constantemente permean el cotidiano escolar. En este sentido, y de acuerdo con Monteiro (2005), cuando los saberes escolares desconocen o deslegitiman otras formas de conocimiento y de saberes cotidianos, se genera, de algún modo, una exclusión social, pues esto conlleva a la deslegitimación de las prácticas sociales que dan sustento a dichos saberes.

Lo anterior no es más que secuelas de la racionalidad técnica, propia de la modernidad, que aún prevalece en muchas de las propuestas educativas. En consecuencia, en la escuela solo se acepta como único tipo de conocimiento verdadero el conocimiento científico (validado por las comunidades académicas), traducido en el conocimiento académico y saber escolar; y su aplicación está más relacionada con la aplicación técnica propia del desarrollo tecnológico que con las necesidades oriundas de las prácticas sociales. Esta forma de saber, en palabras de Quijano (2007), debido a su carácter y su origen, eurocéntrico, fue "llamado de racional, fue impuesto y admitido en todo el mundo capitalista como la única racionalidad válida y como emblema de la modernidad" (p. 74). A partir de este universo intersubjetivo, que fue impuesto con la modernidad, se elaboró y formalizó una manera de producir conocimiento que explicaba las necesidades cognitivas del capitalismo, especialmente para la medición. Como efecto de ello, en la escuela predomina la enseñanza de los saberes de las ciencias exactas, pero descontextualizados histórica y socialmente, bajo un abordaje teórico y técnico en el que dichos saberes son transformados en códigos y son desposeídos de significados. Consideramos que la escuela, al ser organizada con base en políticas públicas que promueven la desigualdad social, pasa a desconsiderar los saberes presentes en las prácticas sociales, y continúa compartimentalizando el conocimiento escolar y privilegiando ciertos contenidos en detrimento de otros, como lo explica Morin (1999); o, dicho de otra manera, disciplinarizando el conocimiento escolar, como lo sugieren Miguel, Vilela e De Moura (2010).

Así, tenemos entonces un sistema educativo que no solo reproduce saberes disciplinarizados, sino que también legitima procesos de producción de sujetos dóciles y disciplinarizados; sujetos cada vez más individualizados, encerrados en sí mismos (Veiga-Neto, 2002). Un sistema educativo que no lleva a los estudiantes hacia la generación de un pensamiento reflexivo, crítico y divergente, sino que les enseña a no cuestionar y a aceptar pasivamente la autoridad y las relaciones de poder dentro y fuera de la institución escolar. Consecuentemente, ese modelo de educación refuerza las aspiraciones sociopolíticas propias de la modernidad y de la racionalidad técnica (Freire, 2000).

Sin embargo, otros caminos se advierten en la ciencia contemporánea, como es sugerido por Prigogine (1996), Morin (1999), Miguel, Vilela e De Moura (2010, 2012), entre otros autores. En esos caminos se propone un ajuste entre las prácticas sociales y las realizaciones científicas; es decir, una alianza entre cultura y ciencia, que debe ocurrir, no solamente con relación a las preocupaciones sociales y culturales de cada comunidad en su tiempo, sino también con relación a la concepción e interpretación de las teorías científicas (Monteiro, 2005; Jaramillo, 2011).

Así, en esa transformación, la ciencia deja de buscar, apenas, fórmulas abstractas para explicar el universo, y comienza a ser comprendida en su dimensión social, como algo que emerge de una relación en la cual el saber pasa, también, a ser contextualizado política y culturalmente. Comprender la ciencia de esta manera requiere de una transformación del proyecto educativo que dé prioridad a la capacidad de crítica, de asombro y de indignación de los sujetos del acto educativo frente a los problemas del mundo. Este proyecto, como lo sugiere Santos (1996), supera el proyecto actual, impuesto por la modernidad, pues en él es imposible aceptar una verdad única y definitiva. En primer lugar, el sujeto que aprende es más que "cerebro"; es un sujeto que además está constituido de "cuerpo" y de "alma", y participa activamente del proceso educativo. En segundo lugar, el fenómeno a ser conocido no tiene una única forma, sino diferentes interpretaciones, propias de diversas prácticas sociales y contextos culturales. En consecuencia, la ciencia no está legitimada solo por criterios internos (casi siempre de orden lógico-matemático), sino también por su aceptabilidad social y cultural (Caraça, 1958; Moura, 2011).

Unos futuros posibles… posibles anuncios…

Pensando en otros futuros posibles, apostamos hoy a una perspectiva histórico-cultural de la educación matemática, con autores como D'Ambrosio (1998, 2001), Jaramillo (2009, 2011), Knijnik (1996, 1998, 2004, 2007), Lizcano (2004, 2006), Monteiro (2005), Moura (1998, 2011), Radford (2000, 2006, 2008), Skovsmose y Valero (2007), Valero (2006), entre otros.

En una perspectiva histórico-cultural de la educación, el conocimiento deja de ser visto como un producto externo que debe ser asumido por los individuos, trasgrediendo el paradigma de la modernidad, pasando a ser comprendido como una interpretación que los sujetos hacen del mundo, en una dialéctica continua con su entorno social, cultural, histórico y político. Es decir, el conocimiento es producido desde el sujeto en sus interrelaciones con el mundo (Jaramillo, 2003, 2011).

Bajo esta perspectiva histórico-cultural, la educación matemática asume la producción y objetivación de conocimientos matemáticos como actividades sociales, cuya producción y legitimación es resultado de la explicación de diferentes prácticas sociales en las que están involucrados los sujetos, a partir de los sentidos y los significados compartidos, respetando así los distintos saberes cotidianos constituidos por las diversas comunidades socioculturales en el interior de estas (Jaramillo, 2011). A propósito de las prácticas sociales, las comprendemos aquí como lo sugieren Miguel y Miorim (2004):

> Práctica social es toda acción o conjunto intencional y organizado de acciones físico-afectivas-intelectuales realizadas, en un tiempo y espacio determinados, por un conjunto de individuos, sobre el mundo material y/o humano y/o institucional y/o cultural, acciones estas que, por ser, siempre, y en cierta medida, y por un cierto período de tiempo, valorizadas por determinados segmentos sociales, adquieren una cierta estabilidad y se realizan con cierta regularidad (p. 165).

Los conocimientos matemáticos, en esta perspectiva histórico-cultural, y como lo apuntan algunos autores (Moura, 1998, 2011; Radford, 2000, 2006, 2008), son vistos como producto de la actividad humana; conocimientos que se forman, validan y legitiman durante el desarrollo de soluciones a problemas creados en las interacciones que producen el modo humano de vivir socialmente, en un determinado tiempo y contexto. Bajo este abordaje, son otras las relaciones que empezamos a considerar entre la cultura, el currículo y la educación matemática, cuando de enseñar y aprender conocimientos matemáticos se trata. La discusión de estas relaciones puede posibilitarse desde algunos interrogantes, a saber (Jaramillo, 2011):

- ¿Cuáles son las relaciones entre conocimiento, comportamiento y cultura en la producción y objetivación de conocimientos matemáticos?
- ¿Cómo se comprenden los contextos sociopolíticos en educación matemática?[4]
- ¿Cómo algunos factores histórico-culturales, que posibilitan los conocimientos matemáticos, influencian los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de dicho conocimiento al interior del aula de clase?

[4] Asumimos aquí el contexto sociopolítico desde la mirada de Valero (2006), el cual pretende ligar el microcontexto de la educación matemática con el macrocontexto. Es decir, el contexto sociopolítico como resultado de la imbricación de lo que sucede en el aula, con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos matemáticos, con las estructuras económicas, sociales y políticas y con los procesos históricos que dan origen a los diferentes fenómenos.

- ¿Qué ocurriría si, en lugar de mirar las prácticas sociales desde la matemática, miramos la matemática desde las prácticas sociales?[5]
- ¿Cómo y cuáles currículos producir que consideren los conocimientos matemáticos al servicio de las prácticas sociales?
- ¿Cómo se genera una dialogía entre las prácticas sociales y las prácticas escolares para la producción y objetivación de conocimientos matemáticos, posibilitando otros procesos de aprendizaje y otros procesos de enseñanza dentro del salón de clase?
- ¿Cómo entender el papel que juega el lenguaje, como elemento constitutivo del sujeto, en la producción y la objetivación de conocimientos matemáticos?
- ¿Cómo entender la actividad de la enseñanza y la actividad del aprendizaje en la producción y la objetivación de conocimientos matemáticos?
- ¿Cómo aproximarnos a otras epistemologías, no hegemónicas, que posibiliten otras perspectivas teóricas y metodológicas para la educación matemática atendiendo a los factores histórico-culturales de las diversas comunidades?

Estas preguntas no son nuevas en educación, pero, tal vez, lo sean para los educadores matemáticos. Ellas procuran rescatar la subjetividad a la hora de la práctica pedagógica en matemática. En esta perspectiva histórico-cultural de la educación matemática se pretende la recuperación del sujeto y de la subjetividad en el acto educativo. Como respuesta a esa denuncia frente al olvido de la subjetividad, ya autores como Bakhtin (1997a, 1997b, 2000), Benjamin (1987), Deleuze (1987), Fontana (2000), Freire (2000), Geraldi (2000), Heller (2000), Jaramillo (2003), Larrosa (1998) y Morin (1982, 1999) nos habían anunciado que el sujeto, lejos de ser un sujeto racional, es un sujeto histórico; el sujeto no está determinado ni acabado; el sujeto constituye su singularidad en las y por las interrelaciones sociales; el sujeto no es, está siendo por medio de la interacción con el otro; el sujeto se constituye en la y por la intersubjetividad; el sujeto constituye su conciencia e identidad no en la coherencia, no en la armonía, sino en la contradicción.

Así, toman fuerza en la perspectiva histórico-cultural la idea de intersubjetividad y de actividad. La intersubjetividad implica el reconocimiento de la

[5] Como ya lo sugería Lizcano (2004, 2006).

subjetividad como resultado de la dialéctica entre el individuo y el colectivo; dialéctica posibilitada en y desde las prácticas sociales. Nos referimos aquí a dos sujetos protagónicos de la práctica pedagógica, el sujeto maestro y el sujeto estudiante. Por su parte, la actividad es comprendida como un proceso colectivo en el cual la interacción es la base fundamental para la construcción de sentidos y significados, es decir, de la construcción de una conciencia individual en el marco de los procesos sociales subyacentes (Leontiev, 1984; Davídov, 1988; Radford, 2000, 2006, 2008; Talizina, 2009; Moura, 1998). En este sentido, Radford llama la atención sobre la necesidad de pensar la matemática sobre unas bases que asuman el saber como el resultado de la actividad humana, histórica, social y culturalmente situada, en que el pensamiento sea considerado mediado a través de instrumentos, en relación con la actividad de las personas, esto es, reflexión mediatizada sobre el mundo.

Una posibilidad en una perspectiva histórico-cultural de la educación matemática: la etnomatemática

La etnomatemática es una propuesta de carácter filosófico que se viene discutiendo desde la década del ochenta por D'Ambrosio (1998, 2001), Knijnik (1996, 2004), Monteiro, Orey e Domite (2004) y Monteiro (2005), entre otros. En esta propuesta se pone en debate la producción, la validación y la legitimación de conocimientos matemáticos en diferentes prácticas sociales. Metodológicamente, esta propuesta podría basarse en alternativas como desarrollo de proyectos, planeación de actividades orientadoras de enseñanza (desde una perspectiva de la teoría de la actividad, entendida según Leontiev, 1984; Davídov, 1988 y Moura *et al.*, 2010) y modelación matemática, entre otras, pero, en todo caso, alternativas que pongan en dialogía prácticas sociales y prácticas escolares.

No obstante, el debate sobre una propuesta curricular en matemática con un abordaje desde la etnomatemática es aún incipiente en Colombia y en otros países latinoamericanos. Monteiro (2005) bien indica que en este debate no todos los aportes han sido válidos. La autora muestra, por ejemplo, cómo en Brasil, a partir del documento que orienta allí la educación, denominado "Parámetros Curriculares Nacionales (PCN)", se ha querido interpretar la etnomatemática como una metodología: "La etnomatemática es una metodología que procura partir de la realidad y llegar a la acción pedagógica de manera natural, mediante un enfoque cognitivo con una fuerte fundamentación cultural" (Monteiro, 2005, p. 23). Las discusiones e investigaciones en etnomatemática muestran que esta apreciación no es correcta, pues la etnomatemática no es una metodología de enseñanza. Otra afirmación errada, también discutida por Monteiro, Orey y Domite (2004) y Monteiro (2005), es creer que la etnomatemática se limita a discutir los saberes cotidianos, oriundos de las prácticas sociales, ya conocidos por los estudiantes, menospreciando o negando el acceso a los conocimientos escolares de los distintos contextos escolares.

Creemos, con Peña-Rincón, Tamayo-Osorio y Parra (2015), que mantener estas discusiones teóricas y metodológicas posibilita continuar alimentando la etnomatemática en la multiplicidad y diferencia de enfoques. Sin embargo, nos alejamos, al igual que estos autores, de aquellos que la ven como un puente para enseñar los contenidos curriculares de la matemática escolar. También pensamos, con estos autores, que desde la etnomatemática sería posible una perspectiva indisciplinar de la educación, la escuela, el currículo y la evaluación con el fin de promover procesos educativos respetuosos de la diversidad social y cultural. En suma, concordamos con Peña-Rincón, Tamayo-Osorio y Parra (2015) cuando afirman que la etnomatemática no debería ser "petrificada como una metodología de enseñanza, una teoría didáctica o incluso una política educativa" (p. 148).

Como dijimos antes, la postura educativa que comienza a emerger de la ciencia contemporánea se centra fundamentalmente en dos puntos: en la concepción de sujetos (el ser) y en la concepción del conocimiento (el saber). Comprender estos dos aspectos en su complejidad implica una imbricación entre ellos, si se quiere una dialéctica (Jaramillo, 2011; Radford, 2011). Eso nos posibilitaría reconocer un mismo fenómeno mediante diferentes lecturas, oriundas de diversas prácticas sociales y contextos culturales. Pensamos con otros autores ya citados, que la etnomatemática entra en concordancia con esta postura, en la medida en que en ella se defiende, que el proceso educativo debe posibilitar espacios para múltiples interpretaciones de los fenómenos. En ese sentido, Monteiro (2005) afirma:

> Esas diferentes interpretaciones de los fenómenos en el contexto escolar presuponen, también, el reconocimiento de los saberes producidos en diferentes prácticas sociales. Tal reconocimiento es antes de todo un acto político, pues, al excluirse y desvalorizarse los saberes producidos en diferentes prácticas sociales del contexto escolar, se excluye y desvaloriza, muchas veces la propia práctica social. Así, percibir cómo las comunida-

> des se apropian de los saberes que constituyen su propia práctica no es una mera estrategia metodológica de procesos educativos que intentan relacionar el saber cotidiano con el escolar, es en sí un proyecto educativo emancipatorio (p. 6).

Se hace importante enfatizar, además, que la etnomatemática no debe ser vinculada a buscar comprensiones de las diversas prácticas sociales, que poseen familiaridad con lo que habitualmente se llama "de matemática", exclusivamente, por el camino de la matemática académica. La discusión sobre tales prácticas y saberes debe incluir el significado y las formas de comprensión de las comunidades, considerando cómo ellas presentan, validan y legitiman sus prácticas y saberes (Jaramillo, 2009, 2011; Monteiro, 2005).

Optar por la etnomatemática como una alternativa para atender los contextos de algunas comunidades se debe, fundamentalmente, a las múltiples dimensiones que la conforman expuestas por D'Ambrosio (2001): la dimensión conceptual, la dimensión histórica, la dimensión cognitiva, la dimensión epistemológica, la dimensión política y la dimensión educativa. Tales dimensiones posibilitan reconocer los conocimientos matemáticos como una producción cultural y social de las diferentes comunidades. En ellas se reconoce, por ejemplo, que la matemática, bajo una perspectiva de la investigación, tiene un fin en sí misma; pero cuando está dirigida hacia la educación, se deben establecer interacciones entre las diferentes prácticas y procedimientos que involucran conceptos matemáticos. En el aspecto político, el objetivo es el de denunciar y transformar las relaciones de poder que permean los procesos de validación y legitimación del saber. Y, en lo relacionado con el proceso pedagógico, el desafío está centrado en las posibilidades y las estrategias de enseñanza y las estrategias de aprendizaje que consideren el ambiente multicultural del aula de clase (Monteiro, 2005).

De esta manera, estas dimensiones hacen que el maestro se constituya en protagonista y desencadenador de variadas posibilidades de procesos de enseñanza y de procesos de aprendizaje, a través de acciones que consideren los contextos socioculturales específicos de la comunidad con la que trabaja. Es decir, cuando el maestro asume esta postura se requiere, al decir de López Bello (2004), que reconozca e incorpore, al currículo de la escuela, prácticas sociales y conocimientos producidos fuera del contexto escolar. En este sentido, a partir de esas dimensiones se busca comprender y discutir las relaciones intra e interculturales presentes en las diferentes realidades y contextos y que, de alguna forma, han de manifestarse en el ámbito escolar. De esta manera, entendemos la etnomatemática como es concebida por D'Ambrosio (2001):

> La etnomatemática es la matemática practicada por grupos culturales, tales como comunidades urbanas o rurales, grupos de trabajadores, clases profesionales, niños de cierta edad, sociedades indígenas y otros tantos grupos que se identifican por objetivos y tradiciones comunes a los grupos (p. 9).

Dicho de otra forma, a partir de la etnomatemática puede comprenderse cómo las diferentes comunidades sociales y culturales producen conocimientos matemáticos. Asimismo, desde la etnomatemática pueden conocerse las diversas maneras del saber/hacer matemático de una cultura. Por cultura entendemos aquí aquella convivencia entre los miembros de una comunidad, que resulta de la comunión de sus conocimientos (lenguaje, sistemas de explicaciones, mitos y cultos, costumbres, etcétera) y la compatibilización y la subordinación de los comportamientos a determinados sistemas de valores acordados por la comunidad (D'Ambrosio, 2001). Dichos conocimientos dan cuenta del saber y tales comportamientos dan cuenta del hacer. Como bien lo expone ese autor:

> Las distintas maneras de hacer (prácticas) y de saber (teorías), que caracterizan una cultura, son parte del conocimiento compartido y del comportamiento compatibilizado. Así como comportamiento y conocimiento, las maneras de saber y de hacer están en permanente interacción. Son falsas las dicotomías entre saber y hacer, de igual manera entre teoría y práctica (p. 19).

En un ambiente cultural específico, los individuos de dicha cultura dan "iguales" explicaciones y utilizan "iguales" instrumentos materiales e intelectuales en su cotidiano. Así, los individuos de la comunidad se reconstituyen en su subjetividad en dialéctica con el colectivo.

Unas investigaciones colombianas en esta perspectiva

En la búsqueda de posibles respuestas a los interrogantes antes mencionados, y a otros por plantearse, existen diferentes grupos académicos que investigan acerca de etnomatemática. Por mencionar algunos de ellos: International Study Group on Ethnomathematics (ISGEm); Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática de Portugal (GEPEm); North American Study Group on Ethnomathematics (NASGEm); Asociación Educativa Cultural Etnomatemática; Etnomatemática, Formación de profesores y Didáctica; Red Internacional de Etnomatemática (RedINET).[6] En La Universidad de Antioquia existe el Grupo de Investigación Matemática, Educación y Sociedad (Grupo MES), con una línea de investigación con esta perspectiva.[7]

En los últimos diez años, en Colombia se han realizado algunos estudios a partir de esta perspectiva teórica.[8] Sin embargo, aquí apenas mostraremos, a modo de ejemplo, algunas investigaciones realizadas por el Grupo MES, especialmente con comunidades indígenas colombianas.

Junto a Berrío (2009)[9] realizamos un trabajo en dos instituciones educativas indígenas. Una, el Centro Educativo Rural Indigenista La María, ubicada en el municipio de Valparaíso (Antioquia, Colombia), de la comunidad indígena Embera Chamí; y, la otra, el Centro Educativo Rural Alto Caimán, ubicada en el municipio de Necoclí (Antioquia, Colombia) de la comunidad indígena Tule o Dule. En estas instituciones, el trabajo fue realizado colaborativamente con tres maestros indígenas y tuvo por objetivo analizar la relación que se podía tejer entre las prácticas sociales de la siembra de las comunidades indígenas Dule y

---

6 La RedINET cuenta con 3510 miembros activos, entre estudiantes, maestros e investigadores de más de dieciocho países del mundo. Nos permitimos invitar al lector a revisar la página de la Red Internacional de Etnomatemática (www.etnomatematica.org). Esta red fue creada en Colombia en 2003, con el nombre de Red de Estudios Colombianos de Etnomatemática, y de la cual somos parte. En ese sitio web, el lector podrá encontrar producción académica internacional como artículos, disertaciones de maestría y tesis de doctorado en etnomatemática.

7 En comunión con la RedINET, la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y el grupo MES, bajo nuestra cocoordinación, organizamos el 6° Congreso Internacional de Etnomatemática (ICEm-6) en Medellín (Colombia) en julio de 2018. Este evento ha venido ocurriendo cada cuatro años así: el ICEm-1 fue en Granada (España, 1998); el ICEm-2 fue en Ouro Preto (Brasil, 2002); el ICEm-3 fue en Auckland (Nueva Zelanda, 2006); el ICEm-4 fue en Towson (Estados Unidos, 2010); el ICEm-5 fue en Maputo (Mozambique, 2014). El objetivo del ICEm-6 fue posibilitar un diálogo de saberes acerca de la etnomatemática entre comunidades locales, nacionales e internacionales, con el fin de identificar las limitaciones, desarrollos y desafíos que a partir de las experiencias e investigaciones en este campo propician saberes desde, por y para la diversidad y la paz. En el ICEm-6 se presentaron más de cien ponencias de autores internacionales.

8 Varios de ellos están disponibles en www.etnomatematica.org.

9 Un estudio producto de la investigación “El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase”. Investigación financiada por la Universidad de Antioquia y por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia (Colciencias), según el contrato 212-2008.

Embera Chamí, y la producción y objetivación de conocimientos matemáticos referidos a la medida en un contexto escolar indígena. De esta forma, planteamos algunas actividades que se pudieran articular a la propuesta curricular que cada comunidad indígena trabajaba en su contexto escolar. Para dar cumplimiento al objetivo mencionado, se propuso la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo, desde la práctica de la siembra de las comunidades indígenas Dule y Embera Chamí, se posibilita la producción y objetivación de conocimientos matemáticos referido a la medida en un contexto escolar indígena?

Es importante resaltar que fueron los mismos maestros indígenas quienes escogieron las prácticas sociales a ser trabajadas en cada comunidad, siendo cada una de ellas, prácticas representativas de su cultura. En la comunidad Dule, el maestro Richard Nixon Cuéllar y su compañero Francisco Martínez escogieron trabajar sobre la siembra de plátano (ver imagen 1); y para la comunidad Embera Chamí, el maestro Abelardo Tascón escogió ocuparse sobre la siembra de plantas medicinales desde una huerta escolar.

Imagen 1. Maestro Dule explicando el proceso de siembra del plátano a los estudiantes

Fuente: extraída de Berrío (2009, p. 77).

Aprendimos, con esta investigación, que la etnomatemática posibilita la construcción de proyectos y actividades que legitiman los conocimientos propios de una cultura frente al conocimiento matemático, contribuyendo en la construcción de propuestas curriculares propias para las escuelas indígenas Dule y Embera-Chamí. De igual modo, maestros e investigadores comprendimos que la "medida", como objeto cultural, está dada por la relación hombre-naturaleza, que en el caso de las comunidades atendió a sus necesidades de siembra, en el contexto histórico-cultural propio. Por ejemplo, la comunidad Dule nos mostró una unidad y un instrumento de medida establecida para las mediciones de sus terrenos: la "vara Dule". En la selección de ese patrón de medida se hacen explícitas las jerarquías de la organización interna de la comunidad (Jaramillo, 2011).

En Tamayo (2012),[10] realizamos una investigación con la comunidad indígena Dule en el Centro Educativo Rural Alto Caimán de Necoclí (ver figura 2). La pregunta de investigación que nos convocó fue: ¿cómo el maestro indígena resignifica el currículo escolar indígena, relativo al conocimiento [matemático], desde y para las prácticas sociales de la comunidad de Alto Caimán? Así, fue nuestro objetivo de investigación resignificar el currículo escolar indígena, relativo al conocimiento [matemático], desde y para las prácticas sociales de la comunidad Dule en Alto Caimán. El estudio tuvo sus fundamentos epistemológicos en la etnomatemática y en la interculturalidad. En el marco de una investigación colaborativa, la producción de registros y datos se hizo con la comunidad y el apoyo de dos maestros indígenas; se realizaron grabaciones, narrativas, fotografías y reflexiones conjuntas. El análisis de los registros y datos producidos lo realizamos teniendo en cuenta cuatro categorías emergentes: una, "Tejiendo colaborativamente"; dos, "El currículo escolar indígena, relativo al conocimiento [matemático]: tensiones, sentidos e identidad"; tres, "El maestro indígena Dule en situación de frontera"; y, finalmente, "Alternativas concretas para el trabajo del maestro Dule en el aula". A partir de esta investigación, vimos que hablar del currículo escolar indígena relativo al conocimiento matemático implicó reconceptualizaciones, tanto para los maestros como para los investigadores. Así, se pusieron de manifiesto no solo las concepciones teóricas, políticas y culturales que sustenta la sociedad que se quiere construir, sino que también se manifestó la dialéctica entre prácticas sociales y conocimientos matemáticos.

Consideramos que el proceso vivido en esta investigación posibilitó a los maestros indígenas mirar el currículo escolar indígena Dule como un espacio en el que se pueden exponer y ratificar las creencias y los conocimientos de su cultura; como un espacio dinámico y constitutivo de la identidad de la comunidad Dule. Ese espacio de identidad hizo más evidente cada uno de los ejes fundamentales de la cosmogonía, de la cosmovisión y de la espiritualidad

---

[10] Un estudio producto de la investigación "Prácticas sociales, currículo y conocimiento matemático". Investigación financiada por el Comité para el Desarrollo de la investigación (CODI) de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia) en la convocatoria Programa Expedición Antioquia 2013.

Dule; ejes basados en el respeto a la Madre Tierra. Es desde la Madre Tierra que es posible entender, por ejemplo, y con mayor claridad, los conocimientos matemáticos que circulan en las prácticas sociales de la cestería y del cultivo del plátano (Jaramillo y Tamayo, 2012). Aprendimos de esta investigación un cuestionamiento importante:

> … cuestionamiento a lo que hoy llamamos –desde occidente– el conocimiento [matemático]. Para la comunidad Dule, el conocimiento [matemático] no existe, en la lectura que occidente lo comprende. Para la cultura Dule existe el conocimiento. La cultura Dule no disciplinariza, como occidente, el conocimiento. Es por lo que, en este trabajo, hemos optado por hablar del conocimiento [matemático] (Tamayo, 2012, p. 155; los corchetes son del original).

Imagen 2. Maestro Dule

Fotografía: Carolina Tamayo.

En Higuita (2014), la pregunta de investigación fue: ¿cómo se movilizan objetos culturales desde las memorias de la práctica de la construcción de la vivienda tradicional Embera Chamí para pensar el porvenir de la educación matemática indígena? Los objetivos del estudio fueron: en primer lugar, analizar la movilización de objetos culturales desde las memorias de la práctica de la construcción de la vivienda tradicional Embera Chamí; y, en segundo lugar, problematizar esa movilización de objetos culturales para pensar el porvenir de la educación matemática indígena. Los fundamentos teóricos de este estudio fueron los planteamientos de la comunidad indígena Embera Chamí y de autores como D'Ambrosio (1999, 2011), Miguel (2008, 2010), Thompson (2011), Walsh (2005, 2007a, 2007b), entre otros. El camino metodológico para aproximarnos a la práctica de la construcción de la vivienda tradicional Embera Chamí y a los objetos culturales en ella movilizados fue desde la historia oral.

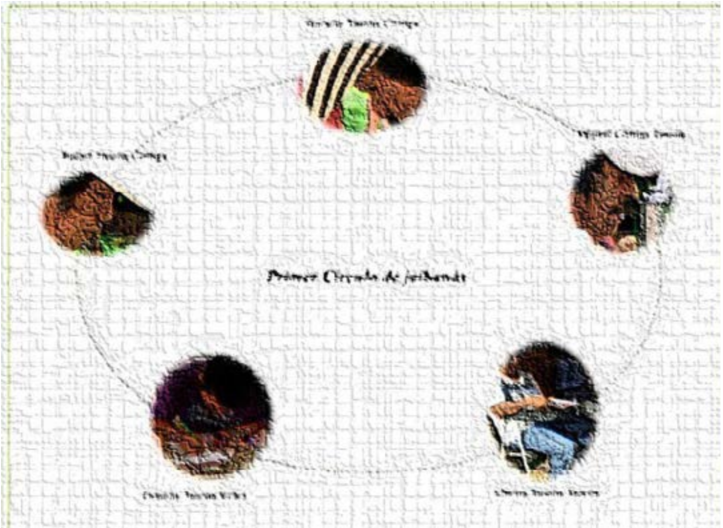
Las herramientas que no posibilitaron la evocación de memorias fueron el diario de la investigadora, las fichas temáticas, los encuentros con el Cabildo,[11] los encuentros con el Círculo de *Jaibaná*[12] (ver imagen 3), los encuentros con los jóvenes, las discusiones con los maestros y las entrevistas.[13] En el análisis deconstructivo de estos registros hicimos visible, en primer lugar, un posicionamiento cultural, político y simbólico de la comunidad indígena Embera Chamí desde la movilización de objetos culturales tales como medida, número y forma, posibilitando, así, reflexiones para pensar el porvenir de la educación matemática indígena. Y, en segundo lugar, la comprensión de que, a medida que dicha movilización de objetos culturales se realizó, se dio un proceso de identificación de la comunidad, no solo con el otro indígena, sino también con el otro no indígena. Así entonces, resaltamos la importancia de que, al ser los objetos culturales movilizados por los sujetos, estos mismos objetos culturales movilizaron al sujeto (Higuita, Tascón y Jaramillo, 2017).

[11] Los Cabildos son consejos constituidos por integrantes de una comunidad indígena, conformados y reglamentados según los usos y costumbres de cada comunidad. Los Cabildos, además, están normados por la Constitución Política de Colombia de 1991.

[12] Los Jaibanás son los médicos tradicionales de la comunidad, son quienes curan los dolores del cuerpo y de espíritu de los indígenas Embera Chamí. De igual manera, ellos cuidan y protegen los territorios.

[13] En el sentido sugerido por Kvale (2011), como "una visión-entre, un intercambio de visiones entre dos personas que conversan sobre un tema de interés común" (p. 27).

Imagen 3. Participantes del segundo Círculo de Jaibanás



Fuente: extraída de Higuita (2014, p. 94).

En la actualidad estamos desarrollando una investigación doctoral[14] con maestros de la Institución Educativa Katío Chamí de la comunidad indígena de Sabaleta (ver imagen 4), ubicada en el municipio de El Carmen de Atrato (Chocó, Colombia). El estudio nos ha posibilitado nuevas interlocuciones con investigadores de educación matemática que, a pesar de no trabajar directamente con la etnomatemática, comparten con nosotros la concepción de que los conocimientos matemáticos son producidos, legitimados y validados por medio de la cultura, en las prácticas sociales (Miguel, Vilela e De Moura, 2010, 2012; Miguel, 2015a, 2015b, 2016a, 2016b, 2018; Tamayo-Osorio, 2017).

Esta investigación tiene como objetivo deconstruir terapéuticamente el currículo de matemática, disciplinarmente organizado, a partir de una problematización indisciplinar de prácticas sociales. El problema de investigación se sitúa en las relaciones entre teoría y práctica en el marco del currículo escolar indígena. Relaciones que se tornan problemáticas al querer articular, bajo un

[14] Investigación doctoral financiada durante el año 2018 por el proyecto Jóvenes Excelentes y Líderes del Nuevo Chocó y, a partir del año 2020, por el Programa de Excelencia Doctoral del Bicentenario, de Colciencias.

modelo disciplinar, los conocimientos escolares con los conocimientos cotidianos de las comunidades indígenas.

Para conducir esta investigación asumimos una actitud terapéutico-deconstruccionista inspirada en la terapia filosófica de Ludwig Wittgenstein, en interlocución con el movimiento deconstruccionista del filósofo Jacques Derrida. Algunos investigadores, tanto de Colombia como de Brasil, que han venido orientando sus investigaciones a través de esta actitud metódica son Miguel (2018), Tamayo-Osorio (2017), Quiceno y Montoya (2020) y Charry y Jaramillo (2020). Esta actitud terapéutico-deconstruccionista es la que orienta una problematización indisciplinar de prácticas sociales en la escuela (Miguel, 2016). Problematización indisciplinar que no solo busca desafiar el modelo disciplinar de organización del conocimiento, sino también problematizar en la escuela las formas cómo se producen, circulan y se practican los conocimientos en diferentes contextos y campos de actividad humana (Souza y Miguel, 2020). Una problematización indisciplinar de prácticas en la escuela posibilita movilizar conocimientos escolares y no escolares, dando lugar a una "ecología de saberes".

Esa ecología es comprendida, en el sentido de Santos (2018), como la articulación de diferentes conocimientos que hacen posibles las luchas de las comunidades indígenas contra el colonialismo, el capitalismo y el patriarcado. En ese sentido, esta investigación doctoral comparte la visión de la etnomatemática de reconocer y valorizar los conocimientos tradicionales de las comunidades indígenas que han sido históricamente invisibilizados y deslegitimados por la ciencia moderna y el colonialismo europeo, así como la intención de problematizar la creencia de que existe solo una matemática –única– universal e independiente de las prácticas sociales. Aunque esta investigación coincide en esos aspectos ético-políticos con la etnomatemática, vale la pena anotar que en ella estamos retomando algunas discusiones, relacionadas con el lenguaje y su uso (Tamayo-Osorio, 2017), basadas en los estudios filosóficos de Wittgenstein (1995), Derrida (1977) y Foucault (2002), entre otros autores.

Imagen 4. Comunidad Indígena de Sabaleta. Exposición de platos tradicionales

Fotografía: Oscar Charry.

Unas ideas finales… posibles desafíos…

Nuestra apuesta por la perspectiva histórico-cultural de la educación matemática está vinculada con el sueño de recuperar al sujeto y a la subjetividad en el acto educativo, a la hora de la producción y de la objetivación de conocimientos matemáticos. Asumimos, también, que se requiere dialogar con los saberes producidos en las diferentes prácticas sociales, buscando posibilidades de incorporarlos en la escuela, desde procesos dialógicos, con los saberes escolares. Consideramos que esta dialogía se hace necesaria para proponer otras comprensiones y otras realidades para el mundo. Sin embargo, intentando dar un cierre a este trabajo, pensamos que es necesario apuntar algunos aspectos, a saber:

- Consideramos que abordar la educación matemática desde una perspectiva histórico-cultural, a la hora de investigar y a la hora de preparar las actividades de enseñanza y de aprendizaje, no es fácil. En este sentido, existen diferentes tensiones, generadas por la dicotomía a la que nos enfrentamos los maestros e investigadores. Tales dicotomías son resultantes de la inmersión del modelo neoliberal en los procesos educativos, en que debemos atender, por un lado, la diversidad cultural de los estudiantes, y, por otro, los procesos homogeneizadores internos y externos de las instituciones escolares.

- Asimismo, pensamos que abordar la educación matemática desde una perspectiva histórico-cultural implica, también, hacer rupturas epistemológicas con los procesos de formación –anclados en la racionalidad técnica– propios de la modernidad, en el que todavía maestros e investigadores seguimos inmersos. Estas rupturas nos exigen miradas diferentes hacia las ideas de ciencia, de conocimiento, de verdad, de actividad, de subjeto y de subjetividad.

- Consideramos, además, que el reconocimiento del contexto sociopolítico en los procesos de enseñanza y en los procesos de aprendizaje de la matemática comienza a adquirir significado para maestros y estudiantes, pero teniendo cuidado de no caer en lo que Knijnik (1998) llama de "parodia de lo cotidiano". Es decir que caigamos en situaciones en las cuales una actividad propuesta en el aula de clase sirva únicamente para hacer cálculos escritos en el papel, haciendo de los problemas reales simplemente cálculos rutinarios.

- La idea no es adaptar la vida al dato solo para hacer cuentas. La idea es promover actividades en las cuales se generen otras interrelaciones entre los maestros, los estudiantes y los conocimientos matemáticos, actividades que posibiliten la producción de otros sentidos y otros significados a la hora de objetivar los conocimientos matemáticos. Se trata sí, de poner la matemática al servicio de las prácticas sociales, al servicio de la vida misma.

- Desde la mirada de la etnomatemática hay una apuesta importante para incorporar las prácticas sociales –propias de las comunidades a las que los maestros y los estudiantes pertenecen– a los proyectos curriculares. De esta forma, podrían evitarse procesos de exclusión, resultantes de tornar invisibles los distintos modos de cómo las comunidades producen sentidos y significados en su vida social, en que la matemática apenas es una de sus facetas.

- La etnomatemática, como un programa de investigación, pretende cuestionar la forma cómo, tradicionalmente, son abordados en el salón de clase los conocimientos matemáticos escolares: únicos, universales y suficientes. Pensar otro modelo de escuela y de currículo supone considerar el espacio escolar como un lugar de diálogo y de debate. Lugar en que se dé cabida a los sujetos y a sus subjetividades, dado que la escuela se configura como un espacio en el que la diversidad cultural debe ser atendida, comprendida y asumida.

- Pensar en la etnomatemática como una perspectiva para el desarrollo de la práctica pedagógica en matemática implica una reorganización escolar y curricular capaz de ofrecer un espacio, en primer lugar, para la reconstitución de las subjetividades a través del diálogo y de la intersubjetividad; y, en segundo lugar, para la reflexión sobre valores, creencias y saberes, valorizando y legitimando las diferentes producciones de saberes. Esa reorganización de la escuela debe darse a partir de nuevas relaciones sobre conocimiento, verdad y sus procesos de validación y legitimación (Monteiro, 2005).
- Vemos la etnomatemática como una posibilidad de poner los conocimientos matemáticos al servicio de las prácticas sociales. A partir del contexto escolar el maestro puede articular esos saberes propios –derivados de las prácticas sociales que se desarrollan dentro de las comunidades– con los saberes escolares. Así, pensamos que desde la etnomatemática se posibilita la producción, la objetivación, la validación y la legitimación de conocimientos matemáticos, derivados de prácticas sociales de cada comunidad.
- El programa de etnomatemática es inclusivo. Inclusivo del otro, o sea, del que no es igual a "mí", del que no es como "yo". El que no es igual a "mí" se puede ver incluido en la escuela. En países como Colombia, donde su población es tan vulnerable política, económica, social y culturalmente, casi que la escuela genera procesos de exclusión para muchos, por ser desplazado, por ser pobre, por ser negro, por ser indígena, en fin, por ser diferente.
- Para nosotros, la etnomatemática es una transgresión en el sentido de Freire (2000), una insubordinación creativa en el sentido de D'Ambrosio y Lopes (2015), un sufrimiento creativo en el sentido de Fontana (2000). Es una transgresión, una insubordinación o un sufrimiento creativo, cuando nosotros, maestros o investigadores –en el trabajo con comunidades desplazadas o comunidades pobres o comunidades negras o comunidades indígenas u otras comunidades– intentamos romper con estructuras curriculares que dan valor, apenas, a los saberes escolares, deslegitimando las prácticas sociales y los

conocimientos cotidianos asociados a dichas prácticas. Transgresión, insubordinación o sufrimiento que nos dejan ver en la etnomatemática un posible "anuncio" en educación matemática.

Referencias bibliográficas

Bakhtin, M. (1997a). *Marxismo e filosofia da linguagem.* Hucitec.

Bakhtin, M. (1997b). *Problemas da Poética de Dostoiévski*. Forense Universitária.

Bakhtin, M. (2000). *Estética da Criação Verbal*. Martins Fontes.

Benjamin, W. (1987). O narrador. Considerações sobre a obra de Nikolai Leskov. En *Magia e técnica, arte e política. Ensaios sobre literatura e a história da cultura,* Brasiliense, Obras escolhidas, *1*, 197-221.

Berrío, L. K. (2009). *La 'medida' en un contexto de escuela indígena: el caso del pueblo Tule y el caso del pueblo Embera-Chamí.* [Trabajo de Licenciatura en Educación Básica, con énfasis en Matemáticas]. Universidad de Antioquia.

Caraça, B. J. (1958). *Conceitos fundamentais da matemática*. Livraria Sá da Costa Editora.

Charry, O. y Jaramillo, D. (2020). Currículo de matemáticas y desarrollo en debate: reflexiones desde un territorio chocoano. *REMATEC*, *15*(33), 31-52.

Davídov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Investigación psicológica teórica y experimental*. Progreso.

D'Ambrosio, B. e Lopes, C. (Orgs.). (2015). *Ousadia criativa nas práticas de educadores matemáticos*. Merdado de Letras.

D'Ambrosio, U. (1998). *Etnomatemática.* Ática.

D'Ambrosio, U. (1999). *O programa de etnomatemática e questões historiográficas e metodológicas.* IV Congresso Brasileiro da Filosofia. São Paulo, Brasil.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática: Elo entre las tradições e a modernidad.* Autêntica.

D'Ambrosio, U. (2011). A busca da paz como responsabilidade dos matemáticos. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (7).

Deleuze, G. (1987). *Proust e os signos.* Forense-Universitária.

Derrida, J. (1977). *Posiciones.* Pre-textos.

Fontana, R. C. (2000). *Como nos tornamos professoras?* Autêntica.

Foucault, M. (2002). *Vigilar y castigar; nacimiento de la prisión*. Siglo XXI Editores.

Freire, P. (2000). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.* Paz e Terra.

Geraldi, J. W. (2000). *Portos de Passagem.* Martins Fontes.

Heller, A. (2000). *O cotidiano e a história.* IGLU.

Higuita, C. (2014). *La movilización de objetos culturales desde las memorias de la práctica de construcción de la vivienda tradicional Embera Chami: posibilidades para pensar el (por)venir de la educación (matemática) indígena.* [Tesis de maestría en educación, línea de formación en educación matemática]. Universidad de Antioquia.

Higuita, C., Tascón, A. y Jaramillo, D. (2017). La historia oral en las memorias de prácticas culturales para pensar un (por)venir de la educación (matemática) indígena. *Tecné, Epistem y Didaxis, 42*, 79-94.

Jaramillo, D. (2003). *(Re)constituição do ideário pedagógico de futuros professores de matemáticas num contexto de investigação sobre a prática pedagógica*. [Tesis de doctorado en educación, área de Educación matemática]. Universidade Estadual de Campinas-Unicamp.

Jaramillo, D. (2009). Entre o saber cotidiano e o saber escolar: um olhar a partir da etnomatemática. Utopia ou realidade? En C. Lopes e A. Nacarato (Eds.), *Educacao matemática, leitura e escrita. Armadilhas, utopias e realidade* (pp. 153-177). Mercado de Letras.

Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles". *Educación y Pedagogía, 23*(59), 13-36.

Jaramillo, D. e Tamayo, C. (2012). Práticas Sociais, Currículo e Conhecimento Matemático: tecidos ao interior de uma escola indígena. En *Educação Básica: políticas e práticas pedagógicas* (pp. 101-134). Mercado de Letras.

Knijnik, G. (1996). *Exclusão e resistência. Educação Matemática e Legitimação Cultural.* Artes Médicas.

Knijnik, G. (1998). Educaçao Matemática e os problemas da 'vida real'. En À. Chassot e R. J. d. Oliveira (Eds.), *Ciência, ética e cultura na educação* (pp. 123-134). UNISINOS.

Knijnik, G. (2004). Etnomatemática e educaçao no movimento 'Sem Terra'. En G. Knijnik, F. Wanderer e C. Oliverira (Eds.), *Etnomatemática: currículo e formação de professores* (pp. 53-69), EDUNISC.

Knijnik, G. (2007). Diversidad cultural, matemáticas y exclusión: oralidad y escritura en la educación matemática campesina del sur de Brasil. En J. Jiménez, J. Díez-Palomar y M. Civil (Eds.), *Educación matemática y exclusión.* Graó.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

Larrosa, J. (1998). *La experiencia de la lectura: estudios sobre literatura y formación,* Laertes.

Leontiev, A. N. (1984). *Actividad, consciencia y personalidad*. Cartago.

Lizcano, E. (2004). As matemáticas da tribu europeia: um estudo de caso. En G. Knijnik, F. Wanderer e C. Oliveira (Eds.), *Etnomatemática Currículo e Formacao de profesores* (pp. 124-138). EDUNISC.

Lizcano, E. (2006). *Metáforas que nos piensan: sobre ciencia, democracia y otras poderosas ficciones*. Traficantes de Sueños.

López, S. E. (2004). Etnomatemática e sua relação com a formação de professores: alguns elementos para a discussão. En G. Knijnik, F. Wanderer e C. Oliveira (Eds.), *Etnomatemática Currículo e Formação de professores.* EDUNISC.

Mejía, M. R. (2001). *Currículo en tiempos de globalización capitalista,* Congreso de Educación y Formación de Docentes.

Miguel, A. (2008). *Jogos hedonistas de linguagem*. Editora Plêiade.

Miguel, A. (2010). Percursos Indisciplinares na Atividade de Pesquisa em História (da Educação Matemática): entre jogos discursivos como práticas e práticas como jogos discursivos. *Bolema, 23*(35), 1-57.

Miguel, A. (2015a). A Terapia Gramatical-Desconstrucionista como Atitude de Pesquisa (Historiográfica) em Educação (Matemática). *Perspectivas da Educação Matemática, 8*(18).

Miguel, A (2015b). Uma encenação terapêutica da terapia wittgensteiniana na condução de pesquisas historiográficas. *Revista de História da Educação Matemática*, *1(1)*.

Miguel, A. (2016a). Historiografia e terapia na cidade da linguagem de Wittgenstein, *Bolema 30*(55), 368-389.

Miguel, A. (2016b). Entre Jogos de Luzes e de Sombras: uma agenda contemporânea para a educação temática brasileira. *Perspectivas da Educação Matemática*, *9*(20).

Miguel, A. (2018). Desconstruindo o mérito da escola meritocrática: uma profissão de fé. En L. Godoy, M. A. da Silva e V. Santos (Orgs.), *Curriculos de matemática em debate: questões para políticas educacionais e para a pesquisa em Educação Matemática* (pp. 69-88). Editora Livraria da Física.

Miguel, A. e Miorim, A. (2004). *História na educação matemática: propostas e desafios.* Autêntica.

Miguel, A., Vilela, D. S. e De Moura, A. R. (2010). Desconstruindo a matemática escolar sob uma perspectiva pós-metafísica de educação. *Zetetiké*, *18*, 129-206.

Miguel, A., Vilela, D. e De Moura, A. R. (2012). Problematização indisciplinar de uma prática cultural numa perspectiva wittgensteiniana. *Revista Reflexão E Ação*, *20*(2), 6-31.

Monteiro, A. (2005). *Currículo de Matemáticas: reflexões numa perspectiva enomatemática,* 7º Encuentro de Educación Matemática, Tunja.

Monteiro, A., Orey, D. e Domite, M. C. (2004), Etnomatemática: papel, valor e significado. En J. P. Ribeiro, M. C. Domite e R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: papel, valor e significado.* Zouk.

Morin, E. (1982). *Ciência com consciência,* Mem Martins/Publicações Europa-América.

Morin, E. (1999). *Complexidade e transdiciplinaridade: reforma da universidade e do ensino fundamental.* EDUFRN.

Moura, M. O. (1998). A atividade de Ensino como Ação Formadora. En A. D. Castro e A. M. P. d. Carvalho (Eds.), *Ensinar a ensinar* (pp. 143-162). Pioneira Thomson Learning Ltda.

Moura, M. O. (2011). Educar con las matemáticas: saber específico y saber pedagógico. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), 47-57.

Moura, M. O., Araujo, E. S., Ribeiro, F. D., Panossian, M. L. e Moretti, V. D. (2010). Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. En M. O. Moura (Ed.), *A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural* (pp. 81-109). Liber Livro.

Peña-Rincón, P., Tamayo-Osorio, C. y Parra, A. (2015). Una visión latinoamericana de la etnomatemática: tensiones y desafíos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(2), 137-150.

Prigogine, I. (1996). *O fim das certezas: tempo, caos e as leis da natureza.* Unesp.

Quiceno, A. y Montoya, D. (2020). *MatemáticaS, educación y paz en la escuela.* Disertación de maestría. Línea de formación Educación Matemática. Universidad de Antioquia.

Quijano, A. (2007). Colonialidad do poder e classificação social. En Boaventura Santos, S. e Meneses, M. P. (Eds.), *Epistemologías do Sul* (1ª ed.). São Paulo: Editora Cortez.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento, *Educación Matemática, 12*(1), 51-69.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking,* 103-129.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215-234). Sense Publishers.

Radford, L. (2011). As éticas de ser e conhecer: rumo a uma teoria cultural da aprendizagem. En L. Radford (organização e revisão técnica da tradução: Bernardete Morey e Iran Abreu Mendes), *Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia.* Editora Livraria da Física.

Santos, B. (1996). *Pela mão de Alice: o social e o político na pós-modernidade.* Cortez.

Santos, B. (2018). *El fin de un imperio cognitivo: la afirmación de las epistemologías del sur*. Editorial Trotta.

Skovsmose, O. y Valero, P. (2007). Educación matemática y justicia social: hacerle frente a las paradojas de la sociedad de la información. En J. Jiménez, J. Díez-Palomar y M. Civil (Eds.), *Educación matemática y exclusión* (pp. 45-61). Graó.

Souza, E. e Miguel, A. (2020). A encenação de práticas culturais na tessitura de outras escolas: a vida como eixo da ação educativa. *REMATEC*, *15*(33), 166-184.

Tamayo, C. (2012). *(Re)Significación del currículo escolar indígena, relativo al conocimiento matemático, desde y para las prácticas sociales: el caso de los maestros indígenas Dule de la comunidad de Alto Caimán.* [Tesis de Maestría]. Universidad de Antioquia.

Tamayo-Osorio, C. (2017). *Vení, vamos hamacar el mundo, hasta que te asustes: uma terapia do desejo de escolarização moderna.* [Tesis de doctorado]. Universidade Estadual de Campinas.

Talizina, N. (2009). *La teoría de la actividad aplicada a la enseñanza.* Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Thompson, J. B. (2011). *Ideologia y cultura moderna: teoria social crítica na era dos meios de comunicação de masa*. Vozes.

Valero, P. (2006). *Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia*. Foro Educativo Nacional, Año de Competencias Matemáticas, Bogotá.

Veiga-Neto, A. (2002). De geometrias, currículo e diferenças. *Educação & sociedade, 23*(79), 163-186.

Walsh, C. (2005). Interculturalidad, conocimientos y decolonialidad. *Signo y pensamiento, 46*(24), 39-50.

Walsh, C. (2007a). ¿Son posibles unas ciencias sociales/culturales otras? Reflexiones en torno a las epistemologías decoloniales. *Nómadas, 26,* 102-113.

Walsh, C. (2007b). Interculturalidad, colonialidad y educación. *Educación y Pedagogía, XIX*(48), 25-35.

Wanderer, F. e Oliveira, C. (Eds.) (2004). *Etnomatemática, Currículo e Formacao de profesores* (pp. 124-138). EDUNISC.

Wittgenstein, L. (1995). *Tratado lógico-filosófico | Investigações filosóficas* (M. S. Lourenço, Trad.; 2.ª ed.). Fundação Calouste Gulbenkian.

5. La teoría antropológica de lo didáctico. Aportes a las tareas profesionales del profesor de matemática

Fabian Espinoza y Saúl Ernesto Cosmes Aragón*

En este capítulo presentamos una sucinta caracterización de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). En principio nos referimos al origen de la teoría, luego analizamos su denominación y sus características principales, para finalmente centrarnos en sus implicancias didácticas.

Si bien el modelo expuesto por Yves Chevallard, principal referente de la TAD, es útil para modelizar cualquier actividad humana, nuestro propósito se dirige a reflexionar en el ámbito de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática.

La TAD plantea el estudio funcional de la matemática y se dirige a superar uno de los problemas más preocupantes de la educación matemática actual, que tiene que ver con la pérdida de sentido de la matemática escolar. Este fenómeno se manifiesta de muchas maneras, que van desde la falta de motivación de los alumnos para estudiar matemática y la consiguiente desorientación de los profesores, hasta la disminución progresiva de la importancia de la matemática en el currículo y la falta de visibilidad en la sociedad.

Para suavizar el impacto conceptual que podría provocar al lector el vocablo "praxeología matemática", al comienzo usamos las denominaciones que asumimos como sinónimas, tales como "obra matemática" u "organización matemática".

* F. Espinoza: Universidad Nacional del Nordeste, Argentina.
S. E. Cosmes Aragón: Instituto Tecnológico de Sonora, México.

Es preciso no asumir este trabajo como un artículo de investigación o buscar en él la exhaustividad en la caracterización de la teoría. Nuestra intención es acercar los aspectos que consideramos más importantes de la TAD a docentes de matemática y estudiantes del profesorado, y mostrar algunas herramientas útiles para el diseño, el análisis y la valoración de sus prácticas didácticas presentes o futuras.

Los inicios de la TAD

Bosch y Gascón (2007) explican que previo al surgimiento de la TAD, Yves Chevallard presentó la teoría de la transposición didáctica, alrededor de unos diez años después de que Guy Brousseau hubiera iniciado un proyecto para lograr que la didáctica de la matemática fuera reconocida como una ciencia. La teoría de la transposición didáctica considera que lo que se enseña en la escuela se genera fuera de ella y se transpone a distintas instituciones por necesidades de educación y difusión. Esta teoría se integró luego a un ámbito de investigación más amplio, que es la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard *et al.*, 1997), y a ella nos dedicaremos en lo subsiguiente.

Creada e impulsada en Francia por Chevallard, la TAD se arraigó profundamente en España, a partir de contribuciones cruciales de investigadores como Mariana Bosch y Josep Gascón. En Latinoamérica encontró asidero en numerosos trabajos de docencia e investigación, luego de algunas traducciones realizadas por investigadores locales y editoriales.

Cabe señalar que el paradigma dominante en aquellas épocas, muy arraigado incluso hasta nuestros días, es el que Chevallard (2013) llamó paradigma de “la visita de obras” pertenecientes a la cultura humana. Metafóricamente hablando, es el paradigma denominado de “la visita a monumentos” o “monumentalismo”, ya que los conocimientos son presentados por los profesores de forma fragmentada, como monumentos que los estudiantes visitan y admiran, teniendo al docente como guía, presentador y expositor de sus características. En estas visitas, los alumnos no suelen dar sentido a las obras dado que no saben para qué sirven; no cuestionan su utilidad, sino que actúan como meros espectadores. El estudiante escucha el relato organizado por el profesor, que se constituye en una exposición generalmente incompleta, acotada por las elecciones personales e institucionales, que poco tiene que ver con aspectos relevantes para la formación de los estudiantes. De este modo, el conocimiento oficial no perdura en el tiempo y es percibido como poco útil para comprender y resolver cuestiones de la vida real.

Es natural que los estudiantes que se forman bajo estas concepciones constantemente pregunten para qué sirve la matemática y asuman que aprender esta ciencia es una habilidad que tienen solamente algunos pocos. En contraposición a este paradigma, Chevallard impulsa el paradigma “del cuestionamiento del mundo”, al cual nos referiremos más adelante.

Sobre la denominación de la TAD

Nos abocamos ahora a caracterizar brevemente dos conceptos involucrados en la denominación de esta teoría didáctica: el carácter de “antropológico” y la noción de “lo didáctico”.

Chevallard sostiene que la actividad matemática, y en particular la actividad del estudio de la matemática, son unas de las tantas acciones realizadas por el hombre en la búsqueda genuina de conocimientos para resolver problemas. De allí la caracterización de “antropológica” de su teoría (Bosch y Gascón, 2009).

La antropología es una ciencia que centra su interés en los aspectos específicos del ser humano. Su aspiración fundamental es la de producir conocimientos sobre la humanidad en sus diversas esferas, intentando abarcar las estructuras sociales de la actualidad, la evolución biológica de la especie, el desarrollo y los modos de vida de los pueblos, y la diversidad de expresiones culturales y lingüísticas que caracterizan a la humanidad. El desarrollo del ser humano tiene mucho que ver con la producción de conocimientos que le permiten hacer frente a los problemas de la vida. La acumulación de este capital cultural, compartido por la humanidad, constituye una característica fundamental de “lo humano”.

Castela (2017) se refiere a “lo didáctico” como el conjunto de los fenómenos de difusión y apropiación de cualquier elemento de la cultura, y considera que representa un aspecto sustancial de lo humano. Por esta razón expresa que lo didáctico es denso en lo humano.

Por su parte, Chevallard (2011) explica que lo didáctico es una dimensión de las sociedades humanas presente en toda situación en la que se manifiesta una intención, ya sea de una persona o de una institución, de hacer algo para que cierta persona o institución aprenda alguna cosa. Con una profunda visión antropológica, este autor postula que los conocimientos se construyen como respuestas a preguntas planteadas en las propias instituciones. Más precisamente, Chevallard señala que para responder una pregunta o un conjunto de preguntas es necesario transitar un proceso de estudio que se plasma o cristaliza en una obra u organización matemática, concepto que retomaremos y profundizaremos más adelante.

Algunos rasgos característicos de la TAD

Las determinaciones sociales de los objetos

Bajo una perspectiva absolutista, los conocimientos se consideran verdades universales incuestionables que existen en un mundo de ideas puras, en la mente de quienes los crean, que se descubren o se inventan. Contrariamente, Chevallard sostiene que los conocimientos se construyen como obras humanas en los ámbitos institucionales.

Los fenómenos humanos están determinados primeramente por los contextos sociales en los cuales se desarrollan o con los cuales se vinculan. Por ello, superar dificultades requiere analizar la complejidad del entorno social y no solamente a cada individuo en particular (Castela, 2017).

El conocimiento institucional como aspecto sustancial de la antropología de lo didáctico

Si nos circunscribimos al ámbito de la educación matemática, podríamos considerar instituciones a los libros de matemática (enciclopedias o textos que se usan en las aulas), los documentos curriculares, las publicaciones (revistas, actas de congresos, etc.), las universidades e institutos de formación docente y las escuelas. Los grupos de personas o los individuos que se dedican a elaborar libros y diseños curriculares, los investigadores en matemática y en educación matemática, y los docentes son las caras visibles de las instituciones, sus representantes.

Las instituciones aseguran las condiciones necesarias para la construcción colaborativa de los conocimientos, para la transformación de las creaciones particulares en innovaciones socialmente reconocidas, para la transmisión de la cultura de generación en generación. La legitimación de estos saberes es lo que podríamos llamar institucionalización.

A través de la noción de transposición didáctica, Chevallard pone en evidencia que los conocimientos son relativos a las instituciones. Esta transposición del saber es institucional, dado que los saberes migran de una institución a otra, se adaptan y se transforman; y si no lo hacen, desaparecen. La relatividad institucional de los conocimientos implica una liberación de estos, una emancipación de las matemáticas creadas por los matemáticos, y de aquellas otras matemáticas que curricularmente son concebidas y legitimadas como objetos de enseñanza.

El conocimiento institucional así entendido se constituye en el foco de la antropología epistemológica que la TAD considera estrechamente vinculada a la antropología de lo didáctico. Para ejemplificar esta posición, basta pensar que dos libros de texto que tratan un mismo tema, con un mismo encuadre curricular, dirigidos a la misma población estudiantil, no contienen dos organizaciones matemáticas iguales. De hecho, si analizamos tan solo el tipo de problemas que contemplan o el lenguaje empleado, veríamos que son diferentes. Incluso en una misma institución escolar, en dos divisiones de un mismo curso, dos docentes diferentes no logran la construcción o reconstrucción de obras matemáticas iguales. Además, al sostener la postura de que los conocimientos se construyen para dar respuesta a problemas o clases de problemas, en el ámbito de ciertas instituciones, no tendría sentido considerar que es posible estudiar, reconstruir o construir una misma obra matemática en contextos distintos, ante problemáticas diferentes.

Para finalizar, hay otro aspecto del conocimiento institucional que es importante destacar, y tiene que ver con la conformación de este a través de los aportes de individuos y grupos pertenecientes a la misma institución o por medio de relaciones interinstitucionales.

El paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo

Chevallard (2013) sostiene que un principio fundamental de este paradigma se basa en la permanente predisposición que debería tener todo ser humano para afrontar situaciones nuevas, problemas y preguntas que nunca se ha planteado, para las cuales no dispone de una respuesta conocida. La pregunta y el cuestionamiento son asuntos centrales en la TAD.

Otro principio clave se refiere a la consideración de la educación como un proceso que se desarrolla durante toda la vida, cualquiera sea la edad de la persona, y destaca la importancia de concentrar los esfuerzos didácticos en la identificación de lo que la gente puede aprender y las maneras de hacerlo.

Si decidimos desarrollar nuestra tarea docente en función de la TAD, deberíamos respetar estos principios, lo que significa necesariamente promover la construcción de conocimientos en términos de preguntas que despierten intereses y motivaciones. Más precisamente, se trata de fomentar la construcción o reconstrucción de organizaciones matemáticas suficientemente completas, basadas en la identificación de preguntas pertenecientes a problemáticas institucionales, con técnicas adecuadas y argumentos pertinentes. Esto aplica tanto en la formación de estudiantes de todos los niveles del sistema educativo como en la formación de profesores en ejercicio de la profesión.

El modelo praxeológico

La TAD considera indivisibles la actividad de producción y el resultado de esta, que es el saber. Los asume integrados en la noción de praxeología, término que asocia y estructura la *praxis* (práctica o saber hacer) y el *logos* (discurso sobre esa práctica).

La praxis está compuesta por las tareas o tipos de tareas y por la técnica, que es la manera de llevar a cabo esas tareas en una institución determinada. Por su parte, el logos está formado por la tecnología y la teoría. Mientras que la primera es un discurso sobre la técnica, la teoría permite describir y justificar la tecnología.

Castela (2017) explica que la praxis destaca los aspectos invariantes en la ejecución de las tareas problemáticas que abordan los seres humanos, cuya identificación les permite disponer de cierta eficacia y seguridad en la realización de sus actividades. Por otra parte, el logos resulta de una hipótesis muy fuerte sobre las condiciones de vida de una técnica en una institución.

Para mejorar la claridad de estos conceptos, damos un ejemplo. Consideremos el siguiente cuestionamiento: "¿por qué los medios informativos no suelen coincidir en el número de personas presentes en un evento masivo que no requiere pagar entradas?". Esta cuestión habitualmente despierta el interés social y sus respuestas dispares suelen provocar asombro. Tal disparidad puede deberse a intereses relacionados con la demostración de poder o simplemente a errores de cálculo.

Una tarea en el nivel medio, relacionada con esta cuestión, podría plantear la estimación de la cantidad de personas presentes en un espacio pequeño (por metro cuadrado o en una cuadra) circunscribiendo el terreno a un rectángulo. Una técnica clásica consiste en estimar la cantidad de personas en un espacio pequeño (por metro cuadrado o en una cuadra). Luego de esto, estimar el área total ocupada y la cantidad de personas, utilizando regla de tres simple. La superficie podría estar conformada por diversos espacios, plazas y calles aledañas, por ejemplo. El cálculo del área ocupada deberá hacerse combinando el uso de fórmulas apropiadas. Posteriormente, para estimar la densidad de la concentración, se deberá buscar información. Según especialistas de periodismo de datos, si la concentración es comprimida, hay alrededor de cuatro personas por metro cuadrado; si es menos compacta, hay dos personas por metro cuadrado; y si es muy dispersa, se debe estimar una persona por metro cuadrado. Además, es necesario tener en cuenta que posiblemente en distintas partes de la concentración las densidades varíen, por lo que se debe poder determinar la concentración de cada lugar. Una posibilidad para estimar la densidad de la concentración es utilizar fotografías aéreas o satelitales, cuando haya información disponible. Si algunos de los lados del terreno no fueran rectos, habría que emplear otras técnicas para estimar las áreas, por lo que la tarea podría plantearse en el nivel superior.

La tecnología que justifica la técnica señalada se conforma de las distintas fórmulas que permiten calcular áreas de figuras planas, las fórmulas de la proporcionalidad directa con sus hipótesis asumidas y los discursos matemáticos de su validez. La justificación de la regla de tres simple con base en la proporcionalidad, las fórmulas de superficie, sus definiciones, deducciones, alcances y relaciones conceptuales conforman el compendio de la teoría.

Serrano et al. (2010) indican que la tecnología no solo persigue el propósito de justificar la técnica y hacerla comprensible, sino que, además, debe contribuir a modificarla para hacer más amplio su alcance, indagar sobre sus limitaciones y producir técnicas nuevas. En el ejemplo que venimos abordando, la técnica indicada recientemente no es pertinente para calcular el número de personas presentes en una multitud que se está movilizando. El recurso tecnológico debe poder clarificar esto, incluso, debe permitir avanzar en la construcción de nuevas técnicas, por los métodos denominados de uno o dos puntos. Chevallard (1999) distingue cuatro tipos de organizaciones matemáticas:

- *Organizaciones matemáticas puntuales (OMP)*: son aquellas que se elaboran sobre un único tipo de tareas, con una técnica común.
- *Organizaciones matemáticas locales (OML)*: son las que están formadas por la articulación de las organizaciones matemáticas puntuales alrededor de un discurso tecnológico común, es decir, las que disponen de una tecnología común para cada una de las técnicas.
- *Organizaciones matemáticas regionales (OMR)*: son las que están formadas por la articulación de organizaciones matemáticas locales alrededor de una teoría común, es decir, las que tienen una teoría común para cada una de las tecnologías.
- *Organizaciones matemáticas globales (OMG)*: son producto de la agregación de organizaciones regionales. Según Bosch *et al.* (2003), estas organizaciones se constituyen en una teoría de las teorías.

Implicancias didácticas de la TAD

Bosch *et al.* (2004) explican que la TAD dispone de modelos para planificar y evaluar propuestas de enseñanza, sobre la base de preguntas y teniendo como respuesta una obra matemática. Ellos son las actividades de estudio e investigación (AEI) y los recorridos de estudio e investigación (REI). Ambos modelos surgen como contrapropuesta del tipo de prácticas de enseñanza de la matemática que se desarrollan bajo el paradigma monumentalista. En lo que sigue nos abocaremos a brindar algunos detalles de estos, pero antes necesariamente debemos referirnos a los modelos referenciales de análisis.

Modelos referenciales

Consideremos el caso de un profesor que desea diseñar una propuesta de enseñanza para que sus estudiantes aprendan un determinado contenido. Es necesario entonces que el docente inicie un proceso de estudio para contestar una pregunta o un conjunto de preguntas a las que dicho contenido responde. Desde la visión de Chevallard (2012), la respuesta a esa pregunta o esas preguntas viene dada por un modelo praxeológico de referencia (MPR), el cual involucra un análisis provisorio del profesor, potencialmente abierto, en permanente construcción.

La elaboración y fundamentación de propuestas de enseñanza llevadas a cabo en el seno de colectivos institucionales, la exploración en las aulas, el análisis y la evaluación durante las implementaciones y posterior a ellas ayudan a avanzar en el mejoramiento del MPR. Así, concebimos una relación de intercambio y enriquecimiento mutuo entre el MPR y las praxeologías didácticas que se erigen en las aulas, basadas en aquel.

Existe otro modelo referencial, el modelo epistemológico de referencia (MER), elaborado por especialistas en educación matemática cuando tienen la intención de modificar un fenómeno didáctico institucional. Esto es, sobre la base de los documentos curriculares, libros de texto, programas institucionales, observación y análisis de clases, entre otras fuentes, los investigadores conciben un MER dinámico, que les permite identificar algunos fenómenos didácticos que afectan el proceso de estudio en una institución en particular.

La TAD suele realizar permanentemente críticas a los sistemas educativos y advierte la trivialización de contenidos, objetivos y propuestas de enseñanza. Bosch et al. (2006) identifican una falta de articulación de los contenidos matemáticos en el currículo escolar y proponen como alternativa la incentivación, el diseño, el desarrollo, la puesta en aula y la evaluación de dispositivos didácticos asociados a la modelización matemática, considerada como un instrumento articulador de la matemática escolar. Fonseca et al. (2014) señalan que la modelización matemática, como propuesta de enseñanza, es coherente con lo que postula la TAD, al considerar que toda actividad matemática es susceptible de ser modelizada. La modelización matemática que asume la TAD es diferente de la que conciben quienes trabajan en la línea de educación matemática denominada del mismo modo. Para una aclaración más refinada entre ambos significados, sugerimos la lectura del primer capítulo de Pochulu (2018).

Modelos didácticos: AEI y REI

Tanto en las AEI como en los REI, modelos didácticos a los que nos referimos recientemente, el encuentro con el saber se produce cuando los estudiantes investigan una pregunta con el objetivo de dar una respuesta satisfactoria.

Según Bosch y Gascón (2009), las AEI están determinadas por la referencia de una OML, que un profesor debe proponer estudiar y hacer accesible a un grupo de alumnos. Sin embargo, en los REI, la organización matemática que da respuesta a una pregunta o conjunto de preguntas, si existe, no está determinada a priori. Desde este punto de vista, entendemos que un REI es un modelo que se ajusta más a las actividades de investigación, en la medida en que las AEI podrían ser más útiles para planificar la enseñanza de las matemáticas en las aulas.

Otero (2013) explica que las AEI constituyen un proceso de estudio praxeológicamente finalizado, pues se impone la condición de que la respuesta contenga los principales componentes de la OML previamente determinada y conocida de antemano por la institución escolar.

Siguiendo a Chevallard (2007), podemos decir que una desventaja de las AEI es que el profesor es quien propone las preguntas iniciales que favorecen el proceso de estudio. En cambio, en los REI, los estudiantes participan de la identificación y formulación de dichas cuestiones. Entendemos este aspecto como una limitación de las AEI, dado que es importante que los estudiantes aprendan a cuestionar y plantear preguntas para lograr el aprendizaje. Una ventaja de las AEI sobre los REI se da porque el primer modelo posibilita tener control sobre el tiempo escolar, mientras que el segundo es funcional a los avances que se van produciendo en el proceso de búsqueda de respuestas. Se puede consultar un ejemplo de AEI en Di Blasi Regner (2019) y de REI en Llanos et al. (2015).

La razón de ser de la actividad matemática

Retomando nuevamente la temática de los modelos didácticos, como ya lo mencionamos, los diseños de las AEI pueden ser considerados más cercanos a la labor del docente en la medida en que los REI se relacionan mayormente con la tarea del investigador. Cualquiera sea el uso de los dispositivos didácticos, para la TAD es crucial considerar que las cuestiones que generan las organizaciones didácticas tomen seriamente en cuenta la razón de ser de la actividad matemática. Al respecto, Gascón (2003) señala que para que los dispositivos didácticos posean una razón de ser, deben cumplir con las siguientes legitimidades:

- *Legitimidad funcional*: que los AEI o los REI estén relacionados con otras cuestiones que se estudian en la escuela, ya sean matemáticas o relativas a otras disciplinas.

- *Legitimidad social*: que provengan de cuestiones que la sociedad asuma que son importantes para la escuela. Por ello, es necesario tener presente las aportaciones del diseño curricular, los libros de texto didácticos, las producciones de organismos oficiales, etc.
- *Legitimidad matemática*: que involucren ciertas situaciones sustanciales de la matemática, esto es, situadas en la raíz central de esta ciencia.
- *Legitimidad didáctica*: además de las legitimidades anteriores, es importante estudiar los contenidos que la educación matemática considera problemáticos.

Los momentos didácticos

Una organización didáctica se articula alrededor de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. El análisis de variados procesos de estudio ha permitido detectar dimensiones que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática independientemente de las características culturales, sociales e individuales. A este tipo de aspectos de las actividades de producción Chevallard los denomina *momentos de estudio* o *momentos didácticos*. Cada uno de ellos puede aparecer una o más veces en el desarrollo de una actividad y no hay un orden predeterminado en el que deban hacerlo, salvo el del primer encuentro con el que necesariamente comienza el proceso. Exponemos seguidamente cada uno de estos momentos, asociados con los componentes de una organización matemática.

- Momento 1: el que corresponde al primer encuentro con el cuestionamiento, con la pregunta. Aquí el estudiante tiene un primer encuentro con la organización que va a abordar.
- Momento 2: el de la exploración. Se exploran los tipos de preguntas o tareas y aparecen las primeras técnicas rudimentarias para resolverlas.
- Momento 3: el de la construcción de un entorno tecnológico-teórico. En este momento el estudiante comienza a realizar explicaciones, justificaciones sobre las técnicas utilizadas al realizar la tarea o resolver el problema.

- Momento 4: el del trabajo con la técnica. Se trabaja con la evolución de las técnicas utilizadas en el momento 2. El refinamiento esperado en este momento tendrá que ver con una reflexión sobre la tecnología utilizada.
- Momento 5: el de la institucionalización. El profesor cuida que en este momento la praxeología matemática desarrollada por el estudiante sea exactamente la pretendida en el diseño didáctico y que a su vez se corresponda con las exigencias institucionales.
- Momento 6. El de la evaluación.

Reflexiones finales

Si nos alineamos con la TAD, es nuestro compromiso como docentes vigilar la conexión de los MER y los MPR (diseñados vía organizaciones matemáticas) con los dispositivos didácticos REI y AEI (diseñados como organizaciones didácticas). Además, es necesario asegurarnos de que estos dispositivos didácticos tengan una razón de ser merced al cumplimiento de las legitimidades mencionadas. Estudiar, planificar, proponer y evaluar situaciones de modelización que resulten de interés para el entorno institucional deberían ser tareas docentes habituales.

A manera de prospectiva, un desafío es indagar de qué manera el uso de tecnologías digitales como GeoGebra, Maxima, Symbolab, etc., interfieren en las técnicas asociadas a la solución de las situaciones planteadas al estudiante o permiten la aparición de otras nuevas. El modelo praxeológico de la TAD en conjunto con el uso de tecnologías digitales podría originar el desarrollo de nuevos conocimientos en ambientes más ricos y apropiados para favorecer la enseñanza de la matemática.

Referencias bibliográficas

Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *23*(1), 79–136. https://revue-rdm.com/2003/el-profesor-como-director-de/

Bosch, M., y Gascón, J. (2007). 25 años de transposición didáctica. En Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. y García, F. (eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico*, pp. 385-406. Andalucía: Universidad de Jaem.

——— (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del Profesorado de Matemáticas de secundaria. En González, M. J., González, M. T. y Murillo, J. (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 89-113. Santander: SEIEM.

Bosch, M., Fonseca, C., y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24* (2-3), 205-250. Disponible en: https://revue-rdm.com/2004/incompletitud-de-las/.

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz-Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática*, *18* (2), 37-74. Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol18/2/vol18-2-02_REM_18-2.pdf.

Castela, C. (2017). La teoría antropológica de lo didáctico: herramientas para las Ciencias de la Educación. *Acta Herediana*, *59*(8-15). Disponible en: https://doi.org/10.20453/ah.v59i0.3052.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266. Disponible en: https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/.

——— (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique de la didactique*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf.

——— (2011). *Improvisaciones cruzadas sobre lo didáctico, lo antropológico y el oficio de investigador en TAD*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_Barcelona_-_25-11-2011.pdf.

——— (2012). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. En Cho, S. J. (ed.), *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Intellectual and attitudinal* *challenges*, pp. 173-187. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13.

——— (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana. Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182. Disponible en: doi: 10.4471 /redimat.2013.26.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Horsori.

Di Blasi Regner, M. (2019). *Articulación entre los enfoques sintético y analítico en cónicas a nivel superior en entornos de geometría dinámica*. Tesis doctoral, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Disponible en: https://www.academia.edu/82535224/Tesis_Doctoral_Mario_Di_Blasi_Regner.

Fonseca, C., Gascón, J., y Oliveira Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Relime*, *17*(3), 289-318. Disponible en: https://doi.org/10.12802/relime.13.1732.

Gascón, J. (2003). *La pedagogía y la didáctica frente a la problemática del Profesorado de Matemáticas*. Comunicación presentada en el XVI Congreso de ENCIGA, Cangas de Morrazo, Pontevedra.

Llanos, C., Otero, M., Gazzola, M., y Arlego, M. (2015). "Recorridos de estudio y de investigación (REI) codisciplinares a la Física y la Matemática con profesores en formación en la Universidad". *Revista de Enseñanza de la Física*, *27* (extra), 251-258. Disponible en: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/revistaEF/article/view/12614/12890.

Otero, M. (2013). "La teoría antropológica de lo didáctico". En Otero, M., Fanaro, M., Corica, A., Llanos, V., Sureda, P. y Parra, V. (eds.), *La teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática*, pp.15-27. Buenos Aires: Dunken.

Pochulu, M. D. (coord.) (2018). *La modelización en matemática: marco de referencia y aplicaciones*. Villa María: GIDED-Universidad Nacional Villa María (UNVM). Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/323995028_La_Modelizacion_Matematica_Marco_de_referencia_y_aplicaciones.

Serrano, L., Bosch, M., y Gascón, J. (2010). Cómo hacer una previsión de ventas. Propuesta de un recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de Administración y Dirección de Empresas. En Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. y Ladage, C. (eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 835-857. Montpellier: IUFM de l' Académie de Montpellier.

Segunda sección
Nuevas tecnologías bajo distintos enfoques teóricos

6. Análisis de una tarea matemática desde la resolución de problemas mediada por la tecnología

*Patricia Barreiro, Paula Leonian y Claudia Zuliani**

Introducción

En este capítulo presentamos, inicialmente, una tarea que consideramos coherente, en los términos desarrollados por Rodríguez (2022). Asimismo, entendemos que permite que los estudiantes realicen una actividad matemática valiosa, con las consideraciones respecto de la modalidad de trabajo que se indican en el contexto y el objetivo que persigue, que entendemos resulta cognitivamente exigente.

A continuación, desarrollamos posibles resoluciones de la situación, en papel y lápiz primero y con uso de TIC en un segundo momento. Esto nos da elementos para fundamentar la significatividad del uso de TIC, basados en la riqueza matemática que surge de los posibles abordajes desplegados para, finalmente, hacer un análisis de las resoluciones con elementos teóricos de la línea de resolución de problemas o escuela anglosajona.

* *P. Barreiro*: Instituto de Educación Superior N° 813 "Profesor Pablo Luppi", Argentina.
P. Leonian: Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.
C. Zuliani: Instituto de Educación Superior N° 813 "Profesor Pablo Luppi", Argentina.

Presentación de la tarea

Contexto: Los estudiantes han trabajado con ecuaciones lineales, tanto herramientas para la resolución de situaciones en contexto extramatemático como en su desarrollo intramatemático. Conocen las funciones lineales a partir de sus distintos registros. Identifican cuál es la pendiente y la ordenada al origen, y saben cómo influyen estos parámetros en su gráfico. Recurren al trabajo algebraico para establecer relaciones y determinar intersecciones en el plano. El trabajo en el aula se desarrolla usualmente tanto de manera individual como grupal, se utilizan softwares específicos y se promueve la argumentación de cada respuesta. Esta actividad está pensada para llevarse a cabo en el nivel medio de escolaridad, momento en el que se trabajan todos los contenidos anteriormente seleccionados. Para el desarrollo de la actividad se propone la modalidad individual de trabajo.

Objetivo: Que los estudiantes exploren, elaboren conjeturas y justifiquen sus afirmaciones en un contexto funcional.

Consigna:[2] Considerar la familia de funciones lineales cuya pendiente y ordenada al origen son números enteros consecutivos. Proponer características que podrían compartir los gráficos de esta familia y justificar las respuestas.

Resolución de la consigna sin uso de herramientas informáticas

Frente a esta consigna, uno podría plantearse distintas resoluciones hechas con *lápiz y papel* a través de un planteo algebraico. Dada la ecuación de una recta escrita en forma explícita, una opción sería pensar que la ordenada al origen es un número consecutivo al que representa la pendiente, obteniendo la expresión:

$$f(x) = y = ax + (a + 1), a \in Z \quad (1)$$

Operando algebraicamente, podemos obtener:

$$y = a(x + 1) + 1, a \in Z \quad (2)$$

[2] Esta consigna fue pensada a partir del trabajo final realizado por la estudiante Juliana Botta en 2015, de la materia Enseñanza de la Matemática I de la Universidad Nacional de General Sarmiento.

En esta manera de expresar la ecuación de una recta en el plano, se podría leer que todas las rectas de la familia pasan por el punto (–1; 1), independientemente del valor que tome el parámetro $a \in Z$.

Sin embargo, otra opción en la resolución de esta consigna podría ser no disponer de ese conocimiento y decidir trabajar con casos particulares de la familia de funciones dada. Por ejemplo, el estudiante puede recurrir a realizar algunos gráficos que permitan inferir la misma condición. En este último caso, sería necesario validar dicha afirmación, por ejemplo, reemplazando el punto (–1; 1) en cualquiera de las expresiones (1) o (2) anteriormente presentadas.

Cabe aclarar que una posible respuesta de los estudiantes al pensar en la resolución de la consigna es a través de características que ya conocen sobre las funciones lineales, por ejemplo, que "dado $a \in Z$ positivo, las rectas serán crecientes" aunque esta característica no pone en juego la relación particular que esta familia de funciones cumple, entre la pendiente y la ordenada al origen.

Otro planteo posible para la resolución de esta consigna podría surgir a partir de pensar que la pendiente es consecutiva (y mayor) de la ordenada al origen. De allí se desprende que

$$y = (a + 1)x + a \; con \; a \in Z \quad (3)$$

Análogamente, podemos llegar a conclusiones similares, aunque el desarrollo de la expresión (3) no permite una lectura directa acerca de cuál es el lugar del plano en el que se intersecan todas las rectas de esta familia de funciones: el punto (–1; –1).

Teniendo en cuenta el trabajo realizado, llegamos a una instancia en la que nos preguntamos si el desarrollo que llevamos a cabo nos impide o dificulta ver alguna otra regularidad o característica de esta familia de funciones lineales. Hemos respondido la consigna, pero no estamos en condiciones de responder a esta última inquietud.

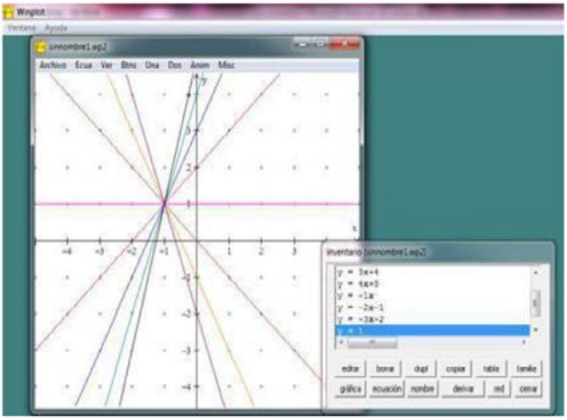
Resolución y análisis de la consigna utilizando TIC

Recurriendo a distintos recursos informáticos, por un lado, podemos seleccionar un software estático[3] (en nuestro ejemplo utilizamos el Winplot) en el cual graficamos varias de las funciones de la familia que cumplan con la condición

[3] A diferencia del software dinámico, este no admite arrastre.

mencionada en la consigna, obteniendo así una imagen como la que se muestra en la figura 1.

Figura 1. Gráficos variados usando Winplot



De la observación de esta figura, estamos en condiciones de realizar las mismas afirmaciones que surgen en el desarrollo hecho con lápiz y papel mencionados en el apartado anterior. La diferencia ahora se centra en que más allá de haber observado una regularidad, se deberá incluir un tipo de validación que no dependa del software utilizado (desarrollo algebraico).

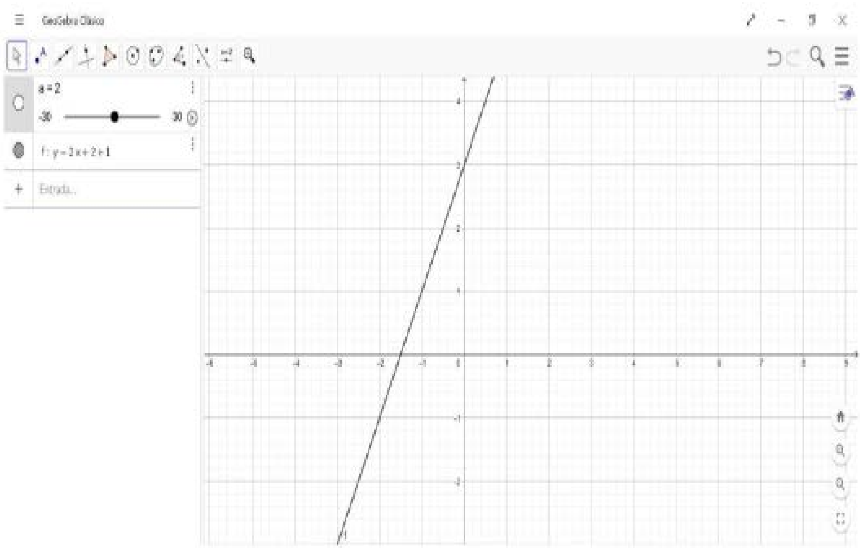
Por lo que hemos mencionado hasta aquí, el desarrollo de la consigna con lápiz y papel, o un software estático, no presenta grandes diferencias en cuanto a la solución o respuestas, aunque, desde el punto de vista didáctico, se utilizaron diferentes registros de representación.

La pregunta que surge ahora es: ¿qué sucede si trabajamos con algún software dinámico? En nuestro caso, utilizaremos el GeoGebra para resolver la situación.

En una primera instancia, podríamos abordar la consigna de la misma manera que el caso anterior, graficando varios casos particulares en el mismo sistema de ejes coordenados. No trabajaremos aquí con esta resolución por ser similar a lo que anteriormente realizamos sin hacer uso de las potencialidades que otorga el programa.

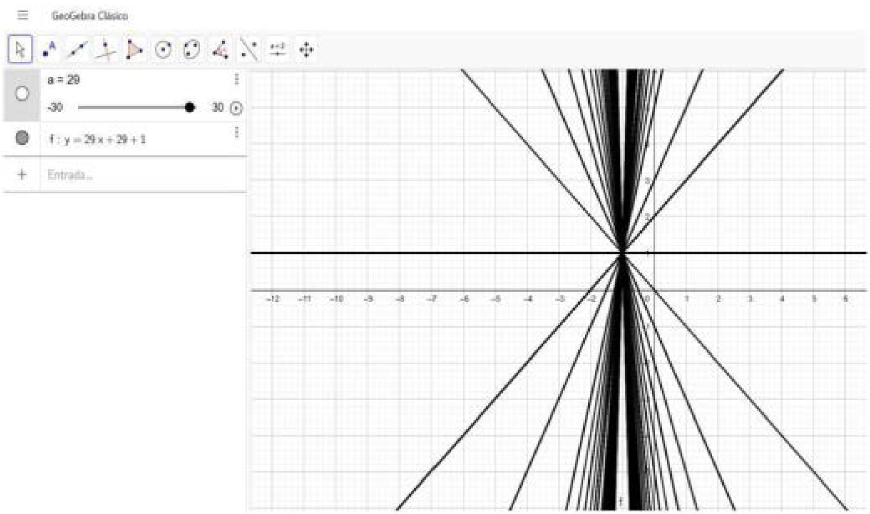
Entonces, podríamos crear un deslizador que nos permita visualizar muchos más casos particulares. Ajustando la configuración de dicho deslizador, tanto en rango como en incremento, obtenemos una variedad mayor de gráficos de funciones como las que estamos buscando, como podemos observar en la figura 2. Así, moviendo el deslizador, platearíamos la misma conjetura que en los casos anteriores: “todas las rectas pasan por el punto (–1; 1)”.

Figura 2. Gráfica para un valor dado, con deslizador, pero sin activar el rastro



¿Qué nos aporta entonces el uso de este software? En esta nueva mirada a la resolución de la consigna utilizando el software dinámico, nos encontramos con una nueva herramienta que nos invita a preguntarnos otras cosas; usaremos la opción “mostrar rastro”, con ella al mover el deslizador se genera lo que se observa en la figura 3.

Figura 3. Mismo ejemplo anterior con el rastro activado



Esta representación, junto con la utilización de otras herramientas del programa que nos permiten acercar la imagen, nos invita a estudiar algunos aspectos de las raíces de las funciones representadas como, por ejemplo, el intervalo de pertenencia. Podemos conjeturar entonces que “las raíces de dichas funciones pertenecen al intervalo $[-2; 0]$”.

Volviendo al caso en el que la ordenada al origen es un número consecutivo del que representa la pendiente, y mayor que él, con la expresión general

$$y = ax + a + 1 \; con \; a \in Z$$

obtenemos lo siguiente en el análisis de sus raíces:

- Si $a = 0$, $y = 1$, entonces la representación gráfica de la función es una recta paralela al eje x, por lo tanto, no tiene raíces.
- Si $a \neq 0$ $y = ax + a + 1$ $(a \in Z)$, entonces

$$0 = ax + a + 1$$

Operando algebraicamente, obtenemos que sus raíces tienen la forma

$$x = -1 - \frac{1}{a} \; (a \in Z - \{0\})$$

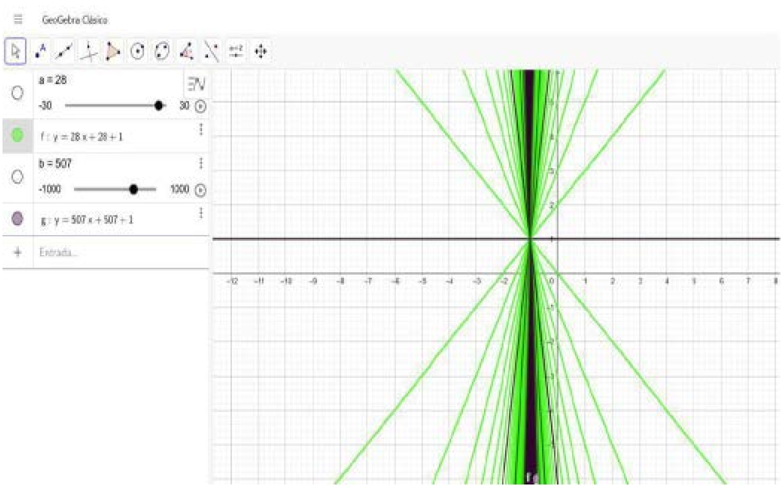
Analizando esta expresión, en las condiciones dadas, podemos afirmar que las raíces de estas funciones son números racionales que pertenecen al intervalo [– 2; 0], toman el valor –2 cuando *a* es igual a 1, el valor 0 cuando *a* es igual a –1, y nunca podrán tomar el valor –1 ya que $-\frac{1}{a}$ debería ser igual a 0 y ello resulta imposible. En la tabla 1 podemos ver el detalle.

Tabla 1. Raíces según posibles valores del parámetro

$x = -1 - \frac{1}{a}$			
$a \leq -1$	$a = -1$	$a = 1$	$a > 1$
$-1 \leq x \leq 0$	$x = 0$	$x = -2$	$-2 \leq x \leq -1$

Una variación a este trabajo podría suceder si la exploración se realiza con otras herramientas que brinda el programa o bien por una elección diferente de parámetros. En el caso de generar dos funciones con las mismas características que las anteriores, pero eligiendo deslizadores en un rango entre –30 y 30 en un caso, y en un rango entre –1000 y 1000 en el otro, activando el rastro en ambos casos y la animación del deslizador, obtendremos un gráfico como el que se muestra en la figura 4.

Figura 4. Rastros para dos rangos diferentes



Seguramente el lector hizo aquí una pausa para realizar la construcción en el GeoGebra y observar la dinámica de estas familias de rectas… ¡esperamos que se haya sorprendido tanto como nosotras!

Esta exploración plantea dos casos en simultáneo, que podrían surgir de propuestas separadas y, eventualmente, habilitar el planteo de conjeturas diferentes. Por un lado, a partir de la construcción en la que el rango del deslizador varía entre –30 y 30, podría conjeturarse que las raíces pertenecen al intervalo [–2; 0]. Por otra parte, desde la otra construcción, la conjetura podría establecer que las raíces pertenecen a un cierto intervalo más reducido que el [–2; 0].

Ahora bien, si se deja correr la animación del rastro en GeoGebra de modo de aumentar considerablemente la cantidad de casos particulares, se advertiría que la última conjetura es falsa. ¿Por qué? Porque se visualizarían las rectas extremas de ese haz que intersecan al eje x una en –2 y otra en 0.

Después del análisis algebraico que detallamos en párrafos anteriores no tenemos dudas de que las limitaciones son del programa, pero ¿cuáles son? Si bien el deslizador está configurado para que su incremento sea de 1 en 1 pasando por todos los números enteros entre –1000 y 1000, la velocidad predeterminada de la animación no permite que quede registro del rastro de todas y cada una de las rectas. Podemos reflexionar entonces, acerca de las potencialidades y las limitaciones del GeoGebra para la tarea propuesta y cómo ellas pueden promover la discusión matemática en el aula.

Tomando como referencia los criterios para el análisis de la pertinencia y significatividad de uso de TIC (Rodríguez, 2022), podemos observar que en la resolución de la consigna no resulta indistinto su uso. En este sentido, hemos visto que el uso del recurso promueve la elaboración de mayor cantidad de conjeturas porque no solo da indicios sobre la posibilidad de encontrar un punto que pertenece a toda una familia de funciones lineales con ciertas características, sino que también nos invita a pensar en condiciones que cumplirán sus raíces. Por otro lado, también nos permite definir y fundamentar nuevas cuestiones. En este sentido, podemos decir que el uso de TIC resulta *imprescindible* (en el sentido explicitado en Rodríguez, 2022). Cabe resaltar que la validación requiere de argumentos que vayan más allá de lo perceptivo que el software muestra. Se requieren argumentos algebraicos.

Por otro lado, podemos observar que el foco de la tarea está puesto en el análisis y resolución de una cuestión matemática, y no en el uso del software dinámico específico, por lo que decimos también que se cumple el criterio de *no perder de vista el objetivo matemático*.

Considerando estos dos aspectos, en el texto mencionado se considera que el uso de TIC es valioso en cuanto a su pertinencia y significatividad. Sin embargo, agregan otros criterios que enriquecen esta valoración. A continuación, detallamos brevemente algunos de ellos.

- Podemos decir que la consigna *favorece la búsqueda de pruebas matemáticas*. Esto se debe a que para justificar las conjeturas planteadas y las razones de por qué es válido lo planteado, se pueden poner en juego distintos recursos algebraicos, entre ellos: elección adecuada de símbolos, interpretación del significado simbólico de "cortar al eje *x*", la necesidad de apelar al álgebra para argumentar sobre un conjunto infinito de casos, etcétera.
- La consigna no indica que la resolución debe incluir uso de TIC, los estudiantes deberán decidir si lo realizan "a mano" o si les es útil usar algún software específico. De esta manera, se cumple el criterio de *libertad para apelar a las TIC*.
- En caso de que el estudiante quiera utilizar TIC para el desarrollo de la consigna, debe decidir qué software emplear. Esto implica que tiene la *posibilidad de elección de qué recurso tecnológico utilizar*.

Por todo lo que mencionamos anteriormente, podemos decir que la tarea incluye un uso pertinente y significativo de TIC.

Análisis de la tarea en términos de la línea didáctica de resolución de problemas

Además de la riqueza que la tarea conlleva en cuanto al uso de TIC, consideramos que la consigna elegida para la tarea podría resultar un *problema*, en términos de la línea teórica de Resolución de Problemas (Pochulu y Rodríguez, 2015), considerando estudiantes que respondan a los conocimientos planteados en el contexto que desarrollamos en la primera página de este capítulo. Esto podemos afirmarlo ya que la consigna no implica un camino obvio de resolución, hay cierta complejidad que va a ser resuelta a partir del desarrollo de estrategias por parte de los estudiantes, lo que implica que cada uno "explore, experimente, analice sus avances, cambie de rumbo, reflexione sobre lo hecho, advierta cómo está pensando y encarando la tarea, etc." (Pochulu y Rodríguez, 2015, p.154) y así, se pongan en juego diversas estrategias heurísticas tanto en el momento de entender la consigna como de abordar su resolución. A continuación, mostramos algunas de las heurísticas que se ponen en juego en el desarrollo de la consigna, en función del trabajo que hemos detallado anteriormente.

- *Trabajar hacia adelante*: el estudiante puede construir la expresión $y = ax + (a + 1)$, para $a \in Z$, a partir de los datos que se dan en la consigna. Análogamente con el otro caso, en el que la expresión es $y = (a + 1)\, x + a$, para $a \in Z$.
- *Recurrir a casos particulares*: el estudiante puede hacer gráficos de rectas según las condiciones dadas, ya sea a mano o con un software específico, sin pretensión de exhaustividad. Hemos visto que esto sucede en el desarrollo "a mano" (con lápiz y papel), y en el que se utiliza un software específico no dinámico (figura 1). Por otro lado, también podría utilizar un software dinámico, como el GeoGebra, en el que distintas herramientas le permitan la elaboración de conjeturas, como, por ejemplo, el uso de deslizadores (figuras 2 y 3). En este último caso, hemos visto el uso de esta herramienta no solo como una forma de ampliación de la cantidad de casos particulares, sino también como disparador en el análisis de las condiciones de las raíces (ampliación del intervalo para el deslizador).
- *Realizar un análisis sistemático de casos*: al asignarle distintos valores a los parámetros en las expresiones de las familias de funciones dadas, el estudiante puede generalizar conclusiones sobre posibles características de las rectas, por ejemplo, que todas ellas pasan por el punto $(-1; 1)$, o bien que las raíces de las funciones son números racionales, o también podrían concluir que las raíces pertenecen al intervalo $[-2;1) \cup (-1;0]$.
- *Examinar la solución obtenida a través de otra representación*: una vez analizada la situación utilizando el recurso tecnológico, el estudiante podría emplear un desarrollo algebraico para complementar su resolución, de manera tal de validar las conjeturas realizadas en la primera instancia del trabajo. Esto podemos verlo cuando debe analizar la expresión obtenida de la raíz para concluir a qué conjunto numérico pertenece, o bien para decir que *la raíz nunca va a ser* -1 *porque para eso la expresión* $\frac{-1}{a}$ *tendría que valer* 0.

Teniendo en cuenta todo lo analizado, podemos decir que esta consigna puede ser considerada un *problema* en términos de la línea de Resolución de Problemas (Pochulu y Rodríguez, 2015) y que la misma es rica pensando en las heurísticas que habilita para su resolución.

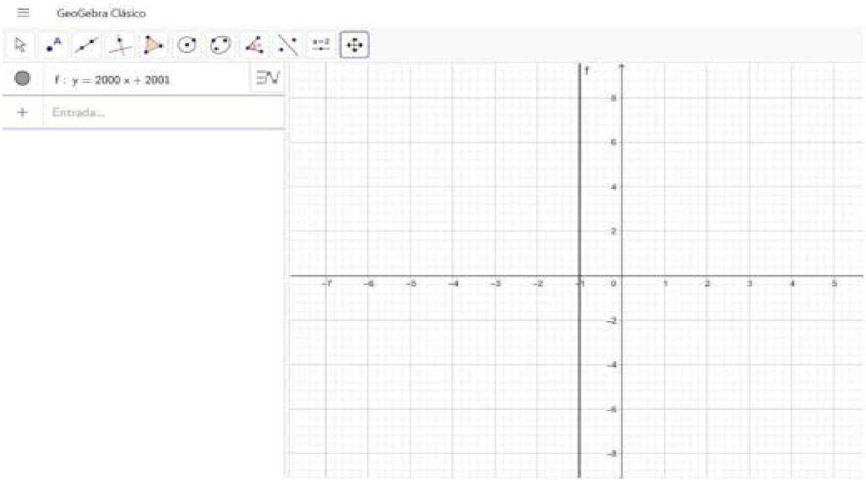
A modo de cierre

Intentamos fundamentar en este capítulo, que una tarea en la que resulta pertinente y significativo el uso de TIC puede analizarse también desde la resolución de problemas como línea didáctica. Así, una propuesta en la que el uso de recursos informáticos facilita elaborar nuevas conjeturas a partir de una exploración dinámica, puede resultar un problema en el que aparezcan distintas heurísticas en el proceso de resolución. En este punto, muchas veces nos preguntamos cómo darle continuidad a este tipo de trabajo en el aula. Intentando responder a ese interrogante, creemos que una alternativa posible, podría ser poniendo en tensión las afirmaciones surgidas a partir de lo que el estudiante observa en la pantalla de su computadora o celular, y su explicación matemática. De esta manera, una propuesta de tarea sería que, a partir del trabajo anterior como contexto, nos propongamos como objetivo que los estudiantes argumenten matemáticamente la validez de afirmaciones que evidencian las limitaciones del recurso. En este marco, les propondríamos como consigna:

> Juan pensó lo siguiente: "Si f(x) = 2000x + 2001, su gráfico es una recta vertical". Decidir si la afirmación de Juan es verdadera o falsa justificando adecuadamente la respuesta.

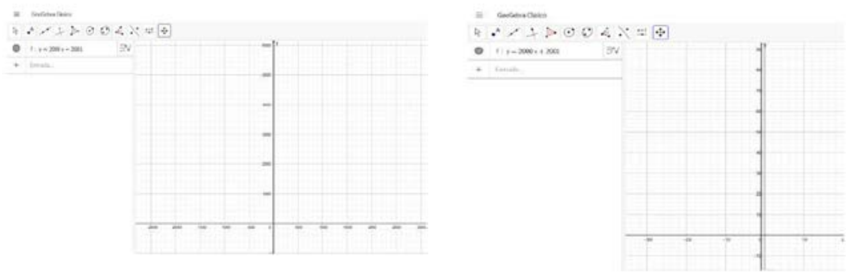
Dejamos a cargo del lector el análisis de la misma en términos de la *pertinencia* y *significatividad* de uso de TIC (Rodríguez, 2022), así como también del concepto de *problema*, según el trabajo de Pochulu y Rodríguez (2015). Solo a modo general, decimos que aquí lo visual impacta fuertemente tanto en la formulación de la conjetura como en una posible validación gráfica, que resulta incorrecta desde lo matemático. Observemos en la figura 5 qué sucede al ingresar en la barra de entrada del programa GeoGebra la fórmula de la función presentada.

Figura 5. Gráfico que muestra el GeoGebra



Si para intentar corroborar o bien refutar la conjetura, intentamos utilizar el zoom, obtenemos gráficos como los que se muestran en la figura 6. Se ve la recta cada vez más próxima al eje *y* en un caso, y hasta parecieran coincidir en otro.

Figura 6. Gráficos que muestran el GeoGebra al aplicar zoom



Creemos indispensable entonces, fomentar la necesidad de argumentar matemáticamente la validez de las afirmaciones que se planteen a partir del desarrollo de la consigna tal como se plantea en el objetivo, con la posibilidad, además, de trabajar las limitaciones del recurso.

De manera similar, y sumando al contexto de la tarea propuesta en este capítulo, otra opción podría estar orientada a profundizar el trabajo algebraico para establecer otras relaciones o nuevos significados. Entonces, con el objetivo de que los estudiantes resignifiquen afirmaciones surgidas de la tarea anterior modificando algunas condiciones, podríamos presentarle la siguiente consigna.

> Sea $g{:}R \rightarrow R$ una familia de funciones lineales cuya pendiente y ordenada al origen son números enteros. Decidir qué condiciones deberían cumplir estos coeficientes para que los gráficos de estas funciones se intersecten en el punto (-1;2).

Como en el caso anterior, el análisis de la consigna queda a cargo del lector pues nuestra intención es dejar planteada la inquietud de cómo a partir de una propuesta pueden abrirse distintos caminos: uno orientado a poner énfasis en la validación y la argumentación en matemática con las potencialidades y limitaciones que nos ofrecen las TIC, y otro encaminado al estudio de otras regularidades que profundicen el trabajo algebraico a partir de la función lineal.

Referencias bibliográficas

Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma, 30(2)*, 159-178. http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/viewFile/2019/884.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comps.) (2015). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Ediciones UNGS y EDUVIM.

Rodríguez, M. (Coord.) (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática.* Ediciones UNGS.

7. Análisis ontosemiótico de la resolución de un problema geométrico

*María Laura Distéfano y Mario Álvarez**

Introducción

Las generaciones a las que pertenecen nuestros actuales estudiantes son nativas digitales, por lo que resulta casi imprescindible incorporar la tecnología a la actividad que se desarrolla en el aula, y en particular, en el aula de matemática. Esto nos conduce a un desafío como docentes, pues debemos repensar nuestra práctica, readaptando nuestras clases, definiendo estrategias y reflexionando sobre cuál es la manera más beneficiosa o más productiva de integrar la tecnología en cada caso.

Por otra parte, la tecnología se va tornando cada vez más accesible. Los estudiantes tienen a su alcance dispositivos e insumos ligados a ella, tales como computadoras, teléfonos móviles, conexión a internet en las instituciones educativas, software libre y aplicaciones de descarga gratuita.

El desafío que se nos plantea como docentes es rediseñar nuestras clases incorporando la tecnología, pero no como un complemento a lo mismo que ya hacíamos. El propósito es lograr formular problemas que nos permitan explotar

* *M. L. Distéfano*: Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.
M. Álvarez: Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.

en el aula el potencial de estos recursos tecnológicos, de modo que nuestras clases estén más focalizadas en analizar, interpretar, conjeturar y argumentar que en resolver actividades mecánicas o vacías de reflexión.

En este capítulo proponemos un problema geométrico referido a cuadriláteros, cuyo enunciado es lo suficientemente amplio como para que el estudiante decida con qué herramienta tecnológica trabajar y lo lleve a buscar estrategias de construcción, realizar observaciones, discutir posibilidades, formular preguntas, exponer conjeturas, y arribar a la necesidad de una demostración.

Presentamos una posible resolución, que es analizada con herramientas del enfoque ontológico y semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), desarrollado por los doctores Juan Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font (2008, 2019). El EOS es un enfoque teórico de la educación matemática que provee no solo constructos teóricos, sino también metodológicos y permite abordar aspectos que hacen al diseño, desarrollo y evaluación de las trayectorias didácticas.

Presentación de la tarea

Contexto: La tarea propuesta está pensada para ser trabajada con estudiantes de primeros años de profesorados de matemática, pero también podrían ser de nivel medio. Para el momento de implementación de esta tarea se supone que los estudiantes conocen la clasificación y propiedades generales de triángulos y cuadriláteros, figuras semejantes, criterios de congruencia y simetría. Están familiarizados con representaciones gráficas de figuras y construcciones dinámicas a través del uso de algún software. Esta tarea se inserta en una fase de consolidación sobre el estudio de las propiedades de estas figuras. El docente espera que los estudiantes puedan formular conjeturas y reconocer la necesidad de validar formalmente lo que el software sugiera como patrones. La propuesta consiste en trabajar en grupos para intercambiar opiniones y criterios. La mediación del docente debería darse en intervenciones esporádicas que sirvan para guiar, ajustar o recuperar el trabajo que los estudiantes van haciendo.

Objetivo: Que el estudiante conjeture y valide propiedades de cuadriláteros.

Consigna: Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera y EFGH el cuadrilátero que resulta de unir de manera continua los puntos medios de cada lado. Analizar y fundamentar las características del cuadrilátero EFGH que se pueden anticipar si conocemos las del ABCD.

La resolución

La forma de resolución del problema planteado no es única. Se presenta aquí una posible, y es la que se utilizará para hacer los análisis ontológicos y semióticos. Algunas de las conjeturas a las que se arriba en la resolución constituyen el denominado teorema de Varignon.

El enunciado no especifica característica alguna del cuadrilátero ABCD, por lo que podría suponerse, *a priori*, que para la resolución se necesitará generar numerosas figuras para contemplar distintos casos que permitan inferir alguna conjetura. Este requerimiento puede inducir la idea de utilizar algún dispositivo tecnológico, pues realizar numerosas figuras –con una aceptable precisión en su construcción para que las observaciones sean plausibles– sería muy trabajoso de realizar en papel mediante el uso de instrumentos de geometría, como regla, escuadra, compás, transportador, etcétera. Esto pone en evidencia la necesidad de utilizar algún tipo de graficador. GeoGebra[1] resulta apropiado por permitir representaciones dinámicas, en las que se pueden variar selectivamente distintas características de los cuadriláteros ABCD a estudiar. Además, su gratuidad favorece el acceso y también permite ser instalado en teléfonos móviles.

Dado que no se explicitan características del cuadrilátero ABCD, el problema es abordable desde distintas perspectivas, suponiendo –como punto de partida– alguna característica de dicho cuadrilátero, por ejemplo, que se encuadre en algún tipo particular dentro de la clasificación de cuadriláteros, o suponer que se conoce su área o su perímetro o la medida de sus diagonales, entre otras. Por lo tanto, se podría comenzar por la construcción de distintos casos particulares, con la expectativa de poder observar alguna regularidad en el cuadrilátero EFGH.

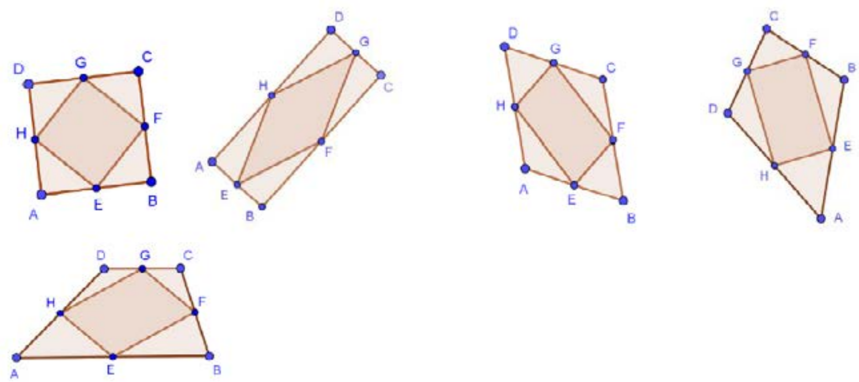
Una posibilidad es iniciar la exploración construyendo un *cuadrado* ABCD, para luego marcar los puntos medios de cada lado. Para esto último, es importante usar la herramienta que provee GeoGebra (o algún recurso equivalente) dado que, si se modifica la figura, que involucra múltiples formas de hacerlo, los puntos se mueven manteniendo su característica de punto medio. Si se los marcara de manera intuitiva es posible que, al mover la figura, el punto quede

[1] Disponible en: https://www.GeoGebra.org/download?lang=es

fijo en el lugar en que fue marcado (por no haber estado efectivamente sobre el lado) o que no se mantenga su condición de estar a igual distancia de los vértices (por no haberlo estado desde un comienzo). Una vez ubicados los cuatro puntos medios (E, F, G y H), es posible construir el cuadrilátero que los tiene como vértices. Lo que se observa en este caso es que EFGH es un cuadrado (figura 1).

Dado que GeoGebra no tiene, por defecto, comandos para la construcción de polígonos no regulares (como ciertos paralelogramos, trapecios o romboides[2]) se debe recurrir a las características y las propiedades de cada uno de ellos para construirlos, vía las herramientas pertinentes. Una vez construidos los distintos cuadriláteros ABCD, se procede a marcar los puntos medios para la construcción del cuadrilátero EFGH. En estos casos, el cuadrilátero EFGH se observa como un paralelogramo (figura 1).

Figura 1. Casos particulares del cuadrilátero ABCD

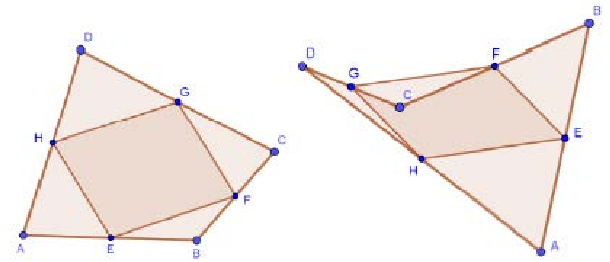


Para cualquiera de estos cuadriláteros especiales, la construcción dinámica permite arrastrar sus vértices, cambiando la posición y las dimensiones de las figuras y en todos los casos parece observarse que el cuadrilátero EFGH resulta un paralelogramo.

[2] Denominamos *romboide* al cuadrilátero no regular con dos pares de lados consecutivos congruentes, siendo el primer par de lados diferente al segundo par de lados. Debe tenerse en cuenta que esta figura recibe nombres distintos en otros países, tales como *deltoide*, *cometa* o *trapezoide simétrico*.

Pero la potencialidad de la construcción hace que se pueda considerar un cuadrilátero ABCD convexo genérico e incluso uno que sea cóncavo. En estos casos genéricos aún se mantiene con fuerza la conjetura de que efectivamente EFGH es un paralelogramo, como puede verse en la figura 2.

Figura 2. Casos genéricos del cuadrilátero ABCD



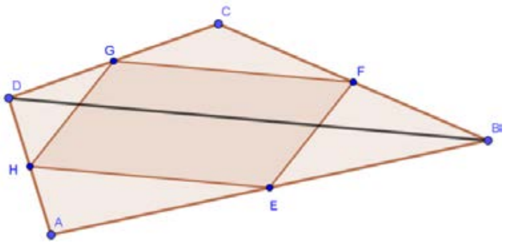
Conjetura 1: cualquiera sea el cuadrilátero ABCD, el cuadrilátero EFGH –que resulta de unir de manera continua los puntos medios de cada lado– es un paralelogramo.

Llegados a este punto, es probable que los estudiantes acepten como válida la conjetura basados en su observación visual, tal como anticipan Barreiro, *et al.* (2017):

> Al admitir el uso de tecnología es muy probable que nuestros alumnos se convenzan de la validez matemática de algo, "porque lo ven", "porque la pantalla lo muestra", "porque es la respuesta que da la calculadora", etcétera. Es una validación externa, diríamos en términos didácticos. El alumno "cree" lo que ve, como si fuera una cuestión de fe más que de convicción con fundamentos matemáticos (p. 67).

Resulta entonces un desafío de interés particular poner en evidencia la necesidad de validar la conjetura y encontrar la forma de efectuar dicha validación. Nuevamente el software puede facilitar esta iniciativa, trazando líneas auxiliares para explorar distintos razonamientos que conduzcan a una demostración formal. Una de esas líneas auxiliares podría ser una de las diagonales del ABCD, para considerar los dos triángulos que se forman, como se observa en la figura 3.

Figura 3. Representación genérica para validar la propiedad del polígono EFGH



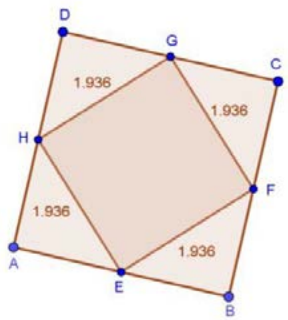
Para probar la conjetura basta con probar el paralelismo de los lados opuestos del cuadrilátero EFGH.

Como se observa en la figura 3, la diagonal DB determina los triángulos DBC y DAB. En ellos, los segmentos GF y HE son las bases medias respectivas. Dado que la base media de un triángulo es paralela al lado con el que no tiene puntos en común, resulta que GF // DB y que DB // HE. Por transitividad, tenemos que GF // HE. Análogamente se puede probar el paralelismo de los lados GH y EF, considerando los triángulos ACD y ABC.

Una vez confirmado que es posible anticipar que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo, cabe indagar en qué casos particulares del ABCD se podría también anticipar el *tipo* de paralelogramo. Se presentan a continuación distintos casos.

Si ABCD es un *cuadrado*, podemos construir algunos casos particulares y, por ejemplo, medir los lados con la herramienta "Distancia o Longitud", como se observa en la figura 4. Asimismo, es necesario medir los ángulos, con la herramienta "Ángulo" para decidir que es un cuadrado.

Figura 4. Caso particular en el que ABCD es un cuadrado



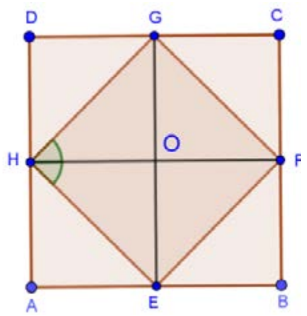
De esta instancia de exploración surge la siguiente conjetura:

Conjetura 2: si el cuadrilátero ABCD es un cuadrado, el cuadrilátero EFGH también lo es.

Desde ya que el hecho que el software evidencia las mismas longitudes y los cuatro ángulos rectos, no alcanza para garantizar que este hecho sea cierto siempre y nuevamente surge la necesidad de probar formalmente la conjetura establecida, necesidad que muchas veces debe estar promovida por el docente.

Ya se probó que EFGH es un paralelogramo, ahora se debe probar que sus lados son congruentes y que sus ángulos interiores son rectos. En la figura 5 se tiene una representación general cuando ABCD es un cuadrado. En ella se observa que las diagonales de EFGH son las bases medias del cuadrado ABCD, por lo tanto, son perpendiculares y se cortan en sus puntos medios. Por consiguiente, los triángulos rectángulos EOF, FOG, GOH y HOE son congruentes, y en particular los lados EF, FG, GH y HE. Respecto de los ángulos internos de EFGH, se puede considerar el triángulo rectángulo EOH que resulta isósceles (pues EO es congruente con OH), luego el ángulo OHE mide 45°, pero dado que los ángulos HOG y EOH son congruentes, resulta que el ángulo GHO también mide 45°. Por suma de ángulos consecutivos se prueba que el ángulo GHE es recto.

Figura 5. Representación genérica para ABCD cuadrado

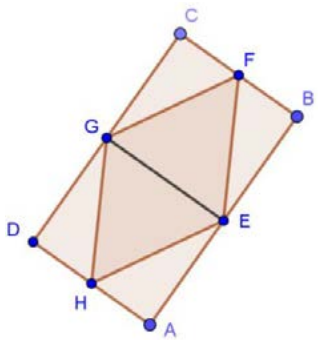


Si ABCD es un *rectángulo*, después de explorar varios casos particulares y medir con herramientas de GeoGebra los lados y los ángulos de EFGH, es posible formular la siguiente conjetura.

Conjetura 3: si el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, el cuadrilátero EFGH es un rombo.

Nuevamente, es necesario validar esta conjetura. Tal como se observa en la figura 6, al construir el EFGH quedan determinados los triángulos rectángulos FCG, EBF, GDH y EAH, que resultan ser congruentes (por criterio de comparación "lado – ángulo (recto) – lado"). Por lo tanto, los lados EF, FG, GH y HE resultan ser congruentes. De esta forma se concluye que los lados de EFGH son congruentes entre sí.

Figura 6. Representación genérica para ABCD rectángulo



De manera análoga a los procedimientos anteriores se puede continuar suponiendo la tipología del cuadrilátero ABCD y conjeturar la tipología del EFGH correspondiente. Es decir, mediante una fase de exploración se puede arribar a la formulación de las conjeturas que se presentan a continuación, cada una de las cuales deberá ser validada formalmente (no lo hacemos aquí para agilizar la lectura del capítulo), y son ilustradas en las figuras 7 y 8, respectivamente.

Conjetura 4: si el cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles, el cuadrilátero EFGH es un rombo.

Conjetura 5: si el cuadrilátero ABCD es un romboide, el cuadrilátero EFGH es un rectángulo.

Figura 7. Representación genérica para ABCD trapecio isósceles

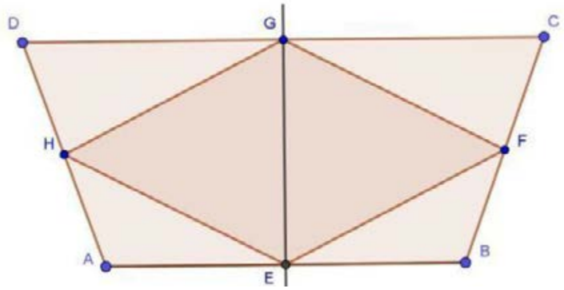
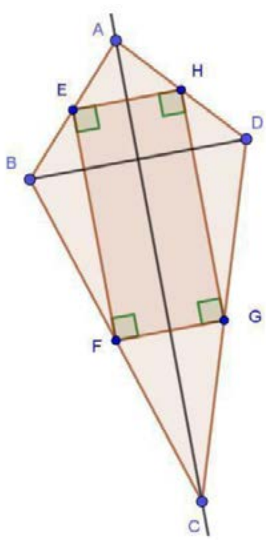


Figura 8. Representación genérica para ABCD romboide



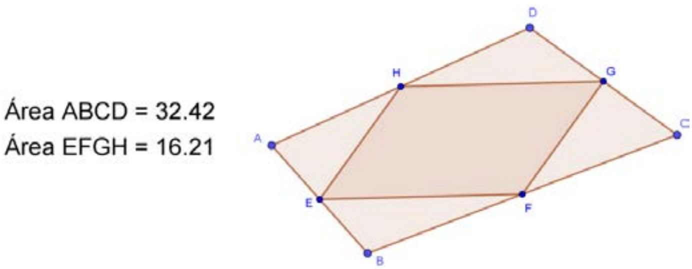
Hasta aquí se ha demostrado que determinadas características del cuadrilátero ABCD permiten anticipar el tipo de cuadrilátero que resulta EFGH.

Existen otras posibles relaciones a explorar vinculadas a determinadas magnitudes, como, por ejemplo, entre las áreas de los dos cuadriláteros o entre el perímetro de EFGH y las longitudes de las diagonales de ABCD. Es posible que la iniciativa de realizar estas exploraciones no sea espontánea ni evidente en los estudiantes y que requiera de una pertinente intervención docente para inducir una indagación en estas relaciones.

Para una primera exploración se puede sugerir el uso de la herramienta "Área" de GeoGebra. Se puede trabajar sobre un cuadrilátero ABCD genérico y el correspondiente EFGH, obtener sus respectivas áreas y desplazar los vértices del ABCD para obtener múltiples cuadriláteros observando simultáneamente el comportamiento de los valores correspondientes a cada área. Esta tarea sería sumamente dificultosa de realizar construyendo mediante el uso de lápiz y papel y calculando cada área en particular, además de insumir muchísimo tiempo. Nuevamente la herramienta tecnológica permite explorar sobre una inmensa cantidad de casos en apenas unos minutos.

Al mover libremente uno de los vértices, se van actualizando los valores determinados por el software para cada una de las áreas, como se ejemplifica en la figura 9.

Figura 9. Caso particular de exploración numérica sobre las áreas



De estas observaciones surge la siguiente conjetura:

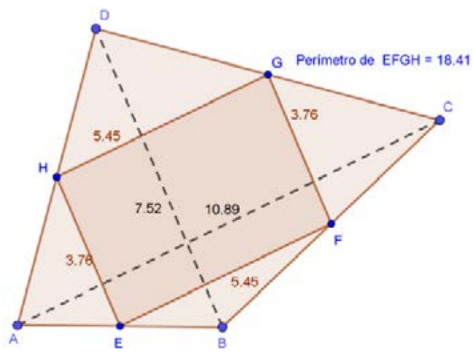
Conjetura 6: el área del cuadrilátero ABCD es el doble de la del cuadrilátero EFGH.

Aparece una observación importante en esta fase exploratoria debido a la limitación del recurso utilizado: en determinadas posiciones, al arrastrar y modificar las figuras, los valores de las áreas no siempre reflejan exactamente que uno es el doble del otro, solo se cumple en forma aproximada. Por lo tanto, se constituye con más fuerza el hecho de que la observación solo permite aproximarse a una conjetura.

Por último, es posible anticipar el valor del perímetro de EFGH si se conocen las longitudes de las diagonales de ABCD. Se puede sugerir a los estudiantes que, mediante la herramienta "Distancia o Longitud", determinen la longitud de distintos segmentos (lados y diagonales) de ambos cuadriláteros y que obtengan distintas sumas para indagar alguna regularidad, desplazando los vértices del ABCD para obtener distintos cuadriláteros. Se espera que de esta exploración pueda surgir la siguiente conjetura, que se ilustra en la figura 10.

Conjetura 7: el perímetro del cuadrilátero EFGH es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero ABCD.

Figura 10. Relación entre perímetro del EFGH y suma de las diagonales del ABCD



Si bien para el caso de estas dos últimas conjeturas no se presenta explícitamente la correspondiente validación formal, para agilizar la lectura de este capítulo, es claro que la misma debe ser efectuada como parte del proceso de resolución.

Configuración epistémica y análisis

A continuación, se presenta el análisis de la resolución del problema a través de una configuración. Esta potente herramienta propuesta por el EOS permite un análisis minucioso de los objetos primarios que intervienen y las relaciones que se establecen entre ellos (Font y Godino, 2006; Godino, Batanero y Font, 2008). Dado que la resolución presentada es experta, la configuración realizada es epistémica. Las configuraciones epistémicas constituyen una guía para el análisis de las configuraciones cognitivas que se realicen a partir de las resoluciones de los estudiantes. En la tabla 1 se detallan los objetos primarios que intervienen en este problema.

Tabla 1. Objetos primarios que constituyen la configuración epistémica del problema

Objetos primarios	Descripción
Situación problema	Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera y EFGH el cuadrilátero que resulta de unir de manera continua los puntos medios de cada lado. Analizar y fundamentar las características del EFGH que se pueden anticipar si conocemos las del ABCD.
Lenguaje	• Coloquial • Figural • Notación de la geometría sintética
Definiciones/ Conceptos	• Cuadrilátero • Clasificación de cuadriláteros • Paralelismo • Punto medio de un segmento • Base media • Diagonales • Simetría (central y axial) • Congruencia • Perímetro • Área
Propiedades	• Propiedades que caracterizan a cada tipo de cuadrilátero. (Previa) • Propiedades de las bases medias. (Previa) • Transitividad del paralelismo. (Previa) • Criterios de congruencia de triángulos. (Previa) • Si se unen de manera continua los puntos medios de cada lado de un cuadrilátero cualquiera se forma un paralelogramo. (Emergente) • Si el cuadrilátero ABCD es un cuadrado, el EFGH también lo es. (Emergente) • Si el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, el EFGH es un rombo. (Emergente) • Si el cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles, el EFGH es un rombo. (Emergente) • Si el cuadrilátero ABCD es un rombo, el EFGH es un rectángulo. (Emergente) • Si el cuadrilátero ABCD es un romboide, el EFGH es un rectángulo. (Emergente) • El área del cuadrilátero ABCD es el doble del área del EFGH. (Emergente) • El perímetro del paralelogramo EFGH es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del ABCD. (Emergente)

Objetos primarios	Descripción
Procedimientos	• Construcción de cuadriláteros mediante herramientas de GeoGebra. • Determinación de puntos medios mediante herramientas de GeoGebra. • Desplazamiento arbitrario de uno o varios vértices del cuadrilátero original (ABCD) para obtener distintos cuadriláteros. • Determinación de las características del cuadrilátero EFGH según los distintos tipos del cuadrilátero ABCD. • Obtención de la medida de ángulos interiores, segmentos y áreas utilizando las herramientas correspondientes de GeoGebra. • Construcción de la demostración formal de las propiedades emergentes a través de propiedades y postulados propios de la geometría sintética.
Argumentos	• Argumentaciones que están implícitas o tácitas en las construcciones de las figuras confeccionadas para poder efectuar la exploración. A modo de ejemplo se detallan las que intervendrían en una posible construcción del rectángulo: ◊ Tranzando dos rectas paralelas (m y n) y una perpendicular a ellas (p), los ángulos que se forman entre m y p, y entre n y p, son rectos. ◊ Si se traza de una recta q paralela a p, también es perpendicular a m y a n, pues los ángulos correspondientes entre paralelas (p y q) cortadas por una transversal (m) son congruentes. El mismo análisis vale para las rectas p y q cortadas por la transversal n. ◊ Se forma un cuadrilátero con vértices en las intersecciones de las rectas. Ese cuadrilátero es un rectángulo pues tiene dos pares de lados paralelos y sus ángulos interiores son rectos. • Argumentaciones que intervienen en la validación formal de las conjeturas formuladas. A modo de ejemplo, se presentan las que intervienen en la prueba de la conjetura 1: ◊ Probar la conjetura implica probar que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo. ◊ Para probar que un cuadrilátero es un paralelogramo basta con probar que los lados opuestos son paralelos pues esa es la definición de paralelogramo. ◊ Como cada base media de un triángulo es paralela al lado con el que no tiene puntos en común, es apropiado dividir al cuadrilátero ABCD en dos triángulos trazando cada diagonal, para utilizar la propiedad de la base media. ◊ Cada par de lados opuestos del cuadrilátero EFGH es paralelo al mismo segmento (la diagonal respectiva) entonces, por transitividad, son paralelos entre sí.

La *situación problema* planteada es lo suficientemente amplia como para no inducir al estudiante a ningún tipo particular de metodología de resolución. Esa característica podría llevarlo a trabajar de una manera intuitiva y en forma exploratoria. Como consecuencia de prever que dicha exploración requiere de numerosos casos, debería advertir la ventaja de trabajar con un software de geometría dinámica, pues puede proporcionar todas las figuras que el usuario desee con un mínimo de trabajo previo, es decir, todo lo contrario de un trabajo "a mano". En este último caso no solo se requeriría de mucho más tiempo sino que, además, para que cada figura esté correctamente construida se requiere de instrumentos de geometría como regla, compás, escuadra y transportador. Además, las mediciones efectuadas mediante estos instrumentos no tendrán la precisión de aquellas realizadas por el software. La obtención de gran cantidad de gráficos representando casos muy diversos permitirá abordar la etapa de análisis y elaboración de conjeturas. Además del análisis, en el enunciado se pide una *fundamentación*, lo cual debe conducir a la búsqueda de pruebas matemáticas que confirmen o refuten las conjeturas formuladas.

El *lenguaje* utilizado en la resolución involucra lenguaje figural, lenguaje coloquial y lenguaje simbólico. El primero está presente en la fase exploratoria mediada por el software, así como también en las posibles figuras de análisis que se construyan en el momento de efectuar la demostración formal. El enunciado está formulado en el registro coloquial. Este registro también es el que predomina en las demostraciones formales, en las que además aparecen algunas representaciones simbólicas con relación a las figuras. Esta preponderancia del lenguaje coloquial podría estar determinada por el hecho de trabajar en el contexto de la geometría sintética.

Con relación a las *definiciones/conceptos*, puede observarse que, si bien parece que el problema está circunscripto a los cuadriláteros, interviene un gran número de definiciones o conceptos de otros objetos, que deben ser ya conocidos por los estudiantes para poder alcanzar un nivel de resolución como el presentado. Esto pone en evidencia la complejidad de la tarea propuesta.

Entre las *propiedades* que intervienen en la resolución, se puede observar que algunas de ellas son previas y participan en la construcción de las demostraciones formales. Otras serán un objeto emergente, provenientes de alguna conjetura formulada durante la exploración en GeoGebra, y serán las que requieran de una demostración formal.

Los *procedimientos* aparecen predominantemente en dos momentos de la resolución: los que están ligados a las construcciones dinámicas (que son guiadas por las definiciones y las propiedades de cada tipo de cuadrilátero) y los requeridos por las demostraciones formales (por ejemplo, trazado de rectas auxiliares).

Los *argumentos* se ponen en evidencia en las mismas fases que los procedimientos: en el momento de construir cuadriláteros con determinadas características (en este caso podrían estar implícitos en las decisiones de los pasos a seguir en la construcción y en la elección de las herramientas adecuadas entre aquellas que provee GeoGebra) y durante la construcción de las demostraciones formales.

Algunas reflexiones finales

El uso de la herramienta informática en este problema geométrico aparece en un momento diferente del tradicional. Los gráficos no se realizan de manera ilustrativa para alguna propiedad que se haya enunciado o como figura de análisis que sea soporte de una demostración. Aquí aparece en una fase exploratoria, en la que los estudiantes no saben *a priori* qué van a obtener a partir de la búsqueda y de la inspección visual. Además, las características dinámicas de las representaciones logradas facilitan que los casos a observar puedan ser realmente numerosos.

Como puede apreciarse en las figuras intercaladas en el texto, para la resolución presentada se trabajó con la ventana gráfica de GeoGebra, pero sin ejes ni cuadrícula. Esta característica orienta el uso de herramientas de geometría sintética. Pero debe tenerse en cuenta que si se hubiera utilizado la ventana gráfica con los ejes visibles (y, eventualmente, también la cuadrícula), el trabajo podría haberse encaminado al contexto de la geometría analítica, generando otra forma de resolución en la que habrían intervenido otros conceptos como el de pendiente, o el uso de coordenadas. También se observaría una diferencia en el lenguaje utilizado en la resolución, pues se tornaría más simbólico y menos coloquial. Es decir que una misma herramienta tecnológica puede potenciar distintas formas de trabajo para un mismo problema.

La construcción de una configuración epistémico-cognitiva permite analizar de manera minuciosa los conceptos, las propiedades y los procedimientos que están involucrados en una tarea, cuáles son los objetos matemáticos previos y cuáles serán los emergentes. Eso puede dar lugar a potenciar algunas prácticas matemáticas que nos interesen particularmente, poniendo énfasis en determinados aspectos de la tarea, o agregar/quitar preguntas en función de la dirección que deseamos darle, o reformularla a futuro para ser utilizadas con estudiantes de próximas cohortes. El desagregado que aparece en la configuración también evidencia la complejidad que la tarea involucra, lo que puede resultar de suma utilidad para analizar si está al alcance de las posibilidades de nuestros estudiantes o para programar el tiempo que puede requerir su resolución. Asimismo, permite realizar un análisis más riguroso de las posibles respuestas o producciones de los estudiantes, así como también clasificar o categorizar los posibles errores, retroalimentando la formulación de la tarea o permitiendo el diseño de otras que favorezcan la realización de las prácticas matemáticas que se detectaron como menos afianzadas o logradas por los estudiantes.

Es necesario destacar que la resolución de este problema pone en evidencia la necesidad y la relevancia de la *demostración* en matemática. El trabajo exploratorio, que está ampliamente facilitado por el software de geometría dinámica, debería generar en los estudiantes la pregunta respecto de si las regularidades que se van observando en el cuadrilátero EFGH (ser un paralelogramo, tener la mitad del área, etcétera) son invariantes, en *cualquier caso*, aún en los que no se hayan representado durante la exploración. Precisamente, en esa instancia se pone de manifiesto la necesidad de realizar la demostración formal que valide la conjetura formulada a partir de la exploración.

La implementación en el aula de este problema probablemente requerirá de la mediación del docente en distintos momentos, para orientar alguna acción, para recuperar los objetos emergentes, para poner de manifiesto la necesidad de la demostración en matemática como requerimiento básico del quehacer matemático, entre otras.

Referencias bibliográficas

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *10*, 7-37.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39* (1), 37- 42.

Rodríguez, M. (Coord.) (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.

8. Relación entre expresiones algebraicas de funciones y sus representaciones gráficas desde una perspectiva cognitivista

*Cristina Camós y Lorena Guglielmone**

Introducción

En este capítulo se presenta una tarea sobre funciones de variable real que resolvemos con y sin TIC, con la intención de mostrar el uso significativo de ellas. Posteriormente, se realiza un análisis didáctico enmarcado en el enfoque cognitivista.

Presentación de la tarea

Contexto: Los estudiantes de profesorado conocen funciones elementales, entre las que se encuentran las polinómicas y sus características más comunes. Vienen trabajando con el software GeoGebra y utilizando diferentes herramientas, como el deslizador[1] y el rastro[2]. Esta consigna forma parte de una guía de ejercicios sobre el tema de funciones de variable real en la formación de profesores. El docente propone trabajar en grupos para favorecer el debate e intercambio de opiniones, finalizando la actividad con una reflexión individual.

* *C. Camós*: Universidad Abierta Interamericana, Argentina.
L. Guglielmone: Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina.

[1] Herramienta Deslizador: https://wiki.GeoGebra.org/es/Herramienta_de_Deslizador.

[2] Herramienta Rastro: https://wiki.GeoGebra.org/es/Rastreo.

Objetivos:

Que el estudiante…

- comprenda la relación entre las expresiones algebraicas de ciertas funciones polinómicas y sus representaciones gráficas;
- comprenda el rol que desempeña el parámetro k en las funciones planteadas;
- pueda resignificar las conclusiones a las que arriba y reflexionar sobre el trabajo realizado.

Consignas:

1. Sea f una función polinómica y k un número real entre 1 y 15, comparen, describan y justifiquen las características gráficas de las familias de curvas que resultan al variar el parámetro k en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x)+k$	b) $f(x)-k$	c) $f(x+k)$	d) $f(x-k)$
e) $kf(x)$	f) $\frac{1}{k}f(x)$	g) $f(kx)$	h) $f\left(\frac{1}{k}x\right)$

2. ¿Creen que las conclusiones arribadas en el punto anterior son extensivas a todas las funciones? ¿Por qué?
3. ¿Hay algo de lo realizado que les resultó difícil de comprender o aún no lo comprenden? ¿Pueden identificar las causas?

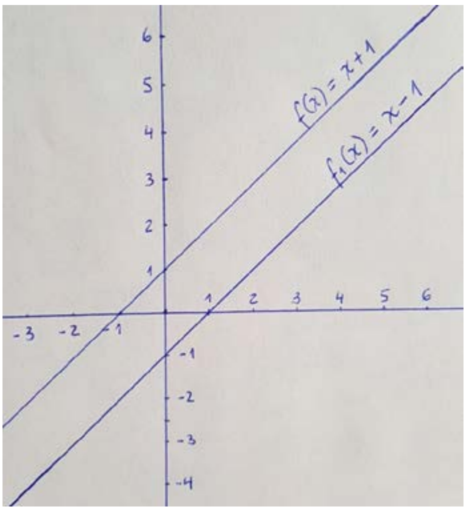
Resolución de la tarea

Consigna 1

Partimos de una tarea que cumple con las condiciones necesarias de *coherencia* entre sus partes (contexto, objetivo y consigna) para que la actividad matemática que realice el alumno sea valiosa.[3]

En una resolución con lápiz y papel, una forma de encarar la consigna puede ser comenzar con funciones sencillas (lineales o cuadráticas). Para graficar es probable que los estudiantes recurran a la construcción de tablas de valores. Seguramente los valores que tomen para el parámetro k sean enteros, incluyendo (o no) los extremos (1 y 15) de acuerdo con cómo interpreten la consigna. Si deciden trabajar con funciones lineales, puede resultarles dificultoso identificar los cambios que se producen en cada caso, pudiendo algunos resultar iguales. Por ejemplo, si se parte de $f(x) = x + 1$, no se observan diferencias en algunas traslaciones, como la que presentamos a continuación.

Figura 1. Gráficas de los casos f(x) – k y f(x – k) con k = 2



[3] Para profundizar sobre el análisis de la coherencia de tareas, se puede consultar Rodríguez (2022).

Una cuestión que puede presentarse al trabajar sin TIC es que realicen las gráficas en diferentes sistemas de ejes coordenados, lo cual complicaría la comparación y la visualización de los cambios. Si ello pasa, es probable que cuando busquen describir las transformaciones del caso considerado, den cuenta de la dificultad y decidan por sí mismos o a través de las sugerencias del docente pasar las gráficas a un solo sistema.

Algunos estudiantes podrían avanzar con la construcción de funciones cuadráticas ya que les puede ocasionar intriga los cambios que se den en estos casos, cuando varía el grado de la función polinómica *f*. Podrían mantener los mismos valores de *k* usados para la construcción de las rectas buscando facilitar las comparaciones posteriores. Suponiendo que grafiquen en un mismo sistema de ejes cartesianos las diferentes parábolas, no solo deberán compararlas con las rectas, sino también pensar qué ocurrirá si varían nuevamente *k*. Es evidente que todas estas construcciones implican muchísimo tiempo y la actividad se torna agotadora.

Resolver esta consigna utilizando TIC es muy diferente que hacerlo sin tecnología. Si los alumnos deciden usar alguna aplicación o software, como el GeoGebra, que vienen utilizando, seguramente manipularán funciones polinómicas más variadas, podrán hacer uso de las herramientas que vienen usando, como el deslizador, permitiendo que el parámetro recorra valores dentro del rango propuesto. También contarán con la precisión de las gráficas, que se muestran inevitablemente dentro de un único sistema de ejes coordenados. La exploración que pueden realizar con la ayuda de un software no solo habilita el planteo de hipótesis, sino también la consolidación de las mismas, favoreciendo la posterior justificación. Las características mencionadas nos permiten afirmar que no da lo mismo resolver la consigna con o sin tecnología, por lo que contamos con elementos suficientes para asegurar el criterio de imprescindibilidad de las TIC.

En un principio, es de esperar que se enfoquen en saber qué pasa con las gráficas al variar el parámetro *k*, sin buscar explicar esos cambios. La exploración de los primeros cuatro casos lleva a describir los desplazamientos verticales y horizontales.

Figura 2. Rastro de algunas familias de curvas para el caso *f*(x) + *k*

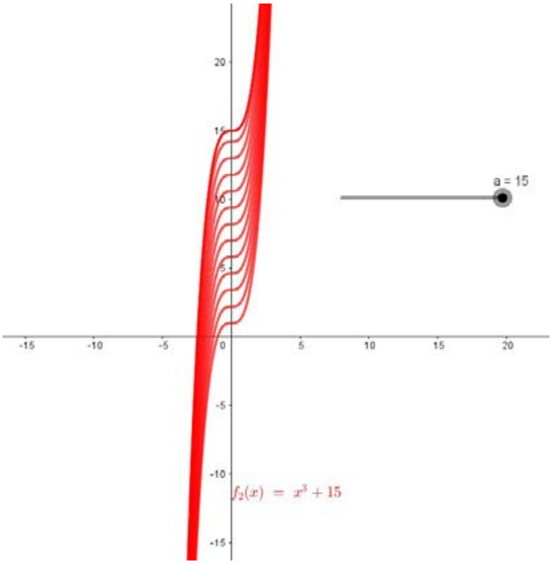
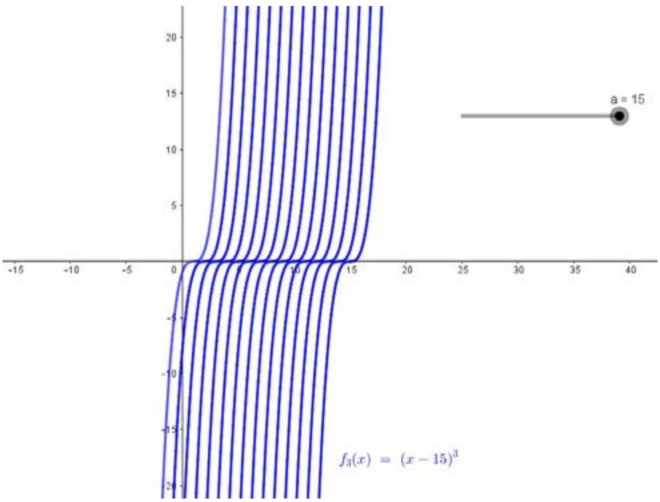


Figura 3. Rastro de algunas familias de curvas para el caso *f*(x – k)



En general, los corrimientos son los que resultan más fáciles de describir para los alumnos, haciendo uso de palabras cotidianas como “sube” o “baja” para los verticales, y “se corre a la derecha” o “se corre a la izquierda” para los horizontales.

En el análisis de esos desplazamientos, la justificación de las traslaciones verticales suele resultar sencilla por su vínculo con el signo del parámetro k. Como k toma valores positivos, la gráfica “sube” para $f(x) + k$, y “baja” para $f(x) - k$. Sin embargo, los corrimientos horizontales suelen causar sorpresa en los estudiantes porque atentan contra la intuición, ya que el signo del parámetro pareciera indicar lo contrario a lo que ven en la pantalla. Recordando el valor positivo de k, es de esperar que las justificaciones sean hechas de acuerdo con el signo del parámetro observando que para $f(x + k)$ la gráfica “se corre a la izquierda” y para $f(x - k)$ la gráfica “se corre a la derecha”, pero podría ocurrir que, a pesar de describir correctamente lo que aprecian, los alumnos sigan sin comprender por qué esas transformaciones se dan así.

Si no lo hicieron hasta el momento, será importante poner en debate las diferencias entre las curvas desde cada expresión algebraica al variar los valores del parámetro k, poniendo en juego también la distancia de los desplazamientos. ¿Es necesario que los alumnos lleguen a expresar las descripciones tal cual aparecen en los textos? Definitivamente no. Lo importante será que los estudiantes logren darse cuenta de todas las diferencias que se ponen en juego, puedan analizarlas y expresarlas de manera correcta, sea usando lenguaje matemático, lenguaje natural o mixto. Esa es la riqueza de la actividad.

Respecto del resto de los casos (ítems e, f, g y h), son los más difíciles de describir, como veremos a continuación, pero la exploración que pueden hacer los alumnos usando un software o aplicación, es muy amplia y diversa, por lo que seguramente puedan notar los cambios que se producen para cada expresión propuesta.

Inicialmente, es de esperar que describan cada expresión de manera individual, observando las familias de curvas producidas al variar el parámetro en cada caso. De esta manera podría ocurrir que algunas de las descripciones terminen siendo iguales. Por ejemplo, si analizan por separado los casos $kf(x)$ y $f(kx)$, podrían decir para ambos que las gráficas “se hacen más angostas”, “se acercan al eje y”, etcétera.

Figura 4. Rastro de algunas familias de curvas para el caso *kf*(*x*)

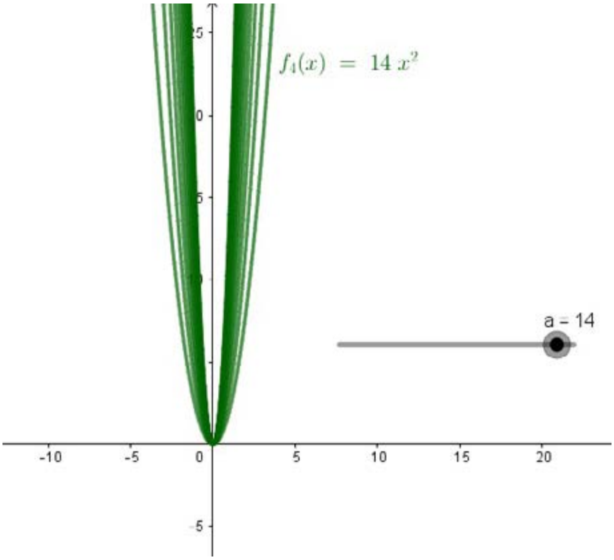
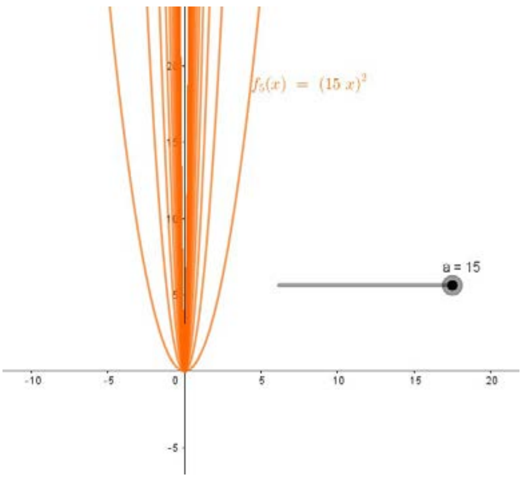
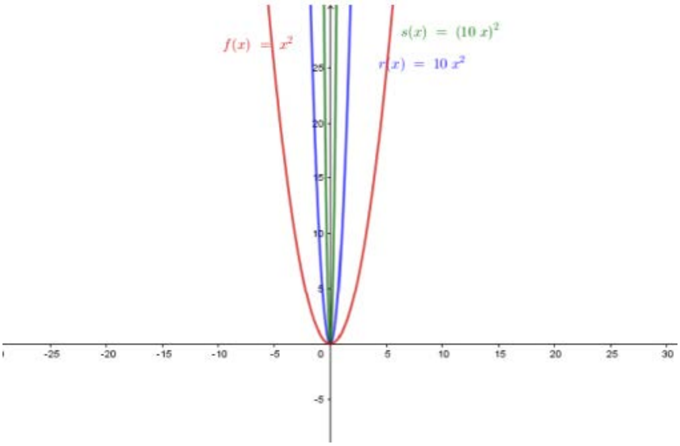


Figura 5. Rastro de algunas familias de curvas para el caso *f*(*kx*)



Los alumnos deberán advertir que, si bien las descripciones que realizaron son iguales, los cambios no son los mismos. De esto podrían darse cuenta observando que las expresiones algebraicas son diferentes y a través de la visualización conjunta de las gráficas de algunas funciones para los mismos valores del parámetro *k*, entendiendo que la descripción individual no les permitió notar las diferencias. También podría entrar en juego el análisis de algunas tablas de valores.

Figura 6. Gráfico que permite asegurar diferencias en los casos *kf*(*x*) y *f*(*kx*)



La dificultad que se puede presentar es en lograr descripciones que diferencien las transformaciones producidas, ya que los alumnos no conocen de dilataciones y contracciones. Más allá de que logren el objetivo buscado, el debate que ello puede generar dentro de cada grupo es matemáticamente muy rico.

Algunas otras conjeturas esperables son las relacionadas con las expresiones que deforman la gráfica de la función original considerada y las que no lo hacen. Es decir, dar cuenta de que entre las transformaciones propuestas están aquellas que son rígidas (cuatro primeras expresiones) y las que no lo son (últimas cuatro). También podrían surgir presunciones relacionadas a la variación (o no) de las intersecciones con los ejes coordenados y, por qué no, algunas vinculadas a valores diferentes de los propuestos para el parámetro, por la simple curiosidad de saber qué pasará, por ejemplo, si *k* tomase valores negativos. Si bien no es parte de la consigna, los alumnos podrían probar fácilmente con otros valores y observar otro tipo de transformaciones. ¿Está mal que ello pase? ¡Para nada!, ya que estaría mostrando el interés de los alumnos por conocer más, y el docente lo podría tener en cuenta para el diseño de nuevas tareas.

A lo largo de todo este proceso en que los alumnos son los principales actores, el docente va generando diferentes debates y puestas en común. La buena gestión de la clase es esencial para entender lo que hicieron los estudiantes e intervenir desde allí.[4] Debemos tener en cuenta que es muy importante que incentivemos a nuestros alumnos a que participen en cada clase, no solo para que expresen las soluciones a las que arriban, sino también para que comenten aquello que no comprenden o los errores que cometen en la resolución de las actividades propuestas. Cabe aclarar que estos últimos constituyen una fuente muy valiosa para la comprensión de los procesos cognitivos de los alumnos.[5]

Retomando el análisis de los criterios de pertinencia y significatividad del uso de TIC, ya expresamos que se cumple claramente el criterio de imprescindibilidad. Por otro lado, el pedido de justificaciones para las descripciones que realizan los alumnos hace que la actividad cumpla con el criterio de favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas. Además, en ningún momento se pierde de vista el objetivo matemático, y se da libertad para apelar a las TIC y seleccionar cuál recurso tecnológico utilizar.

Consigna 2

Probablemente los alumnos exploren con funciones no polinómicas para visualizar sus gráficas al variar el parámetro *k* en cada uno de los casos, y analicen los cambios observados. El debate que se puede generar dentro de cada grupo y entre los diferentes grupos, es potencialmente rico porque las transformaciones no siempre son fáciles de visualizar desde cualquier función. Es de esperar que se concluya que, en cada caso, sea cual fuese la función elegida, la trasformación es la misma. Es importante que adviertan que esas conclusiones quedan en el nivel de conjetura. Esto resulta muy relevante en el contexto trabajado, ya que los alumnos son futuros profesores que deberán tener claro que, a pesar de que hayan analizado muchos casos, eso no es suficiente para concluir algo de validez general, es decir, para enunciar una proposición que sea verdadera.

El docente podrá trabajar sobre la importancia de las demostraciones en matemática para validar las hipótesis que consideramos verdaderas, como en este caso en que puede resultar una obviedad que las trasformaciones son las

[4] Para profundizar sobre criterios para intervenciones en el aula, se puede consultar Rodríguez (2017).

[5] Para profundizar sobre el tema, se puede consultar Abrate, Pochulu y Vargas (2006).

descriptas verbalmente, pero son los argumentos deductivos los que permiten validar las conjeturas planteadas.

Se podría cerrar esta actividad mostrando cómo se suelen describir las transformaciones trabajadas usando lenguaje matemático y dejando claro que esas descripciones no constituyen demostraciones. De esta manera, los alumnos contarían con la descripción formal de cada transformación, pero habiendo realizado un recorrido que es de esperar los ayude en la comprensión de dichas descripciones.

Consigna 3

La tercera consigna está pensada para que las dudas y complejidades que hayan surgido en el desarrollo de la actividad sean expresadas por escrito. El propósito de la pregunta puede ser visto desde dos perspectivas, la del alumno y la del docente. Para el estudiante representa volver y reflexionar sobre lo hecho, advertir y tomar conciencia de los obstáculos que se le presentaron, y poder expresarlos en palabras. Es decir, el alumno debe realizar un proceso de metacognición. Para el profesor representa conocer las dificultades a las que se enfrentaron sus alumnos y que, posiblemente, sean diferentes de las que haya previsto.

Esto será enriquecedor no solo para el alumno, sino también para el docente, ya que le permitirá comprender mejor los errores y dificultades que enfrentaron sus alumnos, y los podrá tener en cuenta para el diseño de nuevas tareas.

Análisis didáctico en el marco del enfoque cognitivista

El enfoque cognitivista, como campo de la educación matemática, está basado en una visión constructivista del conocimiento y tiene como rasgo distintivo que busca determinar el funcionamiento cognitivo que subyace a los procesos de pensamiento matemático. Desde ese lugar, centramos el análisis en los textos de Arcavi y Hadas (2003) y Duval (2016). Del último autor consideraremos los conceptos principales de su teoría sobre registros de representación semiótica, que fueron abordados de manera sintética por Colombano, Formica y Camós (2012).

A diferencia de otras ciencias, en matemática los objetos no son directamente accesibles si no es a través de sus representaciones semióticas. Por lo que las representaciones semióticas resultan absolutamente necesarias para poder trabajar con ellos. Esto conlleva a lo que Duval (1993) llama paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, las representaciones posibilitan la actividad sobre los objetos matemáticos, y por otro, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual. La imposibilidad de acceder de forma directa a los objetos matemáticos hace que los estudiantes suelan confundirlos con sus representaciones semióticas, por lo que la distinción entre un objeto y su representación es fundamental para el aprendizaje de la matemática. De acuerdo con Duval (2016), la paradoja cognitiva permite plantear la siguiente hipótesis:

> … la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica. Y desde ya se puede plantear una primera pregunta: ¿esa coordinación de registros llega naturalmente a los estudiantes en el contexto de la enseñanza matemática? (p. 77).

Esa pregunta está vinculada a la primera consigna trabajada. La familia de curvas que se genera al variar el parámetro k de cada expresión algebraica posee características gráficas matemáticamente relevantes. Para su resolución, los alumnos deben hacer uso de por lo menos tres registros de representación, y la coordinación es fundamental para llegar a responder lo pedido. En el caso de la resolución sin TIC, inicialmente los estudiantes deberán lograr una efectiva coordinación entre los registros simbólico y numérico, para luego pasar al registro gráfico. Los alumnos que deciden resolver la consigna usando TIC, en principio no deberán hacer uso del registro numérico, ya que las conversiones entre los registros algebraico y gráfico serán realizadas por la aplicación o software que utilicen.

El uso de TIC para la resolución de la consigna lleva a los alumnos a recorrer algunas de las etapas descriptas por Arcavi y Hadas (2003), como las de visualización y de experimentación. Dichos autores aseguran que los ambientes computarizados dinámicos juegan un papel significativo en el aprendizaje de la matemática siempre que estén acompañados por adecuadas prácticas de aula y materiales curriculares.

Si los alumnos utilizan el software GeoGebra –con el que ya vienen trabajando–, las variaciones dinámicas del parámetro k y las correspondientes familias de curvas visualizadas en la pantalla, son ejemplos de conversiones mediadas por tecnología. De acuerdo con Fischbein (citado en Arcavi y Hadas, 2003), la visualización “no solo organiza los datos disponibles en estructuras significativas, sino que también es un factor importante que orienta el desarrollo analítico de una solución" (p. 25).

Desde la visualización dinámica, los estudiantes van aprendiendo a experimentar. Para cada expresión algebraica propuesta, los alumnos deben explorar lo que ocurre en las gráficas asociadas si el parámetro toma, por ejemplo, valores extremos del intervalo propuesto, valores medios, etcétera. Como afirman Arcavi y Hadas (2003), esa información obtenida desde la visualización puede representar un paso para la enunciación de conjeturas y generalizaciones.

Estando en esta etapa de experimentación, los estudiantes deben ir realizando conversiones del registro gráfico al registro verbal para ir expresando las hipótesis que van surgiendo. Esas conversiones no las resuelve la tecnología y su complejidad reside en no ser congruentes. Una conversión es considerada *no congruente* cuando no es posible establecer una correspondencia término a término entre las unidades significantes (símbolos, palabras o rasgos visuales) de las dos representaciones semióticas que intervienen en registros diferentes. Como dice Duval (2016, p. 85), "las conversiones no congruentes son para muchos estudiantes una barrera infranqueable en su comprensión de las matemáticas y, por tanto, para su aprendizaje". De esta manera, si para la resolución de la consigna hacen uso de TIC, el registro verbal resulta ser el protagonista de toda la actividad matemática, haciendo explícito un recurso que, a decir de Duval, se tiende a marginar en la enseñanza, en la que se suele permanecer dentro de los registros monofuncionales, como el gráfico y el simbólico.

Como se mostró en la resolución, es de esperar que los mayores obstáculos se presenten al realizar las conversiones de las transformaciones no rígidas, por ejemplo, desde la observación de las familias de curvas provenientes de las expresiones $kf(x)$ y $f(kx)$. Respecto de cómo distinguir lo que es matemáticamente relevante en el registro gráfico, Duval (2006) plantea:

> La distinción visual de los gráficos no es en manera alguna obvia, en particular cuando se ven muy similares en la forma y el contenido. De hecho, la capacidad de distinguir lo que es relevante matemáticamente en cada uno, depende de la construcción implícita de una red cognitiva (p. 87).

El tener que hacer un análisis comparativo de las gráficas para visualizar las diferencias entre los casos, observar y comprender que las expresiones algebraicas son diferentes o tener que recurrir a tablas de valores para confirmar las diferencias, es una muestra de la complejidad en la distinción visual de la que habla el autor.

A medida que avanzan con el desarrollo de la actividad, los alumnos también deben realizar diversos tratamientos en el registro verbal, al tener que ir mejorando las descripciones realizadas por no mostrar de manera completa y correcta las transformaciones observadas. Esto no es usual en las clases de matemática, ya que se habla en lenguaje natural, pero se suele escribir en símbolos, "como si las explicaciones verbales pudieran volver transparente cualquier tratamiento simbólico" (Duval, 2016, p. 75). En esta actividad el registro verbal está presente durante todo su desarrollo, buscando que los alumnos no solo hablen, sino también escriban en lengua natural, dejando en manos de la tecnología los procedimientos algorítmicos. De esta manera, los estudiantes van desarrollando la expresión escrita, habilidad que, en general, no suele ser trabajada en las clases de matemática, pero que es fundamental en la formación docente.

Retomando el texto de Arcavi y Hadas (2003), queremos detenernos en "la sorpresa" de la que hablan los autores y su posibilidad de promover un aprendizaje significativo. Para que una actividad produzca sorpresa, se debe realizar un pedido explícito de predicciones sobre la acción que los alumnos están a punto de abordar, y esa anticipación tiene que resultar contradictoria respecto de lo que muestre la tecnología utilizada. Como afirman los autores, ese desconcierto "puede ser el detonador para nutrir la propia necesidad de los estudiantes de reanalizar su conocimiento y predicciones, estableciendo las oportunidades para un aprendizaje significativo" (p. 26). En la consigna propuesta, se podría aprovechar el desconcierto que puede generar en los alumnos los casos $f(x + k)$ y $f(x - k)$, habiendo ya experimentado con los casos $f(x) + k$ y $f(x) - k$, agregando un pedido explícito para que los estudiantes anticipen lo que creen que sucederá al trabajar con esos casos, previo a habilitarles el uso de las TIC para explorar.

Para el segundo punto de la consigna, los alumnos deben reconocer los registros gráfico y verbal como registros que promueven el pensamiento y facilitan la construcción de conjeturas, pero no permiten demostrarlas. Si bien no es objetivo de la actividad que los alumnos demuestren sus conjeturas, es necesario que les quede claro que el sistema de representación simbólico –como parte del lenguaje matemático–, constituye *el* registro a través del cual se pueden formalizar las generalizaciones, como las que probablemente hayan llegado a enunciar en el primer punto.

En relación con las preguntas metacognitivas personales, propuestas en el tercer punto de la consigna, las respuestas de cada estudiante pueden resultar altamente significativas desde el enfoque abordado. La posibilidad de contar con información que le permita al docente conocer las dificultades que tuvieron los alumnos al trabajar con registros, y lo que aún no llegan a comprender, es una oportunidad para seguir trabajando desde nuevas tareas que busquen abordar esas dificultades. Como plantea Duval (2016), creemos que el cambio de registro de representación es el *umbral* de la comprensión matemática en cada etapa del currículo, y es lo que buscamos poner en juego desde la tarea propuesta. En concordancia con el autor, entendemos que el gran reto que tenemos como educadores consiste en desarrollar en los alumnos la capacidad para cambiar de registro de representación, reconociendo que en la sociedad digital en la que nos encontramos inmersos, las TIC pueden ser grandes aliadas para ese objetivo.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática*. EDUVIM.

Arcavi, A. y Hadas, N. (2003). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 25-45.

Colombano, V., Formica, A. y Camós, C. (2015). Enfoque cognitivista. En M. Pochulu, y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 115-152). Ediciones UNGS y EDUVIM.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de Science Cognitives,* (5), 37-65.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rodríguez, M. (Coord.) (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.

9. Una situación para introducir un estudio general de las funciones homográficas

*Inés Casetta y Martín Chacón**

Introducción

En este capítulo presentamos una tarea, exhibimos sobre ella una resolución experta sin uso de TIC y un abordaje con uso de las TIC encuadrada en el contexto. Finalmente, pretendemos analizar la actividad desde la teoría de situaciones didácticas (TSD). Dado que proponemos esta tarea como una primera aproximación de los alumnos al contenido en cuestión, encontramos pertinente particularizar el análisis sobre las situaciones de acción, formulación y validación que Brousseau (2007) define.

Presentación de la tarea

Contexto: Los estudiantes han trabajado con funciones lineales y, en general, con funciones polinómicas. Factorizan polinomios y pueden identificar conjuntos de positividad y negatividad usando el teorema de Bolzano. Están acostumbrados a utilizar distintos software para graficar funciones particulares y observar características. Han trabajado, especialmente, en GeoGebra (GGB) con la variación de parámetros en la fórmula de funciones lineales y cuadráticas,

* *I. Casetta*: Universidad Abierta Interamericana, Argentina.
M. Chacón: Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

han explorado el estudio de estas funciones enlazando distintos registros de representación. Establecieron generalizaciones matemáticas válidas para familias de las funciones estudiadas. En el entorno dinámico usaron deslizadores. No trabajaron con límites ni derivadas.

Para el trabajo con la consigna, proponemos que el docente entregue únicamente el primer ítem en el comienzo. Posteriormente, se hace una puesta en común para presentar el proceso de conjeturación, argumentación y análisis a cargo de los grupos. Luego, se entregaría el segundo ítem si acaso no hubiera surgido lo que allí se propone. En caso de que el recorrido por los grupos o parejas de trabajo evidenciara que algunos establecen relaciones entre el gráfico y los parámetros y otros grupos no, ajustaríamos con intervenciones elaboradas *a priori* para propiciar dichas elaboraciones conceptuales.

Objetivo: Que los estudiantes elaboren conjeturas sobre características de las funciones racionales cuya expresión es un cociente de lineales.

Consigna: Consideren la expresión de la forma $f(x) = \frac{a\,x+b}{c\,x+d}$ para números reales a, b, c, d. Justifiquen las respuestas:

- ¿Pueden establecerse condiciones sobre los parámetros de la expresión para estudiarla como función? ¿Hay casos especiales? Si es así, ¿cuáles son? ¿Cómo son los gráficos?
- ¿Encuentran alguna relación entre los parámetros y las características del gráfico? Si es así, ¿cuáles?

Resolución experta sin TIC

Veamos características de estas funciones.

Dominio natural

La expresión de la función es el cociente $\frac{a\,x+b}{c\,x+d}$, por lo tanto, el denominador debe ser distinto de 0. Ello ocurre para todo x distinto de $-\frac{d}{c}$ con $c \neq 0$. En caso de que sea $c = 0$, d no puede ser 0, y no hay valores de x, para los cuales el denominador sea 0. Notemos que, en este caso, se trata de las funciones lineales $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. No realizaremos un detalle del análisis porque sus características son bien conocidas.

En esta familia de funciones, los parámetros *c* y *d* no pueden ambos a la vez tomar el valor 0.

$$\text{Si } c = 0 \text{ y } d \neq 0, Dom(f) = \mathbb{R}$$
$$\text{Si } c \neq 0 \text{ y } d \neq 0, Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

Imagen

En caso de que sea $c = 0$, se trata de funciones lineales, de la forma $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. Si $a = 0$, entonces se trata de funciones constantes, y por lo tanto la imagen estará conformada por un único número, $\frac{b}{d}$. En caso de que $a \neq 0$, la imagen estará conformada por todos los reales.

Si sucede que es $c \neq 0$, podemos plantear para cuáles $y \in R$, la ecuación $f(x) = y$ tiene solución con $x \in Dom(f)$.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = y$$

Multiplicando ambos miembros por $cx + d$, que es distinto de 0, pues $x = -\frac{d}{c}$ no forma parte del dominio, tenemos:

$$ax + b = y\,(cx + d)$$

Distribuimos *y*, y reunimos los términos de variable *x* en un miembro, tenemos:

$$ax - cyx = -b + yd$$

Por propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma (realizada en esta dirección es también conocida como extracción del factor común *x*), queda:

$$x\,(a - cy) = -b + yd$$

Si $a - cy \neq 0$, multiplicamos miembro a miembro por $\frac{1}{a-cy}$, y tenemos:

$$x = \frac{-b + yd}{a - cy}$$

Por lo tanto, para que la ecuación tenga solución, debe ser $y \neq \frac{a}{c}$. Esto nos dice que, para cualquier valor de *y* distinto de $\frac{a}{c}$, existe un elemento del dominio que lo tiene por imagen.

Por otro lado, en el caso de que $ad = bc$, tenemos que $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{b}{d}\left(\frac{dax+bd}{bcx+bd}\right) = \frac{b}{d}$, multiplicando y dividiendo respectivamente por *b* y por *d*. Es decir, que la expresión del numerador es un "múltiplo" real del denominador. En ese caso, vale $f:\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}\rightarrow\mathbb{R}: f(x)=\frac{b}{d}$. Es decir que f es constante en el dominio indicado. Finalmente, resumimos lo siguiente:

$$\text{Si } a=0, c=0 \text{ y } ad=bc, Im(f)=\left\{\frac{b}{d}\right\}$$

$$\text{Si } a\neq 0, c=0 \text{ y } ad\neq bc, Im(f)=\mathbb{R}$$

$$\text{Si } a\neq 0, c\neq 0 \text{ y } ad\neq bc,\ Im(f)=\ \mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$$

Continuidad

Si $c = 0$, f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$, pues $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{ax+b}{d}=\frac{ax_0+b}{d}$.
Si $c \neq 0$, f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, pues $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}$.
Por lo tanto, en todos los casos f es continua en su dominio.

Extremos

Si $c = 0$, entonces, f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x)=\frac{a}{d}$, que es distinto de 0 en caso de que $a \neq 0$. Y, por lo tanto, f no tiene extremos. Si además es $a = 0$, se trata de la función constante de expresión $f(x)=\frac{b}{d}$.

Si $c \neq 0$, entonces, f derivable en $\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ y $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Para que se verifique $f'(x)=0$, debe ser $ad = bc$. Ahora bien, si esto se cumple, la expresión del numerador es un "múltiplo" real del denominador como hemos mencionado al analizar la imagen de f. En ese caso, vale $f:\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{b}{d}$. Es decir que f es constante en el dominio indicado. En otro caso distinto, f' no tiene ceros, y, por lo tanto, f no tiene extremos.

En resumen, si $ad = bc$ se trata de una función constante en su dominio y en caso contrario, f no tiene extremos.

Crecimiento

Si $c \neq 0$ y $ad \neq bc$, entonces, f' conserva signo en cada función de la familia, dado que $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, pues $(cx+d)^2>0$, para todo $x\neq -\frac{d}{c}$ y el signo de $ac - bc$ es el mismo para todo x. Por lo tanto, f es monótona en $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ y en $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$, siendo, o bien creciente en ambos intervalos, o bien decreciente en los dos.

Si $c \neq 0$ y $ad = bc$, mencionamos que se trata de $f:\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{b}{d}$, constante en su dominio.

Si $c = 0$, se trata de las funciones lineales de expresión $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ y el crecimiento está dado por el signo de $\frac{a}{d}$.

Curvatura

Con $c \neq 0$, tenemos que $f''(x) = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$ para todo $x \neq -\frac{d}{c}$. Supongamos $ad \neq bc$. Notemos que el signo de $-2c(ad - bc)$ no depende de x. Y que $(cx + d)^3$ cambia de signo en el mismo x que $cx + d$. Y que, además, $cx + d$, tiene distinto signo a izquierda y a derecha de $x = -\frac{d}{c}$; con lo cual, f tiene distinta curvatura en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ y $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

Asíntotas

Con $c = 0$ se trata de una función lineal no constante, a menos que sea $a = 0$.

Con $c \neq 0$ y $ad = bc$, se trata de una función constante en $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Con $c \neq 0$ y $ad \neq bc$, tenemos lo siguiente.

Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

Este último paso es consecuencia de la regla de L'Hôpital. Por lo tanto, f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = \frac{a}{c}$.

Asíntota vertical

f es continua en su dominio, por lo tanto, el único candidato es $x = -\frac{d}{c}$ para el caso en que $-\frac{d}{c}$ no pertenezca al domino de f.

Sabemos que la condición para la existencia de asíntota vertical en $x = x_0$ es que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ resulte $+\infty$, $-\infty$ o ∞ y es suficiente que sea uno de los límites laterales.

En nuestro caso, vale que $\lim_{x\to -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty$.

Notemos que $ax + b \neq 0$, pues si así no fuera, es decir, si valiera $ax + b = 0$, y dado que $ax + b = a \cdot \left(-\frac{d}{c}\right) + b$, tendríamos que $a \cdot \left(-\frac{d}{c}\right) + b = 0$.

Como $c \neq 0$ resulta $-a \cdot d + b \cdot c = 0$.

Luego $bc = ad$, y esto contradice las condiciones que estamos analizando.

Para terminar, notemos que $-\frac{d}{c}$ es raíz de la expresión lineal del denominador y que no lo es del numerador, y que dado que $c \neq 0$, la función lineal del denominador es creciente o decreciente. Por lo tanto, en las cercanías de $-\frac{d}{c}$, resulta que $\frac{ax+b}{cx+d}$ tiene distinto signo a izquierda y a derecha. Por lo tanto, se cumple que:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = -\infty \text{ o } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = -\infty$$

Simetría

Para mostrar simetría en el caso de que la gráfica no sea una recta (o parte de una) podemos acudir a la geometría analítica. Si $c \neq 0$ y $ad \neq bc$, podemos mostrar que la gráfica correspondiente a la ecuación $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ es simétrica respecto de la recta de ecuación $y = -\left(x - \left(-\frac{d}{c}\right)\right) + \frac{a}{c}$. Notar que esta recta tiene pendiente -1 y contiene al punto $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ que resulta ser el punto de intersección de las asíntotas.

$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{2d}{c} \\ 0 & -1 & \frac{2a}{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de simetría respecto de la recta indicada en coordenadas homogéneas. Aplicada al punto genérico de la curva (en coordenadas homogéneas) $\begin{pmatrix} x \\ \frac{ax+b}{cx+d} \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenemos el punto $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - \frac{2d}{c} \\ \frac{2a}{c} - \frac{ax+b}{cx+d} \\ 1 \end{pmatrix}$. Despejando x en la igualdad de la primera coordenada y reemplazando en la igualdad de la segunda coordenada, obtenemos la ecuación $y' = \frac{ax'+b}{cx'+d}$ que es equivalente a la de la primera curva. Esto significa que al aplicar la simetría a los puntos de la primera curva se obtienen puntos sobre la misma curva. Como la inversa de la simetría axial es ella misma, resulta que ambas curvas son iguales y, por lo tanto, la curva correspondiente a la gráfica de las funciones cuya expresión es de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $c \neq 0$ y $ad \neq bc$ es simétrica respecto de la recta de ecuación $y = -\left(x - \left(-\frac{d}{c}\right)\right) + \frac{a}{c}$.

Resolución con TIC enmarcada en el contexto

Recordemos las preguntas:

- ¿Pueden establecerse condiciones sobre los parámetros de la expresión para estudiarla como función? ¿Hay casos especiales? Si es así, ¿cuáles son? ¿Cómo son los gráficos?
- ¿Encuentran alguna relación entre los parámetros y las características del gráfico? Si es así, ¿cuáles?

La consigna propuesta y el contexto descripto nos hacen suponer que el uso de TIC está totalmente habilitado. Probablemente, los alumnos usarán GGB o algún graficador. En caso de usar GGB, es posible ingresar la fórmula de una función y utilizar lo que se conoce como deslizador para los parámetros. Según el manual *online* de GGB, un deslizador es "una representación gráfica de un número libre o ángulo libre", es decir que con el puntero del mouse podemos "mover" el deslizador y algún parámetro asociado a este va cambiando de valores. Para trabajar con esto, dependiendo de la versión, podemos directamente ingresar en la barra de entrada $f(x) = (a*x+b)/(c*x+d)$ y el software nos pregunta si crea algún deslizador para *a*, *b*, *c y d* y aceptamos la sugerencia.

Un primer acercamiento para iniciar el análisis puede ser mover los deslizadores. Esto remitirá a encontrar rectas horizontales u oblicuas o curvas no conexas de tipo hiperbólicas, o bien podrán no encontrar ninguna traza en la vista gráfica.

Presentamos un camino posible de los estudiantes, en las elaboraciones por el uso de los deslizadores, y sus decisiones en lo matemático. Es probable que decidan establecer una organización en dos grupos: A) La vista gráfica presenta rectas o ningún trazo; B) La vista gráfica muestra dos curvas no conexas.

A) La vista gráfica en GGB nos muestra:

i. Ninguna traza. Es posible notar que esto sucede cuando los deslizadores de *c* y *d* se detienen en cero, la expresión que muestra GGB es $\frac{ax+b}{0}$ o $\frac{ax+b}{0x}$ dependiendo de la versión. Es posible que los estudiantes sepan que no se puede dividir por cero y concluir que entonces, los valores de *c* y *d* no pueden ser simultáneamente cero.

ii. Una recta no vertical. Los estudiantes podrían emprender la búsqueda de los valores de *a*, *b*, *c* y *d* de modo que la gráfica resulte ser una recta. Se puede probar con los deslizadores y es posible advertir que justo cuando *c* se ubica en cero y los otros tres no son cero se ve una recta. Al probar con las expresiones $\frac{3x+4}{2}$ o $\frac{-5x-7}{5}$, es posible advertir que la ecuación corresponde a una lineal de la forma $f(x) = \frac{3}{2}x + 2$, y, $f(x) = \frac{-5}{3}x - \frac{7}{3}$ respectivamente.

iii. Rectas horizontales. Al mover los deslizadores es posible encontrar una recta que parece horizontal. Al buscar los valores de a, *b*, *c* y *d*, puede ser complejo que los cuatro deslizadores en simultáneo determinen que el gráfico resulte ser una recta horizontal. Entonces, es posible que los estudiantes piensen que si este fuera el caso es porque se trata de una función constante. Como *c* y *d* no pueden ser cero, el cociente de lineales tiene que ser equivalente a un número para todo *x*. Es posible que los estudiantes prueben algunos casos, por ejemplo: $f(x) = \frac{x+4}{2x+8} = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{5x+20}{x+4} = 5$. Los estudiantes podrían advertir que las expresiones lineales del numerador y del denominador difieren en un factor.

Una observación en (iii): la falta de definición del dominio junto con las limitaciones del entorno para mostrar el "agujero" en el punto de abscisa *x* para el que no se define *f*(*x*) necesita ser confrontado con la elaboración analítica. Si no surgiera esta cuestión, nos parece prudente avanzar sobre el caso (B), sabiendo que en las curvas no conexas se manifiesta más claramente la necesidad de modificar el dominio.

Luego de los acuerdos, se inicia un nuevo proceso de trabajo sobre la consigna, con condicionamientos en los valores de los parámetros.

Suponemos que luego de las elaboraciones en (A) se modificará la consigna, de modo que estén en condiciones de estudiar el caso (B): curvas no conexas. Entendemos que los estudiantes tienen claro que el denominador debe ser distinto de cero, pero puede ser que aún se centren solo en los valores *c* y *d* representados por los deslizadores.

Si aún no identificaran que el denominador puede anularse por el cero de $cx + d$, para el cual no está definida la función, es probable que aceptemos, como parte de sus saberes en construcción, que estudien las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

B) La vista gráfica muestra dos curvas no conexas

Pensamos una posible presentación de los alumnos. Si en la vista gráfica de GGB encontramos "dos" curvas, podemos probar variando los deslizadores. Para ver el efecto de cada uno, es ideal probar los cambios variando no todos a la vez. También es posible simplificar el análisis dejando uno de los parámetros con el valor 0. Por ejemplo, al dejar el parámetro $a = 0$, "eliminamos" la variable x del numerador.

Presentamos a continuación algunas posibles conjeturas que los estudiantes podrían proponer al trabajar con la consigna. Las organizamos por casos, en función de elecciones sobre los valores de los parámetros. Es esperable que su formulación presente las imprecisiones propias de quien se está aproximando a un tema.

Entendemos que hay dos rasgos de las curvas que surgirán en todos los casos: que se obtiene una curva que no es conexa y la simetría entre sus ramas, expresado probablemente de un modo informal: se trata de dos curvas, las curvas no se tocan, la gráfica está separada en "dos ramas", hay dos partes que no se tocan, hay simetría sin dar precisiones respecto de qué, etcétera. Evitamos repetir esta anticipación en los ejemplos que siguen.

Caso 1

$a = 0$, b parámetro variable distinto de 0, c y d fijos y distintos de cero.

En GGB se puede mostrar el rastro para ver muchos ejemplos con distintos valores de b. Es posible observar la diferencia entre $b > 0$ y $b < 0$. Las siguientes capturas muestran la pantalla de GGB en cada uno de estos dos casos con $c = 2$ y $d = 6$.

Figura 1. Captura de pantalla del rastro ($a = 0$, $c = 2$, $d = 6$ y $b > 0$)

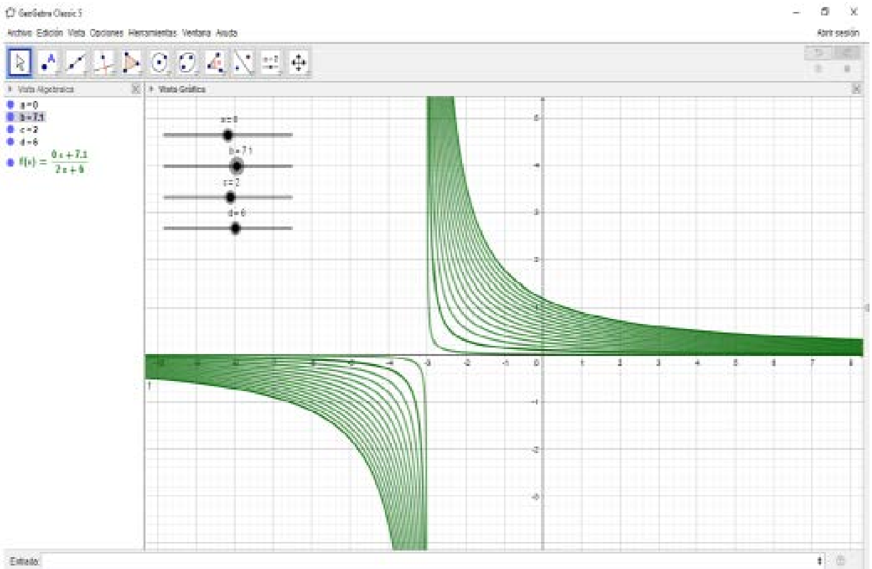
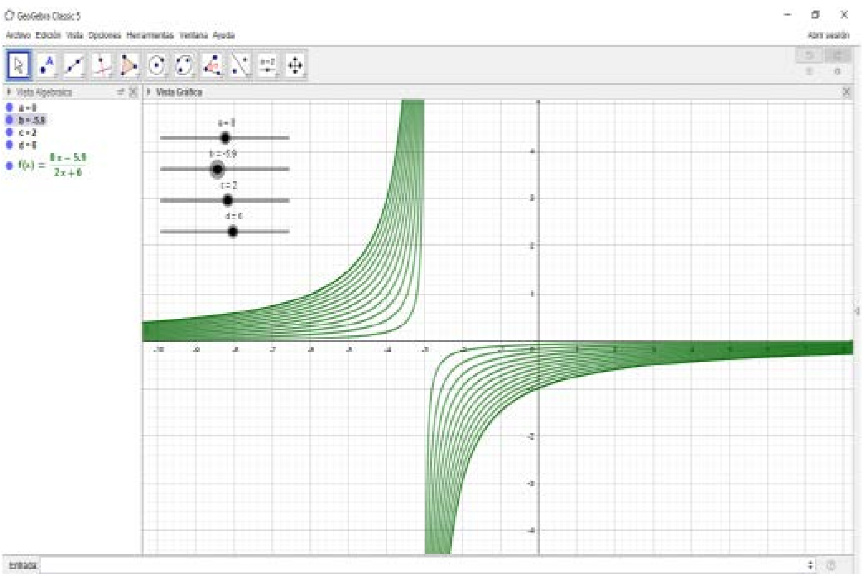


Figura 2. Captura de pantalla del rastro ($a = 0$, $c = 2$, $d = 6$ y $b < 0$)



Algunas conjeturas posibles en este caso pueden ser:

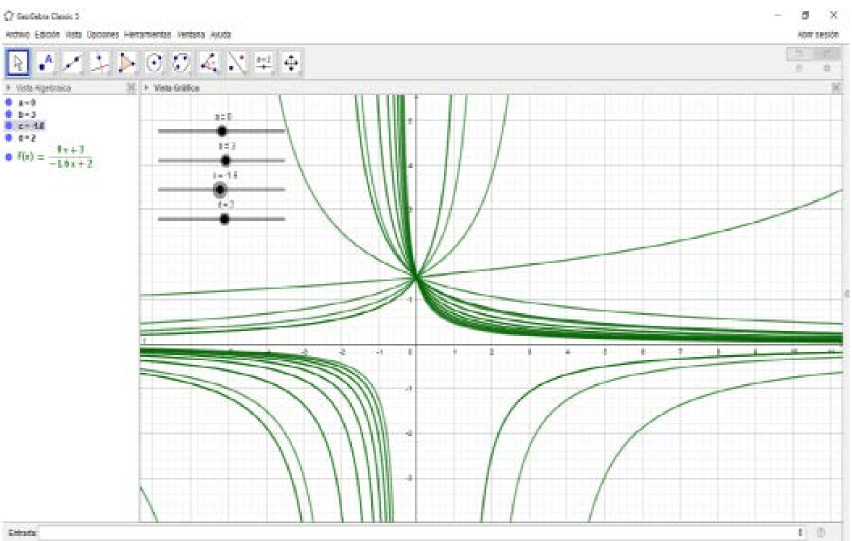
- Si $b > 0$, con valores de b cada vez más grandes (tienden a $+\infty$) las ramas se alejan entre ellas.
- Si $b < 0$, con valores de b cada vez más chicos (tienden a $-\infty$) se repite el alejamiento entre las ramas.
- La curva no cruza el eje x.
- Una rama cruza el eje de ordenadas, y cambia el punto del cruce cuando se desliza b.

Cabe aclarar que el cuadrante en el que aparecen las ramas de la gráfica respecto de las asíntotas no depende solo del signo de b. Esto podría no ser advertido por los estudiantes si solo prueban con un caso para c y d fijos. Para advertirlo, deberían también probar con valores negativos. Es posible proceder de la misma forma en otros casos.

Caso 2

$a = 0$, c parámetro variable distinto de 0, b y d fijos y distintos de cero. La siguiente es la captura de pantalla de GGB para este caso con $b = 3$ y $d = 2$.

Figura 3. Captura de pantalla del rastro ($a = 0$, $b = 3$ y $d = 2$)



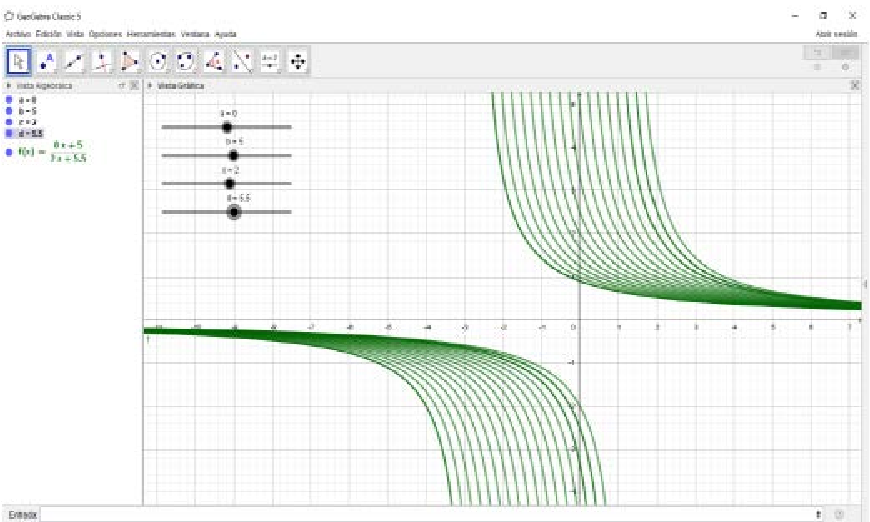
Algunas conjeturas que pueden obtenerse.

- Si $c > 0$, con valores de c cada vez más grandes (tienden a $+\infty$), las ramas se aproximan entre ellas.
- Si $c < 0$, con valores de c cada vez más chicos (tienden a $-\infty$), se repite la aproximación entre las ramas.
- No existe intersección con el eje de abscisas, lo que muestra que no tiene ceros o raíces.
- Corta al eje de ordenadas, y si variamos c no se modifica la intersección con el eje de ordenadas.
- La intersección de la gráfica con el eje de ordenadas parece ser el punto $\left(0, \frac{b}{d}\right)$. Es posible convencerse de esta conjetura variando b y d. Además, es posible chequearlo analíticamente en forma general sin mayores esfuerzos.

Caso 3

$a = 0$, d parámetro variable distinto de 0, b y c fijos y distintos de cero. La siguiente captura muestra este caso con $b = 5$ y $c = 2$.

Figura 4. Captura de pantalla del rastro ($a = 0$, $b = 5$ y $c = 2$)



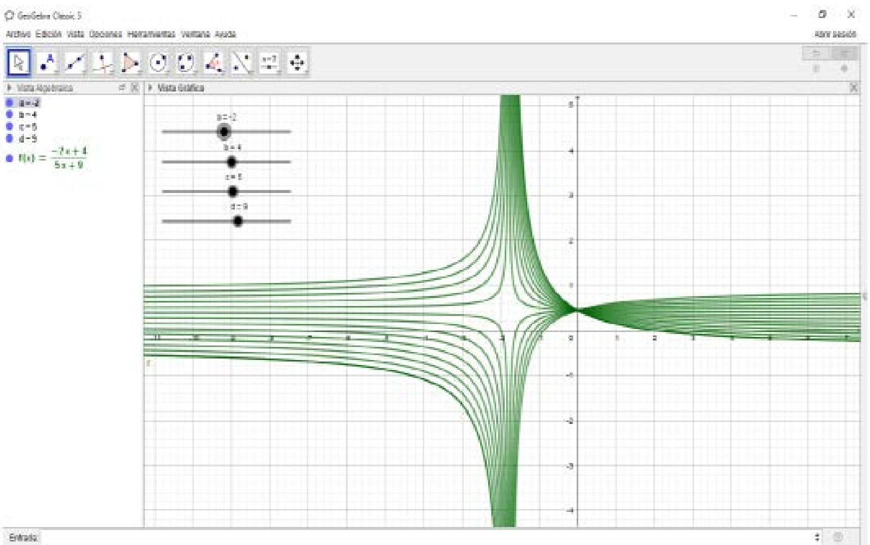
Posibles conjeturas.

- d hace que las ramas se desplacen horizontalmente, y es posible notar que varía el valor en el que las ramas no se conectan (el valor fuera del dominio). Ese valor cambia en x, se desplazan las ramas y con ellas se desplaza el valor de la separación.
- No existe intersección con el eje de abscisas, lo que muestra que no tiene ceros o raíces.
- Aquí es posible confirmar que el punto de intersección es $\left(0, \frac{b}{d}\right)$.

Caso 4

a, parámetro variable distinto de 0; b, c y d fijos y distintos de cero. La siguiente es una captura con los valores fijos $b = 4$, $c = 5$ y $d = 9$.

Figura 5. Captura de pantalla del rastro ($b = 4$, $c = 5$ y $d = 9$)



Posibles conjeturas.

- *a* hace que las ramas se desplacen verticalmente, y el valor en el que las ramas no se conectan es el que da cero en el denominador, que en este caso es fijo.
- Existe un punto de intersección con el eje *x* que cambia al mover *a*. Si se marca el punto en la vista gráfica se observa el cambio, se mueve sobre el eje *x* en una rama y luego en la otra. El punto es el cero o raíz, se ve también el cambio en la vista algebraica al mover *a*, pero para conocerlo en forma exacta es necesario realizarlo analíticamente. Esto no supone mayor complejidad, dado que un cociente es 0 si el numerador lo es y el denominador no. Para este tipo de funciones dará $x = -\frac{b}{a}$.
- La gráfica corta al eje *y* en el mismo punto para todos los casos. Esto es coherente con lo visto anteriormente, teniendo en cuenta que el punto es $\left(0, \frac{b}{d}\right)$.
- El valor de *a* para el cual las ramas de las curvas cambian de cuadrante (respecto de las asíntotas) no es 0. Es posible advertir que a medida que los valores de *a* se acercan a un cierto número las ramas se acercan a las asíntotas. Además, hay un valor de *a* para el cual la gráfica que se observa es una recta horizontal. Se puede conjeturar que el valor de *a* para el cual las ramas cambian de cuadrante (respecto de las asíntotas) es el que hace que las expresiones del numerador y denominador de la función resulten ser "múltiplo".

Hasta aquí hemos presentado probables procesos de los alumnos en forma de conjeturas, ensayos, comprobaciones visuales basadas en el entorno dinámico y algunas hipótesis. La forma en que los estudiantes pueden formular estas conjeturas puede variar considerablemente respecto de la formulación que nosotros realizamos aquí.

Entendemos que en esta propuesta el uso de GGB u otro entorno similar permite potenciar los procesos de conjeturación de los estudiantes. La posibilidad de trabajar con los valores de los parámetros simultáneamente, elegir sus combinaciones y los extremos de variación habilita un análisis del cociente de lineales que quedaría limitado sin el recurso. En ese sentido, creemos que el entorno aporta al trabajo matemático del alumno. Por otro lado, resaltamos que el recurso tiene sus limitaciones, por ejemplo, en el momento de (no) mostrar los "agujeros" en las gráficas o los valores exactos en algunos casos.

Esto hace que sea necesaria la vuelta al papel y lápiz. Es importante destacar que es muy posible que el estudiante no advierta estas limitaciones y que el docente es quien deberá arbitrar los medios para ponerlas en evidencia y que sea posible su contrastación.

Análisis de la actividad desde la mirada de la TSD

Posicionados en este modelo teórico proponemos un análisis de la consigna enlazada con las probables elaboraciones de los alumnos. La TSD es una de las líneas didácticas de mayor abordaje en la formación de profesores, sin embargo, si el lector necesitara revisar sus conceptos le sugerimos la lectura del capítulo 1 de Pochulu y Rodríguez (2015).

Los datos que surgen de las posibles anticipaciones de resoluciones de la consigna propuesta, con y sin TIC, hace que no sea pertinente considerar algunos elementos teóricos de la TSD (por ejemplo, los que solo pueden verse en clases, contrato didáctico, adidacticidad, institucionalización, entre otros). En cambio, consideramos posible seleccionar para el análisis las situaciones de acción, formulación y validación y el concepto de *medio*.

Es importante que dejemos constancia de que las tres situaciones recién mencionadas, tal como las define Brousseau (2007), conforman un modelo teórico que permite analizar o explicar parte de lo ocurrido en una clase, así como son elementos para planificarla. Sin embargo, al observar el trabajo real de los alumnos podremos encontrarnos con que: no es claro en cuál de las situaciones están, hay solapamientos entre ellas, alguna está ausente, hay avances y retrocesos entre ellas, etcétera.

La consigna propone un estudio, el de cociente de lineales, como una relación en la que fue necesario establecer condiciones para que una expresión se establezca como la ley de correspondencia de una función. Advertimos que intencionalmente no definimos la terna de la función para que el alumno se vea obligado a proponerla.

La resolución experta aborda como primer concepto el dominio natural, en el reconocimiento de que una ecuación en la que la variable dependiente resulta cociente de expresiones lineales es uno de los elementos de una función si se identifican los conjuntos dominio y codominio.

Analicemos ahora las probables elaboraciones de los alumnos en relación con la necesidad matemática de definir el dominio. Iniciamos con las agrupadas en (A). Por tratarse de las primeras posibles interacciones del alumno con el problema, decidimos vincularlo con el concepto de situación de acción: en la *situación de acción* el alumno pone en diálogo los conocimientos que posee y los reorganiza para interpretar la propuesta (ver el capítulo de Barreiro y Casetta en Pochulu y Rodríguez, 2015). Presentamos en forma de tabla información que utilizamos en el análisis. En ella, el lector podrá encontrar dos planos de trabajo. Las primeras columnas refieren al juego dinámico entre la acción del alumno sobre el entorno, los conocimientos que pone en juego y las relaciones que logra producir. En otro plano, la última columna contiene una interpretación en términos de la teoría.

Tabla 1. Datos para el análisis

Datos	**Conocimientos**	**Relación establecida**	**Interpretación**
- No encuentra ningún gráfico mediante la manipulación de deslizadores. - Identifica que los deslizadores de c y d están en cero.	- La división no es posible si el divisor es cero. - El dominio en las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales.	- Asegura que c y d no pueden ser simultáneamente cero.	En este caso, el trabajo realizado habilitó adjudicar condiciones para los parámetros, pero no produjo la advertencia sobre la modificación del dominio respecto de las funciones polinómicas.
- Encuentra una recta no vertical en la manipulación de los deslizadores. - Identifica que el deslizador de c está en cero y el resto de los valores distintos de cero.	- Modificación del registro para ejemplificar los casos.	- Asegura que si $c = 0$ se obtiene una función lineal.	En este caso, restringe los valores inhabilitando un valor para un parámetro.
- Encuentra rectas horizontales en la vista gráfica. - Restricción en la manipulación de los deslizadores para obtener distintas rectas horizontales.	- La función constante. - Elaboración de ejemplos con condiciones.	- El cociente de expresiones lineales equivalentes entre sí es una función constante.	En este caso, la restricción está dada por $ax + b \neq k(cx+d)$, $k \in Z$.

El problema después de este primer acercamiento ha sido modificado por la necesidad de descartar casos según los valores de los parámetros. Es importante identificar que se trata de una manifestación del medio.

Siguiendo las elaboraciones de Sadovsky (2005), el *medio* es considerado como el o los problemas propuestos, junto con un conjunto de relaciones esencialmente matemáticas que se modifican a medida que el alumno avanza en la producción de conocimiento y transforma así la realidad con la que interactúa. Estas modificaciones que surgen al realizar trabajo matemático le imprimen al medio un aspecto dinámico que es de nuestro interés resaltar aquí y es donde focalizamos en los análisis que incluimos a continuación.

Recordemos que la consigna propone estudiar el cociente de funciones lineales. En cada interacción del alumno con ella, este aporta saberes y concepciones que en su reorganización le permiten interpretarla y lo conducen a descartar casos según los valores de algunos parámetros (A). El medio se ha modificado porque en el juego de interacciones, el problema ahora tiene condiciones habilitadas por ellas. Queda constancia de esto en el mismo apartado cuando se hipotetiza: "Luego de los acuerdos se inicia un nuevo proceso de trabajo sobre la consigna, con condicionamientos en los valores de los parámetros".

Avanzando en las posibles elaboraciones de los alumnos, encontramos nuevas interacciones con el medio, analizaremos sobre ellas la situación de formulación ([B]1, 2, 3, 4).

En la *situación de formulación* el alumno elabora conjeturas basadas en las acciones sobre el problema y necesita comunicarlas. Esto le exige formular explícitamente las ideas que derivan de la confrontación de los conocimientos implícitos y el medio. Modifica, reelabora y crea un lenguaje (ver el capítulo de Barreiro y Casetta, en Pochulu y Rodríguez, 2015). En la siguiente tabla es posible observar el proceso dinámico de la formulación. El alumno, a través del lenguaje, despliega la intención de poner a disponibilidad las elaboraciones propias y simultáneamente el paso por distintas etapas de conjeturación.

Tabla 2. Proceso dinámico de formulación

Concepto	Proceso de formulación		
Si $c \neq 0$, $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$	La gráfica está separada en dos ramas, no se tocan.	Notamos que varía el valor en el que las ramas no se conectan.	No puede trazarse una única curva, se marca una que se acerca, sin llegar al valor que deja en cero el denominador y después se traza otra del lado opuesto a una línea que pasa por ese valor.
Inexistencia de ceros en la función: cociente de lineales.	La curva no cruza al eje *x*.	No existe intersección con el eje de abscisas.	O sea, no tiene ceros o raíces.
Existencia de ceros en la función: cociente de lineales (2).	Existe un punto de intersección con el eje *x*, pero cambia al mover *a*.	Si se marca el punto en la vista gráfica se observa el cambio, se mueve sobre el eje *x* en una rama y luego en la otra. El punto es el cero o raíz.	Se ve también el cambio en la vista algebraica al mover *a*. Si lo querés saber exacto, tenés que igualar a cero.

En este sentido, la primera fila muestra el avance hacia identificar el dominio de la función distinto de $\mathbb{R}$, la existencia de asíntota vertical de la función, la continuidad de la función.

En la fila 2, respecto de los ceros de la función, el lenguaje avanza desde leer de manera directa lo que muestra la vista gráfica de GGB, elegir terminología específica hasta aclarar con nombre y concepto la inexistencia de ceros o raíces de la función en las condiciones estudiadas ([B] 1, 2, 3).

Finalmente, en la fila 3, respecto de ceros o raíces, elabora mensajes para especificar su existencia según el valor de un parámetro, vincular registros y anticipar la necesidad del cálculo algebraico para obtenerlo ([B] 4).

En la *situación de validación*, el alumno queda inmerso en un intenso proceso de comunicación, la presentación de las conjeturas, de los argumentos propios, de responder a las refutaciones, de reformular al aceptarlas, para establecer finalmente la verdad o falsedad de sus elaboraciones.

El trabajo que presentamos con las hipótesis de elaboraciones de los alumnos no habilita a realizar un análisis de la situación de validación. Sin embargo, nos interesa mostrar lo que hemos identificado como acciones del alumno que tendrán implicancia en la validación y que entendemos pueden pensarse en el solapamiento de las situaciones.

En la siguiente tabla proponemos ejemplos de acciones que entendemos están implicadas en el proceso de validación. Nos referenciamos en el trabajo de Barreiro, Falsetti, Formica, Marino y Mellincovsky citado en el capítulo 1 de Pochulu y Rodríguez (2015). Los autores sostienen que existen determinadas acciones del alumno que constituyen un proceso hacia la validación.

Tabla 3. Ejemplos de acciones del proceso de validación

Proposición	**Acciones**
Si $b > 0$, con valores de b cada vez más grandes (tienden a $+\infty$) las ramas se alejan entre ellas. Si $b < 0$, con valores de b cada vez más chicos (tienden a $-\infty$) se repite el alejamiento entre las ramas. ([B] 1)	Generaliza por observar una regularidad.
No existe intersección con el eje de abscisas, lo que muestra que no tiene ceros o raíces. ([B] 3)	Formula un razonamiento simple. Propone el contrarrecíproco de: *si la función tiene ceros o raíces en su dominio, entonces la curva interseca al eje de abscisas*.
El punto es el cero o raíz, se ve también el cambio en la vista algebraica al mover *a* pero si lo querés saber exacto tenés que igualar a cero. ([B] 4)	Reconoce que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de esta proposición. Inclusive en este caso sabe qué necesita para ello.

Hemos adaptado en la fila 1 la categoría A4, pero entendemos que esta manifestación es precedida por otras acciones; por ejemplo, hacer ensayos (A1) (consideramos aquí la denominación de las acciones de validación A1, A2, etcétera. que pueden verse en Pochulu y Rodríguez, 2015).

En la fila 2 utilizamos la categoría A21, que ha sido precedida por la observación de la vista gráfica junto con la manipulación de los deslizadores que resultan indicadores de ensayos, de ejemplos (A1, A6).

En la fila 3 la categoría A22, la interpretamos como una acción que es anticipatoria de la necesidad de buscar elaboraciones que garanticen la validez y además enuncia la herramienta que será necesario utilizar. Se expone también aquí el dar explicaciones (A1).

Reflexiones finales

En este capítulo hemos intentado trabajar el cociente de lineales, para avanzar, entre otras cuestiones, en las condiciones de la terna que define la función. Se trata de una elección por pensar la disrupción respecto de tener rutinizado el dominio $\mathbb{R}$ y las gráficas conexas.

Consideramos la resolución experta como parte del cuerpo de saberes hacia el que el alumno avanzará en un proceso que nosotros pretendemos como autónomo.

Dentro de ese proceso nos propusimos únicamente el primer acercamiento, con una consigna que dé la oportunidad de trabajar con elaboraciones propias y en este caso con un recurso TIC que potencie las indagaciones, las conjeturas y sea un apoyo para elaborar argumentaciones sobre ellas.

En el análisis bajo la línea de la TSD hicimos centro en las situaciones de acción y formulación pues se manifestaban con cierto énfasis en la propuesta de elaboraciones de los alumnos utilizando GGB. Nos pareció pertinente hacer referencia a las manifestaciones del medio, y a las sucesivas modificaciones a raíz de las vinculaciones del alumno con el o los problemas. Esto nos permite enfatizar un rasgo del concepto de medio, que es su dinámica. Finalmente, nos resultó relevante pensar en algunas acciones para el proceso hacia la validación, tanto por el aprendizaje del alumno en torno a la argumentación como para el docente que hace un registro mental para acompañar al alumno a proponerlas en las discusiones grupales si acaso no las tuviera presentes o las descartara sin someterlas a la mirada de sus compañeros.

Con la tarea propuesta solo pretendemos ejemplificar la potencialidad de exploración, conjeturación y validación en conjunto con un uso pertinente y significativo de las TIC de una consigna del estilo a la dada. Para aprovechar la riqueza debe estar enmarcada en una propuesta de enseñanza que la potencie.

Referencias bibliográficas

Barreiro, P., Falsetti, M., Formica, A., Marino, T. y Mellincovsky, D. (2009). Formulación de algunas categorías de análisis cualitativo para estudiar la validación en matemática a partir de protocolos de clase. *Epsilon (72)*, 39-60.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comps.) (2015). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Ediciones UNGS y EDUVIM.

Rodríguez, M. (Comp.) (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En H. Aliaga, A. Bressan y P. Sadovsky (Eds.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (pp. 13-65). Libros del Zorzal.

10. Repensar la práctica docente haciendo uso de la tecnología
Una visión socioepistemológica

*Patricia Lestón y Daniela Veiga**

Introducción

El uso de recursos tecnológicos en nuestras clases da la posibilidad de enriquecer el trabajo matemático de nuestros alumnos sin importar el nivel educativo en el que nos estemos desempeñando. Existen, actualmente, una diversidad de herramientas que promueven el uso de distintas estrategias y se ajustan a todas las necesidades y posibilidades. Desde el trabajo *online* hasta una infinidad de software o aplicaciones libres y gratuitas a las que se puede acceder fácilmente desde cualquier computadora, incluso desde los celulares.

La construcción de conocimiento se ve influenciada por una sociedad en la que la tecnología se encuentra al alcance de la mano y la exploración tecnológica forma parte de habilidades que los niños desarrollan desde edades tempranas. Partiendo de esta realidad, los docentes tenemos frente a nosotros el desafío de incluir el uso de estos recursos de manera significativa. Nos vemos en la necesidad de repensar nuestras prácticas docentes con la finalidad de optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje haciendo un uso inteligente de la tecnología.

* *P. Lestón*: Instituto Superior del Profesorado Joaquín V. González, Argentina.
D. Veiga: Instituto Superior del Profesorado Joaquín V. González, Argentina.

Al respecto, el rol del docente resulta fundamental. Si bien, su trabajo se ha transformado y redefinido con el correr del tiempo, el mismo sigue siendo clave en la construcción de los conocimientos. Es el docente el que debe decidir cuándo promover el uso de las herramientas informáticas, cuáles utilizar, en qué contextos, con qué finalidad y sus intervenciones, al igual que las actividades o problemas que proponga, pueden derrumbar cualquier objetivo si no son cuidadosamente pensados y gestionados. No se trata de proponer viejos problemas para resolver con modernas tecnologías. Se trata de repensar y redefinir nuestra tarea como docentes, como mediadores en la construcción del conocimiento. Cuando un docente logra dar este gran paso, se apropia del trabajo de su clase, se adueña de las estrategias óptimas y las adapta a su entorno, estamos frente a una nueva figura, un docente empoderado, capaz de dar respuesta a las problemáticas que se reflejan en sus aulas.

En esta oportunidad, presentamos una actividad que pone en juego dos cuestiones: por un lado, representa un problema cuya resolución involucra un uso significativo de algún recurso tecnológico, esto es, su uso representa una ventaja con respecto a otro tipo de resolución algebraica o analítica (si es que existiera); por otro lado, en términos de la línea socioepistemológica, no introduce un saber nuevo, sino que resignifica lo que ya se sabe acerca de los conceptos que se involucran dando lugar a lo que se denomina la problematización del saber.

Presentación de la tarea

Contexto: El problema que se presenta a continuación se basa en un trabajo de Cantoral y Montiel (2001) y está pensado para ser trabajado con alumnos avanzados de la carrera de profesor de matemática ya que se requieren conocimientos previos de funciones polinómicas y manejo de diversos recursos tecnológicos.

El enunciado está cuidadosamente pensado para no dar más información de la que el alumno necesita para la resolución. Como el problema está dirigido a un público que dispone de conocimientos suficientes de análisis, álgebra y recursos tecnológicos confiamos en que no se presenten obstáculos en la comprensión de la consigna. Asimismo, dada la simplicidad de la misma, es de esperar que rápidamente se asuma un rol activo en la resolución comenzando con la exploración de diversas alternativas.

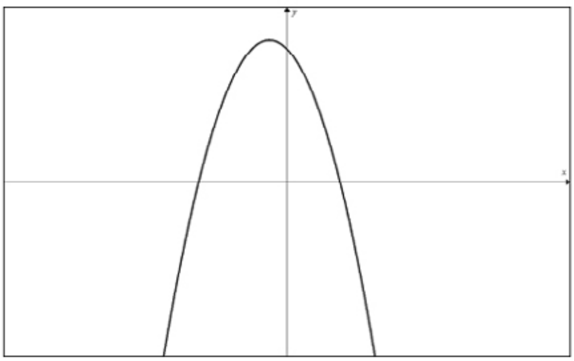
La resolución del problema invita al trabajo grupal y colaborativo ya que la exploración de alternativas enriquece la mirada y da la posibilidad al debate con argumentaciones que pueden ser refutadas o avaladas a partir del intercambio entre pares. De todas formas, también se puede pensar en una primera instancia de exploración individual que permita apropiarse de la situación para luego, participar del trabajo grupal.

Objetivo: El objetivo que nos proponemos alcanzar con su resolución es resignificar el saber matemático asociado al producto de funciones lineales haciendo uso de los recursos tecnológicos como medios de exploración y formulación de conjeturas.

Consigna:

Parte 1

Dada la siguiente parábola obtener la gráfica, de la forma más precisa posible, como producto de dos funciones polinómicas, no cuadráticas. ¿Existe una única posibilidad? Justificar.



Parte 2

A partir de lo realizado en la parte 1, responder a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de funciones polinómicas se deben multiplicar para obtener una función cuadrática? Explicar todas las condiciones que deben cumplirse y detallar las restricciones, en caso de existir.

b) En caso de querer obtener una parábola con dos raíces positivas distintas y cóncava hacia arriba, ¿qué características tendrán las funciones que intervienen en el producto?

c) En caso de querer obtener una parábola con una sola raíz positiva y cóncava hacia abajo, ¿qué características tendrán las funciones que intervienen en el producto?

d) ¿Cualquier parábola podrá obtenerse como producto de otras funciones polinómicas no cuadráticas? Explicar.

Resolución de la consigna

Como lo que se busca es el producto de dos funciones polinómicas no cuadráticas, es sencillo deducir que dichas funciones deberán ser lineales. Probablemente, a esta altura, el lector encamine su búsqueda a través de la expresión factorizada de la parábola. Sin embargo, la naturaleza de la consigna descarta, casi inmediatamente, la posibilidad de una resolución algebraica dado que, al no disponer de una escala, no es posible obtener ningún dato (exacto o aproximado) que permita hallar la expresión algebraica de la misma.

Seguramente, quien haya iniciado la exploración de alguna estrategia de resolución, ya esté en condiciones de afirmar que se requiere hallar la pendiente y la ordenada de dos rectas, cuyo producto sea la función cuadrática dada. Algebraicamente, podemos sostener que estamos buscando dos funciones de expresiones $f_1 = a_1x + b_1$ y $f = a_2x + b_2$ de tal forma que:

$ax^2 + bx + c = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$, para a, b y c que se consideran fijos.

A esta altura, un lector experimentado en conocimientos básicos de las funciones cuadráticas, no tendrá dificultades para argumentar que las dos funciones lineales que se buscan tendrán por raíces a las raíces de dicha parábola. Esto es fácil comprenderlo desde el punto de vista algebraico ya que las raíces de la función cuadrática son aquellos valores de su dominio para los cuales se verifica que $f(x) = 0$, por lo tanto, esos mismos valores deberán anular el producto de las dos funciones lineales:

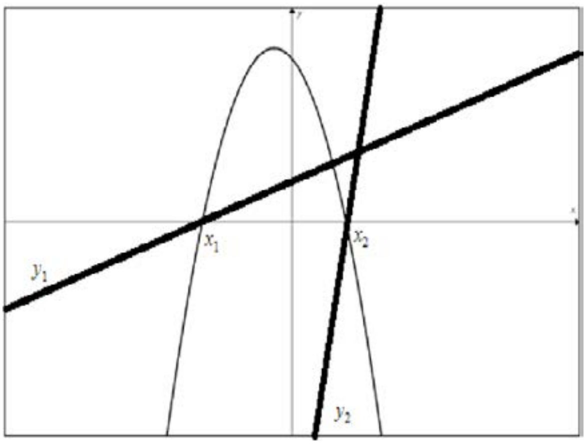
$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$$

Ahora bien, para que este producto sea igual a cero, alguno de sus factores deberá ser igual a cero. Por lo tanto, puede ocurrir que $a_1x + b_1 = 0$ o $a_2x + b_2 = 0$. De cualquier forma, las soluciones de estas ecuaciones son las raíces de cada una de las funciones lineales.

En este punto, si bien se ha dado un gran paso en la resolución, aún no se ha llegado a dar respuesta a la consigna, pues no alcanza con conocer las raíces de las funciones lineales ya que dentro de la infinidad de rectas que contienen a estas raíces no todos los productos de estas rectas darán por resultado la parábola dada en el enunciado. Por lo tanto, será importante determinar las pendientes adecuadas de esas rectas para obtener el producto buscado.

Por ejemplo, en las figuras 1, 2, 3 y 4 todas las rectas representadas comparten sus raíces con las raíces de la parábola. Sin embargo, no podemos determinar con precisión cuáles de ellas, al multiplicarlas, dan por resultado la gráfica dada.

Figura 1. Rectas que comparten raíces con las de la cuadrática



En un primer análisis, ya se pueden ir anticipando algunas condiciones y descartando otras. Por ejemplo, las rectas representadas en la figura 1, sabemos que no pueden ser las buscadas pues entre las raíces x_1 y x_2 las imágenes de la función f_1 son positivas y las de f_2 son negativas; por lo tanto, el producto de ambas será negativo, pero, en ese intervalo la parábola está por arriba del eje x (función cuadrática positiva). El lector comprenderá rápidamente que el mismo análisis se podría haber realizado en otros intervalos convenientemente elegidos.

Figura 2. Rectas y parábola comparten raíces

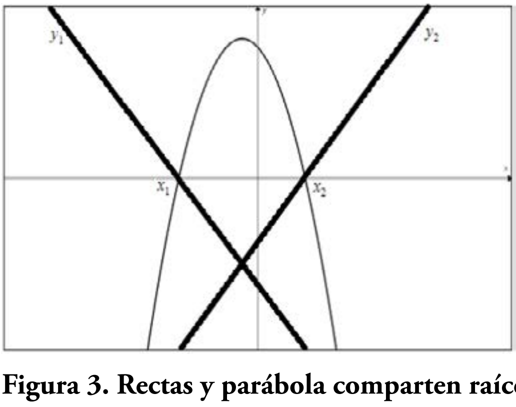


Figura 3. Rectas y parábola comparten raíces

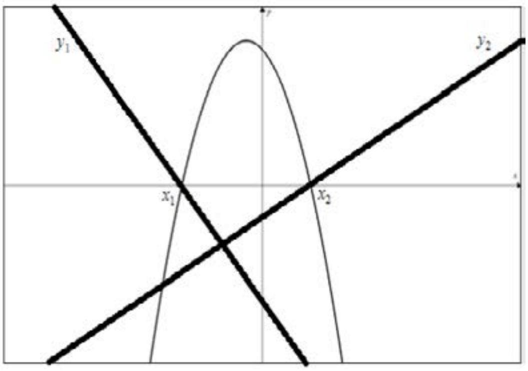
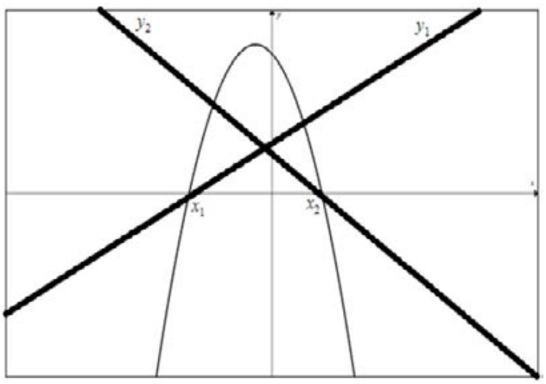


Figura 4. Rectas y parábola comparten raíces



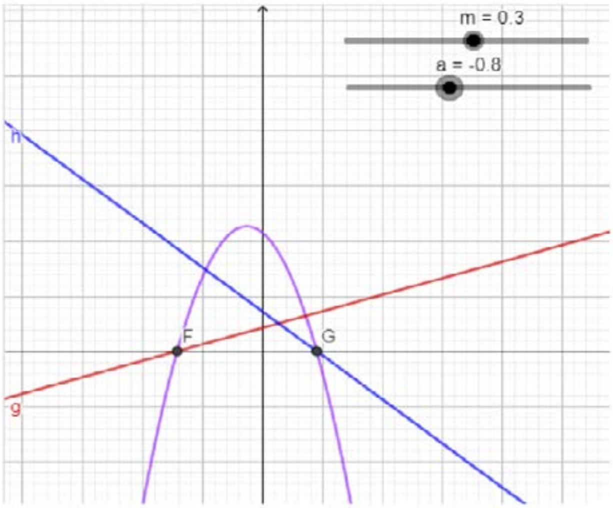
Sin embargo, al analizar los gráficos de las figuras 2, 3 y 4, ya no resulta tan evidente cuáles son las rectas buscadas. A esta altura, se advierte la necesidad de buscar otra estrategia de resolución que permita llegar con la precisión pedida en el enunciado y, al respecto, los graficadores matemáticos constituyen una herramienta que facilita la exploración de diversas posibilidades en un período de tiempo muy breve y, al mismo tiempo, seleccionando el recurso adecuado se podrá arribar a la solución buscada con una precisión mucho mayor que la que podríamos arribar esbozando gráficos en un papel.

Es posible que para su resolución se usen diversos recursos tecnológicos ya que el enunciado no indica ninguno en particular. Al respecto, las autoras de este trabajo elegimos trabajar con GeoGebra, ya que este software permite trasladar o "calcar" el gráfico de la consigna en la pantalla del graficador y, a partir del mismo, es posible hallar con gran precisión una curva que se aproxime a la misma. Para esto, será necesario hacer una captura de pantalla del gráfico de la consigna, con la opción imagen de la barra de herramientas es posible cargar esta imagen en el GeoGebra. Luego, eligiendo el menú propiedades y señalando la pestaña color se disminuye la opacidad adecuadamente y la imagen se volverá casi transparente, de esta manera, podremos situar los ejes con precisión.

Seguidamente, marcamos tres puntos en la parábola con el *mouse*. Usando la herramienta "Polinomio", con la lista de los tres puntos marcados, veremos que la curva se ajusta a una parábola. En este punto, es importante detenerse en un aspecto no menor y que puede resultar muy interesante en el momento de formular argumentaciones, ¿qué papel juegan las escalas de los ejes en la resolución de este problema? ¿Constituyen una variable a analizar? ¿De qué manera intervienen o pueden interferir en la búsqueda de la solución? Estos y otros interrogantes que pueden surgir al momento de la resolución no deben dejarse pasar, sino que forman parte de la riqueza de la actividad planteada. Como siempre, en un contexto escolar, será el docente quien decida cómo gestionar sus intervenciones para orientar a sus alumnos en la búsqueda de las respuestas. Nuestra sugerencia es que los alumnos aprovechen el recurso del que disponen para poder explorar diversas posibilidades que les permitan arribar a conclusiones.

Luego, haciendo uso de las herramientas del GeoGebra, es posible determinar las raíces de la parábola ya que son elementos necesarios para el estudio de las funciones lineales buscadas. A continuación, como puede verse en la figura 5, se pueden construir dos rectas que pasen por cada una de las raíces de la función cuadrática asignando un deslizador diferente para cada una de sus pendientes. Esto permitirá la exploración de diversas posibilidades en cuanto al producto buscado.

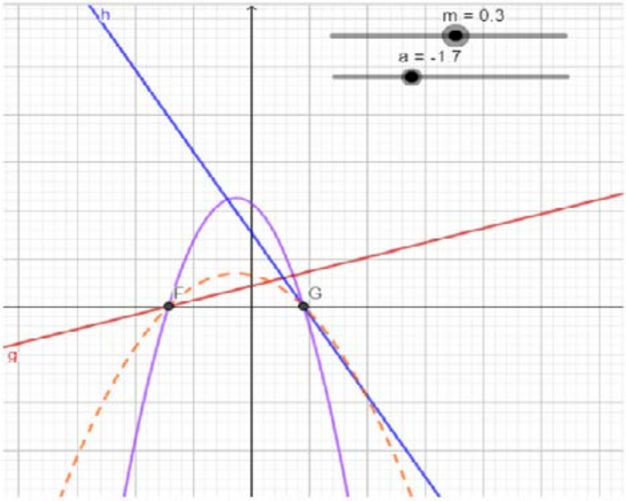
Figura 5. Deslizadores para las rectas que comparten raíces con la parábola



Si bien esta tarea puede resultar sencilla para cualquier persona experimentada en herramientas básicas del GeoGebra, es posible que se encuentren con alguna dificultad al momento de visualizar el producto de las funciones lineales. Esto se debe a la forma de notación de las funciones ingresadas. Es importante que, cuando se trabaje con las rectas, se utilice la herramienta “Función” y no con la herramienta “Recta”. De esta manera, se podrá visualizar el producto de ambas.

Al ingresar el producto de ambas funciones, el lector podrá explorar rápidamente diversas variaciones de las pendientes realizando los ajustes necesarios para hallar la parábola pedida inicialmente. En el gráfico de la figura 6, y haciendo abuso del lenguaje, podemos decir que se puede visualizar el *producto de las rectas* en la función representada con línea punteada que, claramente no se trata de la solución pedida.

Figura 6. Producto de rectas



Esta misma exploración, les permitirá concluir rápidamente que la respuesta al problema no es única, sino que, por el contrario, existen infinitas posibilidades. Es necesario apreciar que, al no indicarse una escala en el enunciado, la función cuadrática puede ser otra. Para enriquecer aún más el problema planteado, una vez más, será el docente quien decida cómo gestionar sus intervenciones; sin embargo, sugerimos que se les pida la elaboración de algún argumento que fundamente esta respuesta. Es de esperar que sus alumnos, mediante la exploración, arriben a la conclusión que el producto de ambas pendientes debe coincidir con el coeficiente principal de la parábola. Por esta razón, las soluciones serán infinitas. Para esto, también pueden usarse las herramientas del GeoGebra que permiten ir comparando la variación del producto con el valor del coeficiente principal como puede observarse en los gráficos de las figuras 7 y 8.

Figura 7. Variación del producto de las pendientes y coeficiente principal

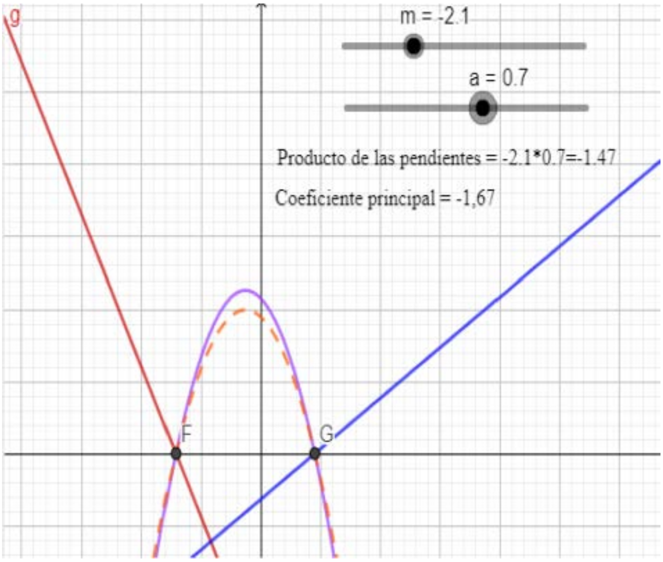
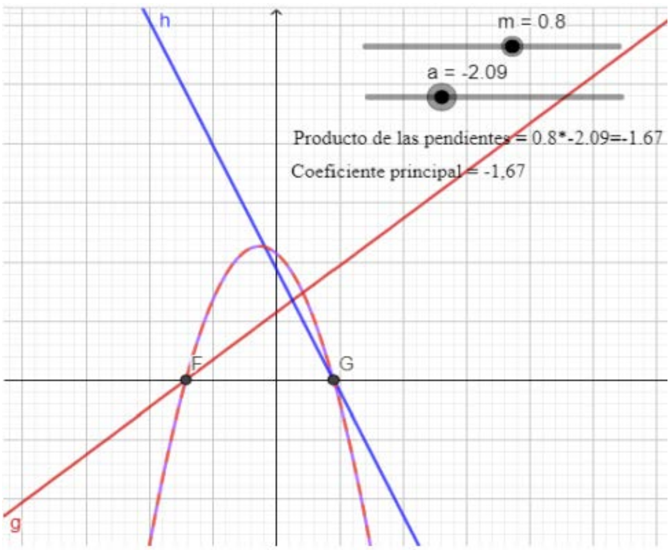


Figura 8. Variación del producto de las pendientes y coeficiente principal



Respecto de la segunda parte del problema planteado se espera que, a partir de la exploración realizada, se puedan arribar a conclusiones y generalizaciones pudiendo anticipar el comportamiento del producto de las funciones lineales y advirtiendo que, a partir de las operaciones entre funciones es posible obtener otras funciones de las cuales podemos ir anticipando características generales. En particular, el último ítem de la segunda parte, invita a un análisis mucho más profundo pues las funciones cuadráticas que no tienen raíces reales no podrán ser representadas como producto de funciones lineales. No obstante, es importante observar que las preguntas tienen un ordenamiento que es deliberado, ya que conducen al alumno a la búsqueda de regularidades y orientan la mirada hacia las conclusiones buscadas.

Análisis didáctico de la actividad a la luz de la socioepistemología

Para empezar, es importante tener en cuenta que un análisis socioepistemológico no implica un procedimiento prescriptivo que arribe a conclusiones, sino que se realiza un estudio sistémico del saber involucrando diversas aristas relacionadas con los componentes del conocimiento matemático: social, epistemológico, cognitivo y didáctico.

> Para lograr una problematización del saber matemático escolar debemos, con anterioridad, realizar un estudio sobre la problematización del saber matemático (PSM). Esta refiere al hecho de hacer del saber un problema, un objeto de análisis didáctico, localizando y analizando su uso y su razón de ser: se analiza la naturaleza del saber (dimensión epistemológica); el uso del saber (dimensión social); apropiación del saber (dimensión cognitiva) y la difusión del saber (dimensión didáctica) (Reyes y Cantoral, 2014, p. 366).

Al pensar la consigna, las autoras buscamos alcanzar dos objetivos. Por un lado, proponer una actividad en la que el uso de algún recurso tecnológico resulte significativo para su resolución y, por el otro, que la resolución de esta situación promueva la resignificación del conocimiento matemático en cuestión, transformándolo en saber. Enmarcamos, por lo tanto, este trabajo en la teoría socioepistemológica de la matemática educativa, dado que bajo esta perspectiva logramos explicar la importancia del escenario tecnológico así como el proceso de revisión del conocimiento en cuestión. Según Cantoral (2013), la teoría socioespistemológica, además de construir explicaciones sistémicas de los fenómenos didácticos en el campo de la matemática, busca intervenir en el sistema didáctico para transformarlo, al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía su enseñanza.

Nos interesan en particular dos unidades de análisis de la socioepistemología que caracterizan el estudio de la matemática escolar:

- La *actividad humana*, permite explicar el conocimiento en términos de herramientas usadas por el ser humano para hacer matemática.
- La *resignificación* se orienta a presentar el conocimiento con significados propios, contextos, historia e intención contraponiéndolo a la idea platónica de preexistencia de los objetos y procesos matemáticos (Crespo Crespo, 2015).

Los conceptos matemáticos involucrados en la resolución de la actividad propuesta son resignificados en el momento de tener que contextualizarlos en una dimensión geométrica en la que el uso de un recurso tecnológico, en este caso, el GeoGebra se convierte en la herramienta de resolución forzando un trabajo analítico en el que se requiere revisar los conceptos matemáticos ajustándose a las restricciones planteadas en esta situación.

Al resolver esta actividad, el lector se enfrenta a la necesidad de ir variando entre lo analítico y lo visual, lo geométrico y lo algebraico. “El análisis de las diferencias de los argumentos permite encontrar la esencia que caracteriza a la construcción de la respuesta. El conocimiento pasa a ser la herramienta construida para usarse y dar respuesta a la situación planteada” (Reyes, 2016, p. 149).

Asimismo, nuestra elección se basa en la idea socioepistemológica que permite distinguir el conocimiento del saber a partir de su uso contextualizado. Según Cantoral (2013) el saber implica la acción voluntaria de transformar el conocimiento en un objeto útil para enfrentar un problema. De acuerdo con esta concepción el proceso de aprendizaje se manifiesta en la evolución de conocimiento a saber.

Para lograr esta transformación del conocimiento en saber, se requiere que el docente o futuro docente se cuestione sobre ese saber ya construido. Con esta intención, se diseña esta actividad que invita a vivenciar la problematización del saber; es decir, cuestionarnos lo que sabemos de funciones lineales y cuadráticas, operaciones entre ellas, relaciones entre lo algebraico y analítico, por qué tenemos estos conocimientos y para qué nos sirven en el contexto planteado. Por ejemplo, al inicio de la actividad, conocer la relación entre la forma factorizada de una función cuadrática y su relación con la representación geométrica facilita la tarea, aunque no la resuelve.

La actividad propuesta no fue necesariamente pensada como un modelo para ser replicado sino como un ejemplo de un saber que ha sido problematizado.

> [En el programa socioepistemológico] se planteaba desde la víspera, la necesidad de una reconstrucción racional del saber matemático que se apoyase, sin lugar a dudas, en una racionalidad contextualizada considerando principalmente la posición de quien aprende, que acompañaría a su vez al programa del relativismo epistemológico atendiendo al qué, cómo y por qué lo aprende (Cantoral, 2013, pp. 36-37).

Se entiende que el proceso de problematización del saber es esencial para que los docentes puedan repensar su práctica escolar. Cuando un saber ha sido repensado la relación con ese saber se modifica y esa modificación redunda en un cambio de la práctica escolar. Esto da lugar a lo que Reyes (2016) llama "empoderamiento docente", en que un individuo por propia decisión e inmerso en una comunidad inicia un trabajo de reflexión que se consolida en la acción transformando su realidad. Este proceso se describe dentro de esta teoría como desarrollo profesional docente, proceso en el cual se promueve el empoderamiento docente que se mencionaba anteriormente.

> El método utilizado por la Teoría Socioepistemológica para trabajar el saber matemático en un proceso de desarrollo profesional docente parte de la problematización del saber matemático (PSM) de un saber transversal que permita articular conceptos curriculares asociados al objeto matemático específico, para construir la unidad de análisis socioepistémica que funge como cimiento para la problematización de la matemática escolar (PME). Esto último promueve el tránsito de una perspectiva centrada en objetos matemáticos hacia otra centrada en prácticas en conjunto con las actitudes de liderazgo que los docentes tomen, pues solo podrá concretarse el cambio de relación al conocimiento matemático si los profesores toman un rol activo en la propuesta (Reyes, 2016, p. 198).

Estamos convencidas de que la resolución de esta actividad involucra conocimientos que pueden resultar muy familiares para cualquier docente o docente en formación y que, sin embargo, invita a cuestionarse y repensar los conocimientos posicionándose en un lugar más activo y enriquecedor para su tarea.

A modo de cierre

La escuela que enfrentamos todos los días los docentes ha cambiado, porque la sociedad de la que somos parte también lo ha hecho. Se modificó la manera en que nos comunicamos, en que nos relacionamos con otros, en que nos informamos y hasta la manera en que hacemos las compras. Ridículo es pretender que la escuela y la forma de conocer no cambien. La tecnología se hace presente en las aulas, aun cuando algunos docentes pretendan dejarla de lado. Lo que en este escrito se pretende mostrar es que el uso de la tecnología, mejor dicho, el uso *inteligente* de la tecnología puede ser para los docentes fuente de inspiración y oportunidad de cambio; y para los alumnos, un escenario en el que construyan saberes que les resulten significativos.

La actividad antes descripta y resuelta no es más que, como ya se mencionó, un ejemplo de un problema que a la luz de la teoría socioepistemológica nos invita a repensar aquello que sabemos, nos lleva a cuestionar cuáles son los posibles usos potenciales de los saberes que tenemos en la búsqueda de la respuesta a una pregunta que, a simple vista, resulta *inofensiva*. Reiteramos que no es casual. Las autoras de este escrito no estamos presentando un problema o una secuencia didáctica que permita presentar un nuevo conocimiento. Lo que se busca es simplemente poner en juego lo que se sabe, lo que conocemos y lo que creemos saber en un escenario en que la conjeturación y la empiria resultan naturales, en pos de la construcción de un nuevo uso de un saber que ya era “conocido”.

No nos interesa transmitir un discurso que sostenga la necesidad de modificar todo lo que hacemos en las aulas para llevarlo hacia el uso de la tecnología. Lo que nos interesa es poner en valor los recursos tecnológicos, permitirnos pensar qué saberes pueden construirse con el uso de la tecnología que de otra manera tal vez no podrían ser construidos. Se busca también que docentes y alumnos –en nuestro caso, alumnos que son futuros docentes– logremos empoderarnos en esto que es la *problematización del saber* y la *puesta en uso* de la tecnología. Entendemos que allí reside la posibilidad de un cambio realista y significativo para la matemática escolar, allí los docentes pueden ejercer este nuevo rol, más de mediador que de centro de la clase, y que los alumnos sean activos protagonistas de su propia matemática escolar. La tecnología no es más que un recurso, uno de los muchos con los que los docentes contamos; sin embargo, es un recurso con casi inagotables posibilidades que sin duda seguirá en desarrollo… ¿no es hora de ponerlo a jugar a favor de la construcción de saberes en las aulas de matemática?

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. En R. M. Farfán (Ed.), *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa 1* (pp. 1-10). La Habana, Cuba.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Editorial Gedisa.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* Prentice Hall.

Cantoral, R. y Reyes, D. (2012). Matemática Educativa, Socioepistemología y la problematización del saber: acciones de una agenda para un cambio educativo. *III Congreso Internacional y VIII Nacional de Investigación en Educación, Pedagogía y formación docente* (pp. 2247-2261). UPN.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, 83-102.

Crespo Crespo, C. (2015). Socioepistemología. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 91-114). Ediciones UNGS.

Lezama, J. y Mariscal, E. (2008). Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva de la socioepistemología. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, pp. 889-900. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Reyes, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento. La profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema 28*(48), 360-382.

Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente y socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Editorial Gedisa.

11. Análisis de una tarea que promueve la alfabetización matemática desde la educación matemática crítica y las nuevas tecnologías

Víctor González y Mabel Rodríguez*

Introducción

En este capítulo presentamos una tarea que consideramos coherente, que promueve un uso pertinente y significativo de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), y la analizamos en términos del concepto de alfabetización matemática (Skovsmose, 2000) enmarcado en la línea de la educación matemática crítica (EMC) (ídem; Scaglia, en Pochulu y Rodríguez, 2015).

Presentación de la tarea

Contexto: los estudiantes manejan operatoria básica con distintos conjuntos numéricos y la noción de porcentajes. Han utilizado fórmulas para cálculos de áreas, perímetros y otras extraídas de sitios web (por ejemplo, para conocer los intereses en un depósito bancario). No han trabajado con otros objetos algebraicos ni se ha problematizado su funcionalidad respecto de la aritmética. Usan

* V. González: Universidad Nacional de General Sarmiento, Universidad Nacional de Luján, Argentina.
M. Rodríguez: Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

tecnologías con libertad, en el sentido de decidir cuándo les serían útiles y para qué. Trabajan en grupos o individualmente, según la propuesta del docente, y están acostumbrados a debatir y argumentar en clase.

Objetivo: que los estudiantes tomen decisiones ante una situación en contexto extramatemático y que argumenten su respuesta utilizando matemática.

Consigna
Primera parte

En la Argentina se hacen tests de alcoholemia a conductores de autos, motos y transporte público para verificar que respeten la ley al circular por rutas nacionales, provinciales y locales. Actualmente, rige la ley de alcohol 0 a nivel nacional. Como toda ley nacional argentina, ha tenido su tratamiento en el Congreso de la Nación, a tavés de discusiones en la Cámara de Diputados y en la Cámara de Senadores. Estas discusiones llevaron a posiciones de permanencia de la ley anterior (Ley de tránsito 24.449), de modificaciones parciales y a favor de la ley de alcohol 0. Ante este escenario, indicá tu grado de acuerdo o desacuerdo respecto de la ley actual sancionada y argumentá sólidamente tu respuesta.

Segunda parte

Se trabajará alrededor de la consigna anterior y se realizará una puesta en común; luego, se entregará el siguiente trabajo:

a) Dejar por escrito las acciones realizadas para decidir tu grado de acuerdo-desacuerdo. Indicar qué datos consideraste, dónde los hallaste y en qué basaste tu decisión.

b) Explicar cómo ves la relación entre matemática-ciudadanos-leyes.

A modo orientativo, dejamos una serie de preguntas (que no es necesario responder individualmente): ¿qué cuestiones matemáticas resultaron imprescindibles para entender los efectos sociales trabajados en esta actividad? ¿Qué tan visible resulta, para un ciudadano, que con matemática podamos comprender más profundamente sobre este tema? El uso de la matemática, que a simple vista no se advierte, ¿resulta neutral? Es decir, ¿encontrás si tiene, o no, implicancias en la vida cotidiana de los ciudadanos?

Extensión máxima de la segunda parte: una carilla.

Resolución de la consigna sin el uso de herramientas informáticas

Entendemos que no es posible abordar la resolución de la consigna sin el acceso y uso de las TIC dado que no se accede a ningún tipo de datos. Esto suele suceder ante consignas que plantean preguntas *reales* que no han sido manipuladas para la enseñanza (la mayoría de las actividades escolarizadas son ficticias, han sido creadas para que los estudiantes utilicen un cierto conocimiento matemático).

Resolución y análisis de la consigna utilizando TIC

Iniciamos este apartado con una resolución en la que se advierte un uso pertinente y significativo de las TIC (Rodríguez, 2022). No incluimos este análisis, pero invitamos al lector a reflexionar al respecto.

Como mencionamos, no es posible abordar la resolución de esta consigna si no disponemos de datos. A modo de ejemplo, a partir de la información disponible en el sitio web de la organización Luchemos por la Vida,[1] se puede presentar la siguiente argumentación en desacuerdo con la propuesta de continuar con la Ley 24.449.

Argumentación

La organización Luchemos por la Vida pone énfasis en que el alcohol al volante es una de las dos causas más importantes de accidentes de tránsito con muertos y heridos graves en la Argentina. Además de ello, realiza estudios e investigaciones en relación con esta temática. En una de sus publicaciones presenta los resultados de una encuesta a 496 conductores de Capital Federal en septiembre de 2007, en el Centro de Otorgamiento de Licencias de la Ciudad. Una síntesis de los resultados es la siguiente:

[1] Disponible en: http://www.luchemos.org.ar/es/investigaciones/alcohol-y-conduccion.

1) El 67% de los encuestados consume habitualmente bebidas alcohólicas.

2) Muchos de ellos conducen después de haber bebido.

3) El 65% cree que un solo vaso de alcohol no afecta la capacidad para conducir.

4) El 47% de los encuestados no conoce el límite legal de alcohol tolerado en sangre en conductores particulares (0,5g/l).

5) El 50% de los encuestados calcula 2 botellas o más de cerveza para cada invitado si organiza una fiesta.

Si bien todos los resultados son alarmantes, nos interesa destacar que 4) y 5) dan cuenta de una cultura alcohólica que es ajena a las leyes que son vigentes en un determinado momento histórico. Para evidenciar esto, presentamos la siguiente situación hipotética y los cálculos realizados con la fórmula de Widmark (puede ampliarse en Fanaro y Almada, 2020), que permite obtener la cantidad de alcohol en sangre de una persona en relación con la cantidad de alcohol ingerido, su peso y contextura.

La fórmula es $C = \frac{A}{m.r}$ donde C es la concentración de alcohol en la sangre, medida en gramos por litro de sangre, A son los gramos de alcohol ingerido, m es la masa (el peso) de la persona en kg (kilogramos) y r es un factor de distribución del individuo (para varones, r = 0,7 y para mujeres, r = 0,6). Los gramos de alcohol ingerido dependen de la graduación alcohólica de la bebida y la cantidad consumida, y se calculan del siguiente modo:

$$\text{A = gramos de alcohol ingerido} = \frac{graduación \cdot cantidad\ consumida\ (ml) \cdot 0{,}80}{100}.$$

Situación: supongamos que en una reunión se dispone de 2 botellas o más de cerveza por invitado (como estima el 50% de los encuestados) y esta cantidad es efectivamente consumida por los asistentes. La tabla que sigue muestra cómo resultan las cantidades de alcohol en sangre (*C*) en ejemplos que consideran un tipo particular de cerveza.			
Bebida	Peso	*C* en mujer, según la fórmula de Widmark	*C* en hombre, según la fórmula de Widmark
Cerveza elegida: Andes Roja, 1 litro Graduación alcohólica: 5,1 Volumen total ingerido: 2 litros $A = \dfrac{5{,}1 \cdot 2000ml \cdot 0{,}80100}{100}$ = **81,6**	50 kg	2,72	2,33
	100 kg	1,36	1,165

Los resultados pueden calcularse en lápiz y papel, o bien utilizando algún recurso como Excel si hubiera más cálculos que realizar y se deseara automatizar los cálculos, como mostramos en la siguiente imagen:

A	m	r			C = A/(m.r)
81,6	50	0,7	varón		2,331428571
81,6	50	0,6	mujer		2,72
81,6	100	0,7	varón		1,165714286
81,6	100	0,6	mujer		1,36

Una de las conclusiones que se puede sustentar con los datos de la tabla construida es “Con que uno de los asistentes (hombre o mujer, con un peso entre 50 y 100 kg) de esa hipotética situación cumpla además ser de aquellos que contestaron afirmativamente las opciones 1), 2), 3) y 4), podemos asegurar que no pasarían un control de alcoholemia. Ninguno de ellos cumple la ley que estaba vigente en el momento de la encuesta. Más allá de exceder, o no, el máximo permitido en aquel momento, destacamos que los valores de la concentración de alcohol en sangre (*C*) presentados en la tabla son equiparables a valores que tenían conductores protagonistas de siniestros viales (por ejemplo, ver https://www.lmneuquen.com/pais/accidente-fatal-un-conductor-alcoholizado-se-cruzo-carril-y-mato-un-motociclista-n1120953). Por todo lo anterior, estamos en desacuerdo con continuar con la Ley 24.449.

Análisis de la tarea en términos de la educación matemática crítica

Para el análisis, consideramos la noción de alfabetización matemática (Skovsmose, 2000; Scaglia, en Pochulu y Rodríguez, 2015) enmarcada en la educación matemática crítica. Scaglia (ídem) señala que Skovsmose interpreta la alfabetización matemática como un proceso integrado por tres competencias: matemáticas, tecnológicas y reflexivas. Operativizando esto, señalamos cuatro elementos que las consignas o actividades debieran cumplir, en mayor o menor medida, para promover la alfabetización matemática. Estos elementos se refieren uno al contexto y los otros tres al tipo de solución, y son los siguientes:

a. El contexto de la consigna debería ser real, vigente e importante para el estudiante como ciudadano.

El tipo de solución esperada:

b. Requiere usar matemática.

c. Requiere tomar decisiones justificadas.

d. Invita al estudiante a hacerse preguntas sobre el funcionamiento de la matemática en la sociedad. Dentro de esas preguntas, se consideran aquellas que le permita reflexionar sobre el valor de la matemática para responder e incidir en asuntos de apariencia no matemáticos (pero que son estructurados por la matemática).

A partir de lo mencionado, destacamos que el contexto de la consigna da cuenta de una problemática social y política importante, como lo es la existencia de leyes que regulan la máxima concentración de alcohol en sangre de los conductores, y en particular las argumentaciones a favor o en contra de fijar ese máximo permitido usando matemática, vinculado con las implicaciones sociales que esto conllevaría.

En relación con la toma de decisiones justificadas que podrían emerger, señalamos que el ítem a) demanda que el estudiante, a partir de la búsqueda de información, pueda presentar su grado de acuerdo-desacuerdo en relación con una discusión parlamentaria respecto de la sanción de una ley.

Por último, en relación con la reflexión sobre el valor de la matemática para incidir en asuntos de apariencia no matemáticos (pero que son estructurados por la matemática), destacamos el pedido realizado en el ítem b). En él se demanda la elaboración de una síntesis en la que el estudiante vincule la matemática, los ciudadanos y las leyes, considerando lo que analizaron previamente.

Cabe señalar que una resolución como la que presentamos muestra que la búsqueda de información derivó en un trabajo sobre cuestiones matemáticas tales como: la interpretación de los porcentajes que arroja una encuesta; la elaboración de una situación hipotética posible que muestra que el estudiante comprende que es razonable (debido al 50% señalado) que un organizador de una fiesta estime 2 cervezas (o más) por persona; el uso de la fórmula de Widmark para el cálculo de la concentración de alcohol en sangre; la comparación de los valores arrojados por la fórmula de Widmark; y los valores máximos que establecía la Ley 24.449. Todo esto, además, relacionado con el riesgo de tener un accidente de tránsito en el caso de que se conduzca con esos niveles de alcohol en sangre, lo que deriva en un posicionamiento que está en desacuerdo con continuar con la Ley 24.449.

A modo de cierre

La alfabetización matemática, entendida como la hemos presentado aquí, es un aspecto que hoy en día está presente en diversos diseños curriculares de la Argentina, más allá de que se exprese, o no, con este término. Es decir, puede encontrarse alusión a la importancia de promover la alfabetización matemática en jóvenes que asisten a la escolaridad media sin que necesariamente esté mencionado de este modo.

En algunos casos, se hace referencia a la importancia de formar estudiantes que puedan desenvolverse adecuadamente en la sociedad y que comprendan cuestiones que los atañen, propias del ejercicio de la ciudadanía. En todos estos casos, lo que se enfatiza es el valor de la matemática para sostener posiciones con argumentos. Resulta interesante advertir que un docente que esté interesado en promover la alfabetización matemática de sus estudiantes tendría que proponer actividades reales en las que lo matemático suele no ser evidente. Será el estudiante quien deberá develar el trasfondo matemático y, habiéndolo hecho, este le permitirá comprender situaciones y argumentar sobre sus decisiones. La mayoría de las veces tales situaciones no contendrán datos, por lo que uno de los usos de las TIC –la búsqueda de información– se torna irreemplazable, lo que permite que el estudiante aprenda matemática haciendo un uso pertinente y significativo de las tecnologías. Cuando las situaciones ya traen datos matemáticos, la pertinencia o significatividad del uso de las TIC se analiza según lo explicitado en Rodríguez (2022).

Finalmente, resaltamos la necesidad de que los planteos sean reales. Si el docente utiliza libros de texto escolares, tendrá por delante la tarea de rediseñar o ajustar las consignas para lograr un planteo actualizado. Para detalles sobre este tipo de modificaciones dejamos como referencia a González (2023).

Referencias bibliográficas

Fanaro, M., y Almada, M. (2020). El estudio de las 'funciones definidas a trozos': modelizando el circuito del alcohol en el cuerpo humano con estudiantes de la escuela secundaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *103*, 29-47. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/23535/.

González, V. (2023). *Uso de libros escolares para la alfabetización matemática en el nivel secundario. Un estudio en formación de profesores*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Luján (UNLu). Disponible en: https://ri.unlu.edu.ar/xmlui/handle/rediunlu/1989.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comps.) (2015). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, volumen 1. UNGS-Eduvim.

Rodríguez, M. (coord.) (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.

La colección Educación de la Universidad Nacional de General Sarmiento reúne la producción editorial que resulta de las investigaciones, actividades y desarrollos en las áreas temáticas de educación, pedagogía, programación de la educación, política educativa, historia de la educación y didáctica. Estas líneas de investigación y docencia son fundamentales en el proyecto académico de la UNGS y tienen un desarrollo constante y permanente.

Enseñar matemática es una tarea compleja que requiere formación específica para comprender cada situación, tomar decisiones, gestionar y evaluar lo sucedido. Para que estas tareas sean hechas de un modo profesional, se requiere poner en juego conocimientos teóricos, prácticos y metodológicos. Este libro ofrece una variedad de ellos y los presenta en dos secciones. La primera, *Enfoques teóricos en educación matemática*, presenta aspectos centrales de naturaleza teórica del campo de la educación matemática. La segunda, *Nuevas tecnologías bajo distintos enfoques teóricos*, ofrece al lector un análisis de situaciones de enseñanza, de naturaleza práctica. En ellas se argumenta la significatividad del uso de las nuevas tecnologías al mostrar la riqueza matemática que podría lograrse si los estudiantes las utilizaran, en relación con las resoluciones en papel y lápiz. Asimismo, se incluye un análisis de las situaciones presentadas, en términos de distintas líneas de la educación matemática. Así, pretendemos que se advierta el rol de las TIC como recurso didáctico más allá de la perspectiva teórica con la que se pretenda trabajar. Esperamos que el texto resulte útil no solo para estudiantes de profesorado o profesores, sino también para quienes se inician en investigación y necesiten disponer de una perspectiva amplia del campo de la educación matemática.

Colección Educación

Universidad Nacional de General Sarmiento

LUA Libro Universitario Argentino

ISBN 978-987-630-775-8