

Uso de las TIC en la clase de matemática

Ejemplos y discusión



Gustavo Carnelli y Martín Chacón

Ideas para la clase de matemática

EDICIONES **UNGS**



Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

USO DE LAS TIC EN LA CLASE DE MATEMÁTICA
EJEMPLOS Y DISCUSIÓN

Gustavo Carnelli y Martín Chacón

Uso de las TIC
en la clase de matemática
Ejemplos y discusión

EDICIONES **UNGS**



Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

Carnelli, Gustavo

Uso de las TIC en la clase de matemática : ejemplos y discusión / Gustavo Carnelli ; Martín Chacón. - 1a ed. - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2026.

90 p. ; 20 x 14 cm. - (Educación ; Educación en ciencias ; 5)

ISBN 978-987-630-855-7

1. Matemática. 2. Educación. 3. Tecnología de la Información y las Comunicaciones. I. Chacón, Martín II. Título

CDD 510

EDICIONES **UNGS**

© Universidad Nacional de General Sarmiento, 2026

J. M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)

Prov. de Buenos Aires, Argentina

Tel.: (54 11) 4469-7507

ediciones@campus.ungs.edu.ar

ediciones.ungs.edu.ar

Dirección editorial: Andrés Espinosa

Coordinación editorial: Nicolás Tomasi

Diseño gráfico de colección: Andrés Espinosa

Diseño de tapa: Daniel Vidable

Diagramación: Eleonora Silva

Corrección: María Inés Castaño

Hecho el depósito que marca la Ley 11723.

Prohibida su reproducción total o parcial.

Derechos reservados.

Impreso en Ediciones América

Abraham J. Luppi 1451, CABA, Argentina,
en el mes de abril de 2026.

Tirada: 30 ejemplares.



Libro
Universitario
Argentino

Serie

Educación en ciencia

Coordinación:
Mabel Rodríguez

Equipo editorial:
**Gustavo Carnelli, Patricia Barreiro,
Tamara Marino y Paula Leonian**

Esta serie reúne aportes del campo de la enseñanza de distintas ciencias. Enfocada inicialmente en la educación matemática, contribuye con la comunidad académica brindando textos útiles, claros en su presentación y accesibles para un público de estudiantes que se están formando como profesores, para docentes de nivel medio y superior y para formadores de formadores e investigadores. La serie se articula en dos subseries: Ideas para la clase de matemática e Investigaciones en educación matemática.

Ideas para la clase de matemática

Cada libro de esta subserie presenta un tema de enseñanza de la matemática de nivel secundario o superior. Primero se presenta una discusión sobre cuestiones referidas a la enseñanza de algún contenido matemático, que pueden incluir consignas para trabajar en el aula, con anticipación de posibles resoluciones y errores esperables, modos de aplicación y su adecuación a distintos grupos de estudiantes. Estos materiales también pueden sumar la consideración de los aportes de la educación matemática para su diseño y análisis, entre otros temas

de interés. Se pueden incluir distintas resoluciones de consignas que contemplen el uso de recursos tecnológicos –si es pertinente– y presentar una discusión acerca de en qué contextos, con qué modalidad de trabajo y para qué objetivos podrían ser apropiados esos recursos.

La concepción de profesor que subyace es la de un profesional que debe tomar decisiones sobre contenidos, objetivos, recursos, etcétera, por eso no se incluyen secuencias ni planificaciones cerradas que marquen un camino a seguir. Tomando cuestiones teóricas de la educación matemática, pueden incluirse las fundamentaciones de algunas de las propuestas o aportes para encarar ciertos temas. Se espera que los libros de esta subserie contribuyan a fortalecer el rol docente por medio de una discusión académica, en la que el lector se encontrará involucrado e invitado a sumar herramientas para su quehacer cotidiano.

Índice

Introducción	11
Capítulo 1. Problemas resueltos con y sin uso de las TIC	19
Capítulo 2. Las TIC en las actividades para el aprendizaje. Una discusión acerca de los criterios para su evaluar su uso.....	53
Cierre.....	81
Referencias bibliográficas.....	85

Introducción

La incorporación de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC)¹ en las clases de matemática es un asunto que desde hace varios años presenta un creciente interés, tanto en la enseñanza de la matemática como en el campo de la investigación en educación matemática. Solo a modo de ejemplo de la amplia producción académica en esta temática, podemos mencionar a Gamboa Araya (2007), quien destaca la importancia del uso de los recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, si está bien dirigido por la enseñanza. Este autor ha analizado situaciones en las que los recursos tecnológicos permiten realizar observaciones y obtener conclusiones que se dificultan o se imposibilitan sin el uso de las TIC. Por su parte, Villarreal Farah (2010) analiza la actividad de docentes y estudiantes al involucrar el uso de las TIC en la resolución de problemas matemáticos abiertos. Pizarro (2009) propone la utilización de un nuevo software educativo para resolver problemas de cálculo numérico y analiza su aplicación en los cursos de esa asignatura. Barreiro (2015), por su parte, se interesa por favorecer en la formación docente inicial la integración de las TIC a las clases de los futuros docentes y para eso realiza un estudio en una asignatura de educación matemática de

¹ Las llamamos TIC a lo largo del texto y, en ocasiones, diremos “recursos tecnológicos”. No nos ocupamos aquí de discutir los distintos términos que se utilizan al mencionarlas, asunto más específico del campo de la tecnología educativa. En cuanto al alcance que le damos a las TIC, no incluimos la inteligencia artificial (IA). Debido a su reciente incorporación a la discusión en la enseñanza y a la interacción que hemos tenido con ella en los problemas que trabajamos aquí, optamos por postergar su inclusión para otra instancia.

una carrera docente en donde analiza la evolución de los estudiantes para diseñar tareas y secuencias que promuevan un buen uso de las TIC. En su trabajo, toma de Sandholtz y Reilly (2004) los niveles de integración de las TIC por parte de docentes a sus propuestas didácticas y los reelabora adaptados a la formación docente inicial y a la especificidad de la matemática.

Entre las producciones de estos últimos años podemos mencionar a Area y Adell (2021), quienes analizan el impulso de la enseñanza digital como consecuencia de la pandemia de covid-19 y los desafíos que, más en general, la revolución digital provoca en la escuela de hoy. También resulta de interés el aporte de Lion (2024), quien discute la idea clásica de asociar aprendizaje con rendimiento en estos nuevos escenarios digitales en continua transformación.

Rodríguez *et al.* (2022) presentan un libro con una sección dedicada al estudio de tareas matemáticas, en la que distintos autores plantean situaciones de enseñanza que promueven un buen uso de las TIC y las analizan desde ese aspecto, y también desde líneas teóricas en educación matemática. Así, tenemos un capítulo en el que Barreiro, Leonian y Zuliani plantean una actividad con funciones lineales cuyos parámetros (pendiente y ordenada al origen) difieren en una unidad y la analizan con elementos de la resolución de problemas. Luego, en el capítulo de Distéfano y Álvarez se desarrolla un problema asociado al teorema de Varignon, que nosotros tomamos para ejemplificar un criterio nuevo sobre el uso de las TIC en el capítulo 2, y se analiza con el enfoque ontosemiótico. Por otro lado, el capítulo de Camós y Guglielmone trabaja sobre las transformaciones que sufren los gráficos de una función cuando a la fórmula se le realiza alguna de las operaciones básicas y lo analizan desde una perspectiva cognitivista; el de Casetta y Chacón presenta un estudio de las funciones cuya fórmula puede

escribirse como cociente de dos expresiones lineales y con análisis de la Teoría Antropológica de lo Didáctico; y el capítulo de Lestón y Veiga propone una actividad que pretende expresar las funciones cuadráticas como producto de funciones lineales, analizado desde la socioepistemología.

El software matemático GeoGebra (en adelante, GGB) ha adquirido mucho protagonismo en las clases de matemática en los últimos tiempos, por lo que ha comenzado a ser objeto de investigación desde hace unos años: podemos mencionar el trabajo de Rodríguez (2020), que estudia cómo se integran GGB y otros recursos tecnológicos en las clases de matemática de la ciudad argentina de Bahía Blanca; el trabajo de Montero (2014), que estudia el uso de GGB en la propuesta de una asignatura avanzada del campo de la geometría en un instituto terciario de la región argentina de Cuyo, entre otros.

En las aulas, las TIC han transitado un camino más sinuoso. Cuando las calculadoras científicas comenzaron a ser de acceso masivo –podemos estimarlo en los comienzos de los años ochenta en la Argentina– fue necesario pensar qué lugar darles en la clase. En esos tiempos era esperable que la decisión de quienes enseñaban fuera que se las use para chequear lo que había que seguir haciendo con lápiz y papel o que, directamente, no se permitiera su uso. Es sabido que estas dos decisiones se mantuvieron en el tiempo por varios años en gran parte de las aulas. Algo similar ocurrió con el uso de softwares matemáticos y de internet, con la diferencia de que en el siglo XXI todo corre a un ritmo mucho más acelerado y el impacto que tienen estos avances en la sociedad dificulta mantener posturas tan conservadoras en la enseñanza; además, los avances en educación matemática aportan evidencias para modificar esas prácticas tradicionales.

En este contexto, el problema de interés ya no es si incluir o no las TIC en las clases de matemática, sino cómo y para qué incluirlas. Esta cuestión no tiene una respuesta sencilla, pues no se trata solo de que las TIC faciliten el trabajo matemático, en el sentido de hacer más rápido o chequear lo que hacemos con lápiz y papel; con la inclusión de las TIC, la actividad matemática que proponemos puede enriquecerse hasta el punto de que pueden verse relaciones matemáticas que sin ellas permanecerían ocultas. Por esto, es necesario profundizar la discusión teórica acerca de esta temática y el aporte de elementos prácticos, de modo que su inclusión favorezca el aprendizaje de la disciplina y se aprovechen sus potencialidades.

Organizamos este libro en esta introducción, dos capítulos y un cierre. En el primer capítulo nos ocupamos de la resolución de problemas matemáticos con y sin uso de las TIC. El centro está puesto en el análisis de qué cuestiones matemáticas se habilitan en cada caso. Para ello, tomamos un par de problemas que consideramos interesantes para ese propósito.

El segundo capítulo pretende aportar a la discusión teórica. Nuestra experiencia en la enseñanza de asignaturas de matemática y de educación matemática nos ha requerido reflexionar acerca de cómo, cuándo y por qué incluir recursos tecnológicos para el aprendizaje de la matemática. Uno de los textos de la autoría del equipo docente de Enseñanza de la Matemática I y II que integramos en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) contiene un capítulo sobre las TIC y plantea criterios para valorar la pertinencia y significatividad de usarlas en las actividades (Rodríguez, 2022). El hecho de utilizarlos en las clases de estas asignaturas como elemento metodológico para la elaboración y el análisis de materiales didácticos nos ha generado el interés por

revisarlo. Así, tomamos esos criterios y, a partir de ellos, los ejemplificamos, discutimos y enriquecemos. Hemos tenido en cuenta que los distintos problemas que planteamos se enmarquen en distintos campos de la matemática, de modo de invitar a quienes piensan la enseñanza de la matemática a incluir las TIC en cualquiera de sus asignaturas.

A pesar de que en matemática está muy difundido el uso del potente GGB tanto para geometría como para cálculo y precálculo, consideramos que la inclusión de otros recursos tecnológicos también puede enriquecer el trabajo matemático: por ejemplo, el uso de buscadores en la web para el posterior procesamiento de la información obtenida o la utilización de documentos para la producción de textos colaborativa sincrónica o asincrónica, como señalan Rodríguez y Barreiro (2017).

Las distintas actividades que proponemos a lo largo del libro están pensadas para la clase de matemática. Resulta necesario precisar para qué nivel las hemos imaginado. A grandes rasgos, pensamos en el nivel superior inicial, es decir, el primer año de estudios superiores. No obstante, consideramos que también son aplicables a los últimos años del nivel secundario. Obviamente, asumimos que cada docente decide si una actividad es apropiada para su clase y, también, puede hacer los ajustes necesarios para adaptarla. De hecho, queremos destacar esto último. En nuestra propuesta, redactamos las actividades de la manera que nos pareció apropiada para docentes y estudiantes de formación docente, que son lectores naturales de este libro. Realizarle ajustes, adaptaciones, recortes y reformulaciones nos parece central si se pretende tomar alguna de ellas para otras clases.

Por último, no está de más decir que si bien no perdemos de vista en ningún momento la riqueza de la actividad matemática que

pretendemos que se favorezca en las clases, este libro se ocupa del uso de las TIC, por lo que es inevitable que se perciba un sesgo hacia ello. Diversas tareas matemáticas que se proponen en las clases pueden ser valiosas sin que haya uso de las TIC, obviamente. No es necesario justificar por qué y aquí no nos ocupamos de esto.

Sobre la resolución de problemas

Como mencionamos anteriormente, a las actividades que incluimos en este libro las consideramos problemas (matemáticos). El término “problema” es, quizás, el más polisémico de la educación matemática. Según la línea teórica desde la que se analice, tiene un significado u otro. A esto se suman acepciones ingenuas que también circulan en el ambiente, como podría ser cuando se hace alusión a una actividad contextualizada o cuando se la quiere distinguir de un ejercicio, en el sentido de que este apunta a lo rutinario y el problema no. En este libro tomamos una idea cercana a la de la línea teórica de resolución de problemas (Polya, 1989; Rodríguez, 2012). Enmarcados aquí, tomamos la siguiente noción:

Un *problema para un individuo* es una situación que requiere solución y este, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato (Chacón *et al.*, 2009).

Se desprende de aquí que para que una situación sea o no un problema depende del individuo que se enfrentará a ella. Además, para que resulte un problema, quien resuelve deberá querer hacerlo y no conocer de antemano algún camino que recorrer. Al resolver un problema, se utilizan estrategias que se consideran útiles: las

heurísticas, como pueden ser examinar casos particulares, realizar una representación de la situación en un registro distinto del que fue dado, realizar una construcción auxiliar, etc. Pueden verse desarrollos sobre estos asuntos en Marino y Rodríguez (2009) y Nápoles Valdez y Cruz Ramírez (2000), entre otros.

Tomamos lo mencionado como un marco para pensar las actividades. Las que presentamos en el capítulo 1 han resultado ser un problema para los alumnos de primer año de estudios superiores con quienes hemos trabajado (Carnelli y Chacón, 2024a). No obstante, a partir de esas implementaciones, les realizamos algunas mejoras. Retomando lo ya dicho, justamente es parte de la tarea docente que imaginamos sobre el uso de este libro: la adaptación de las actividades al contexto de trabajo de cada docente.

Capítulo 1

Problemas resueltos con y sin uso de las TIC

Las actividades para el aprendizaje de la matemática que podemos proponer desde la enseñanza pueden ser muy diversas, esto es evidente. Aún sin siquiera pensar en la posibilidad de incluir las TIC, hay actividades que promueven una actividad matemática rica, otras que no tanto, otras que apuntan a afianzar procedimientos, otras que promueven la emergencia de alguna relación matemática nueva, etc. (para ampliar esta idea, Nápoles Valdez y Cruz Ramírez [2000] dan una caracterización de los distintos tipos de ejercicios y problemas). Ahora, cuando incluimos las TIC surgen nuevas cuestiones para estudiar y sobre algunas de ellas tratamos en este libro.

En este capítulo nos ocupamos de discutir resoluciones de problemas con y sin uso de las TIC. Asumimos que en ciertos problemas (no en cualesquiera, claro está) ambas resoluciones y su análisis conjunto tienen interés didáctico-matemático. Precisamos que cuando hablamos de una *resolución sin uso de las TIC* nos referimos a la típica resolución con lápiz y papel, y sin el uso de recursos tecnológicos; en ocasiones, la llamamos resolución con lápiz y papel. Por su parte, cuando decimos *resolución con las TIC* nos referimos a aquella en la que está habilitado el uso de cualquier recurso tecnológico que utilice quien resuelve y, efectivamente, se usan algunos de ellos. Aunque parezca obvio, no queremos dejar de

señalar que una resolución con las TIC incluye trabajo con lápiz y papel, al menos posterior a su uso.

Esta división en resolución con y sin uso de las TIC la hacemos a los efectos de la discusión y el análisis didáctico-matemático. En definitiva, ante un problema dado, hay una persona en situación de aprendizaje dispuesta a resolverlo y, para ello, usará las TIC si lo considera conveniente o no las usará, o bien usará las TIC solo en los momentos que considere adecuado.

El centro de este capítulo está en la discusión acerca de las resoluciones de actividades para el aprendizaje de la matemática con y sin uso de las TIC. Para ello diseñamos dos problemas, uno del campo de la geometría y otro del campo del precálculo, discutimos las distintas resoluciones y analizamos qué se promueve con cada una. Consideramos que esto da elementos a quienes enseñan matemática para enriquecer el diseño de sus propias actividades o la recreación de otras existentes. Hemos implementado estos problemas con estudiantes iniciales del nivel superior. Al respecto, puede verse un reporte de lo sucedido en Carnelli y Chacón (2024a).

1.1. Primer problema: área de un cuadrilátero conocidas sus diagonales

Problema 1

Dados dos segmentos, se consideran todos los cuadriláteros convexos que los tienen por diagonales. ¿Algunos de esos cuadriláteros tienen la misma área? ¿Hay alguno de esos que tenga la mayor área?

Resoluciones sin uso de las TIC

Forma 1)

Los datos brindados no requieren del planteo de restricciones, pues las diagonales de un cuadrilátero pueden ser de cualquier medida.

El área A de un cuadrilátero convexo en función de las longitudes d_1 y d_2 de sus diagonales y el ángulo θ entre ellas es:
 $A(d_1, d_2, \theta) = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \text{sen}(\theta)$.

En esta resolución consideramos que el conocimiento de la fórmula anterior está disponible, pese a que no suele tener presencia en las aulas ni del nivel secundario ni del nivel superior.

El ángulo entre dos segmentos que se intersecan es el menor de los cuatro ángulos formados (cualquiera de los dos de menor amplitud). La fórmula funciona con cualquiera de ellos. Esto es así, pues si consideramos dos cualesquiera de esos cuatro ángulos, son opuestos por el vértice o adyacentes. En el primer caso son iguales² y en el segundo son suplementarios, por lo que tienen el mismo seno.

Asumida la fórmula, resulta fácil ver en ella que el área de los cuadriláteros que comparten sus diagonales depende solo del ángulo que ellas forman, ya que el área es una función que depende de las diagonales y del ángulo entre ellas. Entonces, tienen igual área todos aquellos cuadriláteros cuyo ángulo entre sus diagonales es el mismo. Con esto, respondemos la primera pregunta del problema.

En relación con la segunda pregunta, podemos decir que tiene mayor área cualquiera de los cuadriláteros cuyas diagonales sean

² Por razones de simplicidad en el lenguaje y la notación, optamos por usar *igualdad*, en lugar de *congruencia*.

perpendiculares. Esto es así pues $\text{sen}(\theta)$ es creciente para θ entre 0 y un recto, y su máximo valor es 1.

Un ejemplo:

Si los segmentos dados tienen medida 5 y 7, el área es $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \text{sen}(\theta)$.

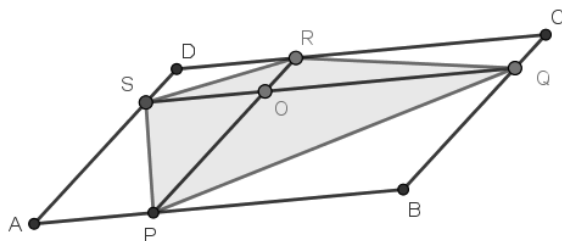
Si el ángulo entre las diagonales fuera $\frac{\pi}{6}$ entonces $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{35}{4}$.

Si las diagonales fueran perpendiculares, entonces $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{35}{2}$ que, por lo argumentado, es el máximo valor que puede tomar el área de un cuadrilátero que tenga diagonales de medidas 5 y 7.

Forma 2)

En esta resolución sin uso de las TIC no vamos a asumir el conocimiento de la fórmula usada en la Forma 1). Entonces, vamos a buscar una forma de hallar el área de cualquier cuadrilátero convexo en función de las diagonales.

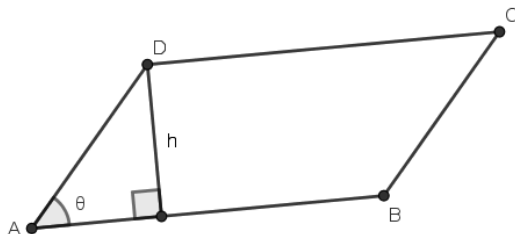
Dado un cuadrilátero convexo cualquiera $PQRS$, sus diagonales se intersectan en O . Consideramos las rectas p y r paralelas a QS por P y R , respectivamente; y las rectas q y s paralelas a PR por Q y S , respectivamente. Sean los puntos A, B, C y D las intersecciones entre las rectas: $\{A\} = s \cap p$, $\{B\} = p \cap q$, $\{C\} = q \cap r$ y $\{D\} = r \cap s$.



Resulta que el área del cuadrilátero $PQRS$ es igual a la mitad del área del paralelogramo $ABCD$. Esto es así porque el cuadrilátero $ORDS$ es paralelogramo (por construcción) y, por lo tanto, $\overline{DS} = \overline{OR}$ y $\overline{DR} = \overline{OS}$. Entonces, los triángulos ORS y SRD tienen sus tres lados respectivamente iguales, por lo que resultan iguales y así, el área del triángulo ORS es igual a la mitad del área del paralelogramo $ORDS$. Lo propio sucede con los otros tres triángulos de vértice O y sus respectivos paralelogramos.

Notemos que las longitudes de los lados del paralelogramo $ABCD$ coinciden con las de las diagonales del cuadrilátero $PQRS$. Por lo tanto, calcular el área del cuadrilátero de diagonales d_1 y d_2 se reduce a calcular el área de un paralelogramo de lados d_1 y d_2 y dividir ese valor por 2.

Volvamos al paralelogramo $ABCD$, de ángulo agudo $\hat{B}AD = \theta$. Sea h la altura del paralelogramo respecto del lado AB y suponemos que este lado es d_1 ; en ese caso, el otro lado es d_2 . La altura puede expresarse como $h = d_2 \cdot \text{sen}(\theta)$.



Por lo tanto, el área del paralelogramo es $A = d_1 \cdot h = d_1 \cdot d_2 \cdot \text{sen}(\theta)$. Finalmente, entonces, el área del cuadrilátero es la mitad del área del paralelogramo mencionado, por lo que la fórmula buscada es:

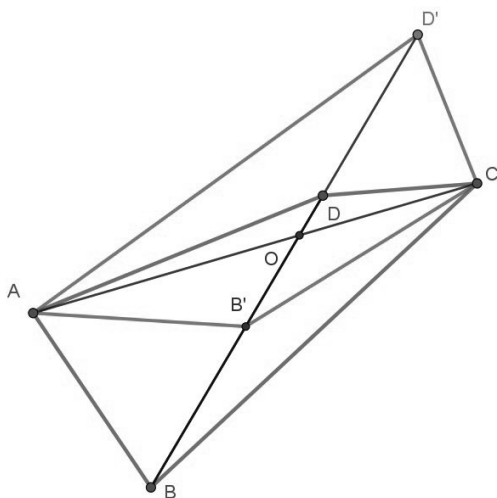
$$A = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \text{sen}(\theta)$$

De aquí en adelante, seguimos el análisis realizado en la Forma 1).

Forma 3)

Tomamos el cuadrilátero $ABCD$, cuyas diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en O . Vamos a considerar cuadriláteros cuyas diagonales tengan, respectivamente, la misma longitud que las del dado, que compartan una de sus diagonales y que la otra se “desplace” sobre su recta de acción. Para ello, tomamos un punto cualquiera B' perteneciente a $\overline{OB}$ y otro punto D' perteneciente a $\overline{OD}$ que verifica que $\overline{BD} = \overline{B'D'}$; con esto, determinamos al cuadrilátero $AB'CD'$.

Resulta que las áreas del cuadrilátero $ABCD$ y cualquiera de los cuadriláteros $AB'CD'$ son iguales. Seguidamente veremos por qué.



Considerar los triángulos ABD y $AB'D'$. Ambos triángulos tienen las bases $\overline{BD}$ y $\overline{B'D'}$ iguales por construcción. Además, ambas alturas correspondientes a esas bases son iguales. Esto es así porque se trata del segmento perpendicular a la recta que contiene ambas bases y que tiene extremos en A y en la recta. Por lo tanto, al ser dos triángulos de igual base y altura, tienen igual área. Lo propio ocurre con los triángulos CBD y $CB'D'$.

Y, dado que $A(ABCD) = A(ABD) + A(CBD)$, $A(AB'CD') = A(AB'D') + A(CB'D')$ y que $A(ABD) = A(AB'D')$, $A(CBD) = A(CB'D')$, entonces resulta, $A(ABCD) = A(AB'CD')$, que es lo que queríamos demostrar.

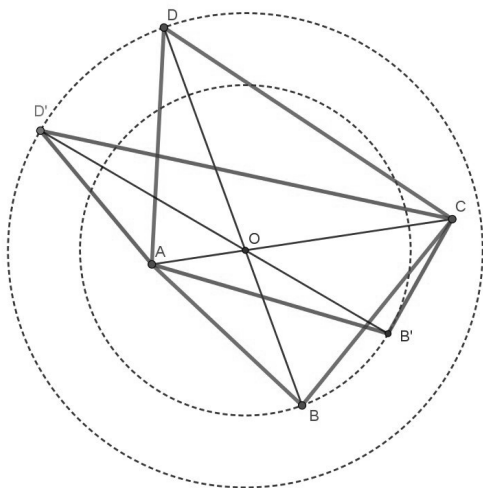
Es evidente que si dejamos fija la diagonal $\overline{BD}$ y que la otra se desplace sobre su recta de acción, ocurre lo mismo. En definitiva, dejando fija una diagonal y considerando todos los cuadriláteros que tienen la otra diagonal sobre la misma recta, tienen todos ellos la

misma área. Por lo tanto, todos los cuadriláteros de diagonales dadas que determinan igual ángulo entre sí tienen la misma área.

Veamos ahora lo siguiente: ¿qué sucede en el caso de que las diagonales estén incluidas en rectas de ángulo diferente?

Vamos a considerar un cuadrilátero $ABCD$ y otro cuadrilátero $AB'CD'$ cuyas diagonales sean respectivamente iguales y compartan una de ellas (en este caso, $\overline{AC}$), pero que los ángulos que forman las diagonales de cada cuadrilátero no sean iguales. Así, las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ se cortan en O , y el cuadrilátero $AB'CD'$ es tal que B' , O y D' están alineados con $\overline{BO} = \overline{B'O}$ y $\overline{DO} = \overline{D'O}$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\angle AOD' < \angle AOD < 180^\circ$.



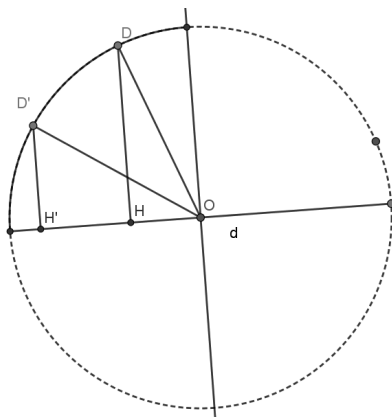
Consideremos los triángulos ACD y ACD' . Ambos comparten la base AC y tienen distinta altura respecto de esa base. La altura en D' es menor a la altura en D . Justificaremos esto más adelante.

Por lo tanto, tenemos dos triángulos de igual base y distinta altura, por lo que tienen áreas diferentes. La altura de cada uno de estos triángulos se relaciona con el ángulo que forman las diagonales del cuadrilátero correspondiente. Más precisamente, a medida que crece la altura del triángulo, crece también el ángulo que forman las diagonales. Entonces, el triángulo de mayor altura será aquel cuyo ángulo entre las diagonales del cuadrilátero correspondiente sea el mayor posible, que es un ángulo recto. Así, resulta que el triángulo que tiene mayor área es el que se corresponde con un cuadrilátero cuyas diagonales se intersecan en forma perpendicular. Lo mismo ocurre para el caso de los triángulos CAB y CAB' .

Por lo tanto, partiendo del universo de los cuadriláteros con diagonales dadas, es verdadero que las áreas de todos los cuadriláteros son iguales si y solo si los ángulos entre las diagonales son iguales. Además, resulta que tienen mayor área aquellos cuyas diagonales son perpendiculares. Con esto hemos respondido las dos preguntas del problema.

Ahora bien, quedó pendiente la justificación de que la distancia de D' a AC es menor que la distancia de D a AC . Veámoslo.

Dado que $\overline{DO} = \overline{D'O}$, existe una circunferencia de centro O y radio OD que contiene a D' . Como O , C y A están alineados, pertenecen a un diámetro d . Tracemos $\overline{DH}$ y $\overline{D'H'}$ perpendiculares a d , con H y H' en d .



DOH y $D'OH'$ son dos triángulos rectángulos con hipotenusas OD y OD' iguales, ángulo recto en H y H' y ángulo agudo $H\hat{O}D > H'\hat{O}D'$. Por lo tanto, el cateto DH es mayor al cateto $D'H'$.

Resoluciones con las TIC

Forma 4)

Bajo el supuesto de que no conocemos una fórmula para calcular el área de un cuadrilátero dadas sus diagonales, podemos utilizar un buscador en la web para ver si hay alguna. Usando el navegador Mozilla Firefox e introduciendo como entrada en Google el texto “fórmula del área de un cuadrilátero en función de las diagonales”, encontramos que “el área del cuadrilátero es la mitad que la del paralelogramo determinado por las paralelas a sus diagonales que pasan por los vértices”.³ Además, se muestra la fórmula: $S =$

³ Disponible en: <https://www.geogebra.org/m/fmytqud8>.

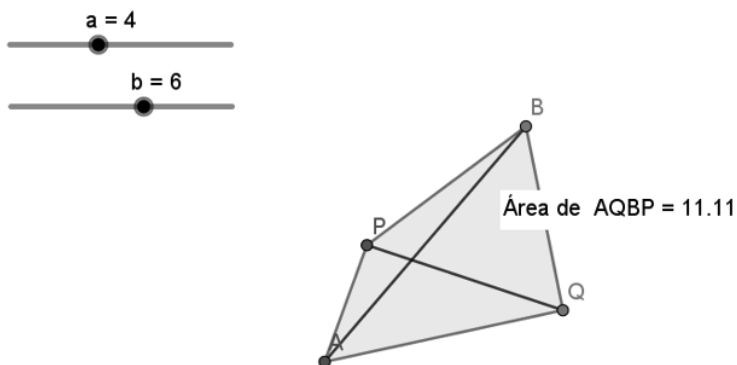
$\frac{1}{2} p q \sen(\theta)$, siendo p y q las diagonales y θ el ángulo entre ellas. Aceptamos la fórmula como válida y continuamos como en la Forma 1) sin las TIC.

Forma 5)

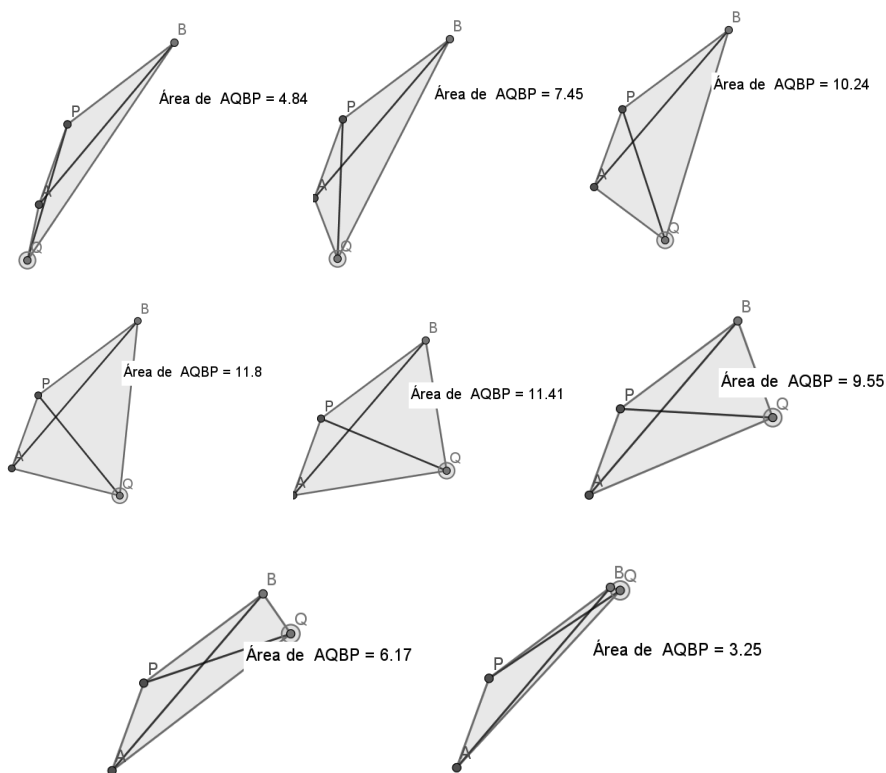
Comenzamos como en la Forma 4), solo que no aceptamos la fórmula como válida. Tratamos de justificarla del modo que queda sugerido en la página consultada, procediendo como en la Forma 2) sin las TIC.

Forma 6)

Trabajamos en GGB. Insertamos dos deslizadores a y b . Dibujamos dos segmentos dada su longitud, el segmento PQ de longitud a y el segmento AB de longitud b . Podemos trasladarlos de modo que se corten. Dibujamos el cuadrilátero $PAQB$. Mostramos el área del cuadrilátero.

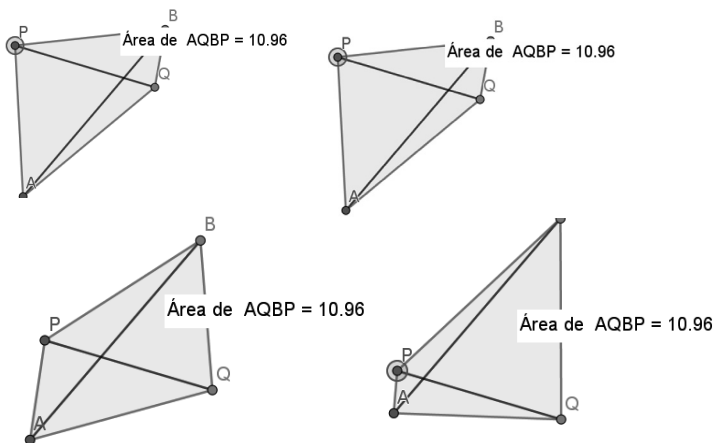


Arrastramos los cuatro vértices. Dependiendo de cuál haya sido el primer punto elegido para definir cada segmento, hay uno de los puntos que permite mover el segmento conservando la inclinación. Hay otro que rota el segmento alrededor del primer punto. En este caso, los puntos A y P permiten trasladar el respectivo segmento y los puntos B y Q permiten rotarlo. Así, es posible ver la variación del área de acuerdo con lo que se mueva. Por ejemplo, si movemos Q desde la recta PA hasta la recta PB tenemos algo como lo siguiente:



Se observa que el área crece hasta cierto punto y luego comienza a decrecer. Algo similar sucede si el que movemos es B , que es el que permite rotar el segmento AB alrededor de A . También ocurre algo similar si hacemos el mismo análisis, pero para otras longitudes de segmentos.

Si movemos ahora el punto P y dejamos fijos los otros tres puntos, el segmento PQ se traslada y se observa que el área no varía, como puede verse en los siguientes ejemplos:



Algo similar ocurre si se mueve el punto A , trasladando a $\underline{AB}$. Se observa que el área no se modifica si se conserva el ángulo entre las diagonales.

Sintetizamos las conjeturas que podemos formular a partir de lo realizado:

- Dadas las diagonales de un cuadrilátero, el área depende solo del ángulo entre ellas.
- Los cuadriláteros cuyas diagonales se cortan con un mismo ángulo θ tienen igual área.
- Si θ aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$, el área aumenta y si θ aumenta de $\frac{\pi}{2}$ a π , el área disminuye.

Estas conjeturas pueden demostrarse siguiendo las justificaciones de la Formas 1), 2) o 3).

Algunas reflexiones:

- Bajo el supuesto de que el conocimiento de la fórmula que da el área de un cuadrilátero a partir de sus diagonales no está disponible en estudiantes del nivel al que está dirigido el problema, en la necesidad de realizar una búsqueda en la web para hallarla tendríamos un uso imprescindible de las TIC, ya que aparecen relaciones matemáticas que no hubieran surgido de otro modo (Rodríguez, 2022). No obstante, no es un uso que pueda considerarse valioso en cuanto a la actividad matemática que promueve.
- Para la resolución del problema es clave detectar que el área depende solo del ángulo que forman las diagonales. En las formas de resolver el problema con las TIC se cumple que esto no aparecería sin su uso o estaría muy oculto. Como pudo observarse, la riqueza matemática en una y otra forma de resolver es de diferente naturaleza y la significatividad estará vinculada a los objetivos que se persigan.
- Podemos asumir que este problema no es resoluble sin las TIC para estudiantes iniciales del nivel superior. Sin embargo, esta

consideración podría cuestionarse si alguien que lo resuelve pensara en encontrar una fórmula para el área de un cuadrilátero cualquiera y, en vez de realizar una búsqueda, ensayara una deducción, como lo hemos hecho en la Forma 2) sin las TIC. Este camino es complejo para estudiantes iniciales pero no es inaccesible, por lo que podemos aceptar que no sería una resolución típica. En conclusión, aquí hay caminos diferentes que el uso de las TIC habilita, aun cuando las conjeturas a las que se accedan sean las mismas que sin el uso de las TIC.

1.2. Segundo problema: intersección entre una función cuadrática y su inversa

Problema 2:

Considerar la familia de funciones

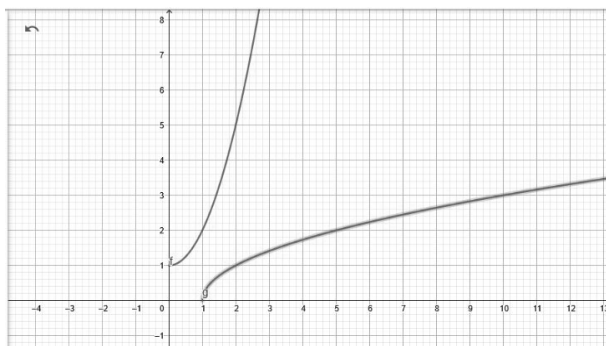
$$f_a: [0, +\infty) \rightarrow [a, +\infty): f_a(x) = ax^2 + a \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0).$$

¿En cuáles de ellas se verifica que la intersección entre su gráfico y el de su inversa es un único punto? ¿En cuáles es de más de un punto? ¿Y en cuáles la intersección es vacía?⁴

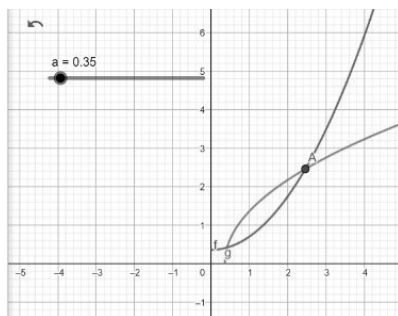
⁴A los efectos de agilizar la lectura, en las resoluciones omitimos referirnos a una *familia* de funciones cada vez que la mencionemos; lo mismo aplica para las ecuaciones asociadas que son *familias* de ecuaciones.

Resolución con las TIC

En GGB podemos ingresar la función dada, con el dominio correspondiente y utilizando un deslizador para el parámetro a . Luego, buscamos la función inversa con el comando correspondiente. En la figura siguiente mostramos la pantalla capturada en un cierto valor del deslizador.

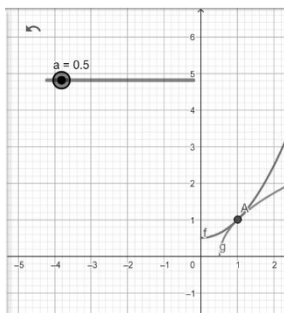
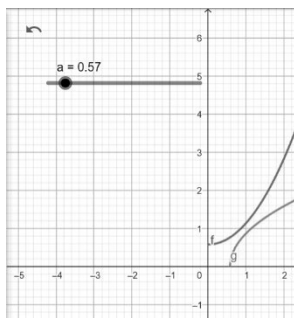


Al activar el deslizador vemos de un modo dinámico la intersección entre las curvas según la variación del parámetro. Con la herramienta Intersección, tenemos las coordenadas de la intersección.



A partir de haber analizado la variabilidad de la intersección, podemos conjeturar lo siguiente:

- Cuando $a = 0.5$, hay un único punto de intersección.
- Cuando $a < 0.5$, hay dos puntos de intersección.
- Cuando $a > 0.5$, no hay puntos de intersección.



Observación: en alguna versión de GGB que hemos usado, el punto de intersección no da exactamente $(1; 1)$, lo que puede tomarse como una motivación adicional para el trabajo analítico o para el planteo de otra conjetura.

GGB permite visualizar rápidamente el caso de la primera conjetura: que se intersecan en un punto para $a = 0,5$ y ese punto es $(1; 1)$. Esto podríamos probarlo de la manera que mostramos enseguida. El análisis completo lo realizamos luego.

Para determinar la intersección, es necesario igualar f_a y su inversa para el caso $a = 0.5$. Así tenemos $0.5x^2 + 0.5 = \sqrt{2 \cdot (x - 0.5)}$, que al desarrollar queda la ecuación de grado 4:

$$\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 0$$

Multiplicando todo por 8, tenemos que:

$$x^4 + 2x^2 - 8x + 5 = 0$$

Acá tenemos dos opciones. Intentar sin usar las TIC o apelar a algún software, como Wolfram Alpha (en adelante, WA). Hagamos lo segundo, ya que estamos en una resolución con las TIC.

Al ingresar la ecuación en la barra de entradas, nos devuelve cierta información de ella; en particular, las raíces y una factorización en $R[x]$:

$$\text{Raíces: } x = 1 \text{ (doble), } x = -1 + 2i, x = -1 - 2i$$

$$\text{Factorización: } (x - 1)^2 \cdot (x^2 + 2x + 5)$$

Por lo tanto, $a = 0.5$, las curvas se intersecan en un solo punto, de abscisa 1. La ordenada correspondiente es $y = 0.5 \cdot 1^2 + 0.5 = 1$. Por lo tanto, se intersecan en el punto $(1; 1)$ (si fuera el caso de que la versión usada de GGB no respondiera esto con exactitud, es una oportunidad para explicitar la imprecisión del valor devuelto por el software). Luego de ver los resultados, podemos decir que sin usar las TIC se hubiera podido resolver sin inconvenientes, ya que la

ecuación tiene dos raíces racionales que hubiéramos encontrado usando el teorema de Gauss.

Retomamos ahora el problema completo. Debemos ahora probar con lápiz y papel las conjeturas formuladas. Asumimos del enunciado que la función dada es biyectiva y, entonces, buscamos su inversa.

Tomamos un $x \in \text{Dom}(f_a)$ tal que $f_a(x) = y$ y despejamos x .

$$ax^2 + a = y \quad (1)$$

Sumamos $-a$ miembro a miembro (mam):

$$ax^2 = y - a$$

Como $a \neq 0$, multiplicamos a^{-1} mam:

$$x^2 = \frac{y - a}{a}$$

Aquí podemos notar que debe ser $\frac{y-a}{a} \geq 0$ (2), pues es igual a un cuadrado. Con esto, podemos aplicar raíz cuadrada mam:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{y-a}{a}}$$

Usamos que para cualquier $x \in R$: $\sqrt{x^2} = |x|$ y que $|x| = x$ si $x \geq 0$, que es el caso, dado que vale que $x \in \text{Dom}(f_a)$. Por lo que tenemos que:

$$x = \sqrt{\frac{y-a}{a}} \quad (3)$$

De (2) podemos notar que debe valer $y \geq a$ y, por lo tanto, para cada $y \geq a$ la ecuación (2) tiene solución y de (3) podemos notar que esa solución es única.

Por lo tanto, la inversa de f_a es $f_a^{-1}: [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty): f_a^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-a}{a}}$.

Para hallar la intersección entre las gráficas podemos igualar sus expresiones y considerar que debe ser $x \in [a, +\infty)$.

$$ax^2 + a = \sqrt{\frac{x-a}{a}}$$

Elevamos al cuadrado mam:

$$(ax^2 + a)^2 = \frac{x-a}{a}$$

Desarrollamos el cuadrado y multiplicamos por a mam:

$$a^3x^4 + 2a^3x^2 + a^3 = x - a$$

Sumamos $-x + a$ mam:

$$a^3x^4 + 2a^3x^2 - x + a^3 + a = 0 \quad (4)$$

Tenemos una ecuación polinómica de grado cuatro. Existe una fórmula resolvente que asumimos que no tiene uso en ámbitos escolarizados. Sin embargo, si apelamos al WA, que es una herramienta en línea que resuelve distintas cuestiones algebraicas (resuelve ecuaciones, opera con matrices, etc.), podemos escribir la ecuación y así obtener lo siguiente:

Soluciones	Entrada
$a \neq 0, \quad x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a}$	$a^3 x^4 + 2a^3 x^2 - x + a^3 + a = 0$
$a \neq 0, \quad x = \frac{\sqrt{1 - 4a^2} + 1}{2a}$	Formas alternativas
$a \neq 0, \quad x = \frac{-\sqrt{-a^2(4a^2 + 3)} - a}{2a^2}$	$a^3(x^2 + 1)^2 + a = x$
$a \neq 0, \quad x = \frac{\sqrt{-a^2(4a^2 + 3)} - a}{2a^2}$	$a^3(x^2 + 1)^2 + a - x = 0$
Solución	$(ax^2 + a - x)(a^2x^2 + a^2 + ax + 1) = 0$
$a = 0, \quad x = 0$	

En particular, podemos ver que el software nos ofrece una descomposición de la expresión como producto de dos expresiones cuadráticas.

$$(ax^2 - x + a)(a^2x^2 + ax + a^2 + 1) = 0 \quad (5)$$

Y cuatro expresiones para las soluciones en x con $a \neq 0$, que resultan de aplicar la fórmula resolvente de las ecuaciones cuadráticas a cada una de las expresiones de la factorización.

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \quad (6)$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \quad (7)$$

$$x = \frac{-a + \sqrt{-a^2(4a^2 + 3)}}{2a} \quad (8)$$

$$x = \frac{-a - \sqrt{-a^2(4a^2 + 3)}}{2a} \quad (9)$$

Podemos observar que los radicandos de las ecuaciones (8) y (9) son negativos para todo $a > 0$, pues $-a^2$ es negativo para todo $a \neq 0$ y $4a^2 + 3$ es positivo para todo $a \in \mathbb{R}$. Es lo que ocurre si analizamos el discriminante del segundo factor en (5).

$$a^2 - 4a^2(a^2 + 1) = -a^2(-1 + 4(a^2 + 1)) = -a^2(4a^2 + 3)$$

Por lo tanto, para analizar la cantidad de soluciones reales de (4), considerando $x > a > 0$, hay que ver qué sucede con (6) y con (7).

Notemos que ambas soluciones son iguales si y solo si $1 - 4a^2 = 0$. Esto ocurre si y solo si $a = \frac{1}{2}$ ó $a = -\frac{1}{2}$. Como $a > 0$, solo queda $a = \frac{1}{2}$.

Notemos que (4) equivalente a (5) tendrá dos soluciones reales distintas si y solo si $1 - 4a^2 > 0$, y eso ocurre si y solo si $a \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Y, dado que $a > 0$, (4) tiene dos soluciones reales distintas si y solo si $a \in (0, \frac{1}{2})$.

Finalmente, (4) no tiene soluciones reales si y solo si $1 - 4a^2 < 0$. Esto último se cumple para todo $a \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. Y, dado que $a > 0$, (4) no tiene soluciones reales si y solo si $a \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.

Con esto termina esta resolución.

Resolución sin uso de las TIC

Forma 1)

Como vimos, la inversa de f_a es $f_a^{-1}: [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$: $f_a^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-a}{a}}$.

Para estudiar la intersección entre la función y su inversa, planteamos la igualdad entre ambas, recordando que debe ser que $a \in (0, +\infty)$ y $x \in [a, +\infty)$.

$$ax^2 + a = \sqrt{\frac{x-a}{a}}$$

La resolución de esta ecuación también está desarrollada anteriormente. En particular, vimos que es equivalente a la siguiente:

$$a^3x^4 + 2a^3x^2 - x + a^3 + a = 0$$

La fórmula resolvente de ecuaciones polinómicas de grado 4 no es un conocimiento que se utilice en el nivel para el que pensamos la actividad. Además, los intentos de factorización por métodos “usuales” no nos han permitido avanzar. Entonces, tratamos de avanzar de otra forma, más “artesanal”. En primera instancia, deberíamos expresa al polinomio como producto de dos cuadráticas. Entonces, siendo A, B, C, D, E y F números reales, $A \neq 0$:

$$a^3x^4 + 2a^3x^2 - x + a^3 + a = (Ax^2 + Bx + C).(Dx^2 + Ex + F)$$

Podemos asumir que los coeficientes principales de ellas son a y a^2 , pues el coeficiente principal del polinomio de grado 4 es a^3 . Entonces:

$$\begin{aligned} a^3x^4 + 2a^3x^2 - x + a^3 + a \\ = (ax^2 + Bx + C).(a^2x^2 + Ex + F) \end{aligned}$$

Distribuyendo en el segundo miembro:

$$= a^3x^4 + (aE + a^2B)x^3 + (aF + BE + a^2C).x^2 + (BF + CE)x + CF$$

Al ser iguales los dos polinomios, son iguales sus respectivos coeficientes:

$$\begin{aligned} \{aE + a^2B = 0 \quad (10) \quad aF + BE + a^2C = 2a^3 \quad (11) \quad BF + CE \\ = -1 \quad (12) \quad CF = a^3 + a \quad (13)\end{aligned}$$

De (1):

$$E = -aB \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (11):

$$aF - aB^2 + a^2C = 2a^3 \quad (15)$$

Dividiendo mam por a :

$$F - B^2 + aC = 2a^2 \quad (16)$$

Sustituyendo (14) en (12):

$$BF - aBC = -1 \quad (17)$$

De (13):

$$CF = a^3 + a = a(a^2 + 1)$$

podría ser que:

$$C = a$$

y

$$F = a^2 + 1$$

ó

$$F = a$$

y

$$C = a^2 + 1$$

u otra forma.

Veamos qué ocurre si consideramos la primera posibilidad: $C = a$ y $F = a^2 + 1$. No podemos inferir que esto es necesariamente cierto, pero si suponerlo válido nos permite encontrar los coeficientes que buscamos, resulta eficiente la decisión.

Sustituyendo en (16):

$$a^2 + 1 - B^2 + a^2 = 2a^2$$

Es decir:

$$B^2 = 1$$

Sustituyendo en (17):

$$B(a^2 + 1) - Ba^2 = -1$$

Es decir:

$$B = -1$$

Sustituyendo en (14):

$$E = a$$

Hemos llegado a que:

$$A = a, B = -1, C = a, D = a^2, E = a, F = a^2 + 1$$

Es decir:

$$\begin{aligned} a^3x^4 + 2a^3x^2 - x + a^3 + a \\ = (ax^2 - x + a). (a^2x^2 + ax + a^2 + 1) \end{aligned}$$

Al haber encontrado una elección que permitió expresar el polinomio como producto de dos cuadráticas, no necesitamos analizar las otras posibilidades. El resto del análisis puede tomarse de la resolución con las TIC a partir de (5).

Forma 2)

En la Forma 1) debimos resolver un sistema de varias ecuaciones con varias incógnitas y, además, con un parámetro, lo que puede considerarse alejado para quienes pensamos estas actividades. Esto nos invita a pensar otra forma de resolución.

Comenzamos como en la Forma 1), pero ante la complejidad de la ecuación resultante, ensayamos otra alternativa. Sabemos que cualquier función inversible h cumple que $hoh^{-1} = h^{-1}oh = id$ (función identidad) y que esto se expresa gráficamente en que las curvas de la función y de su inversa son simétricas respecto de la recta de ecuación $y = x$, si se utiliza la misma escala en ambos ejes coordenados. Entonces, los puntos de intersección entre la función y su inversa tienen relación con los puntos de intersección entre la función dada y la función identidad. ¿Cuál es esa relación?

No es una equivalencia. Si un punto está en la intersección de una función y de su inversa, no necesariamente pertenece a la identidad. Por ejemplo, si h es una función lineal de pendiente -1 , su inversa es la misma y entonces se intersecan en todos sus puntos; en cambio, la función y la identidad solo se intersecan en un punto.

El enunciado recíproco sí vale. Si un punto está en la intersección de una función biyectiva dada y de la función identidad, entonces pertenece a la intersección de la función y de la inversa. Debido a que usaremos esto como estrategia de la resolución, damos una demostración de este resultado, que no depende de que la función dada sea cuadrática.

Propiedad: Dada una función $h: A \rightarrow B$ biyectiva : $\forall a \in (A \cap B)$ es tal que $h(a) = a \implies h(a) = h^{-1}(a)$

Demostración:

Sea $a \in (A \cap B)$, esto es un elemento que pertenece a la vez a $Dom(h)$ y $Dom(h^{-1})$ que verifique $h(a) = a$, esto dice que pertenece a la función dada y a la identidad.

Sabemos, por hipótesis, que:

$$h(a) = a \quad (1)$$

Aplicando h^{-1} :

$$h^{-1}(h(a)) = h^{-1}(a)$$

Por definición de función inversa:

$$a = h^{-1}(a) \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$h(a) = h^{-1}(a)$$

Nuestra intención es hallar la intersección entre la función dada y su inversa mediante la intersección de la función dada y la función identidad. Pero, al usar la propiedad anterior (y no valer su recíproco) podríamos estar perdiendo otros puntos de intersección entre la función y su inversa. ¿Ocurrirá con las funciones del problema que estamos resolviendo? Veamos...

Tomemos un punto $(p; q)$ que pertenece a la gráfica de f y de su inversa. Vemos si es posible que ese punto no pertenezca a la gráfica de la identidad, es decir, si puede ser que $p \neq q$. Supongamos que sí. Entonces, consideremos (sin pérdida de generalidad) que $p < q$. La función dada tiene una propiedad que resulta decisiva: es creciente en todo su dominio (para cualquier a). Entonces:

$$p < q \rightarrow f(p) < f(q)$$

Sabemos que $f(p) = q$, por pertenecer a la gráfica de f , y también que $f^{-1}(p) = q$, por pertenecer a la gráfica de f^{-1} , de donde vale que $f(q) = p$. Por lo tanto:

$$p < q \rightarrow q < p$$

Lo que es absurdo. Entonces, debe pasar que $p = q$ y esto significa que todo punto de la intersección de la función dada y de su inversa pertenece a la recta de ecuación $y = x$.

Comentarios adicionales

Observemos que en la deducción anterior no usamos que la función fuera cuadrática, por lo que podemos enunciar la siguiente propiedad más general.

Propiedad: Dada una función $h: A \rightarrow B$ biyectiva y creciente. $\forall a \in (A \cap B): h(a) = h^{-1}(a) \Rightarrow h(a) = a$.

Para tener una demostración solo es necesario reescribir adecuadamente la deducción anterior. Si h no fuera creciente, ya mostramos que puede haber puntos de intersección entre la función y su inversa que no cumplan que sus abscisas y ordenadas sean iguales.

Con lo realizado, ahora podemos analizar la intersección que nos interesa mediante la intersección de la función dada y de la función identidad. La ecuación resultante es cuadrática, por lo que su resolución no presenta dificultad:

$$a \cdot x^2 + a = x$$

Que es equivalente a:

$$a \cdot x^2 - x + a = 0$$

El discriminante es:

$$\Delta = 1 - 4a^2$$

Entonces:

- habrá dos puntos de intersección cuando $\Delta > 0$;
- habrá un único punto de intersección cuando $\Delta = 0$;
- no habrá puntos de intersección cuando $\Delta < 0$.

El resto del análisis puede tomarse de la resolución anterior, pues la expresión por analizar es la misma.

Por lo tanto, f_a y la identidad:

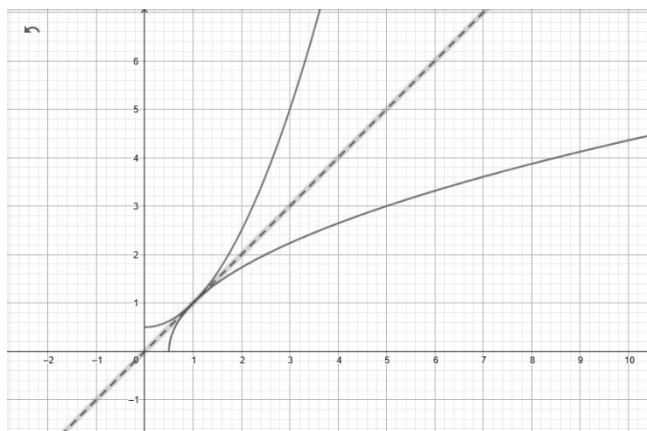
- se intersecan en un solo punto cuando $a = \frac{1}{2}$;
- se intersecan en dos puntos cuando $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$;
- no se intersecan cuando $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Debido a que ya justificamos que, en este caso, la intersección entre la función y la identidad es la misma que entre la función y su inversa, la resolución está terminada.

Forma 3)

Veamos una nueva resolución que requiere del conocimiento de derivadas de funciones.

Si la función y su inversa se intersecan en un solo punto, ese punto pertenece a la bisectriz del primer cuadrante y, además, es la recta tangente a ambas curvas en ese punto. La situación es como la que se muestra en el gráfico siguiente:



$$f(x) = ax^2 + a$$

Derivando:

$$f'(x) = 2ax$$

Como el único punto de intersección debe pertenecer a la recta de ecuación $y = x$, interesa $f'(1)$, que su valor es $f'(1) = 2a$ y coincide el de la pendiente de la tangente en ese punto, es decir: $f'(1) = 1$.

Por lo tanto:

$$2a = 1$$

De donde:

$$a = \frac{1}{2}$$

Con esto tenemos que se intersecan en un punto solo cuando $a = \frac{1}{2}$

Veamos que la bisectriz del primer y tercer cuadrante es, efectivamente, la recta tangente al gráfico de f en $x = 1$.

Recta tangente:

$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1) = 1 \cdot (x - 1) + 1 = x$$

Solo a modo de verificación, veamos que con la inversa ocurre lo mismo:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sqrt{\frac{x-a}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{x-a} \\ f^{-1'}(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-a}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{x-a}} \\ f^{-1'}(1) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{1-a}} = 1 \end{aligned}$$

Vemos que debe cumplirse que $0 < a < 1$.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{1-a} &= 1 \\ 2 \cdot \sqrt{a \cdot (1-a)} &= 1 \\ 4 \cdot a \cdot (1-a) &= 1 \\ -4a^2 + 4a - 1 &= 0 \\ -(2a-1)^2 &= 0 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Recta tangente:

$$y = f^{-1'}(1) \cdot (x-1) + f^{-1}(1) = 1 \cdot (x-1) + 1 = x$$

Veamos qué ocurre para el resto de los valores del parámetro. Como esta función con su inversa se interseca solo en puntos de la bisectriz del primer cuadrante (tomar la discusión de la Forma 2), hay que estudiar la ecuación $ax^2 + a = x$, que también puede verse en la Forma 2). Entonces:

- se intersecan en un solo punto cuando $a = \frac{1}{2}$ ó $a = -\frac{1}{2}$;
- se intersecan en dos puntos cuando $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$;
- no se intersecan cuando $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Algunas reflexiones:

- El uso de un software como GGB con el que pueden hacerse gráficos dinámicos de funciones para ver efectos de los parámetros en sus expresiones analíticas permitió visualizar rápidamente la respuesta, lo que se tradujo en la formulación de conjeturas con buen grado de fundamento. Además, invitó a verificar y justificar con lápiz y papel, y permitió organizar la comprensión e interpretación de los símbolos.

- La resolución de la ecuación polinómica de grado 4 con un parámetro derivó en cuestiones muy interesantes que quisiéramos destacar. Vimos que no se trataba de una ecuación que resultara simple de transformar en un producto conveniente mediante transformaciones algebraicas, pero resultó posible mediante la resolución de un sistema de varias ecuaciones con varias incógnitas, lo que hace que pueda verse alejado de la escolaridad. Entonces, apelamos a resolver otra ecuación que nos diera la información que queríamos y que resultara accesible. Esto nos llevó a formularnos preguntas no previstas inicialmente y, a partir de ellas, producir resultados matemáticos novedosos, al menos para nosotros.
- En la resolución con las TIC apelamos a WA, que nos dio el polinomio expresado como un producto de dos cuadráticas. Al poder comprobarse fácilmente que esa expresión es equivalente al polinomio de grado 4, la resolución resulta correcta y todo el problema de resolver la ecuación polinómica de grado 4 se simplificó.
- Aportamos una resolución sin las TIC que requiere del uso de derivadas y tiene la ventaja de ser sencilla, al menos en lo que refiere al caso de un único punto de intersección. Como puede verse, el problema puede ser encarado de formas variadas.

Capítulo 2

Las TIC en las actividades para el aprendizaje. Una discusión acerca de los criterios para su evaluar su uso

La amplia difusión en el uso de las TIC en las clases de Matemática justifica el interés por buscar formas de valorar el tipo de uso que se les da. Esto va desde preguntarse quién usa las TIC (¿docentes o estudiantes?), si se propone usarlas para hacer más rápido lo que puede hacerse con lápiz y papel o si, por el contrario, al no usar las TIC no emergerán las relaciones matemáticas previstas, si se usan para chequear lo que se hizo con lápiz y papel, entre otros interrogantes.

Como dijimos en la introducción, recordamos que aquí nos interesa únicamente el uso de las TIC en quienes están en situación de aprendizaje de la matemática y no de su enseñanza. Rodríguez (2022) se interesó por lo que considera un uso pertinente y significativo de las TIC para resolver consignas matemáticas y propuso una serie de criterios para analizarlas. Nuestro interés ahora está en tomar estos criterios para ejemplificarlos, analizarlos, discutirlos, precisarlos y reformularlos o ampliarlos, eventualmente. Asumimos que estos criterios son un marco que ayuda a pensar la enseñanza de la matemática con TIC; no creemos que deban ser considerados de modo tal que si una actividad no cumple los requisitos para tener un uso pertinente y significativo de las TIC, deba ser necesariamente descartada.

2.1. Criterios para valorar un uso pertinente y significativo de las TIC

En lo que sigue, tomamos cada uno de los criterios mencionados anteriormente y avanzamos en lo que dijimos. Comenzamos por aquellos criterios que Rodríguez (ídem) señala que resulta razonable analizar en una secuencia de actividades y no en una consigna aislada. Estos son dos y los analizamos en conjunto: *incluir distintos usos de las TIC* y *complementariedad*. Luego, pasamos a los que tienen que ver con la decisión de quien resuelve usar las TIC, que también son dos y los analizamos en bloque: *libertad para apelar a las TIC* y *libertad de elección del recurso tecnológico*. Más adelante, abordamos individualmente los criterios que pueden considerarse más importantes: *no perder de vista el objetivo matemático*, *imprescindibilidad* y *búsqueda de pruebas matemáticas*.

2.1.1. Incluir distintos usos de las TIC y complementariedad

Para analizar estos dos criterios proponemos la siguiente secuencia, que puede trabajarse al aprender sobre límites de funciones. Para contextualizar la secuencia, consideramos que el tratamiento del tema se inició con el estudio del comportamiento de las funciones en el infinito; se vio que puede darse un comportamiento asintótico o que puede crecer (o decrecer) sin límite, o que puede no haber ninguna tendencia. Se dio la noción intuitiva de límite en el infinito y la notación específica. También se conocen las funciones homográficas dadas por su expresión en la forma $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$.

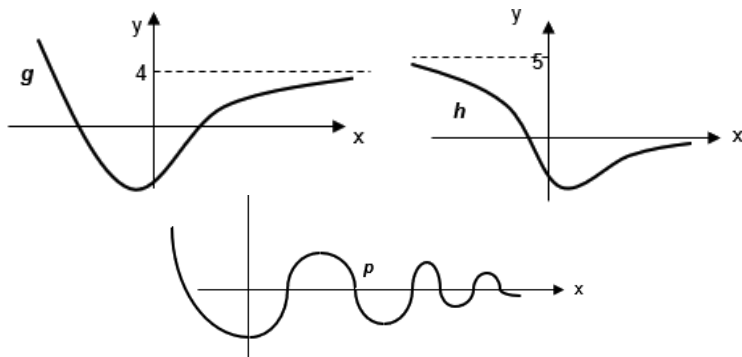
Actividad 1: Considerar la función $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x}{x+1}$. Estudiar la diferencia entre los valores de la función y 3, a medida que x tiende a $+\infty$; luego, cuando x tiende a $-\infty$. ¿Qué conclusiones pueden sacarse? Interpretar gráficamente.

Actividad 2: Analizar la existencia de asíntotas horizontales en las funciones de la familia de las funciones de expresión $f(x) = \frac{a \cdot x}{x+1}$, definidas en su dominio natural y siendo $a \in \mathbb{R}$. Justificar.

Actividad 3:

- Realizar una búsqueda con la intención de proponer una definición de asíntota horizontal al gráfico de una función.
- Registrar las fuentes utilizadas.
- Cada grupo deberá realizar una exposición en la clase acerca de lo hallado.

Actividad 4: Los siguientes gráficos corresponden a tres funciones g, h y p que tienen asíntotas horizontales. Ver si la definición dada en la actividad anterior se ajusta a estos casos. Si no es así, realizarle las modificaciones necesarias para que estas rectas cumplan ser asíntotas horizontales de las funciones graficadas.



Para avanzar en la resolución de la Actividad 1 puede apelarse a una planilla de cálculo (Excel), en la que puede verse lo siguiente:

x	f(x)
10	2,72727273
100	2,97029703
1000	2,997003
10000	2,99970003
100000	2,99997
1000000	2,999997
10000000	2,9999997
100000000	2,99999997
1000000000	3
10000000000	3
1E+11	3
1E+12	3

Aquí aparece otro asunto de interés que consideramos valioso en el uso de las TIC: que el recurso tecnológico muestre algo que no es correcto. En este caso, la diferencia entre los valores de la función y 3, a partir de un cierto valor, es 0; pero esto ocurre por razones de aproximación. Si se ajusta la cantidad de decimales a usar, esos resultados se modificarán, aunque volverá a suceder con valores más grandes. En la figura siguiente vemos los resultados cuando ajustamos la cantidad de decimales a 15.

x	f(x)
10	2,727272727272730
100	2,970297029702970
1000	2,997002997003000
10000	2,999700029997000
100000	2,999970000300000
1000000	2,999997000003000
10000000	2,999999700000030
100000000	2,999999970000000
1000000000	2,999999997000000
1E+10	2,999999999700000
1E+11	2,999999999970000
1E+12	2,999999999997000
1E+13	2,999999999999700
1E+14	2,999999999999970
1E+15	3,000000000000000

Luego de un primer momento de trabajo, y antes de realizar una discusión colectiva, podrían agregarse las siguientes dos preguntas: ¿Es posible que esa diferencia sea menor que 0,0001? ¿Y menor que 10^{-18} ? ¿Y que sea 0? Explicar.

A partir de este análisis puede conjeturarse que la diferencia indicada se hace tan cercana a 0 como se quiera (o forma equivalente de expresarlo). Al interpretar gráficamente puede verse que esto se corresponde con el comportamiento asintótico de la función en la recta de ecuación $y = 3$.

Para probar lo conjeturado habrá que transformar lo expresado como “la diferencia entre los valores de la función y 3 se hace tan cercana

a 0 como se quiera” en $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in R: x > x_0: |f(x) - 3| < \varepsilon$ y ver que se cumple. Con esto, puede construirse una definición de límite finito en el infinito y de asíntota horizontal.

En la Actividad 2 se trabaja un formato de funciones más general que el de la Actividad 1. Debido a que el conocimiento de las funciones homográficas que se dispone no incluye que venga dada como cociente de expresiones lineales, consideramos que resulta favorecido el uso de un graficador como GGB, con la inclusión de un deslizador para el parámetro, para analizar la variabilidad.

De la exploración en GGB puede conjeturarse que: si $a = 0$ resulta $f(x) = 0$, definida para $x \neq -1$ y para los demás casos, el gráfico es una hipérbola equilátera cuya asíntota horizontal es la recta de ecuación $y = a$. Para probar la veracidad de lo conjeturado hay que ver que es posible escribir la familia de funciones dada como una familia de funciones homográficas en el formato conocido y ver que la asíntota horizontal es la que debe ser. Esto requiere de un procedimiento algebraico algo artificioso y poco intuitivo, por lo que deberá ser tomado por la enseñanza.

Esta secuencia de actividades atiende los dos criterios que desarrollamos en este apartado. Se contemplan los distintos usos de las TIC que menciona Rodríguez (2022): uso de software matemático (Actividades 1 y 2), uso como medio de comunicación (Actividad 3) y uso de internet para buscar información (Actividad 3). El criterio de complementariedad se cumple, ya que la búsqueda puede incluir tanto el uso de recursos tecnológicos como de otros recursos, como pueden ser los libros de texto. Se pide registrar las fuentes para aprovechar la oportunidad de analizar la confiabilidad de lo utilizado. Además, la Actividad 4 no requiere el uso de las TIC. Muy posiblemente, en lo encontrado sobre qué es una asíntota

horizontal se encuentren imprecisiones, lo que requerirá que se establezcan acuerdos acerca de cómo conviene definir el término según los intereses del curso.

2.1.2. Libertad para apelar a las TIC y libertad de elección del recurso tecnológico

Otros de los criterios para discutir son los siguientes: *libertad para apelar a las TIC* y *libertad de elección de cuál recurso tecnológico elegir*. Los analizamos en conjunto.

Lo que prescriben ambos criterios resulta razonable: es deseable que sean los estudiantes quienes deciden apelar a las TIC y, en caso de que las usen, qué recurso tomar. El cumplimiento de estos criterios en actividades de matemática apunta a la construcción de la autonomía de quienes aprenden y esto influye en la posibilidad de transferencia de conocimientos a otras situaciones. Creemos que es importante que el aula sea un lugar privilegiado donde se aprende y se ejercita la toma de decisiones.

Si tomamos los dos problemas del Capítulo 1, vemos que se cumplen estos criterios, pues en su formulación no se explicita la necesidad del uso de algún recurso. En el Problema 1 apelamos a GGB porque entendimos que nos permitiría ver la variabilidad del área del paralelogramo según el ángulo que formaban sus diagonales. También apelamos a Google en la búsqueda de una fórmula para el área de un paralelogramo en función de sus diagonales. En el Problema 2 apelamos a GGB porque entendimos que nos iba a dar una comprensión global acerca de la variabilidad de la intersección según el valor del parámetro; además, durante la

resolución, decidimos apelar a otro recurso que nos permitiera factorizar un polinomio, como fue WA.

2.1.3. *No perder de vista el objetivo matemático*

Como ya dijimos, pensamos los criterios como orientadores para hacer un buen uso de las TIC en la clase de Matemática y no como un conjunto de reglas que cumplir con rigidez. El criterio de *no perder de vista el objetivo matemático* es uno de los más importantes. La intención de este criterio es que no ocurra que el foco esté puesto en el aprendizaje del software y, en consecuencia, desplace al asunto matemático en cuestión. Así lo menciona Rodríguez (2022).

También acordamos con que los nuevos recursos tecnológicos que se suman a la clase deben incorporarse lo más naturalmente posible: no debiera ocurrir que en la clase se invierta un tiempo en el que se enseñe a usar el recurso antes que a resolver la actividad. Sin embargo, esto no debe ser tomado a pie juntillas. Los distintos softwares matemáticos requieren de cierta atención, tanto en lo que se refiere a cómo realizar ciertas acciones como a cuáles son sus potencialidades, que no son conocidas *a priori* por quien los usa. Lo que el criterio pretende evitar es la enseñanza previa y descontextualizada del recurso. Por supuesto que las precisiones que requiera el uso de ciertas acciones de ciertos recursos pueden ser tratados durante el trabajo con la actividad, del modo más integrado posible. Por ejemplo, si se realizó el gráfico de una función en GGB y se quiere conocer cuáles son las coordenadas de los extremos, puede indicarse que eso puede verse en la opción *Puntos especiales* – indicando dónde se encuentra – durante la resolución de la actividad, en el momento en que esto sea necesario.

En los dos problemas del Capítulo 1 consideramos que se cumple este criterio con claridad, pese a que podría suceder que sea necesario incorporar el conocimiento de alguna herramienta específica de GGB, lo que puede integrarse al trabajo con la actividad, como sugerimos. En particular, en el problema de funciones aparecieron nuevos objetivos matemáticos (las propiedades que se generaron).

2.1.4. Imprescindibilidad

Un criterio que es decisivo al momento de valorar el uso de las TIC es el de *imprescindibilidad*, según dice Rodríguez (2022). Consideramos que es el más fértil para la discusión que proponemos aquí. Sobre este criterio, el autor se refiere a que “lo matemático que se pone en juego cuando usamos TIC no aparece si no usamos las nuevas tecnologías” y que se pone de manifiesto “si surgen relaciones matemáticas que sin el uso de TIC no se advertirían, y no porque no se pueda abordar la tarea sin las TIC”. Es claro asumir que no es sencillo diseñar actividades que cumplan esta condición. Vale destacar acá que esto siempre está sujeto a los conocimientos de los estudiantes.

Veamos algunas interpretaciones extremas de la idea de imprescindibilidad que pretendemos descartar. Una es que únicamente darían positivo en este criterio tareas tales como la demostración de la llamada conjetura de los cuatro colores o de la conjetura débil de Goldbach, que fueron demostradas utilizando computadoras en algún momento del proceso. Otra es la siguiente: si la consigna parte de proponer un escenario digital como podría ser dar una actividad que utilice un *applet* en GGB, entonces el

criterio se cumple por el solo hecho de requerir el entorno tecnológico. De aceptarse esto, que una actividad tenga un uso imprescindible de las TIC, sería independiente de la riqueza matemática de la propuesta. Está claro que estos casos no aportan para dar elementos con los que valorar el uso de las TIC en actividades para el aprendizaje.

En un trabajo previo (Carnelli y Chacón, 2024) analizamos la imprescindibilidad del uso de las TIC en las dos actividades que desarrollamos en el Capítulo 1. A continuación, presentamos una síntesis de lo realizado.

Sobre el problema de las diagonales del cuadrilátero:

- Bajo el supuesto de que el conocimiento de la fórmula que da el área de un cuadrilátero a partir de sus diagonales no está disponible en estudiantes del nivel, la necesidad de realizar una búsqueda en la web para hallarla sería un uso imprescindible de las TIC, ya que aparecen relaciones matemáticas que no hubieran surgido de otro modo. No obstante, no es un uso que pueda considerarse valioso en cuanto a la actividad matemática que promueve.
- En las formas presentadas de resolver el problema se cumple que lo matemático que se pone en juego no aparecería sin el uso de las TIC o estaría muy oculto. Como puede observarse, la riqueza matemática en una y otra forma de resolver es de diferente naturaleza y la significatividad estará vinculada a los objetivos que se persigan.
- Podemos asumir que este problema no es resoluble sin las TIC para estudiantes iniciales del nivel superior, aunque esto no es condición para el cumplimiento del criterio. Sin embargo, esta consideración podría cuestionarse si alguien que lo resuelve

pensara en encontrar una fórmula para el área de un cuadrilátero cualquiera y, en vez de realizar una búsqueda, se ensayara una deducción como la que hemos mostrado. Este camino es complejo para estudiantes iniciales aunque no es inaccesible, por lo que podemos aceptar que no sería una resolución típica. En conclusión, aquí hay caminos diferentes que el uso de las TIC habilita, aun cuando las conjeturas a las que se accedan sean las mismas que sin el uso de las TIC.

Sobre el problema de la inversa de la función cuadrática:

- La resolución con las TIC, que permitió ver de forma dinámica la variabilidad de la intersección entre las dos curvas, dio una comprensión panorámica, global e integral de la situación, y organizó la resolución analítica que consistió en encontrar un valor crítico y dos intervalos determinados por ese valor. Además, la exploración permitió inferir que lo que ocurre entre las dos familias de funciones también ocurre entre la familia dada y la función identidad, lo que resulta decisivo para una resolución analítica. Este último asunto propició discusiones muy interesantes en la resolución sin las TIC.
- WA ofreció una descomposición de la expresión como producto de dos expresiones cuadráticas y también nos dio las expresiones para las soluciones. A partir de la visualización en las gráficas hechas en GGB, y con la conjetura sobre la respuesta, se vería facilitada la interpretación de los símbolos que WA aporta para ver qué sucede con la cantidad de soluciones analizando los discriminantes. Más allá de lo mencionado, es posible manipular la expresión que el software ofrece mediante la propiedad distributiva y obtener que efectivamente se trata de

una factorización posible de la expresión original. El camino inverso no es sencillo con las técnicas de factorización usuales.

En síntesis, aceptamos que se cumple con la imprescindibilidad en esta situación aun cuando mostramos que la misma conjetura pueda alcanzarse con su uso y sin su uso, porque las resoluciones mostradas consisten en distintos caminos que quedan o no habilitados dependiendo de los conocimientos y las ideas que tengan quienes resuelvan. Por otro lado, como dijimos, la exploración con GGB permite una comprensión panorámica del problema y favorece el diseño de una estrategia de resolución.

A partir de lo anterior, proponemos una reformulación del criterio de imprescindibilidad para valorar el uso de las TIC en una actividad destinada al aprendizaje. Diremos que el criterio se pone de manifiesto si ocurre cualquiera (una o más) de las siguientes tres situaciones (Carnelli y Chacón, 2024):

- Surgen relaciones matemáticas que sin las TIC no se advertirían (y no porque la actividad no pueda resolverse sin las TIC) tal como Rodríguez (2022) lo propone.
- Da una visión panorámica de la situación, de modo que permite comprenderla, y favorece el diseño de una estrategia de resolución sin las TIC.
- Aun obteniendo las mismas conjeturas con su uso que sin él, se habilitan distintos caminos para llegar a ellas, lo que puede hacer la diferencia entre advertirlas o no hacerlo.

2.1.5. Búsqueda de pruebas matemáticas

En términos de la riqueza de la actividad matemática que pretendemos que tengan las actividades que proponemos para

aprender, pensamos que la búsqueda de pruebas matemáticas es un criterio principal. Pero, para que se busquen pruebas, antes debe disponerse de un resultado matemático. En muchas ocasiones ese resultado es una conjetura formulada por quien resuelve una actividad y, además, esa conjetura es consecuencia de un trabajo exploratorio. La exploración y la formulación de conjeturas son centrales si se piensa en propiciar una actividad matemática rica (Carnelli, 2014).

¿Por qué esto no ha sido considerado entre los criterios enunciados por Rodríguez (2022)? Debido a que la pertinencia y significatividad en el uso de las TIC forma parte de una batería de elementos disponibles para el diseño y el análisis de consignas para la clase de Matemática, podemos asumir que está incluido dentro de la noción de potencial matemático. Debido a que aquí nos centramos solo en el uso de las TIC, formulamos un nuevo criterio que desarrollamos en el apartado siguiente. En segundo lugar, al comentar el criterio, Rodríguez (2022) señala que hay que evitar que los estudiantes tomen como criterio de validez matemática lo que ven el software. Entonces, es necesario que, en ocasiones, ocurra que lo que se ve en el software provoque respuestas incorrectas (en 2.1. vimos un ejemplo). Aportemos algunos ejemplos más:

Actividad:

¿Qué características tiene la función de expresión $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1000}$, definida en su dominio natural?

Podemos suponer que quien resuelve esta actividad apela inicialmente a un software que grafique funciones (como GGB) para darse una idea de la curva y, luego, ir al papel y dar argumentos

analíticos de por qué pasa eso que se ve. Según la escala en la que se realice, la curva que se ve en la pantalla da ideas erróneas sobre las características de la función. Entre ellas, la curva parece tener tramos verticales o tramos horizontales, o puede no verse que hay dos puntos en los que no está definida. Esto invita a analizar por qué eso que se observa puede o no ser posible en esta función y a modificar la escala para ver cambios en el gráfico. Si, por el contrario, se realizara primero un estudio en papel para luego chequear lo producido, se encontrarán diferencias sustanciales a las que habrá que buscarles una explicación. En ambos casos, se propicia una reflexión acerca de lo que se ve en la pantalla.

Aunque no con tanta claridad, algo similar ocurre con la función de expresión $f(x) = \frac{1000}{x}$, definida en su dominio natural. Según la escala que se tome, la curva parece mimetizarse con los ejes cartesianos o puede no verse nada. En ambos ejemplos, el problema tiene que ver con las escalas.

En los dos problemas del Capítulo 1 se cumple el criterio. Debido a que en ambos casos se promueve una instancia exploratoria que conduce a la formulación de conjeturas, estas deben ser validadas luego con lápiz y papel.

2.2. Nuevo criterio: exploración y formulación de conjeturas

Como explicamos anteriormente, proponemos sumar un nuevo criterio al que podemos llamar *exploración y formulación de conjeturas*. En términos del análisis didáctico, una consigna cumplirá este criterio si mediante el uso de las TIC se promueve la exploración y la formulación de conjeturas.

Una forma usual de manifestación de la actividad matemática ante un problema puede describirse así, de modo simplificado: una etapa exploratoria inicial que deriva en la formulación de una conjetura y, luego, la prueba de su validez (o su refutación y eventual reformulación). No hay dudas de que el uso de un software puede enriquecer la exploración de un problema.

Nos parece importante detenernos en cómo entender la actividad de exploración de un problema. Existe una forma de exploración que podemos llamar *ingenua* (o *elemental*). Retomemos la situación comentada anteriormente, de encontrar valores de a para que $f(x) = a \cdot (x - 3) \cdot (x - 7) + 4$ tenga como raíces 3 y 7. Una posibilidad de exploración es que se asignen algunos valores al parámetro a y se analice si las funciones cuadráticas resultantes verifican o no lo pedido, para luego conjeturar que no hay ningún valor del parámetro que cumpla lo pedido. Por las características de la exploración realizada, la conjetura es débil, pues tiene bajo grado de fundamento matemático aunque hayan sido muchos los ejemplos dados. En cambio, si se asigna un deslizador al parámetro a , se analiza la dinámica de la variación de las raíces y, eventualmente, se ajusta el rango del parámetro, la conjetura queda formulada con un grado de fundamentación mayor. Esta exploración no es ingenua sino *razonada* (o *dirigida*). Consideramos que es tarea de la enseñanza favorecer el desarrollo de la exploración razonada; para esto, son necesarias intervenciones docentes oportunas y el planteo de actividades que promuevan esto.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Actividad:

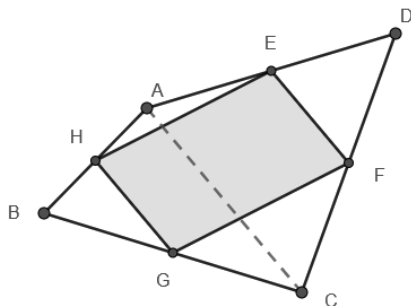
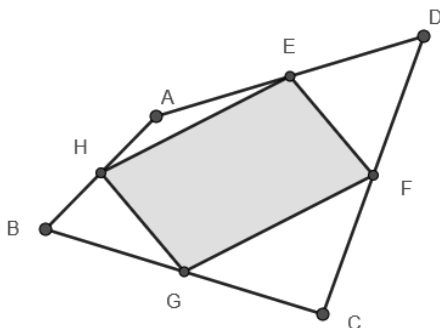
Dado un cuadrilátero convexo cualquiera, se determinan los puntos medios de sus lados. ¿Qué tipo de cuadrilátero es el que tiene por vértices a esos puntos? Justificar la respuesta.

Veamos primero una resolución sin las TIC.

Dado un cuadrilátero convexo cualquiera ABCD, se trata de conocer qué tipo de cuadrilátero es el que resulta de unir los cuatro puntos medios H, G, F y E de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente.

Si trazamos las diagonales del cuadrilátero, resulta que:

- con la diagonal AC quedan determinados los triángulos ABC y ACD. GH y EF son bases medias del respectivo triángulo con base en el lado común. Por la propiedad de las bases medias de un triángulo, sucede que:
- HG y AC son paralelas y HG mide la mitad de AC.
- EF y AC son paralelas y EF mide la mitad de AC.



Por la simetría y la transitividad de la relación de paralelismo, se infiere que HG y EF son paralelas e iguales.

Así, el cuadrilátero HGFE tiene un par de lados paralelos e iguales, por lo que es un paralelogramo.

Este resultado es conocido como teorema de Varignon.

Observación: en la deducción usamos que “si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos e iguales, entonces es un paralelogramo”. Puede evitarse usar esta propiedad y apelar a la definición clásica de paralelogramo (dos pares de lados opuestos paralelos). Para ello, hay que considerar también la otra diagonal del cuadrilátero y realizar la inferencia análoga respecto del paralelismo de la base media y el lado correspondiente del triángulo.

Veamos ahora una resolución con GGB. El estudio de la variabilidad del cuadrilátero interno que da la dinámica de GGB permite una exploración con los siguientes resultados:

- Vemos un amplio abanico de casos; en todos ellos, el cuadrilátero interior parece ser un paralelogramo, aún si aquel fuera cóncavo.
- Usando la medición de los lados, se refuerza la idea de que es un paralelogramo, pues tiene dos pares de lados opuestos iguales.
- Por lo tanto, podemos conjeturar que es un paralelogramo.

Si agregamos la medición de los ángulos:

- Además, en ocasiones, es un rombo. Nos preguntamos cuándo ocurre esto y vemos que pasa cuando el cuadrilátero es un rectángulo.
- También vemos que, en ocasiones, es un rectángulo. Nos preguntamos cuándo pasa esto y vemos que ocurre cuando el cuadrilátero es un rombo.

- Por lo tanto, también puede ser un cuadrado, cuando el cuadrilátero es un cuadrado.

Entonces, podemos agregar varias conjeturas adicionales que van más allá de lo que pide la consigna. Estas son:

- Si el cuadrilátero inicial es un rectángulo, el cuadrilátero interno es un rombo.
- Si el cuadrilátero inicial es un rombo, el cuadrilátero interno es un rectángulo.
- Si el cuadrilátero inicial es un cuadrado, el cuadrilátero interno es un cuadrado.

A partir de lo obtenido, surge preguntarse también qué ocurre si el cuadrilátero inicial es un paralelogramo y, también, si es un trapecio (o si es un trapecio isósceles). Dejamos al lector pensar en estas preguntas. Claramente, la exploración realizada no fue lo que llamamos ingenua, aún si lo hubiéramos limitado a la conjetura principal. Debido a que las afirmaciones realizadas se apoyaron en observaciones y mediciones, es imprescindible justificar la validez de las conjeturas usando lápiz y papel, pese a que podemos afirmar que las conjeturas son fuertes.

El trabajo exploratorio que hicimos para el análisis didáctico de la actividad, que derivó en la formulación de una conjetura acerca de lo que pregunta el problema y de otras varias conjeturas más, fue sumamente rico. Se da algo virtuoso entre la riqueza de la actividad y la potencialidad de GGB.

De ninguna manera puede afirmarse que sin las TIC no hubieran surgido los otros resultados, pero lo que sí está claro es que la exploración en GGB permite una comprensión de la variabilidad del cuadrilátero interior sustancialmente distinta que en la estática de la resolución sin las TIC. Con esto queremos decir que lo que

permite GGB, muy posiblemente no hubiera podido sustituirse con muchos ejemplos con lápiz y papel.

Además de servir al criterio que estamos proponiendo ahora, explorar y buscar pruebas, podemos aprovechar la oportunidad para analizar el criterio de la imprescindibilidad. Pensamos que podemos afirmar que con el uso de GGB se advirtieron relaciones geométricas que sin usar las TIC están ocultas (todas las conjeturas adicionales), aunque sean relaciones sobre las que no se preguntaba explícitamente. Sin embargo, como dijimos, algunos estudiantes curiosos, acostumbrados a realizar una actividad matemática valiosa (deberíamos decir sin las TIC), podrían formularse las preguntas que conducen a las mencionadas conjeturas. Por esto, pensamos que puede considerarse que el criterio de imprescindibilidad en el uso de las TIC se cumple.

En los dos problemas del capítulo anterior vemos que este criterio se cumple ampliamente. En ambos está presente en el trabajo inicial con GGB, al estudiar la variabilidad del área del cuadrilátero según el valor del ángulo que forman las diagonales en el Problema 1 y al estudiar la variabilidad de la intersección de las dos curvas en el Problema 2; en particular aquí, cuando aparecieron esas nuevas preguntas sobre si los puntos de intersección buscados pertenecían o no a la bisectriz del primer cuadrante. Además, podemos decir que en ambos momentos se trató de lo que llamamos una exploración razonada. De todas maneras, proponemos una reformulación de la actividad para motivar, tal vez, otro tipo de exploraciones:

Actividad:

Dado un cuadrilátero convexo cualquiera, se determina un cuadrilátero interior cuyos vértices son los puntos medios de sus lados.

- Analizar qué tipos de cuadriláteros se obtienen de acuerdo con el tipo de cuadrilátero inicial.
- Analizar cómo debería ser el cuadrilátero inicial para obtener un cuadrilátero interior en particular.
- Justificar las respuestas.

2.3. El software GGB: algunas consideraciones sobre su uso para aprender matemática

Con el tiempo, GGB se ha transformado en el software matemático más utilizado en las clases, principalmente para geometría y para el trabajo con funciones (la calculadora gráfica), aunque su evolución incluye el trabajo estadístico y la plataforma GeoGebra Classroom. La principal ventaja de este software es la dinámica. En su sitio⁵ y en distintos sitios de la web pueden encontrarse materiales interactivos que proponen su uso para distintas tareas matemáticas. Además, ya son numerosas las investigaciones y producciones para la docencia que lo tienen como centro. Por esto, nos interesa darle un espacio específico y destacar algunas de sus potencialidades y limitaciones. A modo de ejemplo de los aportes en investigación podemos mencionar a Rosado Rosado *et al.* (2024), quienes analizaron el impacto en el aprendizaje de los números racionales usando GGB y encontraron que con él se favoreció la exploración

⁵ Disponible en: <https://www.geogebra.org/>.

de las propiedades y se pudieron visualizar y asimilar nociones abstractas. Por su parte, Dubarbier-Fernández *et al.* (2024) realizaron un estudio con docentes que develó que GGB es poco usado para elaborar *applets* propias y que no se encuentra integrado a la evaluación, y que su mayor uso es para la generación de ejemplos.

También hay numerosos trabajos de tesis o tesinas que se basan en experiencias que utilizan GGB. Solo para ejemplificar, está la tesis doctoral de López Orozco (2018) en la que se verificaron mejoras significativas en los aprendizajes de la función lineal al incorporar GGB al trabajo.

Es usual que en los eventos especializados de educación matemática haya presentaciones que se basen en el uso de GGB. Incluso ha habido eventos dedicados a GGB, como un congreso realizado en Córdoba (España) en 2023 que incluyó una serie de conferencias en la temática. Otro ejemplo es el *VI Día GeoGebra Argentina* que organiza la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). También hay sitios gubernamentales que difunden propuestas de enseñanza que incluyen el uso de GGB como, por ejemplo, el sitio del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, en el que puede verse, entre otros, un material con actividades sobre funciones cuadráticas con GGB (GCBA, 2019).

Por último, mencionamos dos de los trabajos de revisión de la literatura sobre el uso de GGB. Morales Chicana *et al.* (2023) realizaron una revisión sistemática sobre el impacto en el aprendizaje de la matemática en estudiantes que utilizan GGB, en el período 2011-2022, y observaron una tendencia creciente en el uso de este software para mejorar los aprendizajes, así como también las potencialidades del programa para el trabajo con las funciones y

la posibilidad de que los docentes diseñen sus materiales usándolo. Otro trabajo es el de Pérez Valera *et al.* (2022), quienes reconocen que se favorece el desarrollo de competencias matemáticas al aprender matemática usando GGB y que también se aplican propuestas de enseñanza innovadoras incluyendo su uso. Este estudio se realizó en Perú y abarcó el período 2012-2021.

Patricia Sadovsky y Carmen Sessa pueden considerarse precursoras en los estudios en educación matemática en la Argentina y, desde nuestra perspectiva, entendemos que su trabajo toma como marco la teoría de situaciones de la Escuela Francesa en Educación Matemática (Brousseau, 1997). Su trabajo ha tenido alcance nacional y jurisdiccional, con aportes que se encuentran plasmados en distintos documentos y diseños curriculares. Entre las diversas producciones de los equipos de trabajo que organizaron, hay una serie de libros acerca de la enseñanza de distintos temas de la escolaridad secundaria que nos interesa tomar ahora, ya que proponen explícitamente el uso de GGB que resulta un soporte central y necesario para el trabajo matemático.

Las producciones a las que nos referimos son las de Fioritti y Sessa (2015) sobre polinomios y funciones polinómicas, de las mismas autoras (2021) sobre funciones cuadráticas, la producción de Murúa y Trillini (2016) sobre funciones homográficas y también las de Itzcovich y Murúa (2018; 2021) sobre geometría.

Muchas de las actividades de estos libros dependen del uso de GGB ya desde su formulación. Cada docente podría reformularlas si considera que es valioso lo que se promueve matemáticamente y entiende que deben cumplirse los criterios que analizamos en este apartado. A modo de ejemplo, mostramos una consigna de funciones cuadráticas que permite desplegar una actividad matemática rica a partir de pedir condiciones para la parábola según

el valor que tomen los parámetros de su forma canónica, y en la que se ve explícitamente la dependencia de GGB, que está tomada de Fioritti y Sessa (2021).

Actividad:

En un archivo GeoGebra ingresar los parámetros $a = 1$, $b = 5$ y $c = 3$. A continuación, ingresar la función $f(x) = a \cdot (x + b)^2 + c$.

- a) Modifiquen los valores de a , b y/o c , de manera que la función tenga un valor máximo igual a 3,6. Una vez que lleguen a una función que crean que tiene un máximo igual a 3,6, expliquen por qué el gráfico que obtienen cumple con lo pedido. Para armar esta explicación, pueden hacer construcciones auxiliares en la ventana gráfica utilizando herramientas del programa. Apoyándose en la fórmula, escriban una explicación de por qué la función que cada grupo obtuvo cumple con lo pedido.

Modifiquen los valores de a , b y/o c , de manera que la función:

- b) tenga un valor máximo igual a $-4,1$.
c) tenga un valor mínimo igual a 2,7.
d) tenga un valor máximo igual a 3,6 y se alcance en $x = 2$.
e) tenga un valor mínimo igual a 2,7 y se alcance en $x = -5,3$.

Para todos los ítems, una vez lograda la función pedida, capturen la pantalla de GeoGebra, péguenla en un archivo Word y expliquen cómo “leen” en la fórmula que la parábola tiene máximo o mínimo, y cómo controlan gráficamente que la parábola que obtuvieron cumpla con lo pedido. Estudien también si hay más de una función posible.

Lo que nos interesa aquí es conocer qué potencialidades y particularidades encuentran en el uso de GGB este grupo de docentes e investigadores de extensa y destacada trayectoria, que hace que le otorguen un rol tan protagónico en sus materiales. A continuación, detallamos algunas cuestiones que hemos encontrado en estas producciones.

Una de las manifestaciones de la actividad matemática que, según este grupo de autores, es de las más importantes para desarrollar en estudiantes es la anticipación. Podemos ejemplificar esto así: si se presenta la expresión $x = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) se espera que se reconozca que x es cualquier múltiplo de 2 que no es múltiplo de 4 (anticipación), sin tener que hacer una tabla de valores que permita inferirlo a partir de ver los resultados obtenidos (exploración y formulación de conjetura). Sin embargo, la incorporación de recursos tecnológicos como GGB propicia que la exploración desplace a la anticipación. ¿Por qué? Debido a que con un software como GGB resulta “económico” explorar. Veamos el siguiente ejemplo, tomado de Fioritti y Sessa (2021), en el que se busca un valor real del parámetro a para que la familia de funciones cuadráticas $f(x) = a \cdot (x - 3) \cdot (x - 7) + 4$ tenga como raíces 3 y 7. Pese a que la intención es anticipar que no hay ningún valor del parámetro que lo cumpla, pues para $x = 3$ y para $x = 7$, la familia de funciones vale 4 en todos los casos, se observó en estudiantes que resolvieron la actividad que la graficaron para distintos valores del parámetro (es decir, exploraron) y, recién cuando no encontraron ningún valor de a , pensaron por qué ocurría eso. Las autoras señalan la importancia de trabajar en la clase que no siempre es óptimo recurrir inicialmente al software, como lo muestra esta situación.

Aceptado que en las clases ocurre esto, la formulación de conjeturas toma un rol más protagónico en la actividad matemática,

por lo que adquiere más relevancia y frecuencia tener que preguntar por qué pasa eso que se ve en la pantalla. La consideración de esta particularidad se observa en trabajos posteriores. Por ejemplo, en el mencionado libro sobre funciones homográficas se describe el trabajo esperado que comprende exploración y formulación de conjeturas con GGB, que “permite fabricar una colección de ejemplos que serán objeto de análisis para atrapar alguna caracterización general de las funciones que pretendemos estudiar” (Murúa y Trillini, 2016), pero también se señala que primero se proponen algunas actividades sin GGB “para que los alumnos tengan la posibilidad de hacer un estudio analítico de las funciones presentadas con los conocimientos previos, sin recurrir a nuevas técnicas de cálculo” (ídem).

En los libros que tratan temáticas de geometría se señala que el movimiento de las representaciones que permite la dinámica de GGB puede aprovecharse como variable didáctica por la enseñanza y se describen ejemplos en donde se explicita que su uso permite vislumbrar nuevos caminos de análisis y variedad de procedimientos para resolver los problemas. Además, se considera que el dinamismo del software facilita que asuman la responsabilidad matemática (Itzcovich y Murúa, 2018).

También se reconocen algunas especificidades que se presentan al trabajar con GGB. Itzcovich y Murúa (2018) discuten la idea de copia de un dibujo en GGB, en donde el objeto original y el copiado no son estáticos sino dinámicos. Se generan nuevos interrogantes como, por ejemplo, cómo decidir si el dibujo obtenido es efectivamente una copia de otro dado.

Otra de las características que permite el trabajo con la calculadora gráfica de GGB es la posibilidad de trabajar con familias de funciones, con el uso de deslizadores. Con esto, puede estudiarse

el comportamiento de la familia de funciones de un modo que no podría ser realizable con lápiz y papel, o que sería muy costoso. En contrapartida a estas ventajas, se pierden todas las decisiones que debe tomar quien resuelve para graficar una función con lápiz y papel (Fioritti y Sessa, 2021).

Siguiendo con esto último, Fioritti y Sessa (2021) explicitan algunas limitaciones que tiene GGB, que requiere que sean atendidas por la enseñanza para una plena integración del software a la producción matemática. Estas son:

- las limitaciones de la visualización para afirmar que un gráfico cumple con una propiedad. Por ejemplo, la curva, ¿contiene a un cierto punto?
- los límites de la información numérica. Por ejemplo, un resultado 0 puede revelarse como no nulo al ampliar la cantidad de cifras decimales (como vimos en 2.1. al usar Excel; algo análogo puede ocurrir en GGB).
- los límites de la información algebraica que provee como producto de una acción sobre los gráficos: las fórmulas que muestra pueden modificarse al hacer la opción de trabajar con más cifras decimales.
- la imposibilidad de conservación de una traza escrita que permita reconstruir el trayecto recorrido durante la resolución de la actividad por parte de cada estudiante puede constituirse en una dificultad para la gestión docente.

2.4. Palabras finales

Como hemos mencionado en la introducción de este libro, una de nuestras motivaciones para escribirlo tuvo que ver con nuestra

experiencia en materias de educación matemática con docentes en formación y capacitaciones para docentes con formación inicial. En particular, nos interesó revisar el problema de introducir el uso de las TIC para el aprendizaje de la matemática y cómo abordarlo en el profesorado en materias como las indicadas.

Esperamos que los aportes teóricos que aquí discutimos puedan tener utilidad práctica para quienes enseñan matemática, de modo de poder analizar en qué medida pueden lograrse mejores propuestas en las clases.

Cierre

Dos fueron nuestras intenciones con la realización de este libro: realizar un aporte a quienes enseñan matemática y les interesa el uso de las TIC en sus propuestas de clase, y contribuir a la discusión teórica sobre su inclusión en las actividades para el aprendizaje. Para ello, en el Capítulo 1 compartimos un problema de precálculo y otro de geometría que consideramos potentes en términos de la actividad matemática que se promueve al resolverlos con y sin las TIC. Bajo esta idea, propusimos distintas resoluciones y analizamos lo que se ponía en juego al usar o no recursos tecnológicos. Creemos que dejamos en claro que la decisión de aceptar o no el uso de las TIC debe ser problematizada por quienes enseñamos y diseñamos los problemas, ya que puede ser muy distinta la actividad matemática que realice quien resuelve en un caso u otro. Habitualmente, cuando diseñamos actividades para la clase pensamos en su potencialidad para promover lo que pretendemos que se aprenda al resolverlas. Ahora, con la incorporación de las TIC, queremos despertar el interés por que ese análisis se realice en dos planos: lo que se habilita cuando se resuelve sin usar las TIC y lo que se habilita con su uso. Hemos visto que esto puede ser muy distinto y, entonces, es algo de lo que debemos ocuparnos cuando enseñamos matemática. Pensamos que hemos aportado ideas para la clase de Matemática de nivel secundario y universitario inicial. Quienes enseñan matemática pueden decidir cuándo podría ser apropiado ensayar estos dos problemas en sus clases y analizar lo que sucede, o los pueden reformular atendiendo a los intereses que

consideren pertinentes o, mejor aún, formular un problema de su propia autoría inspirado en estos.

En el Capítulo 2 nos dedicamos a la discusión teórica acerca de la valoración sobre la inclusión de las TIC en las actividades para el aprendizaje. Podemos asumir que a esta altura impedir el uso de las TIC en la clase de Matemática (de modo sistemático) es insostenible e injustificable. Aceptado el hecho de incorporar las TIC, es necesario que planifiquemos cuándo, cómo y para qué habilitar su uso, justamente porque lo que se habilita en cuanto a la actividad matemática puede ser muy distinto con o sin ellas. Para esto, pensamos que la discusión acerca de los criterios para un uso significativo y pertinente de las TIC (Rodríguez, 2022) justifica que la incorporación de estos recursos a la clase no debe ser ingenua y que requiere de un trabajo de planificación de la enseñanza.

Como hemos visto, pensar en la incorporación de las TIC abre otras discusiones. Sabemos que algo que puede ocurrir es que los estudiantes tengan una confianza excesiva en lo que el recurso tecnológico les muestra, al punto tal que deleguen en él la autoridad para la justificación de la tarea matemática realizada. La ocurrencia de este hecho es algo que desde la enseñanza debemos ocuparnos de no promover. Ahí es donde es necesario que ocurra, en ocasiones, que lo que vemos en la pantalla no sea correcto, y para que se garantice que esto pase, como vimos, debe ser atendido por la enseñanza. Es necesario que pensemos actividades en las que lo que se ve no sea cierto o sea impreciso o dudoso. Dilucidar lo que es válido exige el trabajo con lápiz y papel. Es interesante ver que, en situaciones como estas, usar las TIC refuerza el trabajo con lápiz y papel, y permite una mayor integración del software al trabajo matemático.

Como vimos a lo largo del capítulo, analizamos los criterios de Rodríguez (2022), ampliamos la forma de entender el criterio de imprescindibilidad y aportamos nuevos ejemplos para cada criterio. Por último, le dimos un espacio específico a GGB, el software más difundido en estos tiempos en las clases de Matemática. Este software, a partir de la ampliación de sus potencialidades para distintos campos de la matemática y su libre acceso, fue ganando cada vez más protagonismo. En los dos problemas que desarrollamos en el Capítulo 1, si bien hemos mostrado un uso variado de las TIC, GGB aparece en primer plano y hemos destacado su aporte. Completamos el análisis de este software con las características, potencialidades y limitaciones que le han encontrado investigadores que asumen su uso de un modo central en sus propuestas de enseñanza.

Para cerrar, recordemos que nuestra separación en resoluciones con y sin las TIC fue una decisión de tipo metodológica para advertir y argumentar acerca de la pertinencia y significatividad de su uso. En realidad, lo más virtuoso es que las TIC se integren al bagaje de recursos del que pueden disponer nuestros estudiantes al aprender matemática, quienes deberán decidir cuándo y para qué usarlas y, para ello, es necesario que la enseñanza se ocupe especialmente del asunto al momento de la planificación de las clases.

Referencias bibliográficas

- Area, M. y Adell, J. (2021). “Tecnologías digitales y cambio educativo. Una aproximación crítica”. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, vol. 19, n° 4, pp. 83-96. Disponible en: <https://doi.org/10.15366/reice2021.19.4.005>.
- Barreiro, P. (2015). *Fases de integración de nuevas tecnologías en la formación de profesores de Matemática*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional del Comahue]. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Patricia_Barreiro2/project/Tesis-de-Maestria7/attachment/594beed41042bfede16052d9/AS:508086054866944@1498148563779/download/Tesis+de+Maestr%C3%ADa_VF.pdf?context=ProjectUpdatesLog.
- Barreiro, P. y Cassetta, I. (2012). “Teoría de situaciones didácticas”. En Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, volumen 1. Los Polvorines: UNGS y EDUVIM. Disponible en: <https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876301169-completo.pdf>.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Carnelli, G. (2014). *Matemática en el ingreso a las universidades nacionales: análisis de propuestas de actividades para el aprendizaje*. Tesis doctoral. Universidad de Palermo. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/341272571_Carnelli-TesisDoctoral
- Carnelli, G. y Chacón, M. (2024a). “Uso de TIC en estudiantes iniciales del nivel superior que resuelven problemas matemáticos”. *Quinto Simposio de Educación Matemática Virtual*. Universidad Nacional de Luján. Disponible en: <https://www.sem-basicas.unlu.edu.ar/sites/www.sem-basicas.unlu.edu.ar/files/site/V%20SEM-V%20-%20Memorias.pdf>.

- (2024b). “Actividades para el aprendizaje con TIC: discusión acerca de un uso pertinente y significativo”. *Quinto Simposio de Educación Matemática Virtual*. Universidad Nacional de Luján. Disponible en: <https://www.sem-basicas.unlu.edu.ar/sites/www.sem-basicas.unlu.edu.ar/files/site/V%20SEM-V%20-%20Memorias.pdf>.
- Chacón, M.; Farías, S.; González, V. y Poco, A. (2009). “Un procedimiento para establecer criterios para elaborar problemas”. *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática*. Edumat.
- Gamboa Araya, R. (2007). “Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas”. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, vol. 2, n° 3, pp. 11-44.
- Dubarbier-Fernández, L.; Barreras, A. y Oller-Marcén, A. (2024). “El uso de GeoGebra en la enseñanza de conceptos matemáticos: prácticas, barreras y percepciones docentes”. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, vol. 24, n° 1, pp. 77-100.
- Fioritti, G. y Sessa, C. (2015). *Introducción al trabajo con polinomios y con funciones polinómicas*. UNIPE.
- Fioritti, G. y Sessa, C. (2021). *La incorporación de la computadora a la enseñanza de funciones cuadráticas*. UNIPE.
- Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (GCBA) (2019). *Funciones cuadráticas con GeoGebra*. Disponible en: <https://biblioteca-digital.bue.edu.ar/descargar/267154-fg-co-matematica-3-funciones-cuadraticas-con-geogebra-docentes-pdf.pdf>.
- Illuzi, A. y Sessa, C. (2014). *Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*. Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Disponible en: https://buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/matematica_cuadratica_13_06_14.pdf.
- Itzcovich, H. y Murúa, R. (2018). “GeoGebra: ‘nuevas’ preguntas sobre ‘viejas’ tareas”. *Yupana*, vol. 16, pp. 71-85.

- (2021). *Enseñanza de la Geometría. Primeras experiencias con GeoGebra*. UNIPE. Disponible en: <https://editorial.unipe.edu.ar/colecciones/herramientas/ense%C3%B1anza-de-la-geometr%C3%ADa-primeras-experiencias-con-geogebra-detail>.
- Lion, C. (2024). “Dilemas didácticos en tiempos de algoritmos”. En Kap, M. (comp.), *Didáctica y Tecnología. Encrucijadas, debates y desafíos*, pp. 122-135. Buenos Aires: EUDEM.
- López Orozco, L. (2018). *Uso de GeoGebra como herramienta para el estudio de la función lineal con estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Latinoamericana. Universidad Católica de Manizales*. Disponible en: <https://repositorio.ucm.edu.co/bitstream/10839/2204/1/Luis%20Enrique%20L%C3%B3pez%20Orozco.pdf>.
- Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). “Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de Matemática de nivel preuniversitario”. *Paradigma*, vol. 30, n° 2, pp. 165-186.
- Montero, J. (2014). “Todo empezó con un click. Una clase de Matemática con software de geometría dinámica”. En Ros, C. (coord.), *Experiencias de enseñanza con TIC en la formación docente*, pp. 110-140. Ministerio de Educación de la Nación.
- Morales Chicana, L.; Zuta Velayarse, L. y Solís Trujillo, B. (2023). “El uso del software GeoGebra en el aprendizaje de la matemática. Una revisión sistemática”. *Referencia pedagógica*, vol. 11, n° 1, pp. 2-13.
- Murúa, R. y Trillini, M. (2016). *Función homográfica. Una propuesta didáctica con el aporte del software GeoGebra*. Ediciones UNGS. Universidad Nacional de General Sarmiento.
- Nápoles Valdez, J. y Cruz Ramírez, M. (2000). “La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones”. *Función Continua*, vol. 8, pp. 21-42.
- Pérez Valera, J.; Paira Navarro, D.; Matos Pacheco, F.; Romero Valdivia, M. y Quispe Llamoca, R. (2022). *Revisión de la literatura del uso de GeoGebra y su relación con el aprendizaje en el período 2011-2021*.

- Documento de la Universidad de Lima. Disponible en: https://repositorio.ulima.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12724/16435/Geogebra_aprendizaje_Perez_Paira_Matos_Romero_Quispe.pdf?sequence=1.
- Pizarro, R. (2009). *Las TICs en la enseñanza de las Matemáticas. Aplicación al caso de Métodos Numéricos*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de La Plata]. Disponible en: sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/4152/Documento_completo.pdf?sequence=1.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*, segunda edición. México: Trillas. Disponible en: <https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf>.
- Rodríguez, J. (2020). *Inclusión del software GeoGebra en las clases de matemática*. [Tesina de Licenciatura en Educación, Universidad Nacional del Sur].
- Rodríguez, M. y Barreiro, P. (2017). “Consideraciones sobre la formación de matemática y su apropiación de las nuevas tecnologías”. En Cabello, R. y López, A. (eds.), *Contribuciones al estudio de procesos de apropiación de tecnologías*, pp. 219-226. Ediciones del Gato Gris.
- Rodríguez, M.; Pochulu, M. y Espinosa, F. (coords.) (2022). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, volumen 2. Los Polvorines: UNGS. Disponible en: <https://www.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2024/10/9789876307758-completo.pdf>.
- Rodríguez, M. (2012). “Resolución de problemas”. En Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, volumen 1. Los Polvorines: UNGS y EDUVIM. Disponible en: <https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876301169-completo.pdf>.
- (comp.) (2022). *Perspectivas metodológicas para la enseñanza y la investigación en educación matemática*. Los Polvorines:

- UNGS. Disponible en: https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876306324_completo.pdf.
- Rosado Rosado, K.; Acaro Lapo, G.; Cárdenas Chicaiza, E. y Valencia Núñez, E. (2024). “Efectividad del uso de la aplicación GeoGebra en la resolución de problemas con números racionales”. *Religación. Revista de Ciencias Sociales y Naturales*, vol. 9, n° 40, pp. 1-17.
- Sandholtz, J. y Reilly, B. (2004). “Teachers, not technicians: Rethinking technical expectations for teachers”. *Teachers College Record*, vol. 106, n° 3, pp. 487-512.
- Villarreal Farah, G. (2010). *Caracterización del uso de la tecnología, por profesores y alumnos, en resolución de problemas abiertos en matemática en el nivel de secundaria*. [Tesis doctoral de la Universitat de Barcelona]. Disponible en: https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/82071/GVF_TESIS.pdf;jsessionid=C41C-9F645824011640B12C8EA22F358D?sequence=1.

La incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en las clases de matemática genera, desde hace años, un creciente interés en la enseñanza y en la investigación en educación matemática.

Este libro analiza situaciones de trabajo con y sin TIC, poniendo el foco en las cuestiones matemáticas que se habilitan en cada caso. A partir de ejemplos concretos y de criterios desarrollados en la bibliografía especializada, ofrece herramientas para pensar un uso pertinente y significativo de los recursos tecnológicos en el aula. Incluye, además, una reflexión específica sobre el uso de GeoGebra, software que en la actualidad es ampliamente difundido en las clases.

Serie **Educación en ciencias**

Universidad Nacional
de General Sarmiento

