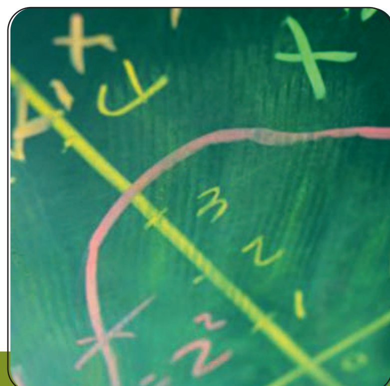
Colección Educación

Educación Matemática

Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos

($\surd$olumen^1)

Marcel D. Pochulu y Mabel A. Rodríguez
(compiladores)



eduvim
Editorial Universitaria
Villa María

Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

Educación Matemática
Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos

Marcel D. Pochulu y Mabel A. Rodríguez
(compiladores)

Educación Matemática
Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos
Volumen 1

Autores
Patricia Barreiro, Ana Bressan, Cristina Camós, Gustavo Carnelli,
Inés Casetta, Cecilia Crespo Crespo, Vilma Colombano, Alberto Formica,
Tamara Marino, Juan Nápoles Valdés, Myriam Ortiz Hurtado,
Marcel D. Pochulu, Mabel A. Rodríguez, Sara Scaglia,
Sandra Visokolskis y Betina Zolkower.

eduvim
Editorial Universitaria
Villa María

Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos / Patricia Barreiro ... [et.al.] ; compilado por Marcel D. Pochulu y Mabel A. Rodríguez. - 1a ed. 4ta reimp. - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento; Villa María: Universidad Nacional de Villa María, 2015.
288 p. ; 21x15 cm. - (Educación; 6)

ISBN 978-987-630-116-9

1. Formación Docente.Matemática. I. Barreiro, Patricia II. Pochulu, Marcel David, comp. III. Rodríguez, Mabel, comp.
CDD 371.1

Carlos Pellegrini 211 - Villa María (CP 5900), Provincia de Córdoba
Tel. : (54 353) 453-9145
eduvim@unvm.edu.ar
www.eduvim.com.ar

J.M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)
Prov. de Buenos Aires, Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507
ediciones@ungs.edu.ar
www.ungs.edu.ar/ediciones

Corrección: Cynthia Cortés
Diseño gráfico de colección:
Andrés Espinosa / Departamento de Publicaciones - UNGS

Impreso en La Imprenta Ya S.R.L.
Hipólito Bouchard 4381 (B1605BNE),Munro, Provincia de Buenos Aires,Argentina,
en el mes de agosto de 2016.
Tirada: 200 ejemplares.

Índice

Introducción

Marcel D. Pochulu y Mabel A. Rodríguez

Muchas veces hemos escuchado decir *"¡Es suficiente saber Matemática para dar clases!"* y en contraparte *"¡No es suficiente saber sólo Matemática para dar clases!"*. Es así que la pregunta ¿qué debe saber un profesor para lograr que otros sujetos aprendan Matemática?, sin dudas, no es sencilla de responder. Hoy en día hay dos claros acuerdos en la comunidad educativa: es una condición necesaria saber Matemática con un amplio dominio del campo, y saber sólo Matemática no es suficiente.

Si tuviéramos en cuenta todas las perspectivas sobre las funciones y roles que los profesores de Matemática debiéramos desempeñar en el presente y de cara al futuro, podríamos comprobar que se nos presenta un abanico interminable de quehaceres y responsabilidades.

Al profesor de Matemática se le pide o exige un nuevo comportamiento profesional, una nueva actitud hacia los alumnos; un conocimiento y habilidades pedagógicas flexibles según las distintas situaciones y contextos educativos; un conocimiento de la disciplina en sí y el conocimiento didáctico asociado a ella. Asimismo, se espera y pretende que: logre impulsar y motivar el trabajo de los alumnos conduciéndolos a la reflexión; domine aspectos sociales y emotivos de los alumnos; sea hábil en la generación de entornos de aprendizajes matemáticamente ricos y enriquecedores; diseñe modelos que se adapten a las inciertas y cambiantes condiciones de aprendizaje que se dan en las clases de Matemática, y sepa preparar a sus alumnos, ya sea para una integración y participación en el mundo del trabajo, o para la continuidad de estudios superiores.

Sin duda, podríamos continuar con una serie interminable de aspectos, destrezas, actitudes y comportamientos que deberían estar presentes en nuestra tarea docente, y que se ven reflejados en las producciones de muchos investigadores, que dejan entrever sus ansias por hallar un ideal que sirva como prototipo de referencia. Así, por ejemplo, diversos autores del campo de la Educación Matemática (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008; Schoenfeld & Kilpatrick, 2008; Ponte y Chapman, 2006; Shulman, 1986; Sullivan, 2008; entre otros) plantean modelos de conocimiento didáctico-matemático del profesor y cómo "medirlos".

La conceptualización de Shulman (1986), largamente difundida, presenta los conceptos de *conocimiento del contenido, conocimiento curricular* y *conocimiento pedagógico del contenido*. Estas nociones son extendidas por Hill *et al* (2008). En particular, lo que en el esquema figura como conocimiento común del contenido se corresponde con la conceptualización de Shulman (1986) sobre conocimiento del contenido. La versión de Hill *et al* (2008) se sintetiza esquemáticamente de la siguiente manera:

Figura 1: Tipos de conocimiento del profesor

Si no tenemos en cuenta el "conocimiento del currículo", que se supone conocemos por ser docentes en ejercicio o, para quienes son alumnos de profesorados, es un tema que se aborda en la formación profesional, nos quedaría por comprender ¿a qué hacen referencia los otros conocimientos? Veamos una descripción sucinta de ellos:

Conocimiento común del contenido: refiere al conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático, o incluso un sujeto adulto con suficiente conocimiento, está capacitado.

Conocimiento especializado del contenido: refiere, por ejemplo, a realizar un ordenamiento de las secuencias con que podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico.

Conocimiento en el horizonte matemático: se trata del conocimiento que aporta perspectiva a los profesores para su trabajo. Es un tipo de conocimiento más avanzado del contenido específico que los lleva a plantearse cuestiones tales como: ¿puede tener consecuencias matemáticas conflictivas algo que se ha dicho de manera explícita o implícita? ¿Es esto interesante e importante desde el punto de vista matemático? ¿Hay alguna desviación en las ideas matemáticas tratadas?

Conocimiento del contenido y los estudiantes: refiere al conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular. Incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático.

Conocimiento del contenido y la enseñanza: resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas.

Si prestamos atención a la descripción de estos tipos de conocimientos que se le piden al profesor, los cuales se entremezclan con la Matemática misma, se nos plantea un interrogante más: ¿cómo accedemos a ellos?

En este sentido, hoy en día la formación de profesores de Matemática se ve enriquecida por aportes de investigadores de todas partes del mundo que, según las particularidades de su contexto, intereses, etc., plantean estudios y obtienen resultados a los cuales puede accederse con relativa facilidad. La comodidad y practicidad de revistas electrónicas o publicaciones internacionales con referato a las que se accede vía internet, permite suponer que –con mucha simpleza– docentes interesados en buscar información para sus clases accederán a trabajos recientes pudiendo aprovecharlos para sus intereses particulares.

Esta característica de las comunicaciones actuales obliga a que el docente o formador de profesores disponga de herramientas que le permitan comprender desde qué enfoque teórico está enmarcado el trabajo al que ha tenido acceso.

Actualmente la diversidad de enfoques teóricos desde los cuales se producen aportes a la formación docente es notable. Si retrocedemos en el tiempo, esto no ocurría así, al menos en Argentina. Los inicios en nuestro país de aportes en Didáctica de la

Matemática han sido realizados centralmente alrededor de la Teoría de Situaciones Didácticas. Este marco teórico ha sido utilizado para plantear reformas a la escolaridad primaria, media y a la formación de maestros y profesores. Muchos investigadores han trabajado sostenidamente en esta línea tanto desde el punto de vista de aplicar el enfoque como de ampliar sus alcances teóricos.

En paralelo, en otras partes del mundo se desarrollaban otras perspectivas de modo que, con el paso del tiempo, una enorme cantidad de ellas comenzaron a compartir el espacio de conocimientos útiles para pensar tanto en la formación de profesores como en la enseñanza de la Matemática, conformando un campo disciplinar que hoy tiene luz propia, y que fue recibiendo diferentes denominaciones: Educación Matemática, Didáctica de la Matemática, Matemática Educativa, *Mathematics Education*, entre otras.

En este libro no haremos distinciones entre estas acepciones, que consideraremos como sinónimas, y sólo nos enfocaremos en presentar la actividad de teorización que se desarrolló en torno a ellas y que aporta nuevas perspectivas a la tarea del profesor.

Desde nuestra visión del campo, y sólo a título ilustrativo pero con la intención de abrir los márgenes de las perspectivas actuales, presentamos un *mapa* de algunas de las líneas que hoy en día se desarrollan y en las cuales se encuentran producciones y aportes para mejorar los aprendizajes de la Matemática en distintos niveles escolares.

Figura 2: Líneas y enfoques teóricos de la Didáctica de la Matemática

Cada enfoque tiene sus particularidades, incluso desde sus concepciones. Algunos de ellos podrían considerarse enfoques teóricos de la Didáctica de la Matemática, otros sería más apropiado considerarlos como líneas de investigación en Educación Matemática, e incluso otros como fundamentaciones, bajo teorías psicológicas, de nuevas didácticas del aprendizaje de la Matemática. En este amplio margen de aportes que permiten analizar y entender procesos de aprendizaje o de enseñanza de la Matemática, la Filosofía de la Matemática, así como la Historia de la Matemática, también tienen una clara y natural cabida.

Este texto ofrece una entrada a varias de estas perspectivas. Cada una de ellas está circunscripta a un capítulo en el que se ha intentado plasmar el espíritu de la misma. De más está decir que esta obra permite trascender posiciones unívocas que circunscriben la enseñanza de la Didáctica de la Matemática a un único enfoque. Sin embargo, los autores de los capítulos no necesariamente estarían de acuerdo en los contenidos presentados en otros de ellos. Hemos decidido incluir una variedad de líneas en este libro que no alcanzan la totalidad del espectro. El criterio de selección ha sido incluir aquellas de mayor alcance y en las cuales priorizamos que la presentación quedara en manos de investigadores, nacionales o internacionales, que conocieran la problemática de la formación de profesores en Argentina y que a su vez hayan realizado aportes sustantivos a sus respectivos campos.

Esperamos que el texto sea una herramienta útil para estudiantes de Profesorados de Matemática de nivel medio, para docentes formados y en actividad y también para formadores de profesores. Pensando en ello, los capítulos han sido escritos manteniendo una estructura. En todos los casos intentamos que los aportes de los autores den al lector elementos útiles para su trabajo profesional. Como se advertirá, en la mayoría de los casos esto está presente, aunque en algunas secciones o capítulos se ha priorizado otro tipo de aporte que a primera vista no es una herramienta directa para el docente, pero que genera un avance en los conocimientos –y por lo tanto también resulta importante– que nos resultó interesante incluir.

Esperamos que los destinatarios de esta obra puedan encontrar aquí una bibliografía acorde a los cambios en la formación que en nuestra sociedad naturalmente devienen.

Referencias bibliográficas

Ball, D.; Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp.433-456), Washington, DC: American Educational Research Association.

Godino, J. D.; Rivas, M.; Castro, W. y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia*. Murcia: Centro de Profesores y Recursos.

Hill, H.; Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education 39*, 372-400.

Ponte, J. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of Research of the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp.461-494), Rotterdam: Sense Publishing.

Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp.321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-14.

Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics. In P. Sullivan & T. Woods (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp.1-9), Rotterdam: Sense Publishers.

1
Teoría de Situaciones Didácticas

Patricia Barreiro e Inés Casetta

1.1. Introducción

Presentamos aquí una aproximación a una de las líneas de la Didáctica de la Matemática con mayor difusión en el ámbito de la enseñanza, la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). Esta teoría fue desarrollada en Francia en el marco de los IREM (Instituto de Investigación de la Enseñanza de la Matemática). Uno de sus principales investigadores, Guy Brousseau, a principios de la década del setenta, sostiene la necesidad de estudiar la situación en la que el docente y el alumno despliegan actividad matemática.

Para iniciar la presentación de este enfoque, pensemos en cuántas oportunidades hemos leído en documentos de Educación Matemática o en textos de Didáctica de la Matemática, la transcripción o alguna adaptación de la siguiente propuesta de Brousseau (1994):

> Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas, sabemos bien que hacer matemática implica que uno se ocupe de resolver problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles la solución (p.3).

Probablemente ante ella hemos asentido y adherido con cierta determinación. Sin embargo, para hacer Matemática en ese sentido es necesario comprender varias cuestiones. Entre ellas que el conocimiento no es transparente, que el docente debe identificar, entre las situaciones que pretende llevar al aula, aquellas que permiten construir conocimiento, que el alumno en su producción pueda de algún modo replicar la actividad científica.

La Teoría de Situaciones Didácticas aporta un modelo teórico para responder a la formulación anterior. Sus elaboraciones han sido aplicadas, retomadas y de diversas formas enriquecidas hasta la actualidad.

Es importante advertir al lector que la presentación de la TSD en este libro es una selección de conceptos que respeta su esencia pero que de ningún modo la abarca en su totalidad. Hemos elegido las ideas y los enlaces que consideramos significativos especialmente para estudiantes avanzados de Profesorado de Matemática y para docentes noveles tanto en su labor como en su acercamiento a las líneas didácticas.

La TSD se concibe como un enfoque sistémico que permite comprender y operar sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se dan dentro de un sistema conformado por el docente, los estudiantes, el conocimiento matemático y un ámbito en el que las relaciones entre estas partes se ponen en juego. La TSD entiende a la Matemática escolar como un campo de resolución de problemas que conlleva la emergencia o creación de objetos matemáticos apropiados para resolverlos así como la reflexión sobre los mismos.

Respecto del aprendizaje, la TSD adopta una postura constructivista basada en el constructivismo de Piaget. Brousseau (1986) considera que el estudiante aprende Matemática por *adaptación al medio* luego de haberse enfrentado a alguna contradicción, dificultad, problema o cuestionamiento. Sus respuestas a estos últimos son las manifestaciones de su aprendizaje. Cabe resaltar de Carnelli (2005) la siguiente distinción que ubica a la TSD en una línea didáctica y no cognitiva:

> […] el medio que para Piaget es la realidad, para Brousseau está formado por saberes disciplinarios, por situaciones matemáticas que el estudiante debe aprender. Entonces, los marcos conceptuales de uno y otro pertenecen a distintos dominios de investigación: psicológico, el de Piaget, y didáctico el de Brousseau. Además, oponiéndose al desarrollo de la psicogénesis “natural” piagetiana, Brousseau propone una génesis artificial donde se destaca el carácter intencional de la intervención con fines de enseñanza (p.7).

Señalamos también que la TSD asume que el aprendizaje se da en el contexto de interacciones sociales, de modo que el trabajo en el aula en grupos pequeños de estudiantes será una de las modalidades de trabajo predominantes.

Hasta aquí hemos aproximado lo que entendemos son posicionamientos básicos que habilitan desde el primer acercamiento distinguirla de otros enfoques.

Para profundizar y precisar sus conceptos y relaciones organizamos este capítulo en dos secciones.

En la primera realizamos un abordaje teórico con la intención de ubicar al lector en los conceptos más relevantes de esta línea didáctica para esta situación de primer acercamiento a la TSD.

La segunda está subdividida en los ítems A y B. En el ítem A presentamos aportes teóricos a uno de los elementos de esta teoría –la validación– surgidos de investigaciones realizadas en el contexto del curso de ingreso de la Universidad Nacional de General Sarmiento. En el ítem B compartimos algunos ejemplos y sus análisis a la luz de los elementos teóricos definidos en la primera sección.

1.2. Algunos elementos teóricos de la TSD

1.2.1. Situación didáctica. Situación a-didáctica

Esta teoría pone especial atención en la producción autónoma que el alumno realiza cuando es enfrentado a una situación problemática, que adopta como propia e intenta resolver. De la interacción del alumno con el problema y las retroacciones que éste le propicie se generan condiciones bajo las cuales emerge el conocimiento matemático.

Para ello la TSD propone una de las nociones básicas, la de *situaciones didácticas* cuya definición se establece considerando las interacciones entre alumno, docente y medio.

Brousseau indica que la situación didáctica es toda situación que diseña el docente con la finalidad de enseñar algo. Una definición más precisa señala: (Brousseau 1982, citado en Gálvez, 1994).

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (p.42).

Esta definición incluye el concepto de medio que es necesario explicitar. Sostenemos que el medio es parte de la situación didáctica que contiene los problemas que el docente les presenta a los alumnos. El medio incluye, para esta teoría, un problema o una secuencia de problemas. Pero es necesario además comprender que las interacciones del alumno con el problema también conforman el medio.

Una definición que aporta precisión sobre el concepto la encontramos en Sadovsky (2005):

> El concepto de medio incluye entonces tanto una problemática matemática inicial que el sujeto enfrenta como un conjunto de relaciones esencialmente también matemáticas que se van modificando a medida que el sujeto produce conocimiento en el transcurso de la situación, transformando en consecuencia la realidad con la que interactúa (p.20).

Cuando el alumno interactúa sucesivamente con el medio, tomando decisiones, eligiendo una estrategia y rechazando otras, anticipa, produce, confronta unas con otras, intercambia argumentaciones con sus compañeros, establece la posibilidad de nuevas decisiones sobre el medio.

En el diseño de una situación didáctica es central pensar en la selección de los problemas. Su elección debe contemplar la necesidad de que generen situaciones abordables por los alumnos, que les permita en un primer acercamiento poner en juego sus conocimientos, pero con la suficiente complejidad como para propiciar la necesidad de modificarlos si pretenden resolver el problema. Se requiere que la situación provoque una tensión entre las anticipaciones y las decisiones que se puedan tomar con la finalidad de que emerja un nuevo conocimiento y que con él se obtenga la solución óptima al problema. Esto último es muy importante que el docente lo tenga en cuenta para el momento del diseño de las situaciones.

A la luz de estas elaboraciones teóricas, resaltamos que:

- La situación didáctica está sostenida por su intencionalidad didáctica y ha sido diseñada pensando en que el alumno aprenda un saber.
- Cuando esta intencionalidad no es percibida por el alumno, la situación didáctica diseñada está en funcionamiento a-didáctico. El alumno considera que abordar el problema es su responsabilidad, se interesa genuinamente por resolverlo más allá de hacerlo por cumplir con la indicación del docente. Esto se habrá logrado a través de distintas

> interacciones entre el estudiante, la situación planteada y el docente. Si se ha producido esa transferencia que hace que sus producciones se independicen de la palabra del docente en relación con el conocimiento, el alumno elabora una producción sin advertir la intencionalidad didáctica.

Se hace imprescindible aclarar que para que se produzca ese funcionamiento el alumno actúa sobre el medio en forma independiente del docente. Esta independencia no debe entenderse como ausencia de intervención docente, ya que su palabra no está prohibida. En esta intención de llegar a la situación a-didáctica el docente se involucra tomando decisiones: elige estratégicamente cuándo ofrecer información, cuándo formular una pregunta, cuándo no comunicar, etc.

Para definir con más precisión el funcionamiento a-didáctico decimos que una situación a-didáctica está latente dentro de la situación didáctica y sólo se eleva a la superficie si el problema que el docente ha propuesto le permite al alumno actuar de manera distinta en cada aproximación. De este modo, tanto las interacciones con el medio, con sus compañeros, como las intervenciones del docente confluirán en que el alumno pueda tomar el problema como propio. Se involucra en su solución, de algún modo "olvida" la intencionalidad del docente y en cada nuevo acercamiento al problema busca una solución. Si todo resulta como el docente planeó, y los estudiantes obtuvieron la solución óptima al problema, esta habrá requerido poner en juego el conocimiento que el docente pretendía.

Sin embargo, debemos entender que esta elevación de la situación a-didáctica no es sencilla. Brousseau (1994), al respecto, señala que:

> El alumno no distingue de golpe, en la situación que vive, lo que es en esencia a-didáctico y lo que es de origen didáctico. La situación a-didáctica final de referencia, la que caracteriza el conocimiento, puede estudiarse de manera teórica pero, en la situación didáctica, tanto para el maestro como para el alumno, hay una especie de ideal hacia el que se trata de converger: el enseñante debe incesantemente ayudar al alumno a despejar lo más posible la situación de todos sus artificios didácticos para dejarle el conocimiento personal y objetivo (p.12).

Estas situaciones a-didácticas forman parte de una *situación fundamental,* en términos de Brousseau. Al respecto señala:

"Cada conocimiento puede caracterizarse por una (o varias) situación a-didáctica que conserve el sentido y que llamaremos situación fundamental". (Brousseau, 1994, p.11). Este concepto es clave porque permite comprender el sentido propuesto por el docente cuando plantea la enseñanza de un conocimiento.

Operativamente esto requiere del docente un trabajo previo a la gestión de la clase que incluye, para cada conocimiento que se proponga enseñar:

- tomar decisiones respecto de los alcances, profundidad, recortes, habilitación –o no- de recursos, etc. que considera apropiados para su grupo de estudiantes. En función de estas decisiones,

- diseñar situaciones a-didácticas articuladas y secuenciadas cuyas soluciones óptimas cubran los aspectos del conocimiento a enseñar seleccionados, referidos en el ítem anterior.

De esta forma, el estudiante que se compromete y responsabiliza con la resolución de las distintas actividades, luego de resolverlas habrá adquirido el sentido de ese conocimiento, según la propuesta del docente.

Es interesante resaltar que tanto las decisiones (primer ítem anterior), como el diseño de las situaciones a-didácticas (segundo ítem) son particulares de cada docente. Por lo tanto, para cada conocimiento a ser enseñado, podrían gestarse distintas situaciones fundamentales.

En los siguientes ítems de esta sección quedarán explicitados otros conceptos clave de la TSD. Estos hacen centro en el juego de roles del docente y del alumno en relación con el medio.

1.2.2. Situaciones de acción, formulación y validación

La Teoría de Situaciones Didácticas distingue tres tipos de situaciones: *acción*, *formulación* y *validación*. Indicamos las características centrales de cada una de ellas.

Situación de acción. El alumno al actuar sobre un problema pone en diálogo sus concepciones y conocimientos implícitos con el medio. Explora el problema, moviliza conocimientos anteriores, los reorganiza para su interpretación.

Situación de formulación. El alumno elabora conjeturas en base a las acciones realizadas sobre el problema y necesita comunicarlas. Esto le exige formular explícitamente las ideas que derivan de la confrontación entre los conocimientos implícitos y el medio. Se desarrolla así un proceso de comunicación en el que un alumno funciona como emisor, emitiendo un mensaje explícito a otro (u otros) alumno para que lo comprenda y pueda con ese contenido actuar sobre el medio. De esta forma el alumno modifica, reelabora y crea un lenguaje.

Situación de validación. En esta instancia continúa el proceso de comunicación. Las conjeturas y aseveraciones de cada grupo se explicitan para el resto de los grupos, pero el objetivo es llegar a un acuerdo sobre si son verdaderas o falsas las conjeturas elaboradas autónomamente por lo que, en esta situación, los alumnos se ven obligados a aportar argumentaciones con el valor de pruebas, a confrontar con las de otros y finalmente a decidir en un proceso social y científico.

Recordamos que en la sección 1.1 sostuvimos que la TSD entiende que el alumno en su producción pueda de algún modo replicar la actividad científica. Consideramos que las situaciones mencionadas por Brousseau en este modelo teórico dan cuenta de este proceso. La situación de validación ocupa un lugar central en esta teoría tanto por su valor en sí misma –todo conocimiento producido debe ser validado– como por el lugar de nexo que es posible atribuirle entre la producción del alumno y la formulación del saber culturalmente aceptado que tiene a cargo el docente.

1.2.3. El contrato didáctico

El *contrato didáctico* regula las interacciones entre docente, alumno y saber dentro de una situación didáctica. No es un contrato pedagógico general, con sus reglas explícitas sobre las obligaciones recíprocas que tienen docentes y alumnos. La regulación se sostiene en algunas reglas explícitas pero primordialmente por lo que queda implícito.

En el aula, e inmersos en una situación didáctica, se comunican reglas de funcionamiento, se habilitan o deshabilitan procesos, formas de argumentar, de formular, de validar y esto puede darse a través de palabras, actitudes, gestos, etc. Este concepto lo podemos entender con más precisión, a partir de la elaboración que realiza Sadovsky (2005):

> Este juego sutil, muchas veces difícil de atrapar, en el que a raíz del trabajo en clase con respecto a cierto objeto matemático se negocian significados, se transmiten expectativas mutuas, se sugieren o se infieren modos de hacer, se comunican e interpretan (explícita e implícitamente) normas matemáticas es el contrato didáctico (p.11).

Así definido se hace necesario comprender que el contrato didáctico se constituye en el medio que el docente utiliza para poner en funcionamiento una situación didáctica.

Ahora bien, el contrato didáctico que habilita y regula la situación didáctica no funciona como un invariante. Muy por el contrario, el contrato didáctico durante el desarrollo de la situación didáctica pasará por rupturas y reelaboraciones de sus reglas. Unas y otras se producen en tanto los docentes y los alumnos avanzan hacia la situación a-didáctica y en ella. En este punto se halla la explicación de la imposibilidad de un contrato que explicite de antemano todas sus reglas.

Para imaginarnos este concepto evoquemos alguna clase en la que el desarrollo pierde armonía, los alumnos reclaman respuestas, el docente recorre los grupos del aula intentando hacerse cargo del sutil juego entre comunicar y no comunicar, entre sostener y desprender. De algún modo, el aula está agitada cuando no encuentra en las interacciones que emerja el contenido. Probablemente esto anticipe una ruptura del contrato previo a una reformulación del mismo.

El conocimiento que emerge de la situación a-didáctica será lo que resuelva la crisis. Las nuevas negociaciones producidas durante la situación a-didáctica proporcionan reglas explícitas e implícitas para un contrato que es otro pues depende del nuevo estado de conocimiento.

En este sentido y siguiendo a Brousseau (1994), sostenemos que un contrato totalmente explícito no resuelve ni sostiene el proceso de crisis. No es posible detallar de antemano las cláusulas de ruptura del contrato ni el proceso en el que éste pierde el equilibrio. Es un momento en que el alumno reclama capacitación que entiende no le fue dada para resolver el problema así como el docente espera que lo trabajado habilite al alumno para hacerlo. El aula con esta crisis se sostiene sólo ligada por un contrato implícito. El nuevo conocimiento resuelve la crisis e instala así un nuevo contrato.

1.2.4. Rol del docente

Si bien ya hemos establecido sintéticamente algunas de sus acciones, es importante que a los efectos del análisis más detallado abordemos su rol en distintos momentos y situaciones.

Su rol en el diseño

El docente es responsable de diseñar la situación didáctica, tanto de elegir el o los problemas para conformar el medio con el que va a interactuar el alumno como de establecer las condiciones para introducirlo en la secuencia.

Los problemas deben posibilitar la elaboración de estrategias variadas para su abordaje, deben diseñarse incluyendo variables que produzcan dificultades y desequilibrios para impulsar las formas de adaptación de sus conocimientos.

El maestro debe provocar en el alumno las adaptaciones deseadas, por una elección prudente de los problemas (Brousseau, 1994).

En el trabajo del diseño una vez elegido el problema es muy importante que realice el análisis a priori. Debe hipotetizar sobre las acciones de los alumnos, sobre cuáles pueden ser las restricciones que les presente el problema y analizar posibles estrategias de intervención ante ellas. En este sentido, el trabajo del docente se emparenta con el del investigador.

Su rol en el aula y los conceptos de devolución e institucionalización

Brousseau entiende que el docente debe crear en el aula una micro comunidad científica. El valor de esta puesta está dado en simular el trabajo del científico de modo que todas las interacciones y el desarrollo de la situación didáctica hagan emerger el conocimiento.

En este sentido es aclaratoria la siguiente precisión de Brousseau (1994):

> El profesor debe pues simular en su clase una micro sociedad científica, si quiere que los conocimientos sean los medios más económicos para plantear buenos problemas y para solucionar debates, si quiere que los lenguajes sean medios de dominar situaciones de formulación y que las demostraciones sean pruebas (p.4).

Entendemos también –y lo hemos expresado en párrafos anteriores– que la intervención docente supone que éste tome decisiones estratégicas. Si el alumno ha realizado conjeturas que lo perfilan hacia la solución y en el proceso encuentra dificultades, que no aluden al saber que encierra la situación didáctica, la intervención docente debe posibilitar subsanarlas para que no sea esa la resistencia que le devuelve el medio. Si, en cambio, las resistencias aluden al saber que encierra la situación didáctica, el docente necesita un ejercicio intelectual para abordar la complejidad de la intervención. En parte, el análisis a priori le dará una serie de hipótesis que al momento de intervenir en el aula puede ponerlas a prueba. Dentro de este contexto se hace necesario definir el concepto de *devolución*, que entendemos hace centro en esta cuestión. Según la bibliografía que se siga, se mencionan uno o dos tipos de devoluciones: la *devolución del problema* y la *devolución del saber*. Esta última vinculada con la institucionalización del conocimiento, para darle status de saber dentro de la matemática, noción a la que nos referimos más adelante. Aquí abordamos la *devolución del problema*.

En la Teoría de Situaciones Didácticas la devolución del problema es entendida como el proceso en el que se alcanzan las siguientes dos cuestiones:
a) Que el alumno se sienta único responsable de resolver el problema. No basta con presentar el problema, la intervención docente supone lograr esta actitud en él.
b) Si acepta esta responsabilidad, debe suceder que resuelva el problema libre de presupuestos didácticos. Este es el momento de ruptura del contrato didáctico y nueva negociación y es además el momento en que la situación didáctica entra en funcionamiento a-didáctico.

De aquí se desprende que lo que el docente *devuelve* al alumno es la responsabilidad sobre su producción.

Cabe aclarar que la devolución puede ocurrir en cualquiera de las situaciones de acción, formulación o validación.

Muchos malos entendidos han surgido en la interpretación de la intervención del docente en la situación a-didáctica, la confusión surge de pensar que el docente no debe intervenir para que los estudiantes puedan realizar su proceso de aprendizaje al transitar por esta situación. Entendiendo el término "a-didáctico" como ausencia de lo didáctico, tanto del docente como de la intencionalidad didáctica. Como hemos expuesto en secciones anteriores, no es la ausencia de lo didáctico lo que caracteriza estas situaciones sino la percepción que los alumnos tienen sobre ella. Sin embargo, los alumnos no evidencian la intención del docente de enseñar pero sí evidencian que se corrió de lugar el saber.

La *institucionalización del conocimiento* es la situación en la que el docente le adjudica una denominación al conocimiento que surge a partir de la producción de los alumnos. Esta denominación no es arbitraria sino que es la establecida por la comunidad matemática.

El docente durante las situaciones de acción, formulación y validación debe recabar la información que le permite en esta etapa recapitular los procesos en que se involucraron los alumnos, vincular sus producciones y finalmente sistematizarlas dándole el formato de un concepto culturalmente aceptado.

Es importante atender a que si las producciones de los alumnos no habilitan a establecer un concepto del cuerpo de saberes matemáticos no podrá incluirse en la institucionalización, aceptando que la producción deja un saber en vías de construcción para el alumno.

La institucionalización es la oportunidad de descontextualizar los saberes que en el funcionamiento de la situación didáctica, a-didáctica estuvieron vinculados al contexto de su producción. Sólo así el conocimiento producido adquiere el status de un saber matemático y podrá ser reutilizado en otros contextos.

Cabe remarcar que el docente tiene la difícil tarea de lograr que esta etapa sea un espacio de trabajo conjunto con los estudiantes, recuperando lo trabajado previamente. No debería verse como “una exposición del docente” sin participación de los alumnos o sin vínculo con la tarea previa.

1.2.5. Rol del alumno

Brousseau compara el rol del alumno con el del matemático y sostiene que su trabajo intelectual debe ser por momentos equiparable a la actividad científica.

El alumno, en sus interacciones con el medio, debe poder actuar, formular, argumentar, construyendo el lenguaje, las teorías y los modelos. Esta producción es en parte por el intercambio con sus pares, por su independencia intelectual respecto del docente.

En una clase planteada bajo esta teoría vemos al alumno en un rol activo. Pensemos en el alumno que se enfrenta al problema en forma individual o colectiva. Acciona sobre él explorando posibles caminos de resolución, comparando, descartando posibilidades e incluyendo otras. En este proceso el alumno ocupa un lugar en relación con el problema: lo acepta e intenta resolverlo, de algún modo se responsabiliza por su aprendizaje.

El alumno formula alguna explicación para la supuesta solución y elabora razones que argumenten sobre sus afirmaciones, pone a prueba su propuesta frente a sus compañeros, e intenta validarla. Las interacciones con el docente y con sus compañeros pueden llevarlo a reformular sus hipótesis iniciales, a descartarlas o fortalecerlas.

Esta descripción ilustra algunas características de la actividad del alumno cuando en sus producciones tiende a tomar la responsabilidad en el proceso de aprendizaje, siempre y cuando el docente propicie el funcionamiento de la situación a-didáctica.

1.3. Algunos aportes al concepto de validación

Como hemos visto en la sección anterior, uno de los conceptos importantes en la TSD es la noción de "validación". En situación de validación el estudiante debe manifestar las razones que justifican sus afirmaciones, con la intención de avalar sus ideas, estrategias y procesos de resolución y de esta forma convencer a sus pares. Se trata de dar cuenta de su validez en el ámbito social. Si bien el concepto de situación de validación es central en esta teoría, la noción de *validar un conocimiento matemático* podría excederlo. Otros autores toman la idea de *validar un conocimiento matemático*, encontrando que esta tarea, de la mano de un estudiante, tiene un rol relevante y de allí que su enseñanza cobre importancia. Expresiones como validación o validación matemática se agregan a los elementos teóricos de esta línea y requieren delimitación o definición. Al respecto, muchos autores toman esta noción sin definirla, como una noción primitiva. Inclusive en varios casos se hace referencia a situaciones, procesos y herramientas de validación que varían según el autor y el contexto.

En el desarrollo de algunas investigaciones realizadas en la Universidad Nacional de General Sarmiento, nos hemos dedicado al estudio del proceso de aprendizaje de la validación en Matemática. En un primer acercamiento al concepto de validación tomamos la siguiente definición: *la validación de un conocimiento matemático* es cualquier proceso relativo al sujeto en el que pone de manifiesto las herramientas que necesita para convencerse de que un enunciado es verdadero o un procedimiento es correcto y le permite sostenerlo en un ámbito social.

En el transcurso de nuestros estudios, nos hemos encontrado con algunas insuficiencias en esta definición surgidas a raíz de identificar algunos ejemplos que responden a esa definición, pero que a nuestro criterio preferiríamos que la definición que adoptáramos no les diera cabida.

Analicemos tres situaciones de este tipo.

<u>Caso 1:</u> se le pide a un alumno que diga cuál es el vértice de la parábola que se obtiene al graficar $f(x) = 2(x - 1)^2 + 8$. Un alumno determina correctamente, el punto (1; 8). Cuando el docente le pregunta cómo lo obtuvo, respondió que "*utilizaba la regla de los signos*". Se le preguntó a qué se refería "*con la regla de los signos*" y explicó que al mirar el paréntesis (x – 1) él sabía que la abscisa del vértice sería 1 o –1. Sólo tenía que decidir el signo. Para ello explicó que multiplicaba al número –1 de la expresión por el menos (resaltado en negrita) que precede a x_v en la fórmula general, $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ para obtener el signo.

Así concluye que x_v es 1. Análogamente, multiplicaba al 8 de esta expresión por el *más* que precede a y_v en la fórmula, obteniendo que y_v es 8. El método con el que decidió el signo de las coordenadas "siempre funciona" aunque no tiene un sustento matemáticamente correcto.

En este ejemplo observamos que el estudiante presenta un procedimiento efectivo, que puede ser reutilizado, y que lo deriva en un resultado correcto. Si se analiza su producción escrita se destaca cierta destreza en la manipulación simbólica, pero ello no implica que pueda hacer explícitas las razones que le permiten asegurar la validez de su respuesta. En otro caso, el estudiante puede hacer explícitas las razones que aseguran la validez de su respuesta pero el uso de los símbolos es incorrecto desde el punto de vista matemático. Veamos un ejemplo.

Caso 2: se le pide "*Identificar qué condiciones debe cumplir una función lineal para que su gráfico no interseque al primer cuadrante*". El alumno responde por escrito, "*y = - xm - b*" donde se puede suponer que quiere expresar que la pendiente y la ordenada deben ser negativas para que la recta no interseque al primer cuadrante. Sin embargo, el uso de los símbolos no es correcto. No basta indicar "*–m*" y "*–b*" para representar números negativos. Le faltó agregar en su escrito que *m* y *b* deben ser mayores que cero.

En otro caso, el alumno produce un procedimiento que es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social, puede convencer a otros estudiantes de la validez de sus afirmaciones, pero éstas no son matemáticamente correctas. Como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Caso 3: Se les pide a los estudiantes que decidan si *"0,9999… < 1"*, justificando adecuadamente. Un alumno responde: "*es menor que 1 pues la parte entera de 0,999… es cero, que es menor que la parte entera de 1, que es uno*". Argumentos de este tipo, aunque incorrectos para el caso, pueden resultar contundentes en la clase y un estudiante podría convencer a sus compañeros de su validez.

Así surge la discusión sobre qué debemos incluir y qué no dentro de nuestra definición. ¿Debería ser aceptado como "válido" un conocimiento, producido por el estudiante, que "funciona" pero no es matemáticamente correcto? Lo simbólico pareciera tener un rol central, ¿debiera formar parte de la definición? Si lo escrito es correcto matemáticamente, ¿basta para asegurarse que el estudiante validó el conocimiento?, etc.

De los ejemplos desarrollados podemos concluir que la noción de validación anteriormente presentada se muestra insuficiente en los siguientes aspectos: por un lado, no deja en claro en qué registros (oral, escrito, simbólico-matemático, etc.) pueden manifestarse las herramientas que la definición menciona. Por otro lado, no se vislumbra si lo "válido" es relativo al sujeto que aprende o debería relacionarse con lo establecido por la Matemática como institución.

Frente a estos inconvenientes consideramos aspectos que, a nuestro entender, deberían estar presentes en el proceso de aprendizaje de la validación matemática y se tendrían en cuenta en una futura definición. Enunciamos aquí dichos aspectos:

1. Las acciones que realiza el sujeto implicadas en el proceso de validación, para ver cómo ellas se manifiestan en el aprendizaje de diferentes contenidos y cuán pertinentes son para validar.

En el trabajo de Barreiro, Falsetti, Formica, Marino y Mellincovsky (2009) se han identificado las siguientes acciones:

A1 Hacer ensayos o intentos.	*A2* Usar fórmulas, definiciones o procedimientos desconectados de la actividad a resolver.
A3 Usar fórmulas, definiciones o procedimientos conectados a la actividad a resolver.	*A4* Generalizar inductivamente (observar alguna regularidad).
A5 Enunciar ambigüedades.	*A6* Ejemplificar.
A7 Anticipar, predecir.	*A8* Elegir entre varias opciones dadas justificando su elección.
A9 Encontrar analogías o similitudes.	*A10* Describir (mostrar pasos y procedimientos).
A11 Ejemplificar mostrando regularidades.	*A12* Imitar (reproducir una estructura de razonamiento o procedimiento).
A13 Explicar (dar razones y relaciones).	*A14* Comparar (establecer semejanzas y diferencias).
A15 Justificar por la "autoridad" (libro, docente, par experto).	*A16* Reconocer contradicciones.
A17 Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen.	*A18* Enunciar la negación de una regla, propiedad, etc.

A19 Identificar condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas.	*A20* Derivar conclusiones con premisas dadas.
A21 Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y derivar una conclusión).	*A22* Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez).
A23 Apelar a un registro semiótico para validar lo producido en otro (ejemplo: mostrar las propiedades de un gráfico para validar una propiedad algebraica).	*A24* Exhibir un "formato matemático" para ser adaptado a una producción personal.

2. Lo que comunica el sujeto, ya sea mediante el lenguaje simbólico, el natural o mediante gráficos, tablas, esquemas, etc. Cuando se valida una producción es necesario mostrar que se cumple con ciertas reglas y especificaciones o se responde a un razonamiento lógico. Para ello es necesario usar correctamente el lenguaje. En la mayoría de los casos, el aprendizaje de la validación y del uso del lenguaje se hace en simultáneo con lo cual se dan casos en los que el alumno presenta una "buena" escritura (uso adecuado de símbolos, de gráficos, etc.), pero no puede dar una explicación "oral" correcta de aquello que ha escrito, lo que pone en duda "el saber" expresado mediante esos símbolos. Lo contrario, también frecuente, es el caso de aquellos alumnos que muestran con su explicación oral cierta claridad y corrección matemática, pero no concluyen en una escritura correcta.

3. El grado de proximidad con lo matemáticamente correcto, que es un punto fundamental, pues en su proceso el estudiante debe ir aproximándose a un conocimiento matemáticamente válido que es aquel que la *Institución Matemática*, tanto científica como escolar, considera correcto dado que puede ser explicado por alguna teoría.

A partir de todo lo dicho, hemos adoptado la siguiente definición de validación:

> Entendemos la validación de un conocimiento matemático en situación de aprendizaje como el resultado de un proceso del sujeto por el cual éste es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un proce-

dimiento o razonamientos son o no correctos o un razonamiento es o no válido. Al manifestar sus razones debe hacer explícitos los sentidos de los objetos matemáticos que manipula y estos sentidos deben corresponderse con los significados aceptados por la Institución Matemática (Falsetti, Marino y Rodríguez, 2004).

1.4 Análisis de ejemplos en el marco de la TSD

En esta sección mostramos las primeras actividades de una secuencia diseñada para trabajar el por qué de la validez del funcionamiento de la regla de tres simple que puede llevarse a cabo en el marco de una clase pensada bajo los lineamientos de la TSD. Dichas actividades son analizadas a la luz de los elementos teóricos que presentamos en la sección anterior.

Actividad 1: *Se obtuvo la información de la posición P y el instante t en que un automóvil atraviesa diferentes mojones en la ruta 2. Los datos relevados se muestran en la tabla:*

t (tiempo)	*P (posición)*
0 h	*0 km*
2 h	*160 km*
4 h	*320 km*

a) *Estimar la posición en la que se encontraría el auto a las 3 h.*

b) *Explicar qué procedimiento utilizó y por qué lo hizo así. Si lo considera necesario, agregar algún dato para que otra persona que resuelve el problema lo interprete como usted.*

Actividad 2: *La población argentina en el año 1980 era de aproximadamente 25 millones (25.10^6) de habitantes. En 1990 había crecido hasta alcanzar 30 millones (30.10^6), es decir en 10 años la población aumentó en 5 millones de personas.*

a) *Estimar la población argentina en el 2015.*

b) *De acuerdo con el razonamiento anterior, estimar la población que hubo en 1930.*

c) *¿A qué se debe el resultado del ítem b)? Relacionar la respuesta con el* *supuesto considerado en el ítem a).*

Las primeras dos actividades de una secuencia más extensa que aquí no incluimos, buscan acercar a los alumnos a una explicación de las condiciones bajo las cuales es correcto utilizar la regla de tres simple.

Análisis de las actividades y de su puesta en práctica

En la primera consigna de la actividad 1 se dan, por medio de tabla, tres datos de posición de un móvil en diferentes momentos. Los datos “invitan” a pensar que se mantiene una relación de proporcionalidad directa aunque en la consigna no se indica que la velocidad es constante. Éste es un supuesto que se prevé que el estudiante utilice sin percatarse de que no tiene el dato y que sería necesario para que el uso de la regla de tres sea válido. De todos modos, para inducirlo a dicho análisis y para que pueda definir la condición bajo la cual hay proporcionalidad directa, se plantea el ítem b y se acompaña con la actividad 2 en donde será evidente que la aplicación de la regla de tres sin estar bajo ciertas condiciones, no es correcta.

Creemos que este tipo de actividad puede ser propicia para generar una *situación didáctica* que habilite un *funcionamiento a-didáctico* en el sentido planteado por la TSD, donde emerja como contenido las condiciones que deben darse para que el uso de la regla de tres sea correcto. El alumno al momento de enfrentarse al problema va a realizar diferentes acciones que lo orienten a comprender el enunciado y lo acerque a una propuesta de resolución. En esta primera instancia explora el problema, puede realizar una regla de tres simple para calcular la posición del auto a las 3 h. Podrá buscar una regularidad, intentando ver qué distancia recorrerá el móvil en una hora, es decir, reducir el problema al paso por la unidad y a partir de ahí ir calculando la posición del auto para diferentes valores del tiempo. Es posible que pueda identificar que hay una constante en el problema, la velocidad, que es de 80 km/h, o realizar un gráfico con los valores dados en la tabla. Es probable que el alumno no reflexione sobre el supuesto que está usando en sus planteos –que la velocidad es constante–, ya que sólo actúa sobre el problema. Este trabajo corresponde a la etapa denominada *situación de acción.* El proceso hasta aquí descripto da cuenta de la puesta en diálogo entre las concepciones implícitas en el medio, la exploración sobre el problema y la reorganización de dichas concepciones para comenzar a plantear alguna estrategia de resolución.

El segundo ítem del problema invita al alumno a reflexionar sobre lo actuado antes y a que intente justificar los procedimientos realizados. Esto se evidencia en el enunciado: "*Explicar qué procedimiento utilizó y por qué lo hizo así*". Se espera que pueda expresar en forma verbal o escrita las conjeturas y los procedimientos realizados anteriormente, comunicándolos a sus compañeros en forma explícita. Podemos establecer que en este momento los alumnos están transitando por la *situación de formulación.*

En una instancia siguiente, los alumnos deberán elaborar dentro de su grupo de trabajo o frente a la clase total las razones que justifican lo formulado anteriormente. Dichas razones deberán ser explicitadas y sometidas a la valoración de la clase, podrán ser reformuladas o modificadas con el aporte del resto de los grupos, dando lugar a la *situación de validación.*

Utilizando la tipología de Barreiro *et al* (2009) se espera que el problema habilite a llevar a cabo las siguientes *acciones de validación*: darle valores intermedios a los de la tabla: *hacer ensayos e intentos (acción A1)*; resolver usando la regla de tres sin preguntarse por qué funciona: usar *fórmulas, definiciones o procedimientos conectados a la actividad a resolver (acción A3)*; responder que la regla de tres funciona porque en los cursos anteriores le enseñaron que puede utilizarla: *Justificar por la "autoridad", (acción A15).* Pueden encontrar que la variable independiente se multiplica por un número constante, si asumen que la velocidad no varía: *Identificar alguna regularidad a partir de una cierta cantidad de casos particulares, (acción A4)*; entre otras.

Estas actividades fueron llevadas a cabo en el marco de investigaciones realizadas en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS). A continuación transcribimos, a modo ilustrativo, un fragmento extraído de Barreiro *et al* (2009), de una clase en la que se trabaja con la actividad 1. Creemos que este apartado deja ver cómo las anticipaciones realizadas en el análisis recién presentado pueden encontrarse en el aula y nos resulta interesante mostrar qué hace el docente en estas situaciones, cuál es su función, cómo interviene y en qué momentos.

Al abordar la actividad los alumnos operan utilizando la disposición del esquema ya conocido de la regla de tres, en el que la unidad permite obtener la constante buscando su correspondiente. Para responder que a las 3 h el auto estará a 240 km se asume la velocidad constante y que, entonces, *por cada hora se recorren 80 km*, dato no explicitado en el enunciado. Se evidencia también un intento de poner en práctica lo aprendido y responder a lo que se cree que son las "exigencias" en las clases de Matemática. Si bien la forma en que los estudiantes encaran los ejercicios propuestos es mediante tanteo numérico, podrían plantear símbolos, fórmulas o gráficos. Ilustramos el trabajo en el aula con un fragmento de clase. La presencia del observador se debe a la investigación y no está vinculado con nada propio de la TSD.

- Alumno 1 (Al 1): Lo que tenemos que hallar es la posición, función de p que sería la posición, tenés un dato porque en una hora está recorriendo 80 km, en 2 horas 160 y en 3 horas 160 + 80, 240

Entonces la fórmula sería… (*Escribe:* $f(P) = 3.P$ / $f(0) = 3.80$)

- Alumno 2 (Al 2): Al poner P como 80, ahí estarías pensando en P fijo, en 80.

- Al 1: claro, porque vos ya ves una tendencia ahí… Tendríamos que poner primero f o sea P (escribe: f (0) = 3.0, f (1) = 80, f (2) = 2.80) La fórmula sería f entre paréntesis que sería P, sería P por 80 (*escribe* f (P) = P.80)

Se acerca el profesor…

- Al 2: Nosotros llegamos a esto, intentamos esta fórmula.

- Al 1: no sé si lo estoy haciendo bien (*explica el proceso de la misma forma que lo hizo con los compañeros*).

- Profesor: No les puedo decir si es correcta la fórmula. Ustedes tienen que buscar formas de defender lo que dicen, la idea es que el grupo esté de acuerdo, o sea que lo que pretenden esté consolidado en el grupo. Fíjense que el Al 1 acaba de dar toda una explicación, a ver qué dice el resto de los compañeros…

- Observador: Sí, voy a agregar para que piensen algo para la defensa de la que hablaba el profesor y es esto: […] Entonces pensá si no hace falta algún dato […] para que alguien que quiere hacer el problema ([y viene de afuera]) refuerce la forma en que ustedes lo encararon.

(*Piensan, discuten en voz baja*)

- Al 2: ¡Ah!, la velocidad es 80 km por hora.

En el fragmento precedente destacamos algunas cuestiones sobre las intervenciones producidas. La intervención del observador es para invitarlos a retomar el tema y para que emerja el supuesto con el cual han operado y que les resulta hasta ahora "transparente" y de aplicación inmediata. El alumno Al 2 explicita ese supuesto ("*Ah, la velocidad es 80 km por hora*") aunque no lo hace en función de las relaciones de las variables o características del fenómeno.

Mientras que la intervención del profesor les devuelve (*devolución del problema*) la responsabilidad sobre el problema, "*No les puedo decir si es correcta la fórmula. Ustedes tienen que buscar formas de defender lo que dicen…*" invitando al resto del grupo a debatir sobre la afirmación de un compañero "*qué dice el resto de los compañeros…*" Creemos que este tipo de intervenciones favorece el aprendizaje de la validación, ya que fortalece el debate en el ámbito social y corren al docente del lugar de poseedor del saber, del único que puede decidir cuándo un procedimiento es o no válido. Este ejemplo ilustra el tipo de intervenciones docentes mencionadas en el apartado 1.2.4.

Respecto de la actividad 2, los valores numéricos están puestos precisamente para que el hecho de utilizar la regla de tres produzca por resultado un absurdo: población 0 en 1930. En la estimación a futuro, año 2015, el resultado obtenido podría no generarles inquietudes ni cuestionamientos por considerarlo *posible*. No así el caso de cero habitantes. Este hecho suele ser un determinante clave para la búsqueda de errores. La primera intención es buscar errores en las cuentas, al no hallarlos la discusión sigue hasta que se deberá llegar a cuestionar qué supuestos subyacen a la aplicación de la regla de tres y si éstos, en el caso dado, serían apropiados de sostenerse.

Mencionamos a continuación un fragmento de una clase en la que se implementó esta actividad para reflexionar nuevamente sobre la tarea docente.

> Elías: para estimar qué población había en 1930, cada 10 años bajás 5… bajás de 5 en 5… En 1930 no había nadie.
>
> Elías: no, en 1930 hay 15 millones, hay que restar 6 veces 5.
>
> Lilian: me confunde.
>
> Viviana: ¿Por qué 15 millones? A mí me da 0.
>
> Elías: hagamos la tabla y sale. Cada 10 años le restás 5 millones.

Viviana: la población me da cero, no 15 millones. Si hacés 5 x 5 = 25, te da lo mismo que en 1980, lo restás y da cero.

Elías: ah! primero dije cero y después 15, me confundí.

Llega el profesor,

Elías: profesor, no puede ser… porque nos da que en 1930 la población es 0, pero no puede ser porque en 1930 había gente…, por lo que dice acá, no queda nadie. Está mal ¿no?

- Profesor: ¿y entonces?

- Elías: está mal.

- Profesor: ¿qué cosa está mal?

- Elías: siempre sumar o restar 5 millones. No siempre va de 5 en 5. No fue siempre lo mismo.

- Viviana: como que no hay una continuidad en los 5. No se mantiene constante el crecimiento de 5 en 5, por migraciones, etc.…

- Elías: claro, porque por ahí en un determinado momento se estancó y en otro momento creció de golpe.

- Elías: faltan datos para hacerlo bien…

- Profesor: armen una respuesta donde cuenten esto, a qué valor llegaron siguiendo el razonamiento que usaron y expliquen algo sobre ese resultado.

- Lorena: para mí sí se puede calcular.

- Profesor *(hablándole a Elías):* tu compañera dice que sí se puede calcular, que no es lo que vos decís. Busquen un acuerdo, si llegan, y regístrenlo. Si no llegan, registren las explicaciones de ambos.

Aquí se ve al docente intentando que los estudiantes avancen en su aprendizaje de la validación, exigiendo precisión en las respuestas y en las explicaciones y corriéndose del lugar del poseedor del saber. Abre un espacio para distintas posibilidades, promueve la búsqueda de acuerdos, discusión, etc. El rol del docente en una clase enmarcada bajo la TSD es crucial, y por eso debería planificarse previamente.

A modo de ejemplo mencionamos algunas cuestiones que el docente puede anticipar y tener en cuenta durante el trabajo en grupos de los estudiantes y durante la institucionalización. El docente al observar el trabajo de los alumnos puede formular preguntas del tipo: ¿por qué se pide "estimar" y no "calcular exactamente"?, ¿es una cuestión de lenguaje o el término estaría diciéndonos algo?, ¿se podría saber con exactitud la posición del auto a las 3 horas de viaje?, o ¿se podría saber exactamente la población en el 2015?, ¿por qué? Será útil que pregunte a los grupos ¿qué supuestos adicionales –en el contexto de cada problema– se están considerando que les permiten responder las preguntas?

Una actividad interesante para agregar luego de las dos anteriores es la siguiente.

Actividad 3*: Establecer en consenso dentro del grupo respecto a qué condiciones se deben cumplir para que se pueda usar la regla de tres. Registrar por escrito las condiciones establecidas. Si hay más de una opción, incluirlas todas indicando ventajas y desventajas que se encuentran para cada una de ellas.*

Esto trae a escena situaciones de formulación y validación por las que los estudiantes deberían transitar y anticipa un tema de discusión cuando el docente realice una puesta en común, antesala de la institucionalización que eventualmente podría hacer luego del trabajo. Es una actividad que de manera explícita hace que el alumno deba reflexionar prontamente sobre sus acciones y sobre la necesidad de argumentar respecto de ellas. Posiciona con precisión al docente sobre el lugar que debe habilitarle al alumno en cuanto a producir y justificar. Simultáneamente promueve en el docente la lectura de los conceptos, de los procesos aceptados y rechazados para armar la institucionalización.

1.5. Reflexiones finales

En lo desarrollado en este capítulo, hemos intentado advertir que la aplicación de la TSD no es simple ni inmediata. Es necesario que el docente que quiera sostener la enseñanza desde esta línea pueda entre otras tareas:

1) Elaborar hipótesis previas sobre las situaciones, realizar una adecuada elección de los problemas, anticipar las acciones, formulaciones y procesos de validación que pueden intentar los alumnos y pensar posibles estrategias de intervención.

2) Hacer centro en la devolución del problema al alumno para posibilitar el funcionamiento a-didáctico y por lo tanto la posibilidad de que emerja el conocimiento, depositando en el alumno la responsabilidad sobre su aprendizaje.

3) Pensar la validación como situación que necesita de procesos de construcción para ser aprendida por el alumno, ya que esta actividad no se manifiesta de forma espontánea, por lo tanto, debe ser movilizada de distintas formas en cada situación didáctica – a-didáctica. Para generar condiciones propicias que favorezcan el aprendizaje en validación hay que intervenir, la pregunta es de qué manera. Una de las formas que hemos encontrado es diseñar actividades que presenten un alto potencial en validación. Dicho de otro modo, las actividades deben: favorecer la aparición de variadas acciones de validación, propiciar la comunicación de una producción propia, ya sea en lenguaje simbólico o coloquial, cotejar la asignación de significados que los estudiantes proponen a escritos en los que utilicen símbolos y beneficiar el control sobre la proximidad a lo matemáticamente correcto.

Hemos pensado que un recorrido por las nociones de situación didáctica, de intervención docente y de devolución como estrategia para posibilitar un funcionamiento a-didáctico pueden construir un primer acercamiento a *hacer Matemática* en el sentido en que lo manifiesta Brousseau y que hemos tomado en este escrito. Sin embargo recordamos que hemos presentado un recorte de esta teoría y que la misma cuenta con otros elementos teóricos que permiten enriquecer aún más la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

1.6. Referencias bibliográficas

Barreiro, P.; Carnelli, G.; Falsetti, M.; Formica, A. y Rodríguez, M. (2007). La observación en la clase de matemática. *Memorias del 9° Simposio de Educación Matemática*, Chivilcoy.

Barreiro, P.; Falsetti, M.; Formica, A.; Marino, T. y Mellincovsky, D. (2009). Formulación de algunas categorías de análisis cualitativo para estudiar la validación en Matemática a partir de protocolos de clase. *Epsilon (72),* 39-60.

Berté, A. (1999). *Matemática dinámica. Temas y problemas EGB*. Buenos Aires: A-Z Editora.

Brousseau, G. (1994). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemática.* Córdoba: Serie B. Trabajos de Matemática, FAMAF, UNC.

Carnelli, G. (2005). *Una ingeniería didáctica para la función cuadrática*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Nacional de San Martín. Argentina.

Carnelli, G.; Falsetti, M.; González, V. y Rodríguez, M. (2005). Una ingeniería didáctica para el estudio de validación matemática. *Memorias del 7° Simposio de Educación Matemática*, Chivilcoy.

Falsetti, M.; Marino T. y Rodríguez, M. (2004). Validación en matemática en situación de aprendizaje. *Memorias del 6° Simposio de Educación Matemática*, Chivilcoy.

Falsetti, M. y Rodríguez, M. (2005). Interacciones y aprendizaje en matemática preuniversitaria: ¿qué perciben los alumnos? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(3)*, 319-338.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las Matemáticas. En: C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas, aportes y reflexiones* (pp.39-50), Buenos Aires: Editorial Paidós.

Panizza, M. (2005). Conceptos Básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Extraído el 10 de febrero de 2011 de http://.crecerysonreir.org.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En: H. Alagia, A. Bressan y P. Sadovsky (Eds.) *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (pp.13-65), Buenos Aires: Libros del Zorzal.

2
Ingeniería Didáctica

Gustavo Carnelli y Tamara Marino

2.1. Introducción

La Teoría de Situaciones Didácticas, de Guy Brousseau, es uno de los desarrollos teóricos más trascendentes de la corriente en Didáctica de la Matemática conocida como Escuela Francesa, y requirió de metodologías específicas, tanto para la enseñanza como para la investigación en didáctica. Así surge la Ingeniería Didáctica, con este doble sentido.

En este capítulo realizamos un recorrido por esta construcción teórica, abarcando su caracterización, la descripción del proceso propiamente dicho, así como también desarrollamos los cuestionamientos que recibe. Luego, presentamos una síntesis de una Ingeniería Didáctica que fue diseñada y aplicada en un curso de ingreso de una universidad nacional.

La fuerte dependencia de la Ingeniería Didáctica con la Teoría de Situaciones Didácticas hace que resulte imprescindible un conocimiento previo de ella. En particular, a lo largo del capítulo haremos referencia a nociones específicas de dicha teoría tales como *devolución del problema e institucionalización*, entre otras, y que fueron desarrolladas en el primer capítulo de este libro.

2.2. La Ingeniería Didáctica: una aproximación teórica

2.2.1. Surgimiento y características

La Ingeniería Didáctica fue desarrollada por Michèle Artigue en los inicios de los años 80 y surge como respuesta a dos problemas: cómo atender a la complejidad de la clase en las metodologías de investigación y estudiar la relación entre la investigación y la acción sobre el sistema de enseñanza (Artigue, 2002). Ambas cuestiones están fuertemente ligadas a la Teoría de Situaciones, que impuso la necesidad de una metodología de enseñanza y de investigación distintas de las tradicionales.

Esta metodología se apoya en la toma de decisiones por parte del investigador, en la etapa de diseño de la ingeniería, con la intención de controlar los distintos componentes del proceso de implementación de la misma. Busca un sistema experimental basado en realizaciones didácticas en la clase cuya validación surge de la comparación entre el análisis a priori y a posteriori. Esta particularidad sobre su validación de carácter interno es un rasgo esencial que la distingue del resto de las metodologías. Artigue (1995) la define como:

> [una] forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico… (Es) un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (pp.33-36).

Régine Douady (1995), otra referente principal en el tema, sostiene que:

> la elaboración de un problema es un paso de la ingeniería didáctica. En este contexto, el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase, concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. (...) es a la vez un <u>producto</u>, resultante de un análisis a priori y un <u>proceso</u> en el transcurso del cual el profesor ejecuta el proceso adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase. (...) designa, de igual forma, una metodología de investigación particularmente interesante por tener en cuenta la complejidad de la clase (p.61).

La Ingeniería Didáctica tiene su apogeo en los años 80. Durante esa década se multiplican los trabajos en Didáctica de la Matemática que la utilizan como metodología y tienen como ideas directrices, en su mayoría, la búsqueda de situaciones específicas de los conocimientos matemáticos que constituyan situaciones fundamentales (en el sentido de la Teoría de Situaciones) y la organización del trabajo docente en lo referido a la devolución y a la institucionalización, apuntando al sentido del trabajo matemático y a la relación entre los conocimientos construidos en un contexto y los saberes matemáticos institucionales.

Dentro de las numerosas producciones bajo esta metodología, dos propuestas son consideradas clásicas: la referida a la enseñanza de los números decimales, de Guy Brousseau, y la de la ampliación de los campos numéricos, de Régine Douady. Otra obra reconocida, más cercana en el tiempo, es la realizada por Rosa María Farfán para la función exponencial (De Faria Campos, 2006).

También vale destacar que la Ingeniería Didáctica, al igual que otras construcciones teóricas de la Escuela Francesa, se ha utilizado fuera de la Matemática, como por ejemplo, en informática y en actividad física y deportiva.

2.2.2. Descripción del proceso

La Ingeniería Didáctica comprende cuatro fases, que resumimos en el siguiente cuadro:

Fase 1: Análisis preliminares

Regidos por los objetivos de la investigación, son los siguientes:

- Análisis epistemológicos de los contenidos de los que se ocupará la enseñanza. Se considera el análisis del devenir, funcionamiento y formulaciones de los contenidos a enseñar. Tiene como objetivo que el didacta "tome distancia" del objeto de enseñanza. Provee de historicidad al concepto matemático por enseñar y a las nociones protomatemáticas y metamatemáticas, atacando ficciones tales como la universalidad temporal y espacial de los conceptos, el rigor perfecto y eterno de la Matemática y la idea de copia simplificada y fiel del objeto de enseñanza respecto del objeto científico. Permite comprender los patrones de evolución del saber y asumir la distancia que separa a ese saber del saber a enseñar (Farfán, 1997).

- Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- Análisis de las concepciones de los estudiantes y de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- Análisis del campo de restricciones donde se va a efectuar la realización didáctica.

Como podemos ver, estos análisis presentan tres dimensiones: la *epistemológica*, asociada a las características que tiene el saber en cuestión; la *cognitiva*, asociada a las particularidades cognitivas de la población a la que va dirigida la enseñanza y la *didáctica*, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Fase 2: Concepción y análisis a priori de las situaciones

En esta etapa se incluye la elección y actuación sobre las variables de comando –las no fijadas por las restricciones– que el investigador supone pertinentes. Éstas pueden ser globales (o macro-didácticas), que son las relacionadas con la organización de la situación, o específicas (o micro-didácticas), que son las relacionadas con la organización de una secuencia o de una fase.

El análisis a priori es concebido como un *análisis de significado*. La Teoría de Situaciones funciona como control de las relaciones entre significado y situaciones. En esta fase se pretende determinar cómo las secuencias preestablecidas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes, por lo que este análisis se basa en la formulación de hipótesis. El mecanismo de validación interna, en consecuencia, se pone en funcionamiento ya desde esta etapa.

Aspectos tanto descriptivos como predictivos conforman este análisis: se describen las variables locales y las características de la situación didáctica que se desprenden de ellas; se analiza qué está en juego en cuanto a la acción, selección, decisión, control y validación para el estudiante cuando se enfrente con la situación; se prevén los comportamientos posibles y se demuestra cómo el análisis controla el significado y se asegura que los comportamientos esperados sean resultados de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

De todo esto se desprende que, en el análisis a priori, el papel del profesor en la situación de enseñanza cobra protagonismo sólo en la devolución del problema y en la institucionalización.

Fase 3: Experimentación

Es el momento en que se implementan en el aula las secuencias diseñadas.

Fase 4: Análisis a posteriori y validación

Se basa en el análisis de las observaciones realizadas respecto de la secuencia de enseñanza y las producciones de los estudiantes durante la experimentación. Puede incluir productos provenientes de otras metodologías como cuestionarios, tests, entrevistas individuales o grupales. Funciona de contraste con el análisis a priori, desplegándose aquí en toda su dimensión el carácter interno de validación propio de la metodología.

Esta validación tiene como condición previa que las situaciones relativas a contenidos, implementación, rol del profesor, etc. hayan sido controladas desde el análisis a priori.

2.2.3. Cuestionamientos

Las dificultades de realización de las líneas directrices de la metodología cuando se trabaja en ambientes didácticos muy restringidos, llevan a la Ingeniería Didáctica a una etapa de cuestionamientos a partir de fines de los años 80 (Artigue, 2002).

Algunas de estas controversias tienen como ejes a la existencia de situaciones fundamentales para todos los conocimientos y al papel del docente. Dorier (1996) analiza diversas investigaciones que cuestionan la existencia de una situación fundamental sobre la noción de espacio vectorial y sobre la formalización del concepto de límite, poniendo así en tela de juicio el postulado central de la Teoría de Situaciones. En lo que se refiere al rol del docente en la ingeniería, quizás algo relegado y limitado a la devolución e institucionalización en el análisis a priori, el avance en las investigaciones ha reconocido la necesidad de considerar al profesor como un actor más relevante de la situación didáctica, tan imprevisible en su comportamiento como los estudiantes (Artigue, 2002).

Otra crítica que reciben los trabajos de ingeniería publicados es la marcada atención que se observa en el armado del trabajo del primer encuentro y en la exploración de técnicas. Parecería que éste es el momento decisivo de la enseñanza y que el trabajo de la técnica y la evaluación no ocasionan problemas mayores. Es claro que estos dos aspectos no son triviales y que mostrarían un desequilibrio de esas ingenierías.

En su recorrido por los programas de investigación en Didáctica de la Matemática, Font (2002) entiende que esta metodología es de carácter positivista "*ya que suponen que los fenómenos didácticos se pueden explicar de manera causal y que las causas fundamentalmente son de tipo matemático*" (p.147).

2.3. Una Ingeniería Didáctica para la función cuadrática

Situados en el ámbito correspondiente al ingreso a los estudios universitarios, presentamos a continuación algunos elementos de la Ingeniería Didáctica diseñada y aplicada en un curso de la asignatura Matemática del ingreso a la Universidad Nacional de General Sarmiento en el año 2005 (Carnelli, 2005).

En esta presentación focalizamos el análisis en la primera actividad de dicha ingeniería. En un anexo, al final del presente capítulo, presentamos el resto de las consignas para que el lector tenga una mirada completa del diseño de la secuencia didáctica para la enseñanza del tema "Función Cuadrática".

2.3.1. Análisis preliminares

Mostramos aquí una síntesis de los resultados de los análisis realizados en esta fase. Dichos análisis refieren a los aspectos epistemológico y didáctico del tema a enseñar y a las características cognitivas de la población a la cual se dirige la enseñanza:

Análisis Epistemológico
Evolución heterogénea de las nociones en lo temporal, lugar y producciones obtenidas.
Dificultades con las soluciones de las ecuaciones cuadráticas en cada campo numérico.
Dificultad en el planteo de literales para los coeficientes de las ecuaciones cuadráticas.
Análisis Didáctico
Repaso completo de lo estudiado en secundaria.
Enfoque orientado al estudio de funciones.
Presentación formal del tema.
Centrado en el desarrollo de destrezas para la resolución de "ejercicios tipo".
Dominio del registro algebraico y, en menor medida, del gráfico.
Modelización como apéndice del tema.
Situaciones de consolidación y, en menor medida, de aplicación.
Imprecisión acerca de las condiciones mínimas con las que trazar una parábola.
Heterogeneidad en cuanto a la validación de los resultados relevantes.
No aparece el estudio de la parábola como cónica.
Términos específicos del tema a veces presentados, a veces sustituidos por expresiones simbólicas o a veces ausentes.
Análisis Cognitivo
Relación previa con la matemática centrada en lo algorítmico.
Sensación de imposibilidad, falta de confianza.
Examen diagnóstico (general): marcado déficit en competencias lingüísticas elementales, validación de resultados limitado al plano de la conjetura.
Examen diagnóstico (del curso): importantes dificultades en la operatoria combinada y en la resolución de ecuaciones lineales con enteros y racionales.
Evaluación de proceso: entrega periódica de tareas domiciliarias con resultados discretos en cuanto al ritmo de entrega.
Resultados del primer parcial: 40% de aprobados.
Alto índice de deserción en la primera parte del curso.
Trabajo grupal aplicado en forma asistemática y bajo consignas simples.
Conclusiones de los Análisis Preliminares
Abordaje del tema a través de una situación a-didáctica de acción, formulación, validación e institucionalización, con contexto concreto sin involucrar parámetros.
Selección de la terminología específica del tema.
No abordar el registro geométrico.
Evitar tareas domiciliarias que condicionen el desarrollo de la clase siguiente.
Consideración sobre la experiencia previa del curso en el trabajo grupal como un posible escollo en la implementación.

A partir de los análisis preliminares y considerando las restricciones impuestas por la programación del curso en donde se implementa la ingeniería, presentamos la selección de contenidos, los objetivos de aprendizaje y las nociones previas pertinentes requeridas.

Selección de contenidos referidos al tema "Función Cuadrática"

Formas de la expresión analítica de la función cuadrática (polinómica, canónica y factorizada). Elementos de la parábola: vértice, eje de simetría, raíces o ceros y concavidad. Su reconocimiento y obtención en cada una de las tres formas. Representación gráfica de la función cuadrática. Relación entre registros semióticos: conversión del registro simbólico al gráfico, del numérico al gráfico, del gráfico al simbólico (con distinto tipo de información dada), del coloquial al simbólico, etc.

Objetivos específicos

- Reconocer la dependencia y variabilidad cuadráticas entre dos variables y diferenciarlas de la lineal.
- Interpretar un proceso en forma cualitativa (simetría, ceros, extremos, crecimiento y decrecimiento).
- Anticipar el comportamiento funcional y caracterizar la situación en un gráfico.
- Resolver un problema de optimización, en una primera instancia mediante recursos numéricos y gráficos.
- Reconocer los elementos de la cuadrática (ceros, vértice, etc.) cuando ésta viene dada en los distintos formatos algebraicos en los que puede ser expresada una función cuadrática.
- Determinar el comportamiento de la función de acuerdo con cambios en los parámetros que la definen (traslaciones y dilataciones).

Conocimientos previos de los estudiantes (pertinentes al tema)

El grupo de clase con el que trabajamos está compuesto por unos veintidós estudiantes. De la programación del curso y por información brindada por el profesor, podemos decir que los estudiantes han trabajado previamente en las siguientes temáticas:

- Cuestiones generales de funciones tales como: las funciones como herramientas para describir un proceso concreto, trabajo con funciones presentadas en diferentes registros: verbal, algebraico, gráfico y tabla, pasaje de un registro a otro; noción informal de dominio, análisis acerca de qué valores tienen sentido para la expresión analítica de una función incluyendo las restricciones impuestas por una situación concreta; cálculo de imágenes y pre-imágenes.
- Estudio de la función de proporcionalidad directa y la función lineal.
- Resolución de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.

2.3.2. Análisis a priori

Seleccionamos del análisis a priori de la ingeniería la descripción de las variables globales (las relacionadas con la organización de la situación) y el análisis completo de la primera consigna, disparadora del nuevo contenido.

La identificación de las variables globales resulta central en la configuración de la dinámica de la situación, tanto en lo referido a la actividad de los estudiantes como a la actuación del docente durante la implementación de la ingeniería. En nuestro caso identificamos las siguientes variables globales: *metodología de trabajo en el aula*, *tiempos*, *comunicación de las producciones*, *estructura de la secuencia didáctica* y *rol del docente*. A continuación presentamos una descripción de cada una de ellas.

Descripción de las variables globales

- *Metodología de trabajo en el aula*: implementamos una metodología de trabajo grupal[1], con especial atención en la detección de posibles "líderes" en los grupos, es decir, estudiantes que, además de manejar los contenidos matemáticos, dirigen las acciones del grupo y logran imponer sus propuestas. El propósito de identificar a estudiantes con estas características es poder intervenir, si acaso

[1] Como parte de la investigación en la que se enmarca esta ingeniería, se contó con un observador que participó en todas las etapas del proceso. De esta forma, se pudo realizar el seguimiento del trabajo de uno de los grupos tanto durante los momentos de trabajo grupal como en las puestas en común.

su presencia desvirtúa la interacción planteada para el trabajo grupal. Además, prevemos que, en alguna de las actividades, los "líderes" conformen un grupo aparte con tareas diferenciadas.
En lo posible, buscamos mantener la conformación de los grupos durante todas las clases que insuma el desarrollo del tema.
- *Tiempos*: esta variable está parcialmente determinada por las restricciones impuestas por el contexto de implementación. Cada clase tiene 2 horas de duración, aunque estimamos un rendimiento neto de aproximadamente 1 hora 45 minutos. A su vez, programamos los tiempos destinados a cada instancia de trabajo durante las clases.
- *Comunicación de las producciones*: para comunicar lo que cada grupo produce utilizamos tres modalidades:
Puesta en común: cada grupo elige un integrante para que exponga en el pizarrón las conclusiones del trabajo grupal. Durante la exposición de cada representante, los compañeros del mismo grupo pueden intervenir y los de otros grupos pueden realizar preguntas o cuestionamientos. Se da como consigna general para las exposiciones no repetir conclusiones ya planteadas por grupos anteriores.
Síntesis: el docente dirige una discusión tendiente a recoger información y conclusiones obtenidas a partir del trabajo en los grupos.
Plenario: los estudiantes de todo el curso se disponen formando una ronda. El docente ejerce el rol de coordinador, promoviendo la participación de todos para crear un clima de discusión e intercambio de opiniones y cuidando de no expedirse acerca de la corrección de los resultados expuestos.
- *Estructura de la secuencia de enseñanza*: no se entrega a los estudiantes la totalidad de las actividades a realizar sino que se fracciona en bloques de consignas, con el fin de evitar que la lectura de consignas posteriores induzca la resolución de una consigna anterior.
En ocasiones, bajo una misma consigna, los diferentes grupos trabajan sobre temarios distintos para luego, en una puesta en común, plenario o síntesis, "armar" una situación general a partir de los aportes de cada grupo.
- *Rol del docente*: las intervenciones del docente están pautadas, tanto en los momentos de trabajo grupal como en las puestas en común, síntesis e institucionalizaciones. Durante el trabajo de producción grupal, el docente debe garantizar la interacción propuesta. Las consultas individuales son devueltas al grupo para su discusión posterior. No interviene en los grupos dando o validando resultados, sino propiciando el debate interno.

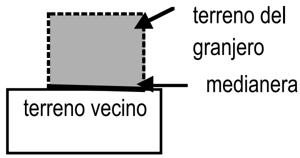
Análisis a priori de una consigna

A continuación presentamos el análisis a priori de la primera consigna de la secuencia didáctica.

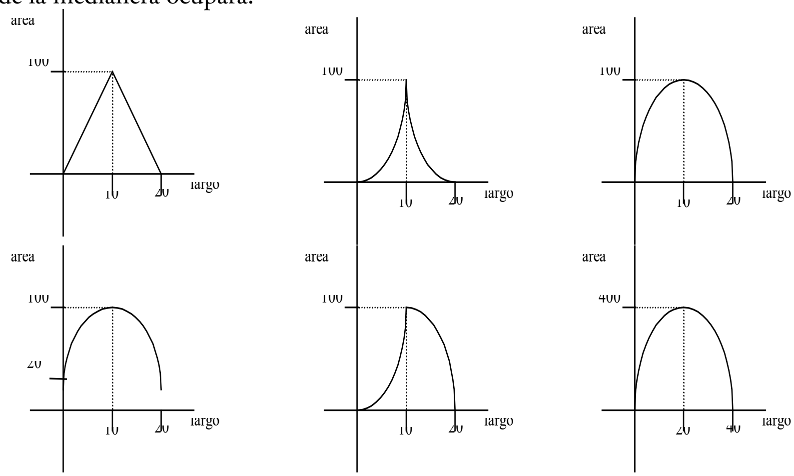
Consigna 1

En un terreno, un granjero quiere delimitar una región rectangular con un alambre de 40 m para hacer una zona de cultivos. Este terreno limita con un único vecino que tiene construida su medianera de más de 40 m de largo (ver esquema). Sobre la medianera se quiere apoyar uno de los bordes que delimitan la zona de cultivos. Todo el recinto será bordeado por el alambre, incluido el lado que está contra la medianera.

Como el vecino es el dueño de la medianera, el granjero deberá solicitarle autorización para su uso indicándole qué parte de ella será ocupada.



A) Indicar al menos cuatro posibles dimensiones de la zona de cultivo, explicitando qué longitud de la medianera ocupará.



B) ¿De qué dimensiones debería hacer el granjero la zona de cultivo si quiere maximizar la cosecha? En este caso, ¿qué le informaría al vecino respecto de la longitud utilizada de su medianera?

C) ¿Cuáles de los siguientes gráficos elegiría y cuáles descartaría como representativos de la situación planteada?

El tiempo previsto para trabajar con esta consigna es de una clase de 2 horas.

Descripción de la consigna

La situación aborda un problema concreto de optimización referido a la construcción de un recinto rectangular con una cantidad fija de alambre. Su formulación en términos matemáticos es "de todos los rectángulos de perímetro 40, hallar las dimensiones del de área máxima". La consigna está dividida en tres partes. La parte A tiene por finalidad explorar la situación; la parte B, se centra en el problema de optimización, mientras que en la parte C se proponen distintos modelos matemáticos para ser analizados como representativos de la situación.

Variables locales

Las variables locales son las relacionadas con la secuencia didáctica. Identificamos las siguientes: uso de material manipulativo, largo del hilo, ubicación del recinto en función de lo que ocupa sobre la medianera, referencia a la definición de rectángulo.

En la descripción de las intervenciones docentes explicitamos cómo el docente puede manipularlas para "controlar" el transcurso de la implementación modificando la relación de los estudiantes con la situación.

Desarrollo de la implementación

Una vez organizada la clase en grupos, el docente entrega a cada uno dos hilos anudados de 40 cm de longitud para poder simular y describir la situación.

Acerca de la parte A

(Tiempo estimado para el trabajo grupal 15 minutos)

Durante el trabajo de los estudiantes el docente dibuja en el pizarrón una tabla para que los distintos grupos completen los valores de los lados de los rectángulos propuestos, distinguiendo entre lado sobre la medianera y lado restante.

Comunicación de las producciones grupales (puesta en común)

Los distintos grupos completan la tabla mencionada (tiempo estimado: 10 minutos).

Una instancia sumamente importante en la fase del análisis a priori tiene que ver con la previsión de cómo debería actuar el docente durante la implementación de la ingeniería, con la intención de minimizar la presencia de intervenciones no apropiadas. En el contexto de la ingeniería una intervención no apropiada por parte del docente sería por ejemplo ofrecer una respuesta o comentario que brinda mucha información o que anula la exploración por parte del estudiante en la búsqueda de la solución o simplemente que interfiere con la intencionalidad didáctica de cierta consigna. De esta manera, es habitual realizar una especie de "libreto" para el docente en el que se intenta prever distintas preguntas, respuestas o comentarios de los estudiantes y explicitar qué intervención realizaría el docente en consecuencia. A continuación mostramos las previsiones realizadas para las intervenciones docentes durante la puesta en común, remitiéndonos a lo establecido en la variable global referida al rol del docente.

Intervenciones del docente en la puesta en común

Si todos los rectángulos tienen el lado mayor (o el menor) sobre la medianera, pregunta si se puede delimitar la región de otra manera intentando ocupar menos (o más) espacio de la medianera del vecino.

Si no aparecen valores decimales para los lados del rectángulo, pregunta acerca de las dimensiones del recinto si el hilo midiera un valor menor que 40.

Si hay pares de valores incorrectos por errores de medición, pregunta a la clase si todos los rectángulos deben tener el mismo perímetro. Podría hacer alguna referencia al tema de la exactitud de una medición.

Si hay pares de valores incorrectos que no se deben a errores de medición, solicita al grupo que revise lo planteado.

Si no aparecen los casos extremos, correspondientes al "rectángulo chato", pregunta sobre el menor y el mayor valor posibles que puede tomar el lado apoyado sobre la medianera. Hace ver la conveniencia de considerarlos como "casos límite", aunque sean irreales.

No hace ningún comentario si no surge el cuadrado como una respuesta.

Acerca de la parte B

(Tiempo estimado para el trabajo grupal 15 minutos).

Comunicación de las producciones grupales: puesta en común. Cada grupo expone y justifica las conclusiones a las que llegó (tiempo estimado: 15 minutos).

A continuación explicitamos las previsiones referidas a las intervenciones docentes durante la puesta en común:

Intervenciones del docente en la puesta en común

Si hay propuestas matemáticamente incorrectas, interviene haciendo preguntas con la intención de que los estudiantes perciban alguna contradicción y reflexionen sobre ella.

Si no surge la expresión analítica de la función cuadrática durante la exposición de cada grupo, no realiza comentarios ni fuerza su aparición.

Si lo considera conveniente, según el desenvolvimiento de la puesta en común, puede pedir que completen la tabla de valores con las áreas de cada uno de los rectángulos.

Acerca de la parte C

(Tiempo estimado para el trabajo grupal 20 minutos).

Comunicación de las producciones grupales: puesta en común. Cada grupo indica qué gráficos descarta y por qué (tiempo estimado: 15 minutos).

Intervenciones del docente

- En la puesta en común: (tiempo estimado: 20 minutos).

Solicita argumentos que justifiquen los descartes realizados, ya sean éstos correctos o incorrectos.

Si alguna elección es incorrecta pero argumentada, las somete al análisis del resto de los grupos.

Si hay errores sobre la simetría, ceros o vértice, remite al grupo a la simulación de la situación con el hilo.

- En la institucionalización: (al término de la puesta en común) (tiempo estimado 15 minutos).

Si bien la conclusión es que el gráfico que describe la situación es una parábola, pone de manifiesto la falta de argumentos determinantes para justificar la elección. No obstante se enfatiza en que hay elementos para justificar los descartes: por un lado, que los puntos del gráfico conocidos certeramente no pueden ser unidos por segmentos, mostrando que el punto medio de ellos no es factible a la situación, y por otro, observa el crecimiento o decrecimiento rápido del área en valores cercanos a los ceros y lento en valores cercanos al vértice y su correspondencia en el gráfico (en ambos casos puede remitirse a la tabla de valores).

Si en la puesta en común no surge la fórmula, pide a los grupos pensar en ese momento en alguna expresión que dé el área del rectángulo en función del largo del lado sobre la medianera. Las propuestas se discuten hasta que quede planteada una fórmula correcta. Si la fórmula queda expresada como producto, propone distribuir para que se explicite que la variable está elevada al cuadrado.

Presenta a la función cuadrática y a sus elementos destacados (vértice, eje de simetría, ceros y concavidad). No hace mención a distintos tipos de expresión analítica.

Con respecto al tratamiento de los registros semióticos, en esta consigna se trabaja, en la parte A, a partir del registro verbal de la función y con el pasaje del registro verbal al registro tabla. La parte B de la consigna está dada en el registro tabla y quizás pueda ser planteada en el registro fórmula. La parte C presenta a la función en el registro gráfico y se trabaja el pasaje del registro gráfico al registro verbal y, probablemente, del pasaje registro gráfico al registro algebraico.

Desde la Teoría de Situaciones, la actividad contiene etapas de acción, formulación, validación e institucionalización. La parte A) es, centralmente, de acción. Se espera que los estudiantes construyan rectángulos manipulando el hilo y midan las longitudes de los lados, o bien realicen esquemas en las carpetas indicando los valores de los lados, por ejemplo. La comunicación de los resultados es un acercamiento a una situación de formulación, en el sentido dado por el intercambio con otros estudiantes que la exposición de las producciones provoca. En las partes B) y C), la acción se pone de manifiesto en el trabajo grupal, la formulación se concreta tanto en la anticipación de cómo debe ser el rectángulo para que se obtenga el área mayor como en la comunicación de los resultados, y la validación, en la justificación de esos resultados. La institucionalización se da a partir de lo trabajado en la parte C) con la presentación de la función cuadrática y sus elementos.

2.3.3. Experimentación

El cuadro que sigue muestra un punteo de los elementos más destacados de la fase de experimentación.

Experimentación
Ausencias, llegadas tarde, lentitud para encarar y resolver los trabajos, poca discusión en los grupos.
Alta y productiva participación en las puestas en común y síntesis.
Modificación de la modalidad del plenario prevista en el análisis a priori.
Fuerte defensa del modelo proporcional / lineal.
Conflicto en algunos estudiantes entre “conocimientos previos del tema” (adquiridos en la secundaria) – “conocimientos utilizables” (debido al formato de nueva enseñanza del tema).

2.3.4. Análisis a posteriori

Como dijimos, el análisis a posteriori consiste en la confrontación de lo anticipado en el análisis a priori con lo sucedido en la experimentación. Presentamos este análisis para la consigna seleccionada, incluyendo un balance sobre lo ocurrido con las variables globales en la implementación de todas las consignas de la secuencia, y luego, el análisis al ser implementada la consigna seleccionada.

Sobre las variables globales

Respecto de la dinámica de las clases destacamos que durante las puestas en común y síntesis realizadas los estudiantes participaron activamente; cuando algún grupo expuso sus conclusiones, integrantes de otros grupos realizaron aportes. No obstante, durante los momentos de producción grupal se percibió un ambiente de poca discusión interna y los grupos fueron lentos para emprender y resolver los trabajos. Dos estudiantes fueron detectados como "líderes". Sin embargo, para la actividad en donde estos debían realizar una tarea diferenciada, sólo se hallaba presente uno, por lo que se decidió no efectivizar la reagrupación programada. La escasa dinámica de trabajo detectada en los grupos hizo que la organización de los plenarios fuera modificada por el docente durante la implementación. Dispuestos los estudiantes y el docente en ronda, éste dirigió la discusión, planteando preguntas a cada uno de los participantes. Si bien fue modificada la estructura, resultó satisfactoria ya que el docente no anticipó resultados y las conclusiones fueron obtenidas por los estudiantes.

Los tiempos previstos fueron ligeramente excedidos puesto que la consigna 1 insumió más tiempo del programado.

Sobre la consigna 1

Observamos poco uso del hilo para la resolución de la actividad. Probablemente conocer su longitud los llevó a proponer figuras de análisis y preferir el trabajo sobre ellas. Dos de los cuatro grupos confundieron perímetro con área, dificultad que no estuvo prevista ya que habían estudiado estos temas en el primer módulo del curso. Si bien surgió la simetría durante la puesta en común, podría suponerse que la indicación de no repetir los datos expuestos por otros grupos pudo haber llevado a descartar algunos pares de valores de rectángulos simétricos. Ante los valores incorrectos que se propusieron, el docente intervino ajustadamente a lo planificado, y los estudiantes hicieron las observaciones pertinentes sobre ellos, corrigiendo los errores. Pese a esto, luego, uno de los grupos presentó al docente una duda acerca de por qué el largo y el ancho debían sumar 20 y no 40. También fue ajustada la intervención del docente en cuanto al planteo de los casos límite del largo y del ancho.

Al buscar el rectángulo de área máxima, en uno de los grupos, una estudiante –que venía siendo observada como posible líder– planteó la fórmula de una función cuadrática como modelo de la situación y trabajó sobre ella. El grupo siguió sus indicaciones. El observador debió haber intervenido para neutralizar su accionar y no lo hizo. Dos de los cuatro grupos no consideraron al cuadrado como rectángulo y propusieron 9 y 11 como lados que dan el área máxima, lo que significa que preservan la idea de acercarse al cuadrado, aunque exhiben errores en cuestiones relacionadas con las propiedades de los campos numéricos (piensan a 10 como el "siguiente" de 9 en reales). Mientras que un grupo no pudo justificar su decisión, el otro lo hizo a través de la tabla de valores, lo que parece significar que limitaron el rango de valores posibles de las variables a los ejemplos expuestos. En uno de los otros dos grupos buscaron en sus carpetas la definición de rectángulo, lo que los llevó a aceptar al cuadrado. En el grupo restante –el grupo observado– buscaron en el libro del curso la definición y, si bien la interpretaron correctamente, sus integrantes no se convencieron y siguieron bajo la hipótesis de que el cuadrado no es un rectángulo. Vale aclarar aquí que la estudiante mencionada anteriormente como posible líder fue la que buscó, leyó e interpretó la definición, pero, en este caso, el grupo no la siguió y ella aceptó seguir la decisión mayoritaria. A partir de esto, propusieron como valor máximo un decimal cercano a 10, utilizando las aproximaciones que les ofrecía la calculadora.

El trabajo sobre la decisión acerca de qué gráficos elegir y descartar resultó muy rico e invirtió mucho más tiempo del previsto. Si bien la puesta en juego del modelo proporcional / lineal estuvo provocada en la consigna, no estaba previsto que su defensa fuera sostenida con tanta vehemencia y defendida con argumentos tan variados e inconsistentes como realmente sucedió. El grupo a cargo del observador reconoció el modelo cuadrático aunque permanentemente se vieron involucrados en la disyuntiva de cuánto de sus conocimientos previos sobre el tema debían utilizar. En la puesta en común, dos de los grupos propusieron sus propios gráficos: en un caso la recta por el origen y que contiene al punto máximo y en el otro, una recta por tres de los puntos (el máximo, la mayor de las raíces y otro punto). Fue tan firme la defensa del modelo que en la primera de las propuestas, ante la evidencia de que un determinado punto debía pertenecer a la gráfica, modificaron los valores del eje de ordenadas pero mantuvieron el gráfico lineal. El otro grupo justificó la recta propuesta –de pendiente negativa y ordenada al origen distinta de 0– hallando una fórmula de proporcionalidad directa en la que obtuvieron la pendiente a partir del reemplazo por uno de los puntos. El docente destinó el tiempo necesario a trabajar sobre estos errores y la primera clase finalizó con el cierre de estas propuestas.

Al iniciarse la segunda clase el docente retomó lo analizado al final de la clase anterior recordando los modelos propuestos y las conclusiones del análisis. Al volverse a la puesta en común, el grupo que había propuesto la recta de pendiente negativa propuso descartar el único gráfico lineal por partes. Sin embargo, las razones esgrimidas descubrieron nuevas concepciones erróneas en torno de las funciones lineal y de proporcionalidad directa. Sostuvieron el descarte en el hecho de que ese gráfico responde al modelo de proporcionalidad directa que, por lo ya discutido, no era el adecuado. Superado este error, dijeron que ese gráfico era una función lineal para, posteriormente, considerar que se trataba de dos funciones lineales. La discusión se hizo larga y el docente decidió trabajar sobre las concepciones erróneas que surgieron, abandonando el problema central que era decidir cuál de estos modelos describía a la situación planteada. Cuando el docente encarriló la discusión en torno de la elección y descarte de gráficos, rápidamente quedaron descartados, con la correspondiente justificación, todos los gráficos excepto el cuadrático.

Al no haber surgido en la puesta en común una fórmula representativa de la situación, al momento de presentar la función cuadrática, según lo planificado, el docente propuso a los alumnos encontrarla. El grupo a cargo del observador, que había trabajado sobre ella, la expuso y se completó la introducción del nuevo concepto según las pautas preestablecidas.

El trabajo sobre esta consigna insumió una clase y media cuando lo previsto era una clase.

2.4. Conclusiones

La implementación de la ingeniería en un curso de ingreso a la universidad deja una serie de conclusiones destacadas, que listamos sintéticamente:

- Dificultades de los estudiantes para desenvolverse en una clase centrada en el trabajo grupal, expresada en lentitud para encarar los trabajos y bajo nivel de productividad y que el docente no pudo modificar desde la gestión de la clase. Esto derivó en modificaciones de lo planificado, como hemos señalado.

- Como contracara de lo anterior, existió buena participación y producción en las puestas en común.
- La interacción con el docente resultó decisiva para que las producciones de los estudiantes, incompletas e imprecisas, adquirieran forma. Esto se expresó en todas las puestas en común.
- La riqueza de la primera consigna para poner en juego la discusión acerca de la no-linealidad del proceso.

Saliendo del caso de la Ingeniería Didáctica aquí esbozada, esta metodología no es actualmente el método de investigación privilegiado para la confrontación de las construcciones teóricas didácticas con la contingencia de la clase. Comparte el escenario con otras metodologías. Sin embargo, Artigue (2002) señala

> [...] en lo que concierne al estudio de clase sigue siendo para el didacta un instrumento incomparable cuando se trata de concebir y estudiar posibilidades de formas de vida un poco nuevas. Y concebir y estudiar, aún cuando sea en sistemas didácticos que dependen de laboratorio, nuevas formas de vida para la enseñanza y el aprendizaje de una disciplina, es una dimensión de la investigación que sigue siendo fundamental (p.8).

2.5. Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). "Ingeniería Didáctica". En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp.33-59). Bogotá: Una Empresa Docente – Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (2002). Ingeniería Didáctica: ¿Cuál es su papel en la investigación didáctica de hoy? Extraído el 20 de febrero de 2011 de http://s3.amazonaws.com/lcp/didactica24/myfiles/Ingenieria_didactica-artigue.doc.

Carnelli, G. (2005). *Una ingeniería didáctica para la función cuadrática*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Nacional de San Martín. Argentina.

Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp.61-96), Bogotá: Una Empresa Docente-Grupo Editorial Iberoamericana.

De Faria Campos, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 2.*

Dorier, J. L. (1996). Basis and Dimension: From Grassmann to van der Waerden. En G. Schibring (Ed.), *Hermann Günther Grassmann (1809- 1877): Visionnary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar. Papers from a Sesquicentennial Conference* (pp.175-196), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V. (2002) Una organización de los programas de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista EMA 7 (2),* 127-170.

Anexo

El siguiente es el texto que completa las actividades propuestas a los estudiantes y la evaluación aplicada.

2. Hallar raíces, vértice y concavidad y trazar un gráfico aproximado de las funciones cuadráticas cuya expresión...

Grupo 1: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = (x+1)^2$, $h(x) = 2x^2$, $p(x) = -2x^2$, $q(x) = (x-2).(x+3)$, $r(x) = 2x^2 + 3x - 2$

Grupo 2: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x+2)^2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2$, $p(x) = -x^2$, $q(x) = -(x-2).(x+3)$, $r(x) = x^2 + 4x + 4$

Grupo 3: $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = (x-2)^2$, $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $p(x) = 3x^2$, $q(x) = 2.(x+2).(x-3)$, $r(x) = 2x^2 + 3x$

Grupo 4: $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = (x-1)^2$, $h(x) = \frac{1}{3}x^2$, $p(x) = 2x^2$, $q(x) = \frac{1}{2}(x-2).(x+3)$, $r(x) = -2x^2 - 3x + 3$

3. A) *Anticipar cómo sería el gráfico de la siguiente función cuadrática, sin recurrir a tablas de valores:*

Grupo 1: $g(x) = -(x-1)^2 + 4$

Grupo 2: $g(x) = -2.(x-3)^2 + 8$

Grupo 3: $g(x) = 2.(x+3)^2 - 18$

Grupo 4: $g(x) = 2.(x+1)^2 - 8$

B) *Hallar las raíces, el vértice, la concavidad y graficar las siguientes funciones cuadráticas...*

Grupo 1: $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = -(x-1)^2 + 4$

Grupo 2: $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = -2.(x-3)^2 + 8$

Grupo 3: $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = 2.(x+3)^2 - 18$

Grupo 4: $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = 2.(x+1)^2 - 8$

C) *Hallar dos puntos simétricos que pertenezcan al gráfico de la siguiente función cuadrática. Luego, hallar raíces, vértice y concavidad.*

Grupo 1: $f(x) = 2x^2 + x + 1$

Grupo 2: $f(x) = -2x^2 - x - 1$

Grupo 3: $f(x) = 3x^2 + x + 1$

Grupo 4: $f(x) = -x^2 - x - 1$

4. Hallar el vértice, las raíces, decidir el tipo de concavidad y graficar a cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

$f(x) = -x^2 - x + 2$

$g(x) = -3.(x-4)^2 - 6$

$h(x) = 4.(x+2).(x-3)$

5. A) Completar el siguiente cuadro con funciones cuadráticas de modo que las tres fórmulas correspondan a la misma función, expresadas de manera diferente:

Grupo 1: $f(x) = 2.(x-1).(x+3)$

$f(x) = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots.$

$f(x) = \ldots\ (x-\ldots.)^2 + \ldots.$

Grupo 2: $f(x) = \ldots.(x-\ldots).(x-\ldots)$

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

$f(x) = \ldots(x-\ldots.)^2 + \ldots.$

Grupo 3: $f(x) = \ldots.(x-\ldots).(x-\ldots)$

$f(x) = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots.$

$f(x) = -2.\ (x+1)^2 + 8$

Grupo 4: $f(x) = -2.(x-1).(x+3)$

$f(x) = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots.$

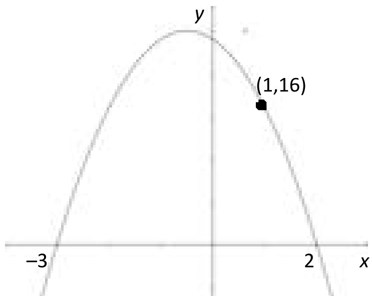
$f(x) = \ldots\ (x-\ldots.)^2 + \ldots.$

B) Describir el procedimiento usado en A)

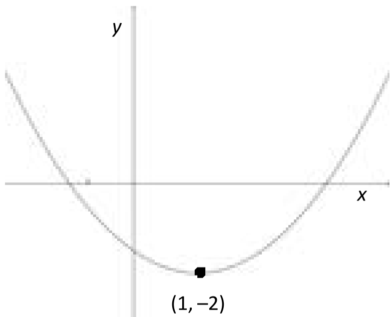
6. Para cada ítem, hallar la fórmula de una función cuadrática que verifique las condiciones indicadas y analizar si la propuesta es la única posible.

A) Las raíces de la función son 2 y –3.

B) La función tiene el siguiente gráfico:



C) La función tiene el siguiente gráfico:



D) La parábola tiene vértice en el punto (1;–2) y el punto (2;–5) satisface su ecuación.

EVALUACIÓN

1- Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba. La altura alcanzada en función del tiempo (en segundos) está dada por la fórmula $h(t) = -5t^2 + 120\,t$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?

2- Explicar por qué cada una de las siguientes funciones cuadráticas puede o no tener por gráfico la parábola que se muestra:

$f(x) = -3 \,.\, (x+1)^2 + 12$

$g(x) = -3 \cdot (x+1) \cdot (x-5)$

$h(x) = -x^2 - 4x - 3$

3- ¿Cuál es la expresión en forma factorizada de una función cuadrática f que cumple que $f(-2) = 3$ y que $f(4) = 3$?

3
Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

Marcel D. Pochulu

3.1. Introducción

En este capítulo presentamos las ideas teóricas centrales y algunas aplicaciones que ha tenido el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), como línea de investigación en Didáctica de la Matemática, que viene desarrollándose en España desde el año 1994 por Juan Díaz Godino y colaboradores.

Es posible que un lector experto en el EOS juzgue de extremo el recorte que se ha realizado, como así también, que las ideas que se explicitan son muy elementales en sus fundamentos. Cabe aclarar que nuestra intención es introducir al futuro profesor de Matemática en este enfoque, mostrando algunas de las herramientas más importantes que le provee, ya sea para diseñar o analizar didácticamente una clase, o para iniciarse en la investigación en Educación Matemática, pensando que puede profundizarlas posteriormente si les resultan de interés.

Asimismo, exponemos las nociones teóricas que sustentan el EOS sin entrar a debatir los fundamentos didácticos, filosóficos y epistemológicos que le dan origen, o que justifican su razón de ser en esta línea de investigación, ni las relaciones que existen con otros marcos teóricos de referencia de la Didáctica de la Matemática. Para ello, se puede recurrir a un número importante de publicaciones (Godino y Batanero, 1994; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, Font y Wilhelmi, 2008) donde se analizan con detalles estas ideas y se indican los antecedentes en que están basadas.

3.2. Posicionamiento del EOS ante la Didáctica de la Matemática

Para el EOS, la Didáctica de la Matemática tiene que dar respuesta a dos demandas fundamentales: (a) comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, y (b) guiar la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Para la primera demanda se requiere de herramientas teóricas que permitan la descripción, interpretación y/o explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Esto exige realizar investigaciones de tipo teórico que inducen a la creación y desarrollo de marcos teóricos. Al mismo tiempo, estos marcos teóricos se aplican en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, lo que origina, a su vez, la ampliación del propio marco teórico. En este sentido, el EOS pretende construir un marco teórico que además de tener poder descriptivo también tenga poder explicativo.

Para el EOS, el marco teórico es el que orienta sobre lo que hay que observar y cómo se debe realizar esa observación; y proporciona las herramientas para realizar la misma, aunque esto no imposibilita utilizar métodos de investigación de tipo general, o desarrollados por otros enfoques teóricos diferentes. De todos modos, por estar utilizando un determinado marco teórico, sabemos que existe una determinada manera de entender los hechos y procesos didácticos, y la explicación que se brinda de los fenómenos observados.

Para la segunda demanda se necesita realizar una valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, y con base en ella, proponer mejoras fundamentadas. En consecuencia, es necesario desarrollar métodos para la valoración y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Para ello, el EOS propone criterios de idoneidad para las distintas facetas implicadas en un proceso de estudio matemático.

En las secciones siguientes expondremos los desarrollos y aplicaciones más importantes del EOS en torno a estas dos demandas que la Didáctica de la Matemática debería atender.

3.3. Herramientas teóricas del EOS

El EOS propone una reconceptualización de algunos constructos básicos como la noción de objeto matemático, significado y comprensión, así como el estudio de sus relaciones mutuas. Como característica propia de este enfoque, se distinguen para dichos constructos dos dimensiones interdependientes: personales e institucionales, y se le asigna un papel central al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la variedad de objetos intervinientes en la clase de Matemática.

El aspecto ontológico se deriva del análisis de la existencia o inexistencia de entidades u objetos, mientras que el aspecto semiótico se ocupa de descubrir y analizar la verdadera significación que se da a esos objetos o entidades, su relevancia, vínculos que los interrelacionan, y otras particularidades que los hacen diferenciables, incluso donde pareciera que esas diferencias no pudieran o debieran manifestarse.

Los constructos teóricos elaborados por el EOS constituyen el modelo ontológico-semiótico que esbozaremos seguidamente, donde se toma como noción primitiva la de situación-problema, y se dan definiciones muy particulares para conceptos teóricos como el de práctica, objeto (en sus facetas personal e institucional) y significado.

Este modelo procura aportar herramientas teóricas para analizar en forma conjunta el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo, y tiene en cuenta aspectos del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática (Godino *et al*, 2007).

Las herramientas teóricas que provee el EOS se desarrollaron en diferentes etapas y se fueron refinando progresivamente. Consideramos apropiado presentarlas dentro de tres grandes tópicos, los que marcan en cierta forma la propia evolución que ha tenido esta línea hasta la fecha y que son:

- Teoría de Significados Sistémicos,
- Teoría de Funciones Semióticas, y
- Teoría de Configuraciones Didácticas.

3.4. Teoría de Significados Sistémicos

Habitualmente asumimos que el significado de un objeto matemático está dado por su definición, donde se describen con precisión sus características, atributos y las relaciones existentes entre los mismos. Así, por ejemplo, si se nos pregunta: ¿qué es una ecuación?, diríamos que es una igualdad entres dos expresiones algebraicas, que denominamos miembros, donde aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Incluso, podríamos agregar algunos atributos más referidos a los tipos de ecuaciones, soluciones, usos y aplicaciones, etc.

Para el EOS resultaría insuficiente decir que el significado de “ecuación” está dado por su definición y de allí la necesidad de adoptar una teoría pragmática del significado. En consecuencia, a un objeto matemático se lo concibe como emergente de determinados tipos de prácticas, llevadas a cabo en el seno de una institución, donde su significado está íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, por lo cual no se puede reducir este significado a su mera definición matemática.

Con la denominación “objeto matemático” se entiende, en el EOS, a todo aquello que se pueda individualizar en Matemática, tal como un símbolo, un concepto, una propiedad, una representación, un procedimiento, etc. Por ejemplo, el símbolo de multiplicación es un objeto matemático donde, además, es un objeto ostensivo (que se muestra públicamente) en la expresión “a.b”, mientras que es no ostensivo (no perceptible por sí mismo) en “2x”. Del mismo modo, diremos que la suma es un objeto matemático no ostensivo en

$$5\frac{3}{4}\cdot$$

La Teoría de los Significados Sistémicos se elaboró a partir de presupuestos antropológicos y pragmatistas para el conocimiento matemático, donde el significado de un objeto (conceptual) es entendido a través de un sistema de prácticas (matemáticas) que un sujeto (persona o institución) pone en juego y no sólo por su definición o concepto asociado al mismo. En este contexto, se entiende por *“práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas”* (Godino y Batanero, 1994, p.8). A su vez, los sistemas de prácticas se pueden separar en diferentes clases de prácticas más específicas, lo que permite hacer una distinción entre significado y sentido. Los sentidos, de acuerdo a Font y Ramos (2005), pueden ser interpretados como significados parciales.

Asimismo, la realización de las prácticas matemáticas se formaliza con el soporte y condicionamiento de un conjunto de elementos y factores materiales, biológicos y socioculturales que hacen posible, potencian o limitan el desarrollo de la actividad matemática. A todo este sistema de elementos, el EOS lo denomina el "trasfondo ecológico de las prácticas matemáticas".

Los significados, entendidos como sistemas de prácticas y por su utilización en el análisis didáctico, llevan a introducir una tipología básica que tiene un triple condicionamiento: institucional, personal y temporal. Esto guarda relación con las prácticas prototípicas que una persona o institución realiza en su intento por resolver un campo de problemas, y en un determinado período de tiempo.

Por ejemplo, cuando planificamos una clase sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comenzamos a delimitar lo que dicen las instituciones matemáticas y didácticas sobre el objeto. Por lo general, acudimos a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, a lo expresado por los "expertos" en las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, así como a los conocimientos personales previamente adquiridos. Con todo ello construimos un sistema de prácticas que el EOS llama *significado institucional de referencia* del objeto.

A partir del significado de referencia, seleccionamos, ordenamos y delimitamos la parte específica que vamos a proponer a los estudiantes durante un proceso de estudio. Asimismo, tomamos en cuenta el tiempo asignado a la materia, los conocimientos previos de los alumnos y los medios y recursos instruccionales disponibles. De este modo, logramos un sistema de prácticas planificadas sobre el objeto matemático para cierto proceso instruccional, que conforma el *significado institucional pretendido*.

Posteriormente, al desarrollar la clase volvemos a realizar ajustes y pueden existir diferencias entre lo que pretendíamos y lo que efectivamente ocurrió en el aula. Este conjunto de prácticas que tuvieron lugar en la clase de Matemática sirven de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes, y vienen a constituir el *significado institucional implementado*. Por último, las respuestas a una colección de tareas o cuestiones que incluimos en las pruebas de evaluación vienen a ser una muestra del *significado institucional evaluado.*

Si bien conviene distinguir conceptualmente los cuatro tipos de significados institucionales, en los procesos de instrucción reales se mezclan e interactúan constantemente entre ellos, razón por la cual no siempre es tan clara la línea que los separa en un momento dado. No obstante, realizar un análisis didáctico de ellos nos puede aportar algunas pautas de dificultades que se presentan cuando damos clases. Por ejemplo, podría ser que los significados evaluados no estén completamente contenidos en los significados implementados, lo cual explicaría algunas dificultades que tuvieron los alumnos. Cuando los significados pretendidos/implementados no concuerdan con los significados de referencia, podemos encontrar errores que se introdujeron en los procesos de enseñanza y aprendizaje llevados a cabo.

Por otra parte, si tenemos en cuenta a nuestros alumnos, podríamos considerar la totalidad del sistema de prácticas personales que son capaces de manifestar potencialmente sobre un objeto matemático, lo que involucra sus conocimientos previos, y nos daría una muestra del *significado personal global* que cada uno de ellos tiene.

Al abordar la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático particular, los estudiantes darán cuenta, a través de un conjunto de prácticas efectivamente expresadas en las evaluaciones y actividades de clase (sean éstas correctas o incorrectas) el significado que le confieren al mismo. Nos encontramos en este caso con el *significado personal declarado*.

Por último, si analizamos el cambio que han sufrido los significados personales que tuvieron lugar al inicio, o previos de los estudiantes, con el que finalmente alcanzaron, nos encontraremos con un conjunto de prácticas manifestadas que guardan relación con la pauta institucional establecida, lo que constituye el *significado personal logrado*.

Esquemáticamente representamos a estos significados de la siguiente manera:

Figura 1: Tipos de significados institucionales y personales

La flecha central de la figura 1 representa las relaciones dialécticas que se establecen entre enseñanza y aprendizaje, lo que supone una articulación progresiva entre los significados personales e institucionales. Godino (1996) plantea que la principal finalidad de la enseñanza sería el acoplamiento progresivo de los significados personales e institucionales. Cuando un alumno ingresa a la escuela puede asignarle a un objeto matemático un significado diferente al que le otorga la institución, pero, a través de un proceso gradual de acoplamiento, adquirirá los distintos elementos que componen el significado institucional.

De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y que dan cuenta de su organización y estructura. Teniendo en cuenta la faceta institucional y personal que poseen los significados, también podemos hablar de "objetos institucionales", cuando los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, mientras que si corresponden a una persona o sujeto, serán calificados como "objetos personales".

El EOS considera la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- **Lenguaje**: es entendido en este marco teórico como los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., los que se presentan, a su vez, en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- **Situaciones-problemas**: son las actividades, tareas o ejercicios, tanto extra-matemáticas como intra-matemáticas.
- **Conceptos-definición**: corresponden a aquellas construcciones o elementos que son introducidos mediante definiciones o descripciones de un objeto.
- **Proposiciones**: enunciados o afirmaciones sobre los conceptos.
- **Procedimientos**: comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones.
- **Argumentos**: comprenden enunciados y razonamientos usados para validar, justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos, o la validez de la solución a un problema, los cuales pueden ser deductivos o de otro tipo.

A su vez, estos seis objetos primarios se organizan en entidades más complejas para constituir sistemas conceptuales y teorías. Se relacionan entre sí formando configuraciones (figura 2), definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático. Estas configuraciones pueden ser epistémicas si son redes de objetos institucionales, o cognitivas si representan redes de objetos personales. Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994).

Figura 2: Componentes de una configuración epistémica/cognitiva

En las configuraciones epistémicas o cognitivas, las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad, y las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. El lenguaje, por su parte, sirve de instrumento para la acción. Los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí, todo lo cual viene a regular el uso del lenguaje, que por su parte, sirve de instrumento para la comunicación.

Es de destacar que cada objeto matemático, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos. Un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, y obviamente, está soportado por el lenguaje.

Veamos ahora una aplicación práctica, a modo de ejemplo, que tiene la Teoría de los Significados Sistémicos donde se integran los conceptos abordados. Si deseamos determinar el significado de referencia o global que tiene un objeto matemático particular, por ejemplo el de función, requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del mismo, como así también, considerar la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. Para ello, es necesario tener en cuenta los seis elementos primarios que constituyen una configuración epistémica.

Si se plantean situaciones-problemas donde se pide la descripción general de cualquier tipo de relación, lo que conlleva a realizar operaciones entre conjuntos (acciones o procedimientos), con argumentos netamente deductivos, soportados por el lenguaje propio de la notación conjuntista, donde subyacen los conceptos de dominio, imagen o rango, función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva y las propiedades que las vinculan, estaremos abordando un significado conjuntista de las funciones (ver figura 3).

Figura 3: Configuración epistémica del objeto matemático función

Si enseñamos funciones desde una configuración epistémica analítica, y por tanto el significado institucional de referencia de función estará relacionado a ella, nos lleva a plantear situaciones-problemas donde se realicen estudios analíticos de la dependencia entre las variables. Los procedimientos o acciones básicos implicarán la manipulación algebraica y el cálculo de límites, propiedades de la derivabilidad y continuidad, etc.

De esta forma, se podrían determinar otras configuraciones epistémicas que nos brindarían los significados institucionales de referencia asociados al objeto matemático función y que se contemplan en la figura 3.

3.5. Teoría de Funciones Semióticas

Cuando desarrollamos nuestras clases de Matemática, habitualmente usamos objetos matemáticos en representación de otros, estableciendo una correspondencia implícita entre el objeto representante (expresión) y el representado (contenido). Solemos expresar: "*Sea y = ax + b, con a y b números reales, la ecuación de una recta*", "Sea ABCD un cuadrilátero", etc. Incluso, cuando los alumnos nos preguntan por cierto objeto matemático, nos hacemos entender en términos de lo que se puede hacer con él. En este último caso, estaríamos adoptando una perspectiva sistémica, puesto que brindamos como significado de un objeto matemático un sistema de prácticas en las que dicho objeto es determinante, o no, para su realización.

Precisamente el EOS adhiere a esta última acepción de significado, donde a un objeto matemático se lo debe entender en términos de lo que se puede hacer con él en una práctica matemática. Esta correspondencia se realiza a través de una función semiótica que tiene por antecedente a un objeto matemático (o la expresión que puede designarlo), y como consecuente al sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones–problemas. Cuando un sujeto realiza una práctica matemática es necesario que active un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos primarios que componen un objeto y que mencionamos en la sección anterior: lenguaje, situaciones–problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, los que a su vez se agrupan formando una configuración (personal o institucional).

En consecuencia, el significado de un objeto, considerado como "expresión" en una función semiótica, será el "contenido" de esta función semiótica, y ha sido establecido por un sujeto siguiendo una regla o criterio de correspondencia. Más específicamente, la Teoría de las Funciones Semióticas establece que el significado de un objeto matemático es el par "Configuración epistémica / prácticas que posibilita", siendo la definición (explícita o implícita) del concepto matemático sólo uno de los componentes de la configuración epistémica.

Este posicionamiento no invalida que un concepto tenga otra definición equivalente, pero en este caso, se puede incorporar a otro par "Configuración epistémica / prácticas que posibilita" diferente del considerado inicialmente. Así, cada par viene a constituir diferentes sentidos del concepto, mientras que el significado será el conjunto de todos los pares "Configuración epistémica / prácticas que posibilita" obtenidos.

Si bien algunas de estas funciones pueden interpretarse como procesos cognitivos específicos (generalización, simbolización, etc.), el EOS valora al plano del contenido puesto en juego, por lo que se tendrían los siguientes tipos:

- *Significado notacional:* una función semiótica es notacional cuando el objeto final, o contenido de la misma, es una notación o instrumento ostensivo. Por ejemplo, cuando decimos: "Sea *n* un número natural, *n!* representa el producto $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 1$ ", o en la frase: "*En el polinomio* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, a_n *es el coeficiente principal*", donde la palabra "polinomio" hace referencia a otro objeto ostensivo que se muestra en la expresión.

- *Significado extensional:* una función semiótica es extensional cuando el objeto final es una situación-problema o fenomenología. Por ejemplo, la descripción verbal, gráfica o mixta de una situación-problema, pues la descripción que hacemos es un objeto diferente de la propia situación.

- *Significado intensional:* una función semiótica es intensional cuando su contenido es una generalidad. Por ejemplo, cuando decimos: *"Una función lineal es de la forma* $y = ax + b$*, donde a y b son números reales".*

A su vez, toda función semiótica intensional y extensional puede ser interpretada como función semiótica notacional, ya que tanto las abstracciones como las situaciones-problemas son concretadas textualmente, y viceversa.

Si bien el modelo teórico que subyace en la Teoría de Funciones Semióticas es más amplio que el descripto, tomaremos una posible aplicación de la misma referida a la comprensión que tienen los alumnos sobre las ecuaciones al terminar la escuela secundaria.

El EOS concibe a la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (Godino, 2000; Font, 2001), pues sostiene que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. A su vez, Godino (2003) expresa que se puede entender a la comprensión en términos de funciones semióticas.

En nuestro caso, analizaremos las prácticas matemáticas (operativas y discursivas) que ha realizado una estudiante de 18 años al iniciar sus estudios universitarios, a quien se le ha propuesto la realización de un conjunto de tareas referidas a ecuaciones. Escogimos este caso puesto que su examen estaría aprobado si sólo se hiciera una valoración de los procedimientos realizados.

Analizar la comprensión que tiene la alumna sobre las ecuaciones, posicionados en el EOS, nos lleva a determinar si reconoce el campo de problemas en que se involucra este objeto matemático, aplica y recuerda (implícitamente en la mayoría de los casos) los conceptos, propiedades y procedimientos que se requieren para llevar a cabo exitosamente las tareas, y utiliza lenguaje y argumentos apropiados en sus explicaciones.

La descripción que haremos se centra en identificar las interpretaciones que ha realizado la estudiante de los objetos primarios que intervienen en la configuración epistémica asociada a ecuaciones. Estos actos de semiosis llevaron a establecer una correspondencia entre objetos matemáticos (expresión-contenido) a través de una función semiótica, para la cual se ha seguido una regla o criterio de correlación dada por nuestra experiencia como docentes e investigadores. Como resultado final obtuvimos una aproximación a la configuración cognitiva de la alumna, lo que permitió valorar la comprensión que tiene sobre el objeto matemático ecuaciones. De todos modos, destacamos que para efectuar un análisis profundo de la comprensión que se tiene de ecuaciones se requeriría realizar una entrevista clínica mucho más profunda, la cual hemos omitido en este caso.

Transcribimos los episodios colocando la resolución de algunos ejercicios que juzgamos como los más representativos, junto a las argumentaciones que dio la alumna al consultársele sobre lo realizado y seguidamente las interpretaciones efectuadas, remarcando los elementos primarios del objeto matemático.


a) $3x - 1 = 5$

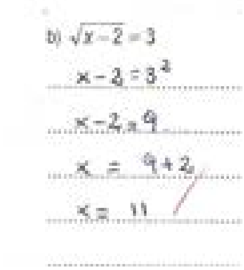
$3x = 6$

$x = 6/3$

$x = 2$

Entrevistador: *Te pedimos que nos expliques lo que hacés para resolver estas ecuaciones*

Alumna: *Primero debo analizar la ecuación para determinar qué es lo que me conviene hacer primero para lograr obtener un resultado concreto de la x. Entonces debo comenzar a pasar los números independientes con el signo opuesto y resolverlos con el que se encuentra del otro lado. Luego logro que me quede mi variable sola en compañía de su coeficiente. Finalmente pasamos hacia el otro término con la operación inversa el coeficiente. Si está multiplicando lo pasamos dividiendo o viceversa. Así obtenemos un número concreto de x.*



b) $\sqrt{x-2} = 3$

$x-2 = 3^2$

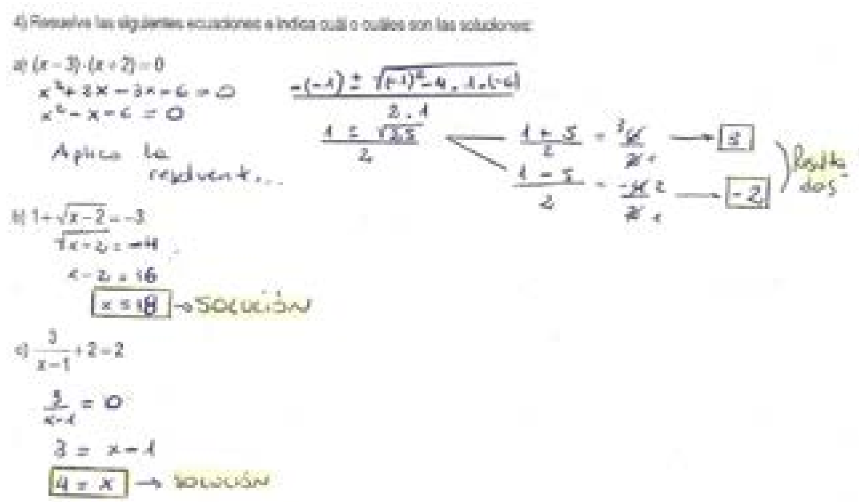
$x-2 = 9$

$x = 9+2$

$x = 11$

Alumna: *Para comenzar el ejercicio tenemos que saber que la raíz no es distributiva con respecto a la suma y resta, y como sólo tenemos radicandos de un término, directamente pasamos la raíz como exponente cuadrado (lo contrario) al número que se encuentra del otro lado. Resolvemos lo que podemos. Luego despejamos el último número que está restando pasándolo con el signo opuesto, la suma. Resolvemos y obtenemos el valor de x.*

Interpretación: La alumna aplica en forma correcta la transposición de términos (**procedimiento**) para resolver las ecuaciones, reconoce **propiedades** de la radicación y opera (**procedimiento**) adecuadamente con números enteros. Sin embargo, en su **argumentación**, utiliza la expresión "término" (**concepto**) como sinónimo de "miembro" de una ecuación (**concepto**). A su vez, aparecen **elementos lingüísticos** incorrectos, como "*radicandos de un término*", *"números independientes"* y "*signo opuesto, la suma*". En este último caso, se pone de manifiesto que no advierte la diferencia entre "signo" y "operación" (**conceptos**). Asimismo, alude a **proposiciones** que son enunciadas en términos de metáforas operacionales, según Abrate, Pochulu y Font (2009): "*pasamos hacia el otro término con la operación inversa*", *"pasamos la raíz como exponente cuadrado"*, *"quede mi variable sola en compañía de su coeficiente"*, *"Si está multiplicando lo pasamos dividiendo o viceversa"*, entre otras.



4) Resuelve las siguientes ecuaciones e indica cuál o cuáles son las soluciones:

a) $(x-3)\cdot(x+2) = 0$

$x^2 + 2x - 3x - 6 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

Aplica la resolvent...

$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$

$\frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$\frac{1+5}{2} = 3 \rightarrow \boxed{3}$

$\frac{1-5}{2} = -2 \rightarrow \boxed{-2}$

Resulta dos

b) $1 + \sqrt{x-2} = -3$

$\sqrt{x-2} = -4$

$x - 2 = 16$

$\boxed{x = 18} \rightarrow$ solución

c) $\frac{3}{x-1} + 2 = 2$

$\frac{3}{x-1} = 0$

$3 = x - 1$

$\boxed{4 = x} \rightarrow$ solución

Interpretación: La alumna aplica **procedimientos** apropiados en la resolución de una ecuación de segundo grado (ejercicio a), ecuación irracional (ejercicio b) y ecuación fraccionaria (ejercicio c). Incluso, reconoce el orden de las operaciones (**propiedad**) establecidas por los términos que conforman cada miembro de una ecuación (**concepto**). Sin embargo, parece desconocer que teniendo el producto de dos factores iguales a cero, uno de ellos o ambos es igual a cero (**propiedad**) y que el cero es absorbente en la multiplicación (**propiedad**).

En la resolución de la ecuación de segundo grado recurrió al uso de una fórmula (**procedimiento**) que le arrojó dos valores. Como no ha sido el final de un **procedimiento** aplicado a la ecuación, le ha dado la denominación de "resultados" y no "soluciones" (**conceptos**), siendo que así lo hizo con los otros dos ejercicios.

No comprende lo que es solución de una ecuación (**concepto**) y lo interpreta como el final de un **procedimiento**, razón por la cual no se cerciora si efectivamente el valor marcado la satisface (ejercicios b y c). En consecuencia, estaría desconociendo el **concepto** de ecuación equivalente y que existen operaciones elementales (**propiedades**) que no garantizan la equivalencia. A su vez, considera que toda ecuación tiene solución (**proposición**).

> **Entrevistador**: *Esta es la resolución de una ecuación que realizó un alumno en un parcial de Matemática. Te pedimos que nos expliques lo que se ha realizado en cada paso e indiques si son correctos los procedimientos que se utilizaron.*

$$
\begin{gathered}
5x-6=3x\\
5x-6-3x=3x-3x\\
2x-6=0\\
2x-6+6=0+6\\
2x=6\\
\frac{2x}{2}=\frac{6}{2}\\
x=3
\end{gathered}
$$

> **Alumna**: *Los procedimientos fueron incorrectos, ya que tres veces se agregaron en cada término números iguales y luego se los resolvía. Aquí se agregó en ambos términos el monomio –3x, entonces se lo agrupó a un lado con el término semejante y del otro se lo resolvió. Luego nuevamente se agregaron a ambos términos +6, se los resolvió, cancelando dos de ellos, que eran positivo y el otro negativo en un término y manteniendo el otro. En el siguiente paso se agregó el 2 como divisor en los números de ambos lados, dejándolos como numeradores. Finalmente se simplificaron ambos términos y como resultado obtuvo un valor de x.*

Entrevistador: *¿Cuántas ecuaciones identificás en el ejercicio?*

Alumna: *Una*

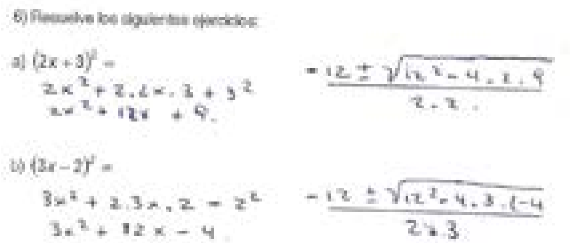
Entrevistador: *¿Por qué?*

Alumna: *El resto es el desarrollo de los procedimientos de esa ecuación.*

Interpretación: La alumna distingue objetos matemáticos como "monomio" y "término semejante" (**conceptos**) pero no el de "miembro de una ecuación", a quien designa como "término". No conoce las **propiedades** de la igualdad, razón por la cual juzga de incorrectos los **procedimientos** utilizados a pesar de dar por válida la solución (**concepto**) que se indicaba en el ejercicio. A su vez, desconoce el **concepto** de ecuación equivalente y por este motivo sólo advierte la presencia de una sola ecuación (**concepto**). En ejercicios posteriores, se le propuso la resolución de 3 ecuaciones de segundo grado que eran equivalentes en su conjunto solución:

$x^2 - 5x + 6 = 0$, $-x^2 - 5x + 6 = 0$, y $\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{5} = 0$.

Sin embargo, en todas ellas procedió a aplicar una fórmula (**procedimiento**), sin advertir la equivalencia (**propiedad**). Designa con la expresión "procesos" (**lenguaje**) a las ecuaciones equivalentes (**concepto**) que se obtuvieron por aplicación de una operación elemental (**propiedad** y **procedimiento**).



Interpretación: La alumna aplicó una regla (**procedimiento**) para encontrar el cuadrado de un binomio (**concepto**) cometiendo errores en el segundo ejercicio. Sin embargo, interpreta que la expresión obtenida es una ecuación de segundo grado (**concepto**) e intenta encontrar el conjunto solución (**concepto**) aplicando una fórmula (**procedimiento**) que dejó inconcluso por falta de tiempo.

Finalmente, retomando nuestra pregunta inicial ¿qué comprensión tiene esta estudiante sobre las ecuaciones al terminar la escuela secundaria? Podemos decir que no ha distinguido, en todos los casos, el campo de problemas de las ecuaciones en un contexto intra-matemático. Ha tenido dificultades al realizar algunos procedimientos necesarios para encontrar el conjunto solución de una ecuación. No le resultan claros los conceptos de ecuación, solución, miembros de una ecuación, términos de una ecuación, ecuación equivalente, entre otros. Desconoce algunas propiedades y procedimientos que se involucran en la resolución de las ecuaciones. Muchos de sus argumentos no han sido adecuados y ha introducido lenguaje que no se encontraría en una configuración epistémica asociada a ecuaciones. Esta valoración nos lleva a decir que la alumna no tiene una comprensión cabal del objeto matemático ecuaciones.

3.6. Teoría de Configuraciones Didácticas

El objetivo principal que subyace en la Teoría de Configuraciones Didácticas es identificar en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones o facetas que interactúan entre sí, y analizarlas en cinco niveles (figura 4). Esto permite realizar un análisis de tipo microscópico de episodios instruccionales y disponer de información detallada de los hechos que ocurren para emitir juicios de adaptación, pertinencia o eficacia tendientes a dotar de idoneidad didáctica a un proceso de enseñaza-aprendizaje estudiado.

En diversos trabajos realizados en el marco del EOS (D'Amore, Font y Godino, 2007; Font y Godino, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009, entre otros) se han propuesto y desarrollado cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de estudio:

1) Identificación de prácticas matemáticas (significados sistémicos).
2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4) Identificación del sistema de normas y metanormas.
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

El primer nivel de análisis explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de estudio matemático. Este primer nivel se puede entender como la narración que haría un profesor para explicar a otro profesor lo que ha sucedido desde el punto de vista matemático. El segundo nivel de análisis se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos anecdóticos o consustanciales a su realización.

El tercer nivel de análisis didáctico está orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción y relación con los aprendizajes. Dado que la enseñanza y aprendizaje de la Matemática están bajo la coordinación de un profesor que interactúa con los estudiantes, el análisis didáctico debe progresar desde la situación problema y las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (nivel 1), a las configuraciones de objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (nivel 2), que a su vez evolucionan hacia el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas (nivel 3). Estas configuraciones y trayectorias están condicionadas y soportadas por una trama de normas y metanormas, que no sólo regulan la dimensión epistémica de los procesos de estudio (niveles 1 y 2), sino también otras dimensiones de estos procesos (cognitiva, afectiva, etc.). El cuarto nivel de análisis, en tanto, pretende estudiar esta trama de normas y metanormas.

Figura 4: Niveles de análisis didáctico de un proceso de estudio

Los cuatro primeros niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto nivel se centra en la valoración de la idoneidad didáctica (Godino *et al*, 2006a). Este último nivel se basa en los cuatro análisis previos y es una síntesis orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

Ejemplificaremos globalmente los niveles de análisis para lograr formar una idea general de estas herramientas que provee el EOS, pero debe tenerse en cuenta que el proceso de análisis es mucho más complejo que el presentado en esta sección. Tomaremos como contexto de análisis una clase de Matemática donde se enseña el tema "ecuaciones" a niños del sexto grado de una escuela primaria[2].

Las herramientas de los cuatro primeros niveles de análisis propuestos en el EOS permiten descomponer una transcripción de una sesión de clase en una trayectoria de configuraciones didácticas, y para cada configuración, estudiar diferentes aspectos. Del análisis resultaría una tabla donde cada fila contemplaría los diferentes aspectos que se han analizado, como por ejemplo[3]:

[illegible]	PRÁCTICAS	OBJETOS	PROCESOS	FUNCIÓN DEL DOCENTE	FUNCIÓN DEL ALUMNO	PATRONES INTERACTIVOS	TIPO CONFIG. DIDÁCTICA	CONFLICTOS	NORMAS Y METANORMAS
CD8 49-64	[illegible]	Ecuación lineal Números Suma	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

La primera columna nos informa que la configuración didáctica octava (CD8) va de la línea 49 de la transcripción a la 64. En esta configuración la práctica matemática realizada es la ejemplificación de una ecuación lineal, la columna tres nos indica los objetos de la configuración epistémica que se han puesto en juego en dichas prácticas (ecuación lineal, números y suma), mientras que la cuarta columna nos indica los procesos activados. Las columnas 2-4 nos informan de los aspectos epistémicos de la configuración didáctica, mientras que las columnas 5-9 nos informan de la interacción. La quinta y la sexta nos dicen lo que han hecho el alumno y el profesor en la interacción que se ha producido. La séptima nos informa sobre los patrones de interacción. La octava sirve para tipificar la configuración didáctica de acuerdo con el tipo de interacción. La novena informa de los conflictos semióticos producidos o potenciales, mientras que la última, sobre las normas y metanormas que han regulado la configuración didáctica.

---

[2] El análisis completo de la clase se encuentra en: Pochulu, M. y Font, V. (2011).

[3] No pretendemos que el lector distinga el contenido de cada celda de la tabla. Sólo se presenta la imagen con el fin de mostrar cómo se puede organizar la información.

3.6.1 Identificación de prácticas matemáticas

Como mencionamos anteriormente, con el primer nivel de análisis se pretende identificar prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado. En consecuencia, podemos decir que la clase analizada se centra en la enseñanza de ecuaciones lineales con una incógnita, de solución entera positiva, en niños del sexto grado de una escuela primaria. La temática no ha sido abordada previamente por el grupo de alumnos y es la primera clase de la unidad didáctica.

En esta clase la profesora pretende enseñar la técnica de resolución de ecuaciones por transposición de términos. Por tanto, la práctica matemática realizada por la docente y los alumnos es la resolución de ecuaciones. Los alumnos, sobre todo en las primeras configuraciones didácticas, realizan la práctica de resolver una ecuación por cálculo mental. Posteriormente, lo alumnos logran resolver ecuaciones lineales por transposición de términos, guiados por la profesora a través de interacciones dialógicas. La profesora, además de institucionalizar algunos resultados, hace intervenciones relacionadas con la valoración de las prácticas matemáticas realizadas y descarta las que proponen otros alumnos. Finalmente, la profesora institucionaliza algunos conceptos que emergen de la resolución de ecuaciones lineales por transposición de términos, y propone una serie de ejercicios para afianzar lo trabajado en la clase.

3.6.2. Identificación de objetos y procesos matemáticos

Identificar los objetos presentes en la clase lleva a discriminar entre los seis elementos primarios que considera el EOS: situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, los cuales se articulan en una configuración epistémica. Al discriminar los objetos presentes en la práctica y estructurarlos en la configuración epistémica se logran resaltar ciertos aspectos que con otro tipo de herramientas no se muestran tan claramente. Detallamos a continuación algunos de ellos, y para este caso particular:

- Las **situaciones-problemas** que presenta la profesora para iniciar el tema pertenecen estrictamente a un contexto intra-matemático.
- Cuando los alumnos manifiestan dudas, los **argumentos** que esgrime la docente con la intención de conseguir la comprensión, terminan siendo incorrectos o, en el mejor de los casos, muy confusos.

- Los **argumentos** son típicamente conductistas o mecanicistas, puesto que son ejemplificaciones del procedimiento a seguir, sin ningún tipo de justificación matemática.
- Las **propiedades** relevantes del tema (en este caso las propiedades de las ecuaciones equivalentes) no se dan explícitamente y se presentan en forma de reglas a seguir, sin ninguna justificación matemática de por medio.

El análisis detallado de las prácticas realizadas en la clase muestra que se ponen en juego muchos de los procesos matemáticos que se consideran en el EOS (Font, Planas y Godino, 2010), además de otros. Dado que los procesos son densos en la actividad matemática, no mostraremos el estudio exhaustivo de ellos y por tanto, nos limitaremos a realizar una síntesis con los más relevantes. En general, el análisis de la clase muestra que esencialmente se realiza un proceso de *institucionalización* de los objetos matemáticos: ecuación lineal de primer grado con una incógnita, incógnita, solución de una ecuación y del proceso de resolución de este tipo de ecuaciones por el método de transposición de términos; y un proceso de *algoritmización* (mecanización) de dicho procedimiento de resolución.

En la trayectoria argumentativa que lleva a la institucionalización y mecanización, los alumnos y la profesora van adoptando tanto el rol de proponente como el de oponente. Asimismo, esta trayectoria argumentativa –nutrida por ejemplificaciones más que por justificaciones de los procedimientos y propiedades– se enlaza en una serie de procesos de *problematización* provocados por la profesora, cuya finalidad es ir de una *particularización* –fuertemente apoyada en la *algoritmización*– hasta una *generalización* de los procedimientos. De todos modos, los objetos matemáticos que emergen del proceso de generalización sólo se reducen a la formalización de las reglas que inicialmente había institucionalizado la profesora para poder resolver los casos particulares que presenta. A su vez, tanto la profesora como los alumnos llevan a cabo procesos de *valoración* que están sustentados por normas y metanormas, cuyo estudio se aborda en el cuarto nivel de análisis.

3.6.3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas

Godino *et al* (2006b) describen, utilizando como criterio el tipo de interacción, cuatro tipos teóricos de configuraciones (magistral, a-didáctica, personal y dialógica). Las configuraciones reales que acontecen en una clase están más o menos próximas a estas configuraciones teóricas.

Una configuración se considera a-didáctica cuando el alumno y el docente logran que el primero asuma el problema planteado como propio, y entre en un proceso de búsqueda autónomo, sin ser guiado por lo que pudiera suponer que el profesor espera. La configuración teórica magistral se basa en la manera tradicional de enseñar Matemática con exposición, seguida de ejercicios de aplicación de los contenidos presentados. Una variante intermedia entre los tipos anteriores puede definirse cuando el profesor se encarga de la formulación y validación, mientras que los alumnos se responsabilizan de la exploración. La institucionalización tiene lugar mediante un diálogo entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución. En este caso, se habla de configuración teórica dialógica.

Otro tipo teórico de configuración didáctica se tiene cuando el estudiante resuelve la situación-problema sin intervención directa del docente. Esto ocurre cuando los alumnos resuelven ejercicios propuestos por el profesor o incluidos en el libro de texto. Se trata de un tipo de configuración didáctica en la que predomina el estudio personal y que el EOS denomina configuración didáctica personal.

Si tenemos en cuenta los procesos que se presentaron en la clase que ha sido nuestro objeto de estudio, podemos notar que básicamente se enseña Matemática con exposición, seguida de ejercicios de aplicación de los contenidos presentados. Pensamos que este modelo de enseñanza deja la responsabilidad a los alumnos de dar sentido a los objetos matemáticos que se introducen a través de los ejemplos y ejercicios que se van mostrando. Como expresan Godino *et al* (2006b, p.31), estaríamos frente a una decisión topogenética: *"primero, yo, el profesor, te doy las reglas generales, después tú las aplicas"*.

Si bien el registro completo de la sesión muestra un constante diálogo entre la profesora y los alumnos, lo cual podría llevarnos a situar a la clase en una configuración dialógica, un análisis más detallado revela que las interacciones se circunscriben a que los estudiantes asuman las tareas, se familiaricen con ellas y se esboce la técnica de resolución de ecuaciones, que es el objetivo que deducimos persigue la docente. La institucionalización (regulación), formulación y validación quedan exclusivamente a cargo de la profesora, sin intervención alguna de los alumnos. Por dicho motivo, 25 de las configuraciones didácticas (de un total de 27) se han considerado del tipo magistral-interactivo.

Por otra parte, dada la gran diversidad de interacciones didácticas que pueden ocurrir en cualquier proceso de instrucción, ejemplificaremos sólo algunas que se han centrado en las interacciones en torno a conflictos del tipo semiótico y de fácil individualización. Un *conflicto semiótico* en el EOS es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales se habla de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto se designan como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) se habla de conflictos (semióticos) interaccionales. Hay que notar que estos tres tipos de conflicto semiótico no son excluyentes, pues dependiendo de la perspectiva desde donde se enfoque, un mismo conflicto puede ubicarse en un tipo u otro.

Es importante destacar que el análisis de cada uno de los conflictos puede comprenderse mejor si se tiene en cuenta la configuración didáctica en la que se enmarca (de allí la importancia de la tabla que proponíamos para sistematizar la información del registro completo de la clase), pues hay que relacionarlo con las prácticas matemáticas que se llevan a cabo en ella, los objetos y procesos involucrados en dichas prácticas y los patrones de interacción y las normas que intervienen en la misma.

A continuación, presentamos sólo dos conflictos semióticos, extraídos de Pochulu y Font (2011), que acontecen en la sesión de clase estudiada.

Conflicto semiótico (cognitivo): En la trascripción estamos en presencia de un conflicto semiótico *("un caramelo más otro caramelo es igual a dos" pero "una x más otra x es igual a dos x"*) potencial, en el sentido que los alumnos no lo manifiestan. Aquí aparecen involucrados los conceptos de "cantidad" y "variable", pero se ve comprometida la construcción de significados por la presencia de un conflicto.

[57] Profesora: Si tengo un caramelo más otro caramelo, ¿a qué es igual?

[58] Alumnos: A dos

[59] Profesora: Entonces una x más otra x es igual a…?

[60] Alumnos: A dos

[61] Profesora: ¿Dos qué?

[62] Alumnos: Dos equis

[63] Alumno$_3$: ¿El valor puede ser siempre par?

[64] Profesora: ¡No!, Siempre varía, pero eso no lo vemos en la EGB 2.

Conflicto semiótico (cognitivo): El conflicto vuelve a ser potencial y se presenta si analizamos las validaciones que realiza la profesora y sus explicaciones posteriores, pues acepta que una expresión adecuada para perímetro de un cuadrilátero es P = L + L + L + L, y sin embargo, en la ejemplificación, se le asignan valores distintos a una misma variable.

[65] Profesora: (dibuja un cuadrilátero en la pizarra): ¿Cuál es el perímetro?

[66] Alumnos: Perímetro igual a lado más lado más lado más lado.

[67] Profesora: (escribe en la pizarra) P = L + L + L + L

[68] Profesora: Por ejemplo si P = 30cm = 10cm + 5cm + 6cm + L = (en la pizarra)

[69] Profesora: Para encontrar la incógnita sirven las ecuaciones.

3.6.4. Identificación del sistema de normas y metanormas

En D'Amore *et al* (2007) y en Godino *et al* (2009) se muestran diferentes criterios de clasificación de las normas que acontecen en un proceso de enseñanza y aprendizaje, tales como: el momento en que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), el aspecto del proceso de instrucción a que se refieren (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica), su origen (disciplina, escuela, aula, sociedad, etc.), etc. De acuerdo con estos investigadores, las normas epistémicas se encuentran en los elementos de las configuraciones de objetos: situaciones-problema, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos; las cuales regulan la práctica matemática en un marco institucional específico.

Ejemplificamos algunas normas transcribiendo las inferencias que hemos realizado al tener en cuenta las frases que ha dicho la profesora en su discurso:

- Los razonamientos en Matemática se han de plasmar por escrito siguiendo determinadas reglas (norma metaepistémica).
- Determinados temas en Matemática se completan en cursos superiores (norma metaepistémica).

- Para comprender determinados temas en Matemática hay que esperar a cursos superiores (norma metacognitiva).
- Los ejercicios de Matemática se hacen de determinada manera (metanorma metaepistémica).
- Para aprender Matemática hay que hacer muchos ejercicios (norma metacognitiva).

No citamos el conjunto de normas que regulan las interacciones y que implícitamente aparecen en la clases, como por ejemplo: la profesora interviene para resolver dificultades de los alumnos; la profesora tiene un papel determinante en el inicio, distribución y finalización de intervenciones que se producen en la clase; los alumnos intervienen cuando no entienden algo, etc., puesto que las mismas son comunes a muchas de las prácticas de Matemática, más allá de ser conductistas, constructivistas, o admitir otra clasificación.

3.6.5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción

Godino *et al* (2006a) consideran que como mínimo se pueden proponer seis criterios para valorar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica. La identificación favorable de estas seis idoneidades parciales en un proceso de instrucción permite considerarlo un proceso idóneo. No obstante, conseguir una sola idoneidad parcial es relativamente fácil, pero es difícil lograr la presencia equilibrada de las seis idoneidades parciales. En Font *et al* (2010, p.102) se describen dichos criterios parciales de la siguiente manera:

> 1. *Idoneidad epistémica*, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas".
>
> 2. *Idoneidad cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
>
> 3. *Idoneidad interaccional*, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.
>
> 4. *Idoneidad mediacional*, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.

5. *Idoneidad emocional*, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción.

6. *Idoneidad ecológica,* para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etcétera.

El análisis realizado, además de describir detalladamente lo que ha sucedido, nos brinda explicaciones de por qué se presentan determinadas dificultades en los alumnos. Por una parte, podemos afirmar que los alumnos tienen dificultades para entender la resolución de ecuaciones, y que éstas se observan, entre otras evidencias, a través de los conflictos semióticos (muchos de ellos potenciales) que se presentaron en la clase y que no se resolvieron. Por otra parte, se pueden hacer predicciones sobre lo que probablemente sucederá en un proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática cuya estructura sea semejante: se producirán conflictos semióticos parecidos, los cuales generarán dificultades como las que describen las investigaciones realizadas en Didáctica de la Matemática sobre el objeto "ecuación".

Por último, si realizamos un análisis ontosemiótico a priori que ponga de manifiesto las diferentes configuraciones epistémicas que forman el significado de referencia del objeto ecuación, y la trama de funciones semióticas que se han de activar para relacionar entre sí los elementos de las configuraciones y las configuraciones entre ellas, se podría observar que las configuraciones didácticas implementadas, en esta clase, no han tenido en cuenta esta complejidad.

Este análisis didáctico que catalogaríamos de minucioso, penetra en la estructura interna de la clase resaltando aspectos y matices, que si bien pueden parecer obvios después de haber sido encontrados, se hallan ocultos ante una mirada general y prematuramente valorativa de una práctica matemática (Pochulu y Font, 2011).

3.7. A modo de cierre

En este capítulo hemos presentado algunas herramientas teóricas que provee el EOS con la convicción de que podrían estar ayudando al futuro profesor de Matemática en sus actividades de docencia e investigación. Entre las aplicaciones, mostramos que la Teoría de Significados Sistémicos puede resultar de utilidad a la hora de buscar un significado de referencia sobre un objeto matemático. Con la Teoría de Funciones Semióticas presentamos herramientas para evaluar la comprensión que logran los alumnos sobre un objeto matemático, analizando las prácticas operativas y discursivas realizadas por una estudiante sobre tareas que se le propusieron. Por último, con la Teoría de Configuraciones Didácticas planteamos que se puede hacer un análisis didáctico minucioso, al igual que una radiografía, de una clase de Matemática, para llegar a describir, explicar y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Creemos que estas herramientas del EOS pueden ser útiles en dos aspectos. Por una parte, ayuda al colectivo de profesores que están interesados en reflexionar sobre su propia práctica, o que quieren iniciarse en investigación. Por otra parte, orienta a los profesores en formación a desarrollar competencias didácticas y matemáticas al valorar, reflexionar y sugerir acciones de mejora sobre procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

3.8. Referencias bibliográficas

Abrate, R.; Pochulu, M. y Font, V. (2009). Metáforas en contextos de resolución de ecuaciones. En M. Pochulu, R. Abrate y S. Visokolskis (Eds.) *La Metáfora en la Educación: descripción e implicaciones* (pp.95-126), Villa María: Eduvim.

D'Amore, B.; Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma 28 (2)*, 49-77.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competencia. *Biaix 19*, 33-36.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa 8(1)*, 67-98.

Font, V.; Planas, N. y Godino, J. D. (2010) Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje 33(1)*.

Font, V. y Ramos, A. (2005) "Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales". *Revista de Educación 338*, 309-346.

Godino, J. D. (1996). Mathematical objects: their meanings and understanding. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.) *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.417-424), España: Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO 25*, 77-87.

Godino, J. D. (2003).*Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Extraído el 2 de febrero de 2011 de http://www.ugr.es/~godino/funciones-semioticas/ monografiatfs.pdf.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14(3)*, 325-355.

Godino, J. D.; Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 39(1-2)*, 127-135.

Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V. y Wilhelmi, M. (2006a). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma 27(2)*, 221-252.

Godino, J. D.; Contreras, A. y Font, V. (2006b). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques 26(1)*, 39-88.

Godino, J. D. ; Font, V. y Wilhelmi, M. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones 38*, 25-49.

Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias 27(1)*, 59-76.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 361-394.

4
Socioespistemología

Cecilia Crespo Crespo

4.1. Introducción

Las argumentaciones lógicas y las demostraciones han desempeñado un papel importante en la Matemática, tanto en su fundamentación como su enseñanza. Aunque es usual relacionar estrechamente el concepto de lógica con el de Matemática, a lo largo de la historia, las concepciones relacionadas con las demostraciones no se han mantenido estáticas, han cambiado notablemente reflejando características de los escenarios socioculturales en los que se desenvolvieron. Al centrarnos en el aula, el concepto de demostración suele ser considerado una de las nociones medulares en la Matemática (NCTM, 2000) y se enfatiza sobre su importancia sugiriéndose su construcción en forma gradual y espiralada en la escuela y que se continuará posteriormente.

Es casi unánime la aceptación entre los investigadores de la importancia de la presentación y transmisión de las demostraciones en el aula. Diversas investigaciones (Balacheff, 2000; Godino y Recio, 2001; Ibañes, 2001; Duval, 1999; Hanna, 1997, 2000; de Villiers, 1993; Arsac, 1987) se han centrado en las demostraciones matemáticas, pero también identifican dificultades en el manejo de las mismas por parte de alumnos en los distintos niveles de la enseñanza. La investigación que se presenta en este trabajo se ubica en la perspectiva socioepistemológica, que ofrece una visión incluyente de las variables del tipo social y cultural que participan en la construcción del conocimiento, en particular de las argumentaciones matemáticas consideradas como una construcción sociocultural (Crespo Crespo, 2005, 2007).

El objetivo propuesto en este capítulo es realizar una presentación que permita comprender el carácter sociocultural de las argumentaciones matemáticas y de esta manera entender las estructuras que tienen algunas argumentaciones presentes en el aula de matemática y el carácter social de su origen.

Describiremos primeramente algunas características en las que se sustenta la Socioepistemología como marco teórico de la Matemática Educativa que reconoce el carácter social de la Matemática.

4.2. El enfoque socioepistemológico y el carácter social de la Matemática

La postura de la Matemática Educativa, en la que se enmarca la investigación que realizamos, frente a la problemática de las demostraciones y argumentaciones en el aula, sustenta la consideración de que éstas son un elemento más que caracteriza la Matemática presente en el aula.

> La matemática educativa no es la enseñanza de la matemática, ni la matemática escolar una simplificación de la matemática. Su objeto de estudio son los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. [...] No nos reducimos a la búsqueda de una 'buena manera de enseñar' una cierta noción previamente fijada, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber (Cantoral, 1995, pp.2-3).

Esta línea de investigación considera necesario realizar una aproximación sistémica y situada que atiende a circunstancias y escenarios socioculturales particulares, que permita incorporar cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: naturaleza epistemológica, dimensión sociocultural, planos de lo cognitivo y modos de transmisión vía la enseñanza. Esta aproximación se ha llamado formalmente el acercamiento socioepistemológico. Puede decirse que la problemática de estudio de la Matemática Educativa es *"el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema* *de enseñanza*" (Farfán, 2003, p.5). Este proceso por el cual se incorporan los saberes matemáticos en el sistema educativo, plantea una serie de problemas de carácter tanto teórico como práctico que necesitan acercamientos teóricos y metodológicos adecuados. "*La socioepistemología se plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares. El conocimiento, en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y los diversos factores sociales*" (Lezama, 2005, p.341). El enfoque socioepistemológico, a través del análisis integral desde las cuatro dimensiones, permite comprender al conocimiento matemático como una construcción sociocultural. Reconociendo la naturaleza y construcción social del conocimiento matemático, se prioriza la actividad humana contrastando con enfoques teóricos que giran alrededor del objeto matemático. La aproximación socioepistemológica de la Matemática Educativa se ocupa de las problemáticas que plantean la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional.

Es básico en la Socioepistemología el papel de los escenarios involucrados en la generación del conocimiento. El concepto de *escenario* se afianzó a partir de la introducción del estudio de los contextos escolares e institucionales, comprendidos como fundamentales en la construcción y transmisión del conocimiento matemático (Martínez, 2005). Desde la perspectiva socioepistemológica, estos procesos son condicionados por circunstancias cognitivas (propias del funcionamiento mental), didácticas (propias de la conformación de los distintos sistemas didácticos), epistemológicas (propias de la naturaleza y significados del pensamiento matemático) y sociales (como proceso de síntesis de los objetos y herramientas de una sociedad). Estas circunstancias, de naturaleza diversa, son las que originan que la Matemática Educativa enfoque desde los cuatro componentes correspondientes y de manera integral su estudio e investigación. En la perspectiva socioepistemológica se identifican algunas unidades de análisis a tener en cuenta en una investigación (Martínez, 2005):

- La noción de ***actividad humana***, permite explicar el conocimiento en términos de herramientas usadas por el hombre para hacer Matemática.
- La noción de ***resignificación*** se orienta a presentar el conocimiento con significados propios, contextos, historia e intención, contraponiéndolo a la idea platónica de preexistencia de los objetos y procesos matemáticos.
- La noción de ***práctica social***, medular en la Socioepistemología, se refiere a las acciones intencionales de los grupos humanos para transformar la realidad social y material.

La Matemática Educativa, de esta manera, se enfoca actualmente en ciertas nociones que en su carácter de práctica social logran una resignificación en el proceso de construcción del conocimiento. Para el enfoque socioepistemológico, al igual que para la semiótica cultural, la actividad humana es central en la construcción del conocimiento, pero el énfasis socioepistemológico no está puesto en el objeto, sino en la práctica social, con el fin de modelar situaciones para la intervención didáctica (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez Sierra, 2006).

Es importante que se presenten las caracterizaciones existentes de las prácticas sociales, debido al papel que estas unidades de análisis cobran dentro del marco teórico socioepistemológico. En varias investigaciones de esta línea, han surgido caracterizaciones que con el tiempo han perfilado este concepto. Se reconoce a las prácticas sociales como las influencias socioculturales que rodean a los fenómenos de construcción de conocimiento matemático y como el motor principal de la reorganización de la obra matemática, meta y objetivo de la Matemática Educativa; de esta manera, las investigaciones no se orientan hacia los conceptos en sí, sino hacia la manera en la que se construyen los conocimientos como producto de las prácticas sociales en los grupos humanos (Covián, 2005). Las prácticas sociales son reconocidas como acciones de grupos sociales que se dan en cierto escenario sociocultural, en las que se reflejan las características de ese escenario. Por ello se considera el carácter situado de las mismas, debiendo ser estudiadas no de manera aislada, sino teniendo en cuenta al escenario en el que se dan y a la manera en la que éste influye de manera inseparable de él y del grupo humano. Comprendiendo al aprendizaje como parte de la naturaleza humana, y por lo tanto como una actividad que se desarrolla en un escenario, no como una actividad separada de éste, sino como fundamental en él, se lo comprende como parte del proceso de participar en una práctica que siempre implica a toda la persona actuando y conociendo al mismo tiempo, poniendo en juego aspectos explícitos e implícitos del escenario.

> El concepto de "práctica" connota hacer algo pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido, la práctica es siempre una práctica social. […] En los contextos sociales, donde se ejercen prácticas sociales, se incluye todo, en ese sentido no es una realidad escindida, aunque a veces haya diferencia entre lo que decimos y lo que hacemos, aquello a lo que aspiramos, lo que nos conformamos, lo que sabemos y lo que podemos manifestar (Arrieta, 2003, p.63).

Pero las prácticas sociales no se refieren únicamente al aprendizaje, involucran los conocimientos matemáticos eruditos, escolares, el uso, construcción y aplicación de conocimientos matemáticos, así como también las creencias, opiniones y actitudes que surgen en la sociedad relacionadas con la Matemática. Las prácticas sociales están presentes como una noción que forma parte del conocimiento mismo, es algo que está oculto, que no se puede tocar o nombrar porque no está manifestado materialmente pero sin embargo se siente (Covián, 2005).

> Entendemos pues, por prácticas sociales, el conjunto de acciones que surgen y permanecen en el ambiente social, afectando y conformando la psique de todo individuo. La práctica social no es estática, es activa, se está construyendo día a día y es producto del hombre mismo, su característica principal es que es vigente y genera consenso, no siempre se manifiesta o percibe con toda claridad, puede estar oculta, pero se intuye y se presiente, la práctica social puede estar constituida por actividades motrices o intelectuales, [...] otra característica de la práctica social en matemática educativa es que ésta no atañe a un solo individuo sino a comunidades de individuos (Mingüer, 2006, pp. 8-9).

Se identifica que el papel de la práctica social en la construcción del conocimiento ha transitado por tres niveles de evolución que se denominan etapa inicial, etapa primaria y etapa teórica. La etapa inicial se caracteriza por la *identidad* entre la noción de actividad humana y práctica, en sentido genérico, refiriéndose a actividad humana y práctica de manera indistinta, y dando las características que posee una automáticamente a la otra. La etapa primaria muestra la relación *dialéctica* entre la noción de actividad humana y praxis, explicando las propiedades de uno en conexión con el otro e identificando las características de la actividad humana en conexión con las de la práctica. La etapa teórica introduce una relación compleja entre las nociones de actividad humana, praxis y práctica social. En este nivel aparece una nueva concepción en la que ya no se habla de práctica, sino de praxis, separando a la actividad humana de la práctica y reconociendo características en cada una. La actividad humana es representada por el verbo y caracterizada por una función pragmática; la praxis, por una función reflexiva que analiza la construcción correspondiente, la práctica social debe caracterizarse por la función normativa, concibiendo al proceso de institucionalización como el proceso que reconoce la evolución en las prácticas. La práctica social es reconocida, de esta manera, como normativa de la actividad, no es lo que hace el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen (Cantoral *et al*, 2006).

Otra presentación de las prácticas sociales es la siguiente:

> La **actividad** como aquella observable tanto en los individuos como en los grupos humanos, **la práctica de referencia** como un conjunto articulado de

> actividades, también como aquella que permite la articulación de la actividad con la práctica social, la **práctica social** como reguladora (normativa) de la práctica de referencia y sus actividades relacionadas (Montiel, 2005, p.126).

Otro término cuya significación es preciso clarificar dentro del marco teórico de la Socioepistemología es el de escenario sociocultural. Para lograr caracterizar los escenarios, resulta útil remontarse a la caracterización que se realiza de los escenarios desde la Psicología Ecológica. En este enfoque de la Psicología comenzó a utilizarse el término escenario fuertemente unido a la idea de acción social. La Psicología Ecológica (Rojas, 2004) ha planteado un acercamiento contextual al estudio del desarrollo humano. Este enfoque se centra en un nuevo modo de abordar el análisis de los contextos educativos desde el punto de vista de su significación psicológica, y sus resultados son considerados como fundamentales para la comprensión del hecho humano y del hecho escolar como escenario de desarrollo-educación. En este enfoque, toda conducta humana es concebida como un cambio de cierto estado de un campo en una unidad de tiempo dada. Los escenarios son comprendidos como espacio vital del individuo, en los que se desenvuelve la persona y el ambiente psicológico tal como existe para ella. Si se trata de un grupo, el espacio vital del mismo consiste en ese grupo y su ambiente tal como éste existe para el grupo. El concepto escenario de conducta es un concepto clave.

Para la Socioepistemología el papel de los escenarios socioculturales es similar al de los escenarios de acción de la Psicología Ecológica. Toda persona se encuentra inmersa en una sociedad, se reconoce el individuo como un ser social. Vive rodeado de un contexto, que denominaremos lo sociocultural, que tiene ciertas significaciones colectivas. Éstas tienen su origen en la cultura y en la sociedad, se vinculan con las características individuales cuyas fuentes son la personalidad y el carácter. En esa sociedad, se ha visto que se llevan a cabo prácticas sociales que se manifiestan como: ideas, opiniones, creencias, cultura, ideologías, modas, entre otras, que definen lo sociocultural (Mingüer, 2006). Lo sociocultural es un sistema que abarca todos los fenómenos sociales, que surgen de algún grupo social culturalmente situado. Los grupos sociales están definidos por prácticas culturales específicas que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos que constituyen las sociedades específicas. En estos escenarios se explicitan peculiaridades históricas y cotidianas, de carácter filosófico, epistemológico, ideológico, o podemos decir más generalmente: culturales. El escenario sociocultural influye no sólo en las conductas, sino en la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita, moldeando, de cierta manera, sus acciones y pensamientos, condicionándolos sustancialmente. Todas las características de los escenarios socioculturales influyen en la construcción del conocimiento, comprendido éste como un producto sociocultural, y por lo tanto representativo de la sociedad en la que se gesta.

Es importante diferenciar entre escenarios académicos y no académicos, ya que imprimirán ciertas características representativas al conocimiento matemático que en cada uno de ellos se construya. Algunos autores identifican tres tipos de escenarios socioculturales: cotidiano, escolar y científico (Rodrigo, 1997). Cada escenario asocia a la construcción del conocimiento una epistemología que guía el qué, el porqué y el cómo se construye el conocimiento. Consideramos escenarios académicos a los escolares y científicos, o sea a aquellos en los cuales el conocimiento científico es intencionalmente central, ya sea a través de actividades matemáticas de investigación o de enseñanza. En estos escenarios uno de los objetivos explícitamente planteados por sus actores es la construcción del conocimiento, en nuestro caso, el conocimiento matemático. Esta construcción se lleva a cabo de manera intencional, aunque en algunas oportunidades el conocimiento construido no sea el esperado inicialmente. En los escenarios académicos, los actores poseen la intencionalidad manifiesta de construir y desarrollar el conocimiento científico. Podemos citar entre estos escenarios los ámbitos de investigación que edifica la comunidad matemática y los ámbitos educativos en los distintos niveles y modalidades, en los cuales el docente se propone transmitir el conocimiento al discípulo o al alumno. En los escenarios no académicos, el conocimiento científico no es central de manera intencional, pero eso no significa que en ellos no se pueda construir y manejar este tipo de conocimiento, e incluso influir en la construcción de conocimiento que se lleve a cabo en un escenario académico.

Es posible desde la Socioepistemología analizar, por ejemplo, de qué manera influyen los conocimientos adquiridos en un escenario no académico en la construcción que se realice posteriormente de un conocimiento en un escenario académico, como puede ser el aula.

En este caso, nuestro objeto de estudio son las argumentaciones matemáticas. Nos interesa, por lo tanto, hacer un análisis integral de ellas. A partir de este análisis surgirá la comprensión de las argumentaciones como una construcción sociocultural, en la que cobra una importancia fundamental el escenario en el que se desenvuelven, y la posibilidad de analizar su construcción fuera de escenarios escolares y su incorporación en los mismos.

4.3. Las demostraciones y argumentaciones: la realidad en el aula de Matemática desde la perspectiva socioepistemológica

La comunidad matemática puede ser considerada como una institución del saber, para comprender de qué manera se transmite éste, partiendo de que:

> Por institución se entienden las formas o estructuras fundamentales de la organización social tal como son establecidas por la ley o la costumbre de un grupo humano dado. Las instituciones corresponden entonces al orden social, a un sistema de normas o reglas sancionadas socialmente y organizan la vida de una comunidad (Souto, Mastache, Mazza y Rodríguez, 2004, p.19).

Bajo esta concepción es posible considerar a la comunidad científica como una institución guardiana y transmisora del saber de su ciencia, ya que si bien no posee un espacio geográfico concreto para su desempeño (excepto si consideramos como tal a las academias y universidades), sí posee un desempeño en el tiempo y una distribución de funciones, tareas y roles para cumplir su misión o función social. La ciencia como institución es un "sistema de producción de conocimiento cierto, riguroso y sistemático, basado en la recopilación de datos empíricos guiados por un sistema de racionalidad y obtenidos con una metodología objetiva" (González Uceda, 1997, p.201). En el caso particular de la Matemática, no hablamos de la recopilación de datos empíricos por tratarse de una ciencia formal, sino de resultados y propiedades de los objetos matemáticos. Se considera que la ciencia es establecida por consenso entre los científicos. La ciencia no es un fenómeno de hombres aislados, sino de grupos de investigadores en interacción. En esta concepción de ciencia, tiene indudable importancia el contexto social. "La noción de institución da cuenta de la historia y de los valores fundacionales que estructuran el poder social y su distribución." (Souto *et al*, 2004, p.20).

Para la comunidad científica, es preocupación fundamental el desarrollo de la coherencia interna de la ciencia y las maneras en las que se llega a un conocimiento fiable y comprobado. Las posturas relacionadas con estos mecanismos de validación han evolucionado dentro de la filosofía de la ciencia, reflejándose en la comunidad científica misma. Una de las atribuciones de la comunidad científica es cuidar las formas de validación del conocimiento, alejando de esta manera otras formas de conocimiento que no sea considerado científico. Los criterios de validación del conocimiento científico deben ser establecidos por la comunidad científica y se sustentan en su identidad institucional. Son, por lo tanto, una construcción sociocultural que varía de una comunidad científica a otra, y que han ido evolucionando y modificándose a través del tiempo de una cultura a otra, de acuerdo con la visión de ciencia sustentada.

En los grupos humanos que se organizan en instituciones y comunidades, la transmisión generacional se orienta a la continuidad de la identidad institucional. El éxito de la transmisión supone la existencia de productores de la memoria reconocidos para llevar a cabo la transmisión, que son los depositarios de la memoria legítima. El saber producido y aceptado por un grupo académico, se transmite a través de las publicaciones que realiza. Ya sea a través de la publicación de libros o de artículos en publicaciones periódicas, los miembros de la comunidad científica pueden hacer conocer sus investigaciones e ideas. Estas publicaciones favorecen la difusión de las ideas y abren el diálogo a otros investigadores que incluso pueden no pertenecer a ese grupo académico y que así les es posible acceder a resultados de investigaciones recientes. Otro de los ámbitos de capital importancia para la difusión y enriquecimiento de saberes de un grupo académico en la actualidad son las reuniones y congresos, foros en los cuales se exponen y comparten las investigaciones realizadas con colegas, de manera presencial. En tiempos anteriores era posible encontrar este tipo de comunicación puesto de manifiesto a través de intercambios epistolares entre miembros de la comunidad. El análisis de las publicaciones de una comunidad científica permite conocer, entre otras cosas, cuáles son las formas de validación de sus conocimientos y de qué manera argumenta en favor de los resultados que acepta.

El conocimiento matemático que se construye por medio de esta práctica social debe ser comprendido, en la actividad humana de demostrar, al preguntarnos qué hace que se demuestre como se demuestra. La argumentación que es construida en el escenario socioepistemológico y que se manifiesta y refleja en la práctica social de la demostración. Por ello indagamos acerca de la construcción sociocultural de la argumentación matemática. La presencia de comunidades matemáticas en escenarios muy distintos, lleva a comprender la aparición de estrategias de demostración diversas, de acuerdo con las características aceptadas para la argumentación.

En resumen, teniendo en cuenta las ideas anteriores, es posible identificar en la comunidad matemática ciertos elementos desde la óptica socioepistemológica (Crespo Crespo, Farfán y Lezama, 2010):

- *Sociedad*: comunidad científica matemática.
- *Actividad humana*: hacer matemática.

- *Prácticas de referencia*: validación de resultados.
- *Práctica social*: demostración.
- *Contexto de significación*: lógico.
- *Herramienta*: lenguaje lógico.
- *Construcción sociocultural*: argumentación.

4.4. El origen de esta investigación. Las opiniones de los docentes frente a la demostración en el aula

Para indagar acerca de la concepción de los docentes de la demostración tanto desde el punto de vista matemático, como en su puesta en práctica dentro de la enseñanza de la Matemática en los distintos niveles de la enseñanza, se realizaron investigaciones (Crespo Crespo y Ponteville, 2003, 2004) que permitieron dar una visión de la manera en que ellos reconocen la problemática de la demostración en el aula de Matemática. Estas pueden considerarse las investigaciones iniciales que permitieron comenzar a comprender el papel que juega la demostración en el aula de matemática y que se convirtieron en el germen del abordaje posterior. En ellas se utilizaron cuestionarios y entrevistas a estudiantes y docentes en ejercicio tanto en el nivel medio como en el terciario y universitario. Las preguntas estuvieron orientadas a analizar las creencias y conocimientos acerca de la demostración y su importancia dentro de la Matemática y su enseñanza. Se obtuvo evidencia de que la enseñanza de la demostración como contenido matemático no es siempre una problemática asumida en forma sistemática, sino de manera intuitiva. Los docentes diferencian la idea de hacer demostraciones y la de enseñar a demostrar, siendo esto último algo que pocos reconocen llevar a cabo en el aula. Resulta de gran dificultad para los docentes la identificación de la demostración como un contenido a enseñarse; se infiere de sus respuestas que ven a la demostración como un procedimiento propio de la Matemática, indispensable para dar credibilidad a las afirmaciones de la Matemática.

Posteriormente y para indagar acerca de la finalidad con la que se presentan y trabajan las demostraciones matemáticas en el aula, se enfocó el análisis en la detección de las concepciones que poseen los docentes y los estudiantes de Profesorado de Matemática sobre las funciones de las demostraciones (Crespo Crespo y Ponteville, 2005), focalizándonos no sólo en las funciones de la demostración en el aula, sino también en el ámbito de la investigación en Matemática. En el análisis cualitativo surgió primeramente que para los encuestados no existen distintos niveles de demostraciones ni de argumentaciones, ambos términos fueron interpretados como sinónimos.

Por otra parte, se evidencia una concepción de la Matemática como única y atemporal, no apareciendo idea de la aceptación de las demostraciones dentro de una comunidad. La idea de argumentación en el aula apareció, en estas investigaciones, unida a la presentación de teoremas en clase, evidenciándose algunas de las funciones de la demostración y reconociéndose la importancia de la demostración tanto en la investigación científica en Matemática como en el aula, aunque sin manifestar explícitamente, a veces, las razones de dicha importancia. En algunos casos los docentes entrevistados identificaron que en el aula los alumnos no asumen la necesidad de demostrar, pues estos últimos creen que es suficiente para dar validez a sus resultados, el estudio de algunos casos particulares. Dichos docentes reconocen la necesidad de crear en los estudiantes la conciencia sobre la necesidad e importancia de las demostraciones como método esencial para otorgar validez a los resultados en la Matemática.

Sobre la base de las ideas de de Villiers acerca de las funciones de la demostración (de Villiers, 1993), se analizaron las respuestas del grupo de docentes y estudiantes con el que se trabajó. Algunos de los encuestados reconocen explícitamente varias de las funciones; otros, ninguna. Una conclusión interesante que pudo extraerse es que la función de verificación de las demostraciones es reconocida sobre todo en la Matemática mientras que en el aula la función que se reconoce como predominante es la de explicación. Esto muestra el énfasis de las explicaciones para lograr que los alumnos lleguen a comprender los conceptos y las propiedades que se están trabajando en el aula. Se denota el carácter didáctico de esta función.

Estas investigaciones permitieron conocer posiciones, visiones y opiniones de los docentes frente a las demostraciones y su presencia en el aula de Matemática e invitaron a continuar con la reflexión e investigación.

4.5. Demostraciones y argumentaciones a través de la historia: los escenarios y características de su evolución

La Matemática Educativa, a través del enfoque socioepistemológico de los conceptos permite un acercamiento múltiple a los aspectos que estos poseen y a los escenarios socioculturales en los que los conocimientos matemáticos surgen, se desarrollan y se transmiten. A partir de esta comprensión, es posible proponer nuevos enfoques acordes con los escenarios en los que se realiza la construcción y transmisión y, permitir la reflexión permanentemente sobre su implementación en el aula. Las ideas matemáticas, por su carácter sociocultural, son el reflejo y producto de un determinado escenario. La comprensión de las condiciones en que se generaron, la manera de pensar de los científicos que le dieron origen, la finalidad y la manera en que las desarrolló, cómo era la sociedad en la que se gestaron y qué problemáticas ocupaban a la sociedad, la manera de pensar, de ver el mundo, la ciencia y la sociedad son algunas de las cuestiones que hacen al escenario correspondiente. El análisis de esos escenarios da la posibilidad de conocer el contexto epistemológico en que se desarrolla y de esta manera proveer de un elemento más para buscar las mejores estrategias para diseñar actividades que lo lleven al aula.

La cultura comenzó a surgir al asentarse las poblaciones, ya que al realizar asentamientos estables, las sucesivas generaciones no se limitaron a reproducir las prácticas de sus ancestros, sino que se originó generación tras generación, una acumulación progresiva de adelantos técnicos que dieron origen a creencias y saberes que caracterizaron a la cultura de esa comunidad. En el caso particular de la Matemática, la práctica social de la demostración, pensada como mecanismo de validación, no es la misma de una comunidad a otra, se ha modificado y evolucionado de una cultura a otra; no es la misma para las distintas comunidades matemáticas. Otro elemento de importancia en los escenarios en los que aparecen legados matemáticos es tener un soporte material a través de la escritura, que liberaba al hombre de las limitaciones de la memoria, permitiendo además guardar registros y hacer más sencilla la transmisión. Civilizaciones con estas características surgieron en varios lugares. Sus escenarios, aunque diferentes, ostentan características comunes. Los conocimientos matemáticos desarrollados tienen mucho en común aunque las técnicas utilizadas difieran en oportunidades.

Realizamos un breve recorrido a través de la Historia centrándonos en ciertas culturas y momentos para comprender las características de la normativa propia de los mecanismos de validación de la Matemática.

Los conocimientos matemáticos construidos en la antigüedad en Egipto y en la Mesopotamia se relacionan con las necesidades materiales de la sociedad. Estos pueblos manejaban ciertas fracciones y aplicaban propiedades geométricas y reglas a casos particulares. La precisión de los cálculos efectuados se probaba por lo general a través de la verificación de los resultados obtenidos. Este método es también utilizado actualmente para verificación de resultados de ecuaciones y otros problemas matemáticos. De los documentos que han llegado a la actualidad, puede inferirse que ninguno de estos pueblos estaba interesado en generalizar ni en abstraer u organizar sistemáticamente los conocimientos que poseían, sólo se interesaban por la resolución de problemas prácticos, tal como se pone de manifiesto en papiros y tablillas que han sido traducidos. Se supone que se arribaba a los resultados matemáticos no por demostración ni deducción, sino por vías empíricas y tentativas, que permitían la aplicación de los resultados a casos particulares.

El escenario de India es, en la antigüedad, completamente distinto del que tuvo lugar en Occidente. En él fue posible que se construyeran objetos matemáticos como el cero o el infinito, en medio de la utilización de argumentaciones en las que no son válidas las leyes del pensamiento que Occidente heredó de la Filosofía aristotélica. Aunque se ha afirmado a veces que las contribuciones importantes son *acontecimientos episódicos sin continuidad* (Boyer, 1996), el desarrollo de la Matemática india es notable. Aparecen en algunos casos cierto grado de argumentaciones para explicar los resultados en los Sulvasutras, textos en los que se describen las formas geométricas y orientaciones de los altares y la ubicación de los fuegos sagrados con las prescripciones establecidas por los libros sagrados védicos, mediante explicaciones de reglas de manera similar a algunos de los teoremas demostrados por Euclides en sus Elementos. Resulta curioso que los matemáticos indios posteriores a este período no hacen alusión a los contenidos matemáticos utilizados por éstos. Aparecen entonces en la Matemática india desarrollos de fórmulas para realizar cálculos geométricos y trigonométricos a través de deducciones. Algunas afirmaciones geométricas se prueban haciendo referencia a las figuras, siendo fundamental entonces en la Matemática la exactitud en el trazado de los dibujos, ya que éstos se constituyen en argumentos. Las necesidades prácticas de este pueblo lo llevaron a optar por desarrollar generalmente conocimientos algorítmicos en lugar de buscar una fundamentación de los mismos, por lo que no se interesaron especialmente por las demostraciones. Podemos hablar de esta manera de un teorema en dos sentidos: como resultado que se aplica y que se enuncia como una proposición, o bien integrado dentro del cuerpo sistémico de la Matemática.

El escenario de China se caracterizó en la antigüedad por un ideal de inmovilidad institucional, con la preocupación de conservar el orden familiar, político y social, a partir de las ideas de Confucio surgidas como reacción ante la anarquía que había reinado en milenios anteriores. No existe casta sacerdotal, sino funcionaria, de los llamados mandarines, que son los hombres cultos de la sociedad. Se desarrolló un complicado sistema de exámenes estatales, única manera de acceder a los cargos de la administración pública. Estos exámenes eran teóricamente abiertos a todos, pero en la práctica sólo podían acceder a su aprobación quienes estudiaban en ciertas escuelas privadas en las que se impartía una preparación literario-formalista. La Matemática era también una materia obligatoria en estos exámenes. La Matemática china tuvo creciente aplicación en diversas disciplinas a través de los calendarios, la topografía, cronología, arquitectura, meteorología, comercio, pago de impuestos. Tuvo una marcada preferencia por lo concreto. Diseñaron cuadrados mágicos y círculos mágicos, los que no limitaban su interés a la Matemática recreativa, sino que eran asociados al desafío, pero también con atractivo estético y como talismanes. Utilizaron en Geometría figuras planas y cuerpos geométricos. La Geometría china provee una amplia gama de problemas resueltos a través del principio de complementariedad interna y externa, en el que se trabajan las relaciones espaciales y la discriminación visual por medio de la organización de la información brindada por ciertos sólidos básicos. El razonamiento realizado en la resolución de sus problemas es totalmente distinto al que realiza la Geometría euclidiana y no sería aceptado desde la óptica griega.

En Grecia, antecesora del pensamiento científico occidental, la época de los presocráticos, caracterizada por la búsqueda del *arjé* o principio de las cosas, pone de manifiesto argumentaciones diversas para defender cada postura y justificar el correspondiente principio. Estas ideas marcaron en la forma de pensamiento una ruptura, un cambio de la manera de ver el universo, suele decirse que se produjo un rompimiento con el mito como explicación de los fenómenos que ocurren en la naturaleza. La razón comenzó de esta manera a reemplazar a los mitos. La Matemática griega introdujo como elemento novedoso y que le imprimiría un sello imborrable a esta ciencia, el *método deductivo*. Los documentos de la época son escasos y generalmente no son textos matemáticos, por lo que no sabemos con exactitud la manera en la que surgió la demostración en esta ciencia. Se considera que en la primera etapa de la "*Matemática demostrativa*" de los griegos, éstos creyeron poder y deber demostrar todo, pero en este escenario demostrar se refiere a demostrar empíricamente propiedades y construcciones, utilizando regla y compás. Se trata de una concepción de demostración diferente de la que predominaría posteriormente en la Matemática basada en argumentaciones de carácter deductivo. En la incorporación del método deductivo a la Matemática resultó central la intención filosófica de construir una ciencia teórica cuya meta era el conocimiento de la verdad. Esta fue la manera de trabajar en Matemática durante varios siglos, más de dos mil años.

Siglos después, el concepto de verdad cambió radicalmente en la Matemática desde la aparición de las Geometrías no euclidianas. La verdad dejó de ser absoluta, una propiedad matemática pasó a ser verdadera dentro de un sistema y falsa en otro. Hasta ese momento la verdadera Geometría era la euclidiana. A partir de entonces, dependerá de cuáles son los axiomas de los que se parte, cuáles son las propiedades verdaderas y las que no lo son.

Hasta el siglo XX, podría decirse que la demostración matemática fue un proceso supuestamente claro e indiscutible. Las demostraciones eran el alma de la Matemática, la forma de justificar la validez de sus afirmaciones, de comprobar o refutar sus conjeturas. Los principios de la lógica habían sido sentados por Aristóteles y eran la base sobre la que se construyen los conocimientos matemáticos. A partir de la toma de conciencia de la aparición de paradojas a principios de este siglo, se produjo cierta inseguridad sobre cuáles y cómo son los principios sólidos. Las posiciones formalistas extremas han exagerado el aspecto sintáctico de los sistemas axiomáticos, poniendo el acento en aspectos sintácticos, en detrimento de los semánticos y de la intuición. Indudablemente, la Matemática es mucho más que mero encadenamiento deductivo y formal. Aparece además relacionado con ella un proceso creativo, ligado a la formulación de conjeturas, a la presencia de ejemplos y contraejemplos.

Las ideas que se acaban de presentar muestran brevemente una evolución en los mecanismos de validación que utiliza la comunidad matemática a lo largo de distintas culturas. Consideramos, entonces, a la demostración como una práctica social de la comunidad matemática que se lleva a cabo fundamentalmente para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. La demostración es, por lo tanto, una práctica social característica de la comunidad matemática. Esta práctica social ha tenido en esencia siempre la misma finalidad, pero sus manifestaciones han sido distintas. No es la misma de una comunidad a otra, se ha modificado y evolucionado de una cultura a otra; cambia para distintas comunidades matemáticas. Esto es claramente comprensible desde la Socioepistemología, ya que en cada escenario sociocultural, refleja las características de éste, pero su finalidad básica ha sido la legitimación del saber matemático, aunque no es esta su única función. La presencia de comunidades matemáticas en escenarios muy distintos lleva a comprender la presencia de estrategias de demostración diversas, de acuerdo con las características aceptadas para la argumentación. Esto también permite comprender la posibilidad de aceptar como válidas algunas y no otras de acuerdo con las características básicas de los escenarios en los que ocurren.

Como se ha afirmado en nuestra breve recorrida a través de la Historia, durante siglos las argumentaciones utilizadas en la comunidad matemática han tenido ciertas características sustentadas en la lógica aristotélica. Estas son las argumentaciones que se construyen para demostrar una propiedad en la Matemática occidental, y que se espera encontrar también en el aula de Matemática. Por encontrarnos inmersos en esa comunidad matemática, cuando se utiliza el término demostración, se lo hace con ese significado absoluto, como si fueran las únicas demostraciones aceptadas, no viendo que se trata en realidad de un término que es relativo al escenario socioepistemológico.

Los escenarios sin influencia griega fueron totalmente distintos de los que existieron en las culturas que recibieron la tradición aristotélica. Hay que admitir que la lógica aristotélica no se presentó en escenarios como los que se acaban de describir. Algunos historiadores califican a la Matemática de estas culturas como incompleta e imperfecta. Para ellos la Matemática nace en Grecia unida a la razón. En estos escenarios en los que la lógica tuvo características muy diferentes a la aceptación de las leyes de la lógica aristotélica, y se dio la aparición y uso de lógicas cuyas leyes difieren de la lógica clásica, es posible reconocer el surgimiento de conceptos matemáticos como el cero y el infinito, para los que en Occidente fue necesario que transcurrieran siglos de discusiones y desacuerdos entre los científicos para lograr su construcción y aceptación dentro de la Matemática (Crespo Crespo, Farfán y Lezama, 2009). De esta manera es posible reconocer que el valor de estas formas de pensar no es inferior al de la cultura griega, sino que simplemente es distinto; que las particularidades de los escenarios socioculturales imprimen a los conocimientos construidos características que les son propias y que dan oportunidad a la construcción de ciertos conocimientos matemáticos.

4.6. Las argumentaciones en escenarios no académicos

Algunas formas de argumentación deductiva, como la reducción al absurdo que se hallan fuertemente basadas en el principio del tercero excluido y en el principio de no contradicción, no son aceptadas por los estudiantes, sobre todo si provienen de carreras relacionadas con la Informática, que consideran que no es un esquema natural de pensamiento. Sin embargo, al solicitarles a alumnos de Profesorado de Matemática, que sí aplican esta forma de argumentar, que identifiquen su uso en escenarios no escolares, no pudieron, en general, detectar ejemplos coherentemente y sólo en algunos casos lograron lo solicitado debiendo recurrir a situaciones en las que se conjugan creencias, relaciones humanas, política, juegos dialécticos o de ingenio (Crespo Crespo, 2005). Así, es posible observar la influencia de la formación profesional para la aplicación de ciertas estrategias de argumentación. Las estructuras de pensamiento propias de un escenario profesional determinado, como ser la estructura del condicional utilizado en programación en el caso de los estudiantes de Informática, tiene influencia en la manera de resolver situaciones problemáticas y de argumentar acerca de las mismas. En estos alumnos las formas de argumentar indirectas son rechazadas y cuestionadas.

Para investigar algunas características más acerca de las argumentaciones que se utilizan fuera del aula de Matemática, se realizaron dos entrevistas. Una de ellas, a un estudiante de Licenciatura en Letras, la otra a un psicoanalista que ejerce además la docencia. Se intentó reconocer la importancia que tienen para disciplinas no matemáticas las formas de argumentación que se construyen en el aula de Matemática. Las entrevistas mostraron que las argumentaciones que se realizan en escenarios no matemáticos no se sustentan en principios aristotélicos (Crespo Crespo, Farfán y Lezama, 2010). En estas entrevistas surge que para las argumentaciones que se realizan fuera del aula de Matemática, no son estos principios los que les dan fuerza, sino la capacidad que tienen para convencer a su interlocutor, junto con la idea de claridad y la importancia de la existencia de códigos comunes de los interlocutores. Por otra parte, para ninguno de los entrevistados el estudio formal de la lógica es reconocido como base para la adquisición de formas de argumentación en escenarios no académicos ni correspondientes a disciplinas no matemáticas. Las argumentaciones fueron reconocidas por los entrevistados con sentido en lo social, en la comunicación, en el intercambio con el otro, en demostrar algo a alguien. Ellos no reconocen a la lógica de origen griego como algo innato, ni como la única posible manera de pensar de forma correcta. En las entrevistas surge el reconocimiento de diferencias entre la argumentación científica y la argumentación en escenarios no académicos, y también en las formas de argumentación presentes en distintos escenarios.

Las respuestas obtenidas en esta etapa del estudio refuerzan las evidencias anteriores obtenidas del análisis histórico epistemológico en el sentido de que la argumentación es una construcción sociocultural, pero agregan elementos importantes, permitiendo identificar como una de las finalidades de la argumentación su poder de convencer, de hacer que el otro crea en lo que se dice, de lograr que reconozca que lo que se dice es verdad. En los escenarios no matemáticos se construyen formas de argumentación distintas a las que se construyen en el aula de Matemática; éstas no son aplicadas en aquéllos. Las formas de argumentar que se construyen en cada escenario son distintas entre sí, se basan en fundamentos lógicos de distinta naturaleza, cobran vigencia en el consenso de la sociedad que actúa en ese escenario.

4.7. Argumentaciones que no se enseñan en el aula

En ciertas oportunidades es posible detectar en el aula modos de razonamiento de los alumnos que no son acordes con la tradición aristotélica. Por lo general éstos son rechazados y considerados incorrectos, no siendo tenidos en cuenta por los docentes. Se trata generalmente de formas de argumentación resultantes de una transferencia que realizan los estudiantes a escenarios académicos de formas de argumentar que son utilizados de forma exitosa en otros escenarios cotidianos, que han sido construidos en escenarios no académicos. La visión socioepistemológica de la Matemática debe tener en cuenta estas formas de razonamiento, la manera en las que son realizadas y cómo se reflejan en el aprendizaje y validación de resultados matemáticos, ya que denotan la transferencia de los mismos de unos escenarios a otros.

Describimos a continuación algunas de estas formas de argumentación que se presentan en el aula de Matemática y no han sido construidas dentro de ella.

La concepción de los condicionales en los estudiantes suele ser causal y es común que al preguntarles la explicación de cierto proceso que hayan utilizado en la resolución de un problema, acudan a razonamientos abductivos[4]. Esto quizá se deba a que confundan la estructura condicional con la bicondicional y de esta manera asignan a las argumentaciones abductivas carácter de válidas. En la vida cotidiana, los razonamientos abductivos son bastante utilizados y de manera exitosa. También en las primeras etapas de la construcción de conocimiento científico es utilizada la argumentación abductiva. El problema se presenta cuando los estudiantes pretenden seguir basando sus conocimientos matemáticos en la abducción y llegan a resultados erróneos como consecuencia de su aplicación, no comprendiendo por qué en un principio se aceptó esta

[4] El término abducción fue introducido por el filósofo Charles Sanders Peirce para referirse a razonamientos cuyas premisas son una implicación y su consecuente, y que tienen por conclusión el antecedente de la misma.

forma de argumentar y posteriormente se les afirma que no se trata de una manera segura y correcta de razonar.

También es frecuente encontrar en el aula argumentaciones inductivas. Los alumnos, a veces, ante un enunciado de una propiedad matemática, prueban una cantidad finita, incluso no muy grande, de casos aislados, concretos, y de eso concluyen que cierta proposición. También la inducción suele utilizarse en el aula por parte del los docentes con fines didácticos, en los momentos de motivación y comprensión de un tema.

Existen, por otra parte, estudios actuales acerca de los aportes que pueden hacer las demostraciones visuales a la comprensión de la demostración matemática. Éstas se sustentan en la utilización de representaciones visuales, el uso de diagramas y otros elementos que ayuden a visualizar las propiedades que se desea demostrar. Otro tipo de argumentaciones visuales son las que utilizan recursos computacionales. Los alumnos utilizan estas construcciones para visualizar las propiedades y los especialistas se refieren en muchas oportunidades a ellas como demostraciones visuales.

Estas formas de argumentación, presentes en el aula de Matemática, no son enseñadas en ella. Nos preocupa que los estudiantes no lleguen a los resultados que como profesores esperamos, no coincidiendo sus formas de razonar con la manera deductiva clásica, fundamentada en la tradición aristotélica. Ellos están transfiriendo al escenario del aula formas de argumentación que son propias de escenarios no académicos, de la manera que utilizamos con frecuencia en razonamientos cotidianos. Consideramos indispensable una mirada sobre la escuela actual en función de las argumentaciones. Las instituciones educativas están entrando en un período de crisis que deberá desembocar en un replanteo de sus actividades, de los roles que en ellas se desempeñan. La causa de la crisis de las instituciones educativas es que no es posible pensar un modelo escolar que marque los espacios y tiempos de aprendizaje en la sociedad actual. "*Estamos pasando de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa*" (Barbero, 2008, p.68). Esta idea parece esencial, ya que llama la atención a buscar fuera de la escuela los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se los construyen. La escuela pasa a ser, bajo esta concepción, una instancia más de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento.

En el caso de las argumentaciones, nuestro esquema actual de escuela ha intentado, siguiendo el esquema aristotélico de ciencia, enseñar formas de argumentar deductivas. Sin embargo, no ha logrado con los estudiantes actuales resultados satisfactorios. Hemos mostrado la presencia en el aula de algunas formas de argumentar no deductivas que en algunas oportunidades parecen incluso más convincentes para los estudiantes. Indudablemente han sido construidas en escenarios no académicos y son utilizadas en la sociedad para comunicarse, justificar, inferir, defender ideas. Con el reconocimiento de que nos hallamos en una sociedad educativa, los docentes deberemos prestar atención a estas formas de argumentación y a su construcción.

La Socioepistemología, al reconocer la construcción social del conocimiento y comprender que éste se lleva a cabo en un escenario determinado y a veces se transfiere a otros escenarios, estudia la manera en la que se produce esa transferencia. El alumno actúa en escenarios académicos y no académicos, trae argumentaciones construidas en los segundos a los primeros. Si la escuela se mantiene con la convicción de que ella constituye el sistema educativo y no reconoce, según las palabras de Barbero que mencionamos anteriormente, la existencia de una sociedad educativa, no podrá repensarse en la reconstrucción del discurso matemático escolar.

4.8. Consideraciones finales

Hemos presentado a la demostración matemática como una práctica social y a la argumentación matemática como una construcción sociocultural. Intentando comprender las características de la demostración matemática y las dificultades que se ponen de manifiesto en el aula cuando los estudiantes se encuentran frente a ciertos tipos de demostraciones, se ha reconocido a las argumentaciones como construcciones socioculturales.

Desde la visión socioepistemológica, pensando a la comunidad científica matemática como una sociedad que tiene como una de sus atribuciones cuidar las formas de validación del conocimiento, se identifica a la demostración como una práctica social dentro de un contexto de significación lógico. Esta práctica social no es la misma de una comunidad a otra, se ha modificado de una cultura a otra.

Aceptar la demostración como una práctica social, nos lleva a utilizar la palabra demostración de una manera distinta a la utilizada normalmente: al ser una práctica social dentro de una comunidad, permite construir argumentaciones que estén de acuerdo con el escenario correspondiente. Al hablar de demostración, no nos restringimos a las deductivas características de la comunidad matemática con influencia aristotélica. La presencia de comunidades matemáticas en escenarios muy distintos, lleva a comprender la presencia de estrategias de demostración diversas, de acuerdo con las características aceptadas para la argumentación. Esto también permite comprender la posibilidad de aceptar como válidas algunas y no otras de acuerdo con las características básicas de los escenarios en los que ocurren.

La escuela, inmersa en la sociedad de base aristotélica que reproduce el esquema aristotélico de ciencia, intenta que los estudiantes razonen utilizando formas de argumentar deductivas. Hemos detectado la presencia en el aula de algunas formas de argumentar no deductivas, las que en algunas oportunidades parecen incluso más convincentes para los estudiantes que las deductivas. Muchas de ellas han sido construidas en escenarios no académicos y llegan luego al escenario escolar. Son utilizadas en la sociedad para comunicarse, justificar, inferir, defender ideas. Las argumentaciones surgen en interacciones para convencer al otro de la verdad de lo que se está afirmando.

Para lograr que los alumnos comprendan la necesidad de argumentar matemáticamente e incluso de demostrar propiedades matemáticas, resulta indispensable que construyan la significatividad de la argumentación. La importancia de esta significatividad deberá ser comprendida por los docentes a partir de asumir a las demostraciones matemáticas como prácticas sociales, sólo de esta manera es posible que los alumnos comprendan la importancia de la argumentación para justificar y dar validez a las propiedades matemáticas. En el proceso de argumentación matemática, visto desde el punto de vista social, surge la necesidad de interpretar enunciados y condiciones, de convencer por medio de las argumentaciones aceptadas como válidas dentro del grupo social, pero para ello es necesario estar convencido uno mismo de la necesidad y validez de las formas de argumentación que se utilizan.

Al modificarse las formas de argumentar son modificadas de un escenario a otro, se encuentran unidas no sólo a técnicas y estructuras aceptadas por la sociedad, sino que también reflejan la concepción de verdad que posee dicha sociedad y la lógica que sustenta su pensamiento. La valorización de los distintos procesos de argumentación, no debe llevar a pensar la no existencia de demostraciones, sino a la comprensión de éstas como una construcción sociocultural, que tienen validez dentro del consenso de una sociedad.

Desde la óptica de la Socioepistemología, la demostración matemática no debe pensarse como una estructura predeterminada, propia de la Matemática, sino de cada escenario en el que se desarrolla la Matemática. Es necesario realizar un estudio profundo de las formas de argumentación propias de nuestros escenarios académicos, para poder reconocer y valorar las formas de argumentación presentes en ellos; también para determinar cuáles pueden ser aceptadas dentro de esos escenarios y cuáles deberán ser modificadas, mediante su previa interpretación y tras llegar a consensos en un escenario, acerca de las características que debe tener una argumentación para ser considerada válida en él.

Consideramos que en relación con las argumentaciones y con el enfoque socioepistemológico, la escuela actual debería prestar atención a las formas de argumentar que se construyen fuera de la escuela y que penetran en ella a pesar de que los docentes de Matemática las rechacen. De esta manera, la escuela pasaría a ser reconocida y actuar realmente como una instancia más de aprendizaje, pero no la única, que se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento.

4.9. Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8 (3), 267-312.

Balacheff, N. (2000). *Los procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99), Buenos Aires: Siglo XXI.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. En R. M. Farfán (Ed.) *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa 1* (pp.1-10), La Habana, Cuba.

Cantoral, R.; Farfán, R. M.; Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, 83-102.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (3), 287-317.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003). Las demostraciones en el aula de matemática. En *III CAREM*. Salta.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2004). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (1), 39-44. México: Clame.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2005). Las funciones de la demostración en el aula de matemática. En J. Lezama (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 307-312. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Crespo Crespo, C.; Farfán, R. M. y Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (1), 29-66.

Crespo Crespo, C.; Farfán, R. M. y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: Una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13* (3), 129-158.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon 26*, 15-30.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: un camino de filiaciones y rupturas. En J. R. Delgado Rubí (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16* (1), 5-10. Santiago de Chile: Ediciones Lorena.

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias 19* (3), 405-414.

González Uceda, L. (1997). Teoría de la ciencia, Documentación y Bibliometría. *Revista general de información y documentación 7*(2), 201-215.

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. En A. Gutiérrez & L. Puig (Eds.) *Proceeding of PME 20* (1), 21-34. Valencia.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics 44*, 5–23.

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Valladolid, España.

Lezama. J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (3), 339-362.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 195-218.

Mingüer, L. M. (2006). *Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Estudio de caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Doctorado no publicada, CICATA-IPN, México.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Rodrigo, M. J. (1997). Del escenario sociocultural al constructivismo episódico. Un viaje al conocimiento escolar de la mano de las teorías implícitas. En M.J. Rodrigo y J. Arnay (Comps.). *La construcción del conocimiento escolar*. Barcelona: Paidós.

Rojas, J. (2004). *Elementos para una psicoecología de la acción*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Souto, M.; Mastache, A.; Mazza, D. y Rodríguez, D. (2004). *La identidad institucional a través de la historia. Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González*. Buenos Aires: Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González.

5
Enfoque Cognitivista

Vilma Colombano, Alberto Formica y Cristina Camós

5.1. Introducción

Desde la Psicología existen varias posturas cognitivistas respecto del aprendizaje de los sujetos, como pueden ser, entre otras: el aprendizaje por descubrimiento de Bruner (1998), el aprendizaje significativo de Ausubel (1968), la corriente constructivista basada en la Epistemología Genética de Piaget & García (1989) y la Teoría de Vigotsky (1934).

En las investigaciones psicológicas de tipo cognitivo se estudian diferentes procesos relacionados con la formación del conocimiento, contribuyendo al estudio de diferentes capacidades propias del aprendizaje tales como, por ejemplo, el razonamiento y la memoria. El Enfoque Cognitivista, como programa de investigación en Didáctica de la Matemática, tiene sus raíces en la Psicología pero se ha desarrollado autónomamente como un campo de la Educación Matemática. Está basado en una visión constructivista del conocimiento individual, tiene como principales elementos de análisis a las representaciones o esquemas mentales de objetos matemáticos, el aprendizaje significativo, entendido como proceso mediante el cual un nuevo contenido se integra a un esquema cognitivo ya existente en la mente del individuo, las motivaciones y actitudes, entre otras, de acuerdo a lo señalado por Font (2002).

Dentro del Enfoque Cognitivista se destacan, centralmente, dos líneas de investigación que tratan de explicar las representaciones del conocimiento de los individuos: el Pensamiento Matemático Avanzado y la Teoría de los Campos Conceptuales.

En la primera línea sobresalen los trabajos de Tall & Vinner (1981), quienes analizan la construcción de un concepto matemático desde las concepciones del docente o del alumno. Por otro lado, la teoría de los Campos Conceptuales, sobre la que no brindaremos detalles, pretende aportar fundamentos y principios para el estudio del desarrollo y aprendizaje de competencias complejas (Vergnaud, 1990).

En este trabajo nos referimos exclusivamente a algunos elementos de estudio relacionados con la línea correspondiente al Pensamiento Matemático Avanzado. En las secciones que forman parte de este capítulo se presentan resultados de investigaciones referentes a *modelos mentales*, *habilidades matemáticas* y *lenguajes matemáticos* fundamentados en distintos elementos del Enfoque Cognitivista de la Didáctica de la Matemática.

5.2. Modelos mentales

Como anticipamos, el Enfoque Cognitivista tiene como uno de sus propósitos de estudio las representaciones mentales que un estudiante puede tener sobre objetos matemáticos. En esta sección presentamos un estudio sobre posibles modelos mentales referidos al concepto de límite funcional de variable real, tomando para ello distintos elementos teóricos que nos brindan un fundamento para nuestro trabajo. Nos interesa profundizar los siguientes conceptos:

- Registros de representación semiótica como medio para acceder y operar con el objeto matemático en cuestión.
- Concepción espontánea como apreciación personal del individuo sobre el uso del término límite en la vida cotidiana.
- Imagen conceptual como idea primaria de la noción generada por el estudiante luego de la enseñanza. Definición conceptual como definición propia del concepto de límite que debe abordar y trabajar el estudiante.
- Modelos intuitivos como idea de la noción que el alumno genera en su mente.

5.2.1. Registros de representación semiótica

Duval (1996) establece que sólo se puede acceder a los objetos matemáticos mediante representaciones que utilizan signos, símbolos, letras, lenguaje natural, etc. Esas representaciones, llamadas *representaciones semióticas*, se dan en diferentes tipos de *registros semióticos* tales como el verbal, algebraico, numérico y gráfico, siendo éstos imprescindibles para comprender el objeto matemático. Este autor establece que un registro semiótico conlleva tres actividades cognitivas diferentes: construcción de un conjunto de signos perceptiblemente explicitables, la posibilidad de realizar una transformación de representaciones al interior del registro y la conversión de una representación en un registro a otra de otro registro. Duval (1995, citado en Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006) expresa que un mismo objeto matemático puede tener distintas representaciones semióticas y éstas son un medio que le permite al individuo exteriorizar sus representaciones mentales. Además de tener la función de comunicación son necesarias para la actividad matemática, ya que cualquier tratamiento sobre el objeto matemático depende del sistema de representación semiótico utilizado. El uso de diversos sistemas de representación semióticos en un mismo objeto matemático fortalece la capacidad cognitiva del individuo enriqueciendo sus representaciones mentales. Duval (1996) considera dos tipos de sistemas de representación de acuerdo a la cantidad de funciones cognoscitivas puestas en juego: el monofuncional, usado para una sola función cognoscitiva relacionada con el procesamiento matemático algorítmico; y el polifuncional, que abarca una gama más amplia de funciones cognoscitivas tales como comunicación, imaginación y procesamiento de información. A modo de ejemplo, para el caso de las funciones, el sistema de representación algebraico es monofuncional, mientras que el gráfico es multifuncional.

Para el caso de límite funcional, Blázquez y Ortega (2001) consideran que existen distintos sistemas de representación para abordar y trabajar el concepto, ellos son:

<u>*Verbal*</u>: es una aproximación óptima de los valores que toma una función en un entorno del punto en cuestión.

<u>*Numérico:*</u> es un proceso de tendencia basado en una tabla de valores de la variable independiente y sus correspondientes imágenes, donde se mejora cualquier aproximación al límite con valores muy cercanos al punto de interés.

<u>*Gráfico:*</u> el límite se representa como un punto en el eje de las ordenadas tal que a todo entorno que lo contiene le corresponde otro entorno del punto de interés sobre el eje x, en el que se proyecta.

Algebraico: corresponde a la definición topológica, donde aparecen $\varepsilon - \delta$ que no son otra cosa que los controles de las aproximaciones.

Algunos de estos sistemas poseen un carácter dinámico, mientras que otros son estáticos. El uso del sistema verbal y numérico evidencian una concepción de límite de carácter dinámico; en este último, la aproximación cumple un rol central. Por su parte el uso del sistema algebraico y gráfico posee un carácter estático, el primero deja ver una concepción de límite estática y abstracta con alto grado de precisión, mientras que el sistema gráfico con menor formalidad que el algebraico centra la atención en la visualización de las variables que entran en juego.

5.2.2. Concepciones espontáneas

Cornu (1991) establece que algunos conceptos matemáticos se ven influenciados por las creencias o concepciones debido al uso del término en la vida diaria. Bajo estos supuestos denomina *concepción espontánea* a un conjunto de ideas, imágenes, intuiciones que el estudiante tiene sobre el uso corriente de un cierto término. Sostiene que estas concepciones son previas a la enseñanza de la noción y perduran con el paso del tiempo. Para el caso de la noción de límite esto representa un inconveniente, ya que la palabra admite variedad de usos en la cotidianidad, como por ejemplo: límite de velocidad, horario límite de atención, límite de un país, límites de conducta, entre otras. En consecuencia, los estudiantes trasladan estos significados al contexto matemático durante el aprendizaje. Esto, sin lugar a dudas, influye sobre la idea de límite que construyen generando suposiciones no necesariamente correctas, tales como: el límite es un valor que se alcanza, es un valor al que se puede acercar sin llegar a él, es una barrera, es una aproximación sin alcanzar el valor, entre otras. Las concepciones espontáneas pueden aparecer conforme a la situación que el estudiante debe resolver, provocando inclusive contradicciones con la definición formal que pueden no ser advertidas tanto por el estudiante como por el docente.

5.2.3. Imagen conceptual y definición conceptual

Como mencionamos al comienzo, el Pensamiento Matemático Avanzado es una línea inmersa en el Enfoque Cognitivista cuyo objeto de estudio consiste en analizar cómo el estudiante concibe un concepto matemático nuevo, y qué variaciones sufre esa concepción a medida que recibe la enseñanza de la teoría formal. Tall & Vinner (1981) suponen la existencia de una distinción entre un concepto formal matemáticamente definido y el proceso cognitivo por el cual el estudiante concibe esa noción durante el aprendizaje. Introducen la noción de *imagen conceptual* para describir la estructura cognitiva que está ligada al concepto matemático, formada por todo lo que el estudiante evoca en el momento en que enfrenta o utiliza el concepto en cuestión. Pueden aparecer en su mente: imágenes, concepciones espontáneas, propiedades, procesos, notaciones, gráficos, descripciones coloquiales, etc. Estos autores sostienen que en la imagen conceptual hay un predominio de representaciones visuales por sobre las verbales, ya que en la memoria de un individuo las representaciones visuales son previas a la aparición de la fase verbal por una cuestión de complejidad. Por ejemplo, al mencionar el término "mesa" en la imagen conceptual aparece una idea de mesa asociada a la forma o imagen de un mueble, mientras que en una fase posterior el individuo puede definir con palabras ese término. Llevado esto al plano matemático, cuando un estudiante escucha el nombre de un concepto llegan primero a su mente representaciones visuales y/o expresiones relacionadas con el mismo, y en una fase posterior podrá expresarlo en forma verbal (Font, 2002). Esta imagen que se genera en la mente del estudiante está formada por distintas partes que guardan un vínculo pero no necesariamente coherentes entre sí o matemáticamente correctas. El estudiante podría no advertir este hecho, ya que dependiendo de la actividad planteada por el docente el estudiante puede evocar, para dar respuesta, alguna de las partes de su imagen conceptual y no otra. Mientras que la respuesta sea correcta, el individuo no toma conciencia si esa parte que se accionó de su imagen conceptual es o no correcta desde el punto de vista matemático. En consecuencia, la actividad debería permitir movilizar distintas porciones de su imagen conceptual donde se puedan manifestar contradicciones y se hagan evidentes con el objeto de generar un conflicto cognitivo.

Font (2002), evocando a Vinner, expresa que en la estructura cognitiva se encuentran dos celdas que pueden interactuar o no entre ellas. Una corresponde a la imagen conceptual, que hemos descripto, y la otra corresponde a la *definición conceptual*. Tall & Vinner (1981) entienden la definición conceptual como el conjunto de palabras usadas para especificar un concepto; en esencia, hacen referencia a la definición matemática del mismo.

Puede ocurrir que un estudiante responda a una actividad apelando únicamente a su imagen conceptual, y en este caso es factible tanto que obtenga respuestas correctas o no según qué parte de ella se activó y el grado de complejidad de la tarea. Estos estudiantes operan en un nivel más intuitivo y menos formal. Otros, en cambio, pueden sentirse cómodos con el lenguaje matemático e incluso independientemente de cómo se conforme su imagen conceptual, apelan cómodamente a la definición conceptual y operan con ella. También se dan los casos en los que el vínculo entre la imagen y la definición conceptual es más flexible, habiendo estudiantes que en un primer momento apelan a su imagen conceptual para aproximarse a una solución, o decidir cómo encarar una resolución de una actividad, pero formalizan su respuesta utilizando la definición conceptual.

5.2.4. Modelos intuitivos de límite

Otro aporte teórico que nos permite comprender y analizar cómo el estudiante supone y trabaja el concepto de límite funcional, son los *modelos intuitivos de límite* presentados por Williams (1991) y utilizados en posteriores estudios por Juter (2005a, 2007). Debido a que estos modelos son "generados" por el estudiante en su mente a medida que recibe la enseñanza del concepto, pueden ser influenciados por las concepciones espontáneas. Los modelos intuitivos de límite, que de ahora en más denominamos *modelos intuitivos*, hacen referencia a modelos mentales que formarán parte de la imagen conceptual de la noción. Los modelos de límite desarrollados por Williams (1991, p.221) que adoptamos para este trabajo son:

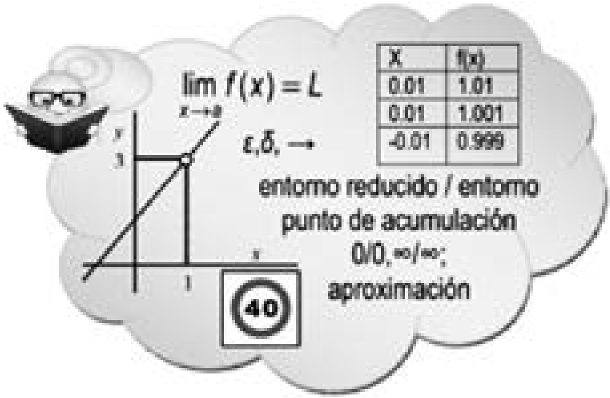
> *Dinámico-teórico:* el límite es un valor que describe cómo una función se mueve cuando x tiende a un cierto punto.*
>
> *Dinámico-práctico:* en este modelo el límite se decide insertando valores de x cada vez más cercanos a un número dado hasta que el valor del límite es alcanzado.*
>
> *Cota: el valor de un límite es un número más allá del cual la función no puede pasar.*
>
> *Formal: corresponde a la definición formal de límite. El modelo se caracteriza por reconocer la arbitrariedad de la cercanía de las imágenes de la función respecto del límite restringiendo los valores de x a un entorno de punto de estudio del límite.*
>
> *No alcanzable: el límite es un valor al cual una función se aproxima pero nunca alcanza.*

<u>Aproximación</u>: el valor del límite es una aproximación que puede ser hecha tan precisa como se desee.

Estos modelos son puestos en juego por los estudiantes al enfrentarse a una actividad y no necesariamente todos son matemáticamente correctos. De hecho sólo los modelos denominados Formal y Aproximación lo son; el resto, tienen un campo de validez y son útiles para resolver sólo algunas actividades.

5.2.5. Descripción y resultados de un estudio

Los elementos teóricos antes descritos nos permiten aproximar una idea inicial de cómo puede estar formada la imagen mental de un estudiante que aborda el aprendizaje de la noción de límite funcional. Contamos con los estudios de Blázquez y Ortega (2001) quienes sostienen que los estudiantes pueden utilizar distintos sistemas de representación para poner en juego la noción; Cornu (1991) quien advierte la existencia de concepciones espontáneas; y Williams (1991) quien propone distintos modelos, correctos o no, de la noción que el estudiante genera y utiliza al momento de resolver actividades, influenciados por el sistema de representación y las concepciones espontáneas. Este bagaje forma parte de la imagen conceptual de la noción que el estudiante va formando, la que se verá influenciada además por la elección didáctica del docente. Esta situación nos da lugar a imaginar un modelo mental posible que un estudiante puede tener en referencia al concepto matemático en cuestión:



Esta imagen, basada en los supuestos teóricos que acabamos de proponer, está conformada por la presencia de concepciones espontáneas propias del individuo, una serie de elementos devenidos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción –como son las expresiones y los símbolos propios asociados a la definición formal– y los tipos de registros generalmente más utilizados al momento de analizar intuitivamente el límite de una función. Lo interesante ahora radica en examinar a la luz del marco teórico un caso real con el objeto de indagar el modelo mental generado por un estudiante.

Hemos llevado a cabo un estudio con alumnos de segundo año del Profesorado de Matemática en un instituto de nivel terciario ubicado en el conurbano bonaerense. El espacio curricular que trata el concepto en cuestión es Análisis Matemático I. De los treinta alumnos que conformaron la población al momento del estudio, 23 efectuaron un test de manera voluntaria y 5 de ellos fueron convocados a una entrevista posterior. El test nos permitió conocer en primera instancia qué tipo de modelos intuitivos los estudiantes consideraban más adecuados a su idea personal de límite. Coincidiendo con los estudios de Williams (1991) y Juter (2007), los modelos Dinámico teórico y No alcanzable les resultaron apropiados. En las justificaciones escritas por los alumnos en el test, asociadas a la noción matemática de límite, aparecen ciertas expresiones tales como "tiende a", "no puede pasar de" y "se acerca a". Notamos además que en la mayoría de los casos otorgan el valor de un límite por simple sustitución del valor de x en la expresión de la función puesta en juego, o recurren a una pequeña tabla de valores con el objeto de analizar las imágenes de la función para valores de abscisa cercanos al punto de estudio del límite. Esto da cuenta de que en numerosas oportunidades no necesitan recurrir a la definición formal pues otra metodología utilizada permite responder a la actividad correctamente. De hecho, la simbología utilizada en la definición les provoca confusión, por lo tanto no la usan. A partir de la información proporcionada sobre los modelos de límite que los estudiantes pusieron de manifiesto para resolver o justificar las actividades presentadas en el test, se elaboraron entrevistas personalizadas para cada uno de los cinco estudiantes seleccionados. Como producto del análisis de las mismas pudimos advertir que centran el análisis de la situación planteada en el entorno reducido y a partir de allí proponen el valor del límite. Esto conlleva a que se traslade a las imágenes de la función lo que ocurre con las abscisas al enfatizar la idea de punto de acumulación como valor al cual se pueden acercar tanto como quieran pero nunca llegar a tocarlo. En sus justificaciones aparecen los modelos Dinámico práctico y No alcanzable, lo que indicaría que persisten en su imagen mental más allá de la enseñanza de la definición formal. Otra cuestión observada es que adecuan el modelo a usar según el tipo de ejercicio o actividad que se le presente para resolver, independientemente de que no sea correcto desde el punto de vista matemático.

A la luz del marco teórico de este trabajo, y a modo de ejemplo de su potencial, hemos considerado de utilidad realizar un análisis más minucioso de la posible conformación de un modelo mental de la noción de límite en el caso particular de un estudiante que efectuó el test y la entrevista.

Pudimos inferir a través de las respuestas brindadas en el test que subyace en la mente del estudiante un conjunto de ideas no coherentes entre sí, que le permiten resolver y dar respuesta correcta cómodamente a la mayoría de las actividades propuestas en el curso. El hecho de convocarlo a una entrevista nos brindó un panorama más amplio y claro de algunas ideas que formaban parte de su imagen conceptual de la noción.

Debido a la riqueza de los argumentos o respuestas obtenidas en la entrevista presentamos partes textuales de la misma, donde E representa al entrevistador y A el estudiante.

E: ¿Qué es un límite?

A: Es llegar a un lugar y decir hasta acá llegué y no puedo avanzar más.

E: ¿Esa idea se respeta en la noción matemática de límite?, porque esa es tu noción de la vida diaria, esa idea "de acá no paso" ¿se respeta?

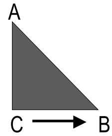
A: No, si mi límite es la estación de tren cercana, yo puedo llegar a la estación y quedarme allí, y acá en Matemática nunca llego a la estación me quedo siempre un poquito antes.

Como podemos observar, la concepción espontánea acciona fuertemente sobre su imagen conceptual de la noción creando confusión. Su respuesta deja evidencia de que piensa en una diferencia entre su concepción sobre el término y el concepto matemático, debido a que supone que el término incluye el límite, mientras que para el concepto matemático supone que la imagen de la función no puede alcanzar el valor del límite, mostrando claramente la permanencia del modelo No alcanzable como parte de su imagen conceptual, a pesar de haber recibido la enseñanza de la definición formal en Análisis Matemático I. Esta última cuestión vuelve a aparecer como parte de la justificación de la resolución de la siguiente actividad del test:

¿Cuál es el límite del área del triángulo

cuando el punto C se aproxima a B?

Justificar la respuesta.



A: Cuando fue este ejercicio me acuerdo lo primero que pensé fue eso "C se puede acercar todo lo que quiera a B pero nunca llega a tocarlo", no tengo área, dejo de tener un triángulo… yo me acuerdo que el límite nunca se estudia en el punto sino en sus proximidades, por lo tanto el límite es cero, o sea el valor al que nunca va a llegar C a medida que tienda a B, siempre va a haber un punto antes de B al cual puede tender C".

Primeramente podemos observar que el punto de inicio de su análisis está en el entorno reducido, saliendo a la luz la idea de punto de acumulación como valor al cual se puede acercar tanto como quiera pero nunca llegar a tocarlo. Sin lugar a dudas, este proceso tiene una influencia directa sobre el valor que va a considerar como límite, ya que entiende que el límite es cero porque al achicarse suficientemente la base del triángulo, el área se acercará mucho a ese valor.

A partir de la explicación expresada por el estudiante, consideramos que es viable pensar que resuelve esta situación bajo el modelo Dinámico-práctico; es decir, piensa o escribe en un tabla valores de x muy cercanos al punto de acumulación de manera tal que las imágenes le permitirán ver un acercamiento a un valor que va a considerar como límite. Es prueba de ello la siguiente afirmación (que se refiere a otra actividad del test en la que se dio una función constante de valor 1 y se solicitó el límite de ella cuando x tiende a 0)

"*…una función tiene límite cuando tanto por izquierda como por derecha tiende a un valor de f(x) o y igual, entonces yo acá veo que tanto por izquierda como por derecha x tiende a cero y f(x) tiende a 1, entonces a la vista me di cuenta de eso*".

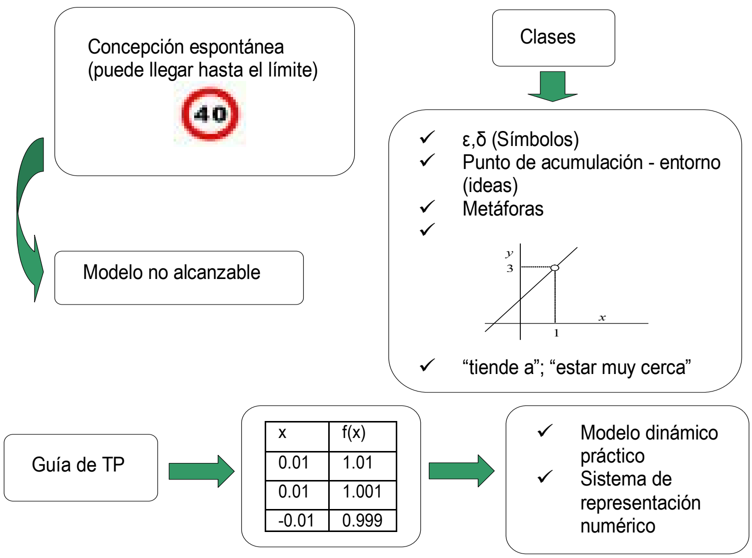
Este último párrafo nos permite evidenciar que aborda la actividad mediante el sistema de representación numérico (Blázquez y Ortega, 2001).

Esta idea de no tener en cuenta el par ordenado perteneciente a la función donde la abscisa corresponde al punto de acumulación, hace que reconozca la existencia del valor del límite independientemente de la continuidad de la función en el punto de análisis, ya que centra su atención en la tendencia de las imágenes de la función para encontrar ese valor buscado. Transcribimos a continuación un segmento de la entrevista donde el estudiante propone un gráfico de una función demostrando que el límite existe independientemente del valor que tome la función en ese punto: *"Yo puedo decir que tiene límite* *porque tanto por acá como por acá* (refiriéndose a los límites laterales) *se acerca al mismo punto. Digamos no me importa lo que pasa en ese punto sino lo que pasa en sus proximidades*".

Este razonamiento lo conduce a imaginar o escribir una tabla de valores que le permita corroborar su respuesta en cada caso que analiza. En función de lo establecido anteriormente hace un uso excesivo del registro numérico, a pesar de recurrir al gráfico si lo considera necesario. Utiliza con frecuencia el término "estar muy cerca" del punto de acumulación o del valor del límite. Esto para él significa estar dentro del entorno, lo que nos conduce a pensar que estamos nuevamente ante una situación como la que plantea Cornu (1991).

Al finalizar la entrevista reconoce la complejidad de la noción de límite expresando "…*Yo no tomo la definición de límite, lo que pasa que es tan teórica que uno no logra, no si entenderla, sino incorporarla…*". Esto permite considerar que existen en la definición formal términos y símbolos que pueden obstaculizar de alguna manera la comprensión del concepto, potenciando el uso de algún modelo intuitivo influenciado por alguna concepción espontánea.

Esta situación que acabamos de analizar nos otorga herramientas suficientes para imaginar la composición de la imagen conceptual de este estudiante luego de la enseñanza de la definición formal del concepto de límite. Destacamos en ella la presencia de una concepción espontánea sumada a las ideas que quedaron en su mente como producto de la enseñanza. Esquemáticamente podría ser del siguiente modo:



5.2.6. Conclusiones y sugerencias

A partir de la posible conformación de la imagen mental de la noción que posee el estudiante, podríamos decir que el hecho de fijar su atención en las imágenes de la función que obtiene como producto de proponer valores de x extremadamente cerca del punto de análisis del límite, le impide tener un panorama más amplio del comportamiento de la función; es decir, centra todo su trabajo en una región mínima de la misma sin tener en cuenta qué pasa a medida que se aleja de esa región. Esta cuestión le sirve para dar respuesta correcta a varias actividades; por lo tanto, a pesar de conocer la definición formal no la usa, pues le resulta más operativo y accesible poner en juego algunos de los modelos que considera correctos.

Como hemos planteado anteriormente, pueden existir en la mente de un estudiante un conjunto de ideas que no guardan una coherencia entre sí. Hemos visto que se puede poner en juego una u otra porción de la imagen conceptual conforme a la situación que se le plantea sin entrar en conflicto entre ellas. Es notoria la influencia de la concepción espontánea sobre el concepto matemático, ya que sin advertirlo se pueden proponer respuestas contradictorias si una misma situación es analizada desde un contexto matemático o físico.

El trabajo presentado aquí pone el foco en la conformación del modelo mental que puede ir formando un estudiante que recibe la enseñanza de la noción de límite funcional. Si bien no tenemos elaborada una propuesta didáctica que permita identificar los modelos intuitivos, ponerlos a prueba y desterrarlos para dar paso al abordaje y aprendizaje de la definición formal a modo de cierre, podríamos decir que frente a situaciones de esta naturaleza y trabajando con estudiantes de nivel superior, resultaría interesante que el docente explore la existencia de concepciones espontáneas antes de abordar la noción de límite. Consideramos que una forma sencilla de sacarlas a la luz es indagar en las primeras clases qué idea tienen los estudiantes sobre el término límite, posiblemente esto pueda brindar un primer panorama sobre las concepciones. Otra cuestión no menor a tener en cuenta a medida que avanza el proceso de enseñanza y aprendizaje, es analizar las respuestas a las actividades propuestas, solicitando al estudiante justificaciones al momento de resolverlas con el objeto de obtener información sobre la posible persistencia de las concepciones espontáneas, la idea de límite que pone en juego asociada o no a un modelo intuitivo, los tipos de sistemas de representación a los que recurre, qué vocabulario utiliza, entre otras. Esta información le permitiría al docente elaborar estrategias para afrontar las ideas intuitivas de límite y posteriormente la definición formal. Sugerimos, por un lado, elaborar preguntas que conduzcan al estudiante a poner en evidencia ideas contradictorias no coherentes entre sí, en forma simultánea con el objeto de crearle algún tipo de conflicto en su mente además de aportar datos interesantes que contribuyan a mejorar la enseñanza. Por otro lado, cabe la posibilidad de plantear actividades específicamente elaboradas para desestabilizar modelos intuitivos no correctos, desde el punto de vista matemático, presentes en el modelo mental del individuo como puede verse en Colombano y Rodríguez (2009) y Colombano (2009).

5.3. Habilidades matemáticas en estudiantes de profesorado

En esta sección abordamos, centralmente, lo que se conoce como *habilidades matemáticas* y la relación que éstas tienen con la *actividad matemática*. Presentamos también un listado de habilidades, formuladas en contexto de una encuesta realizada a estudiantes de un curso de la asignatura Análisis (materia avanzada del Profesorado Universitario en Matemática de la Universidad Nacional de General Sarmiento). Si bien la selección de habilidades que presentamos no es exhaustiva, es lo suficientemente representativa del tipo de requerimientos que tiene la enseñanza y el aprendizaje de contenidos propios del Análisis y de la Matemática en general. Por último, realizamos una interpretación de parte de los resultados obtenidos en la mencionada encuesta.

5.3.1. Las habilidades matemáticas y la actividad matemática

En el aprendizaje de la Matemática están involucrados, necesariamente, dos aspectos fundamentales como son el "saber-hacer" y los "saberes", ambos objeto de estudio de la Educación Matemática.

En lo que respecta a los *saberes* se hace referencia, puntualmente, a los contenidos que los estudiantes de Matemática, de cualquier nivel educativo, deben aprender, los cuales están centrados, indudablemente, en los conceptos, definiciones, propiedades, relaciones y procedimientos propios de la disciplina.

Por su lado, el *saber-hacer* está indisolublemente ligado al aprendizaje de la Matemática y forma parte, podría decirse que de manera excluyente, de los objetivos propuestos por el docente en su planificación de clases. Es el *saber-hacer* el contexto en el que adquieren un protagonismo central las *habilidades matemáticas* pues ellas están relacionadas con el desarrollo de prácticas como la operatoria (numérica o algebraica), la comprensión de información, el uso de estrategias de argumentación y demostración, entre otras. En este contexto, las habilidades matemáticas son consideradas como imprescindibles, ya sea para el aprendizaje de los saberes como del saber-hacer. En cualquier caso, puede considerarse que los estudiantes deben tener, en el proceso del aprendizaje, un rol activo de trabajo con la Matemática, por lo cual, entendemos que el estudiante aprende Matemática cuando es capaz de realizar *actividad matemática* en torno a distintas situaciones propuestas por el docente, y es precisamente como parte de esta actividad que adquiere significatividad el uso y el desarrollo de habilidades matemáticas.

En relación a la actividad matemática, Godino (1998, citado por Rodríguez, Carnelli y Formica, 2005) señala una descripción en término de algunas entidades como:

- La *ostensiva*, que se relaciona con las representaciones materiales que se usan en la Matemática, como por ejemplo los términos, expresiones, símbolos y tablas.
- La *intensiva*, que tiene que ver con las ideas matemáticas, las abstracciones y generalizaciones, como los conceptos, proposiciones, técnicas y teorías.
- La *extensiva*, que son las entidades que inducen las distintas actividades, como los problemas, situaciones, aplicaciones.
- La *afectiva*, conformada por las creencias, percepciones y preferencias, y que son de central importancia a la hora de desarrollar las diferentes actividades.
- La *actuativa*, relacionada con la acción del sujeto frente a diferentes situaciones.

Dentro de esta clasificación, las habilidades matemáticas podrían considerarse parte de la actividad matemática que corresponde a la entidad actuativa, dado que las mismas son puestas en juego en el momento en que el sujeto se encuentra activamente comprometido con determinada situación a resolver.

Son muchos los autores que hacen referencia, desde distintos puntos de vista, a las habilidades matemáticas. Entre ellos, Talizina (1985) señala la imposibilidad de separar el *saber* del *saber-hacer*, a la vez que plantea que todo conocimiento supone la presencia, precisamente, del *saber-hacer* y también de *habilidades*. Por su lado, Ferrer Vicente (2000) en su tesis doctoral refiere que las habilidades matemáticas son un complejo formado por tres componentes centrales: los conocimientos específicos sobre la Matemática, los sistemas de operaciones y conocimientos matemáticos y las operaciones lógicas.

5.3.2. Una clasificación de habilidades matemáticas

En conjunto con otros investigadores[5] de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS - provincia de Buenos Aires) hemos trabajado con el grupo de estudiantes de una asignatura avanzada de Análisis del Profesorado Universitario en Matemática con habilidades matemáticas considerando, esencialmente, dos tipos de habilidades: las generales y las que están sujetas a contenidos específicos.

En lo que se refiere a *habilidades generales*, hemos tenido en cuenta la interesante clasificación y análisis que hace Delgado Rubí (1997) al respecto, quien señala que las habilidades tienen ciertas características o requerimientos como por ejemplo: deben tener la suficiente *generalidad* como para ser contempladas en cualquier nivel educativo, deben ser representativas del *quehacer matemático* e *imprescindibles* para la formación matemática (Rodríguez *et al*, 2005).

Con respecto a las *habilidades sujetas a contenidos*, contamos –como antecedentes– con algunos trabajos realizados en la UNGS (Carnelli, Falsetti, Formica y Rodríguez, 2007; González y Rodríguez, 2006; Rodríguez *et al*, 2005). Con la expresión *habilidades matemáticas sujetas a un contenido* hacemos referencia a aquellas que se ponen en juego en contexto de un cierto tema, como podría ser *límite de sucesiones* o *características topológicas de un conjunto en un espacio métrico*, por ejemplo. Puede pensarse así, que un estudiante dispone de una cierta habilidad matemática cuando pueda manifestar solvencia en su utilización para una variedad de contenidos matemáticos.

Como ejemplo de ambos tipos de habilidades, podemos observar que *comparar* es una habilidad general, pero al hablar de *comparar expresiones algebraicas*, ya estamos "atándola" a un contenido matemático preciso. Del mismo modo, *acotar* es una habilidad general, pero *acotar en contexto de límites de sucesiones*, ya es una habilidad sujeta a un contenido.

La clasificación de las habilidades matemáticas generales que propone Delgado Rubí (1997) se apoya en un listado de habilidades seleccionadas por Hernández (1989, citado por Delgado Rubí, 1997). Entre las habilidades propuestas

[5] La investigación fue realizada junto con la Dra. Mabel Rodríguez y el Prof. Víctor González y se desarrolló en el marco del proyecto de la convocatoria "Fondo Semilla 2007", *Un estudio integrado sobre habilidades matemáticas,* bajo la dirección del Lic. Alberto Formica (IDH – UNGS).

por ambos figuran: *definir, demostrar, calcular, recodificar, interpretar, optimizar, algoritmizar, modelar,* etc. El nombre de algunas de ellas hace que nos resulte complejo interpretar y reconocer en qué ámbitos o situaciones se las despliega: por ejemplo, cuando se habla de *recodificar* se hace referencia a utilizar, por ejemplo, diferentes recursos para presentar o utilizar un mismo concepto. Un ejemplo de ello puede ser pensar en el concepto de *supremo de un conjunto* en términos de su definición *vía épsilon* o asumirlo como *la menor cota superior del conjunto*. Otros ejemplos pueden ser: expresar una función cuadrática general en su forma canónica o pensar en el conjunto

$$\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>2}}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$$

como el intervalo abierto (0;1). Por supuesto que el listado presentado por Delgado Rubí no es exhaustivo aunque sí lo suficientemente "general" y abarcativo.

Dos habilidades importantes en la Matemática son *definir* y *demostrar*, sobre las que Hernández señala que es justamente por su propia naturaleza que establecen un vínculo primario con el sistema de conocimientos matemáticos. En relación con éstas, el estudio que aquí presentamos gira en torno, centralmente, a las habilidades matemáticas que se relacionan con la *demostración* y surge, como hemos mencionado, de un trabajo realizado con alumnos de la asignatura Análisis. En dicha asignatura se aborda el tratamiento de los resultados más relevantes del Análisis desde "los fundamentos".

Esta asignatura está propuesta en el plan de estudios como la última de la carrera y es por eso que en ella se centra la atención, entre otras cosas, en la **argumentación** y **demostración matemática**. Esto requiere del uso de habilidades muy variadas, como las relacionadas con la operatoria (sea numérica como algebraica) y con la comprensión de información matemática, entre otras. En este contexto, y con una especial intención de fomentar el desarrollo de diferentes habilidades matemáticas en los estudiantes, es que hemos llevado adelante una investigación que permita conocer el desarrollo de diversas habilidades alcanzado por los estudiantes. Para ello, se han planteado varias cuestiones, entre las cuales figura la selección y formulación de un listado de habilidades matemáticas que pueden considerarse como imprescindibles para abordar con éxito la cursada de la asignatura. Para el armado de la lista también hemos tenido en cuenta, para algunas habilidades que entendemos como "prioritarias", su vinculación con ciertos contenidos que consideramos centrales en la asignatura. Una vez confeccionado el listado de habilidades, realizamos un agrupamiento y clasificación de todas ellas y, además, trabajamos en el diseño y aplicación de una encuesta a los estudiantes que nos permita acceder a información sobre la percepción y valoración que tienen de cada una en relación con el trabajo propuesto para el curso.

Con respecto al agrupamiento y clasificación, dado el interés propuesto en el diseño del curso, hemos seleccionado diferentes habilidades que ubicamos en los siguientes tres grupos: las relacionadas con la operatoria (en general), las que están en relación con la lógica y la argumentación; y por último, las relacionadas con la interpretación y producción de la actividad matemática.

Con respecto a las primeras, algunas que tienen especial vinculación con el tipo de trabajo propuesto para la asignatura pueden ser:

- *Hacer acotaciones numéricas en ejercicios de límites de sucesiones.*
- *Hacer acotaciones numéricas en ejercicios de límites de funciones.*
- *Utilizar adecuadamente los símbolos.*
- *Reconocer propiedades adecuadas para resolver una actividad.*
- *Poseer flexibilidad en el manejo de diferentes recursos.*
- *Disponer de distintos recursos.*
- *Manejar desigualdades y sus propiedades.*

Con respecto a esta última, entendemos que el trabajo con desigualdades representa un especial desafío al hacer acotaciones en diferentes contextos: una cosa es enunciar una propiedad como puede ser “multiplicar miembro a miembro una desigualdad por un número negativo invierte el sentido de la desigualdad” y otra es disponer de la habilidad de darse cuenta de que eso es lo que se hace en un determinado proceso. En este sentido, por ejemplo, suele verse que para los estudiantes es “muy natural” avanzar en una cadena de desigualdades sin reflexionar sobre qué tipo de operaciones se están realizando en cada paso y qué implicaciones tienen éstas sobre la desigualdad. Por ejemplo: si bien es válido que para todo número natural n se verifica la desigualdad

$$\left(3n^2 - 2n\right) \geq 3n^2 - 2n^2 \quad ,$$

no puede inferirse de ello “sin reflexionar” que

$$\frac{3n^2 - 2n}{10 - n} \geq \frac{3n^2 - 2n^2}{10 - n}$$

para todo número natural n sólo porque se ha realizado la operación de "dividir miembro a miembro la desigualdad por un mismo número", pues la desigualdad que así se ha planteado no es válida para números naturales mayores que 10. Allí se comete el error de **no considerar** que lo que se está haciendo es multiplicar miembro a miembro por

$$\frac{1}{10-n}$$

a la primera desigualdad y que $(10 - n)$ es un número negativo a partir de $n = 11$.

Respecto de las habilidades que plantean disponer distintos recursos y poseer flexibilidad en el manejo de ellos, las hemos considerado importantes porque se espera, por un lado, que los estudiantes adquieran facilidad para poder realizar, por ejemplo, un gráfico, una tabla, etc. Por otro lado, la importancia que asignamos a la *flexibilidad* en el manejo de estos recursos, obedece a que intentamos que los alumnos no sólo sientan que poseen las herramientas para hacer un gráfico o una tabla sino que, además, puedan pasar de un registro a otro con amplia soltura.

Del mismo modo, podemos referirnos a las *habilidades relacionadas con la lógica y la argumentación*, de las cuales hemos seleccionado, entre otras:

- *Formular un enunciado.*
- *Usar adecuadamente conectivos lógicos y cuantificadores.*
- *Reconocer estrategias útiles para justificar una proposición.*
- *Negar correctamente una proposición enunciada con cuantificadores u otros conectivos.*

Claramente, el listado hace referencia a diferentes habilidades puestas en juego, por ejemplo, al momento de hacer una demostración, a la vez que en otros procesos de resolución de distintas actividades. Es muy común observar que los estudiantes tienen muchas dificultades para utilizar algunos de estos recursos, ya sea porque no disponen del conocimiento necesario para considerar como propios esos saberes o porque no han ejercitado lo suficiente el uso de esas habilidades. Al respecto, Moore (1994) señala que si bien la dificultad del aprendizaje en hacer demostraciones puede atribuirse a una carencia de dedicación al estudio, varias de las dificultades son a nivel cognitivo y que dichas dificultades serían encontradas a pesar, incluso, de una gran dedicación al estudio. Al respecto estableció, a partir de un estudio hecho con un grupo de alumnos, las siguientes causas del fracaso de los estudiantes al intentar llevar a cabo una demostración:

- *Los estudiantes no conocen las definiciones y no son capaces de establecer autónomamente una definición.*
- *Los estudiantes tienen poco conocimiento intuitivo de los conceptos.*
- *La imagen conceptual (en el sentido definido por Vinner y Tall) de los estudiantes no es la adecuada para generar las demostraciones.*
- *Los estudiantes están mal predispuestos o no evidencian capacidad para generar ejemplos propios y utilizarlos convenientemente.*
- *No saben cómo usar las definiciones para obtener una estructura general de una demostración.*
- *No disponen de la habilidad de comprender y usar la notación y lenguaje matemáticos.*
- *No saben cómo iniciar una demostración.*

En el listado presentado por Moore puede observarse que las dificultades que los estudiantes tienen para desarrollar exitosamente una demostración conllevan una serie de habilidades ausentes o escasamente desarrolladas en los alumnos que resulta importante considerar y, sobre todo, operar sobre ellas desde la enseñanza.

5.3.3. Algunos resultados sobre aprendizaje de habilidades en estudiantes de profesorado

Para ahondar en el conocimiento sobre la valoración que tienen los estudiantes de la asignatura Análisis de la UNGS, y tal como ya señalamos, hemos diseñado una encuesta que consta de dos partes: una estructurada y otra semiestructurada. En la primera se les pide a los estudiantes que señalen cuál es el nivel de importancia para el aprendizaje del Análisis que le otorgan a las habilidades que les presentamos en el listado. Si bien se recaba información sobre una variedad de aspectos, nos ha interesado centrar la atención en describir la percepción de los estudiantes respecto de la importancia que asignan a las habilidades seleccionadas y en qué medida consideran que no poseerlas lo suficientemente desarrolladas opera como un obstáculo para el aprendizaje de diferentes contenidos de Análisis.

En la sección no estructurada de la encuesta los estudiantes pueden expedirse sobre algunas cuestiones relacionadas con las habilidades y, de esta forma, los ponemos en situación de evaluador de las mismas y les brindamos, incluso, la oportunidad de sugerir algunas que ellos consideran relevantes para el estudio y que no han formado parte del listado propuesto. Consideramos este aspecto importante para el estudiante pues se le propone un desafío intelectual que está vinculado estrechamente con la enseñanza, y que es algo que ellos en breve, y ya como profesionales, deberán enfrentar en su quehacer cotidiano: hacer un relevamiento, desde la planificación de clases, no sólo de los contenidos a enseñar, sino también del tipo de actividad que propondrá a su curso y, asociado a ello, el tipo de habilidades matemáticas que se espera que posean sus propios alumnos. Concretamente, en ese apartado de la encuesta se les propone, entre otras cosas, que indiquen:

- *alguna habilidad que les parezca importante para el aprendizaje del Análisis y no estén mencionadas en los cuadros previos,*
- *algunos ejercicios de la guía de trabajos prácticos o exámenes parciales que no hayan podido resolver, señalando cuáles son las habilidades que cree que son necesarias para resolverlos y no dispone,*
- *qué tipo de actividades o gestión de aula consideran que resultaría útil para aprender habilidades matemáticas*.

La encuesta fue aplicada al finalizar el curso como para permitir que los estudiantes posean una mirada global de las exigencias y necesidades que propone la asignatura, y fue muy bien ponderado por ellos el hecho de que se les permita expedirse sobre este tipo de cuestiones.

Si bien no es el objetivo de este apartado proporcionar detalles minuciosos ni un análisis de los resultados obtenidos en la encuesta, es interesante conocer algunas pocas consideraciones que muestren las opiniones de los propios estudiantes en cuanto a sus apreciaciones sobre cuestiones relacionadas con ciertas habilidades matemáticas.

El primer conjunto de habilidades que parece interesante mencionar es el formado por las siguientes:

- *Reconocer la necesidad de dar contraejemplos para probar una afirmación falsa.*
- *Usar ejemplos para ilustrar el alcance/significado de una afirmación.*

Sobre ellas, sólo un pequeño grupo de estudiantes (menos de un 10%) consideró que no poseerlas operó en ellos como obstáculo para el aprendizaje. Siendo, por lo menos en apariencia, tan representativas del trabajo que se realiza en el estudio del Análisis en particular y de la Matemática en general, resulta interesante observar, a partir de este porcentaje tan bajo, que la mayoría de los estudiantes no se encuentre en este grupo, pues eso puede interpretarse como que esta mayoría dispone de ellas. En este sentido, vale la pena destacar que sería sumamente complicado el trabajo en un curso en el que la mayoría de sus estudiantes no contara con estas habilidades.

Otro conjunto interesante de habilidades sobre las que los estudiantes, en un número un poco mayor, opinan que su ausencia representa un obstáculo (que las llamaremos "habilidades obstáculo") es el siguiente:

- *Identificar formulaciones equivalentes de una afirmación o concepto (caracterizaciones).*
- *Identificar la equivalencia entre un enunciado directo y su contrarrecíproco.*
- *Negar afirmaciones que utilizan cuantificadores "existencial" o "universal".*
- *Identificar definiciones y resultados previos involucrados en la afirmación a demostrar.*

Este grupo corresponde, en su mayoría, al grupo de habilidades que se han considerado como vinculadas a la lógica y argumentación. Todas ellas son trabajadas intencionalmente en el curso y, en muchos casos, han sido también trabajadas en varios de los cursos previos, y es posible que por ello no sea tan elevado el número de estudiantes que las han seleccionado (entre un 10% y un 30% del curso).

En el próximo (y último) conjunto de habilidades consideradas "obstáculo", indicamos las que fueron seleccionadas por un gran número de estudiantes (entre el 30 y el 70%) y son las siguientes:

- *Diferenciar demostración de verificación.*
- *Poseer varios mecanismos para demostrar propiedades.*
- *Reconocer y usar diferentes estrategias para justificar o demostrar una afirmación/propiedad.*
- *Usar adecuadamente los símbolos.*

- *Articular definiciones y resultados previos para secuenciar en una demostración.*
- *Manejar operaciones básicas numéricas y algebraicas en distintos contextos.*
- *Usar adecuadamente los cuantificadores.*

Es fácil observar que estas habilidades son requeridas en diferentes etapas de la elaboración de una demostración. El mayor número de estudiantes que las consideran obstáculo puede deberse a que reconocen en estas habilidades mucho de lo trabajado o más requerido específicamente por el curso. Entienden que son éstas, por las características del curso, las habilidades con las que deben contar. Un dato adicional, que es relevante en este análisis, es que cada una de las habilidades "obstáculo" consideradas en estos tres grupos ha sido también indicada como "importante para el aprendizaje del Análisis" por más del 50% de los estudiantes del curso.

Por último, resta comentar que los resultados de las encuestas los hemos reforzado con entrevistas a algunos estudiantes, especialmente a aquellos cuyas respuestas no lográbamos entender completamente. Las entrevistas nos han dado un panorama más amplio a nuestras interpretaciones y les han permitido a los estudiantes terminar de expresar algunas inquietudes que no habían podido hacer en el formulario de la encuesta.

A modo de conclusión, parece oportuno señalar que sobre las habilidades matemáticas es mucho lo que podemos hacer alineado con la oferta de una propuesta de enseñanza que atienda este aspecto esencial en un estudiante de Matemática. Si bien este es un primer análisis, ha aportado suficiente información para entender qué tipo de cuestiones preocupan a los estudiantes y a los docentes en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje del Análisis.

5.4. Lenguajes matemáticos

La mayoría de los estudiantes, al presenciar la explicación del docente de propiedades, conceptos y aplicaciones dentro de una clase de Matemática, la aceptan naturalmente. Ellos aceptan al profesor como el encargado apropiado para transmitirles el saber matemático pues lo consideran poseedor del mismo.

El lenguaje simbólico es parte constitutivo de la Matemática y el estudiante deberá ser capaz de escribir simbólica y comprensivamente sobre estos conceptos, así como también expresarlos oralmente. La enseñanza, de la mano del docente, combina el uso del lenguaje natural, a la vez que del simbólico. El primero generalmente se usa en el medio oral, y son pocas las veces que el docente deja por escrito en el pizarrón explicaciones en lenguaje natural de las nociones trabajadas. Por otra parte, el lenguaje simbólico es exclusivamente utilizado en el medio escrito, cuando el docente presenta las notaciones, operatoria, propiedades, etc. en el pizarrón.

La mayoría de los docentes son capaces de explicar en forma oral un concepto de manera sumamente clara. Lo que generalmente no pueden advertir es que existe una distancia entre su claridad en lenguaje coloquial y lo que al mismo tiempo registran simbólicamente en el pizarrón.

Los estudiantes por lo general, en una clase de Matemática, copian lo que en el pizarrón queda escrito, y pocas veces agregan en sus apuntes aclaraciones orales del docente. Luego, cuando recurren a sus apuntes para estudiar, se encuentran con las nociones escritas mayoritariamente en lenguaje simbólico, no son capaces de extraer significado de esos símbolos para reconstruir lo ocurrido dentro de la clase, y esto probablemente provoque que no aprendan el contenido. Estos mismos estudiantes pueden, incluso, haber comprendido la explicación oral del profesor en el momento que dictó la clase, pero al leer en sus propios apuntes aquella explicación podría parecerles ajena.

En esta sección nos adentramos en el uso de los lenguajes natural y simbólico en una clase de Matemática en la que se enseña el concepto de límite funcional. Comenzamos presentando las nociones teóricas y luego reflexionamos sobre un ejemplo.

5.4.1. Lenguaje simbólico: nociones básicas

El lenguaje, tanto el natural como el simbólico, tiene significantes y significados compartidos y aceptados por la comunidad científica a la cual pertenecen. Estos significantes pueden ser palabras o símbolos. Al conjunto de símbolos, signos y diferentes representaciones que utilizamos para expresar los conceptos, las propiedades y otras nociones matemáticas las denominamos *significantes matemáticos*. Cuando se intenta establecer una comunicación, cada significante tiene asociado, dentro de un determinado contexto, un *significado* aceptado por la comunidad matemática.

Por lo tanto, el *lenguaje simbólico* incluye significantes y significados matemáticos en un contexto de comunicación. Los ejemplos desarrollados en Falsetti, Marino y Rodríguez (2004) nos muestran que el realizar un buen uso de los significantes no asegura el manejo del lenguaje simbólico. Los estudiantes pueden escribir utilizando símbolos de una manera correcta y sin embargo los significados asociados no son correctos en el contexto dentro del cual se desempeñan. En definitiva, el buen uso de los significantes no asegura el buen uso del lenguaje simbólico, y por lo tanto, tampoco garantiza la comprensión matemática de las nociones. Cabe resaltar que la asignación de significados realizada símbolo a símbolo no garantiza la comprensión global que una “frase simbólica” requiere. Lo que se debe recuperar es el mensaje completo que se está tratando de transmitir en el contexto en cuestión.

Consideremos a modo de ejemplo la siguiente frase simbólica: “Sean a, $b \in$ R. $a = b \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$”. Asignando a cada símbolo matemático su significado correcto podríamos “leer” la frase del siguiente modo: Sean a, b que pertenecen ($\in$) al conjunto de los números reales (R), a es igual a b ($a = b$) si y sólo si ($\Leftrightarrow$) para todo ($\forall$) épsilon (ε) mayor a cero (> 0), el módulo (| |) de a menos b ($a - b$) es menor (<) que épsilon (ε).

Esta asignación de significados símbolo a símbolo dista mucho de permitir manifestar con claridad el mensaje que encierra esa proposición: “Dos números reales son iguales sólo si la distancia entre ellos puede hacerse arbitrariamente chica”. Entonces, a los significantes matemáticos un alumno puede asignarle un significado correcto o incorrecto, en particular, en proposiciones matemáticas que encierran cierta complejidad donde su comprensión no se alcanza decodificando símbolo a símbolo.

Llamamos *decodificar* a asignar a cada símbolo su significado en el contexto apropiado pero sin intención de recuperar el significado de la frase completa. Existe en verdad una “debilidad dialéctica” que, de acuerdo a Chevallard (2001), es una dialéctica necesaria en la clase de Matemática entre la construcción matemática y la presencia de lo no matemático, que al debilitarse no permite siquiera entender lo que es la especificidad científica y cultural de lo matemático. Nos interesa en particular el estudio de la existencia de esta debilidad entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico que obstaculiza la comprensión semántica de algunos enunciados matemáticos.

Creemos que los docentes deberíamos reparar en la necesidad de una fuerte intencionalidad didáctica, para poner luz en los mensajes encerrados en complejos enunciados simbólicos cuya enseñanza está mayormente a cargo nuestro. En Camós y Rodríguez (2009a) figuran antecedentes de algunas de estas conclusiones, así como diferentes tipificaciones del uso de los lenguajes y registros utilizados por docentes.

5.4.2. Registros, medios, asignar y extraer significado de los símbolos

Halliday (1978) propone diferentes *registros* en los que se lleva a cabo el uso del lenguaje. La elección del registro depende de la cercanía o distancia entre las partes que desean establecer un vínculo comunicacional. Éstos son: el registro *vulgar* utilizado cuando se presenta una gran cercanía entre las partes; el *formal* cuando hay una distancia notable entre las mismas y el *coloquial* (o *informal*) en un caso intermedio.

Muchos docentes, en una clase de Matemática, utilizan el registro coloquial considerando que de ese modo la llegada a sus estudiantes es mayor e incluso que éstos comprenden más, sin obviar el registro formal siempre presente en dicha clase. También se considera el *medio oral* o el *medio escrito* enmarcados dentro de la noción de *medio* de Lyons (1980). Estas nociones se refieren a los canales elegidos para establecer la comunicación.

A su vez, los sociolingüistas para explicar la adquisición del lenguaje oral consideran dos factores: las características del grupo social al cual se pertenece, y las reglas estructurales del lenguaje. Ambos son relevantes en el desarrollo del lenguaje y en el proceso de su adquisición. Existen diferencias individuales y grupales que también influyen (Halliday, 1986).

Fusaro Pinto & Tall (1999), centrándose en el concepto de límite funcional, estudian las construcciones realizadas por los estudiantes referidas a esta noción. Tomamos de dicho trabajo dos categorías: *asignar significado* y *extraer significado*, que utilizan los autores para diferenciar dos modos en que los estudiantes operan cuando trabajan con definiciones teóricas.

La asignación de significados se construye a partir de ideas informales cuando el sujeto, habiendo comprendido intuitivamente un concepto, intenta plasmar o acercarse a una definición en lenguaje simbólico. La extracción de significados se realiza partiendo de teoría formal, en general en lenguaje simbólico, y lo que se pretende es que se explicite la asignación de significados asociados a los símbolos.

5.4.3. Análisis de un caso

Presentamos en este apartado un ejemplo de uso de los lenguajes natural y simbólico en un docente al momento de enseñar el concepto de límite funcional en un primer año universitario. Agregamos, también, un análisis de apuntes que tomaron estudiantes de ese curso. Esto nos permite, por un lado, presentar algunas reflexiones sobre la tarea docente en estos aspectos y, por otro, sobre el rol del alumno universitario y lo que en ese nivel se espera de él.

Primero realizamos un análisis global de la clase en relación con los apuntes y luego un análisis local, pormenorizado, de ciertos episodios relacionados con las anotaciones realizadas por los alumnos.

Análisis global de la clase en relación con los apuntes

El docente, en primera instancia, utiliza en la oralidad el registro coloquial intentando que los alumnos se aproximen intuitivamente a la comprensión de la noción de límite funcional. Incluye luego varios ejemplos de gráficos de funciones conocidas con la intención de que los estudiantes establezcan analogías entre los distintos casos presentados.

Existen también algunos momentos de la clase donde se advierten imprecisiones matemáticas en el lenguaje natural. En ningún momento el docente expresó oralmente en lenguaje natural y registro formal la definición de límite. Sin embargo, si nos circunscribimos al medio oral, consideramos que la narración que realiza a lo largo de toda la clase tiene un hilo conductor coherente, los ejemplos son pertinentes y su secuenciación es adecuada.

En cambio, si nos circunscribimos al medio escrito que usa el docente, no encontramos un hilo conductor. Opta por plasmar en el pizarrón solamente en lenguaje simbólico (incorporando algunas palabras sueltas) expresiones aisladas que no comunican el mensaje dado por el docente en el medio oral.

Los alumnos en una clase toman sus propias decisiones acerca de lo que dejan registrado en sus apuntes. Algunos optan por copiar sólo lo que está en el pizarrón, otros copian lo registrado en el pizarrón y agregan, si pueden, alguna frase o palabra de lo que el docente expone en el medio oral. Por último, algún alumno puede decidir estudiar recurriendo a un texto y quiere atender a las explicaciones del docente para llevarse ideas.

Análisis local de la clase en relación con los apuntes

Mostramos un primer momento de la clase donde el docente intenta que los alumnos le asignen significado a la noción de límite utilizando uno de los ejemplos dados. Este caso ha sido desarrollado con más detalle en Camós y Rodríguez (2009b).

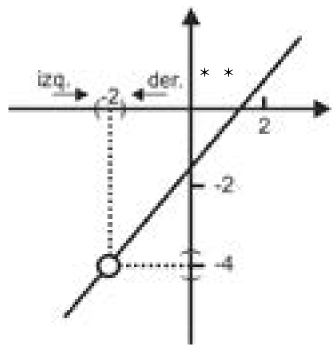
Presentamos en un primer cuadro la narración del docente y lo que registró en el pizarrón. En un segundo cuadro el apunte del alumno 1 (AL 1) y finalmente en un tercer cuadro el apunte del alumno 2 (AL 2).

Primer cuadro

a) Transcripción de la narración que el docente realizó en lenguaje natural, medio oral, referida a límite.	b) Lo que el docente va registrando en el pizarrón
En el primer ejemplo $$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$$ (en el cual no se define el conjunto de partida ni el conjunto de llegada) el docente dice: *"es una función racional y en función del reconocimiento de qué función es, defino el dominio"*. Sigue oralmente mientras escribe: "*quiere decir que f de x se va a aproximar al valor -4, cuando x se va a ir aproximando al valor -2 en un sentido como en el otro*". Luego dice que la función homográfica es un caso particular de una función racional y escribe:	*Racional* $\downarrow$ *Dominio:* *Homográfica* $\downarrow$ *Racionales* $\Re-\{-2\}$
A continuación factoriza la función, mencionando los ceros de la cuadrática y la diferencia de cuadrados, luego simplifica obteniendo "una recta". Aclara que en realidad se partió de una función racional y se obtuvo una expresión equivalente por lo tanto se debe seguir considerando al dominio como los reales excepto el 2.	$f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}$ $f(x)=(x-2)$ $-2\notin Dom$

Construye el gráfico, y dice oralmente *"a esta recta le debo sacar el valor menos dos, o sea en el valor equis menos dos habrá un agujero y ese agujero gráficamente me indica que el menos dos no pertenece al dominio".* Pregunta: *¿cuál es la imagen de –2?* Los alumnos contestan que no existe y completa en el pizarrón: (1)

$$-2 \notin Dom \Rightarrow \nexists f(-2) \quad (1)$$



El docente luego aclara oralmente: *"nos iremos acercando por derecha y por izquierda al valor -2, lo que queremos analizar es la función a qué valor se va a ir aproximando su imagen".*
(y dibuja los entornos alrededor del -2 y del -4).

Luego señalando con la mano dice: *
"nos vamos a ir acercando por derecha y por izq. al valor -2". Luego sigue: "*para indicar que me acerco al valor -2 por izquierda escribo un signo menos arriba* y *al revés".*

$$x \to -2^-$$

$$x \to -2^+$$

Luego escribe:
"quiero ver, aproximándome en un sentido o en el otro a qué valor se aproxima la imagen"
y escribe:

$$f(x) \to ?$$

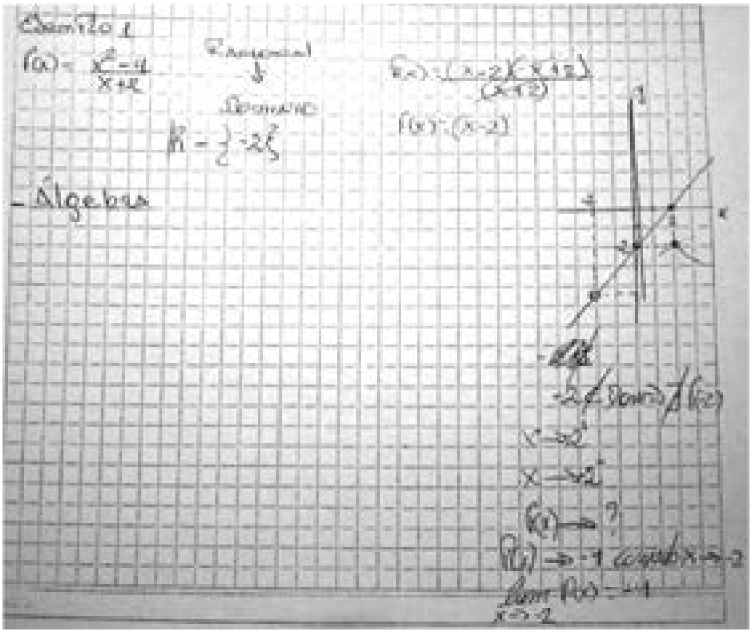
Luego aclara que muchas veces en el nivel polimodal lo que se hace es una tabla de valores, reemplazando en la función y observar esos resultados que van a ser las imágenes de esos puntos que estoy analizando a qué valor se van aproximando.
Luego dice: *"intuitivamente nosotros podemos observar que tanto en un sentido como en el otro las imágenes ¿a qué valor se van a ir acercando?".*
Aclara, luego de preguntar: *"a -4".*

$$f(x) \to -4$$

cuando

$$x \to -2$$

Segundo cuadro: apunte del estudiante AL 1



Este es un ejemplo de quien sólo copia en sus apuntes lo que encuentra en el pizarrón. Notemos que no indica el resultado del límite, – 4, en el gráfico y que aparece la palabra "Álgebra" que no estuvo en la explicación del docente. Esta palabra le queda mal ubicada, pues corresponde a un repaso anterior llevado a cabo por el docente. Tampoco indica los intervalos en los ejes cartesianos.

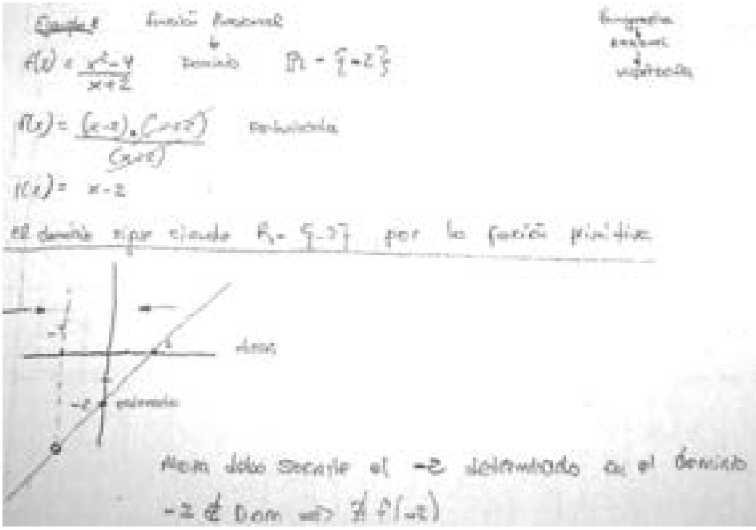
Tercer cuadro: estudiante AL 2

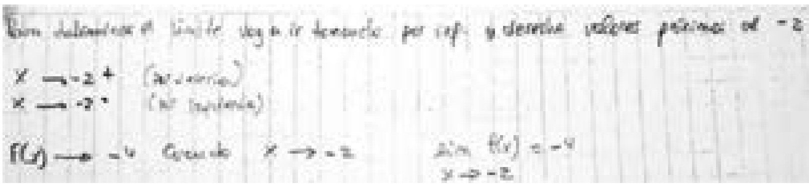
El alumno AL 2 (cuyo registro está debajo), reconstruye en su escrito el hilo conductor. Notemos que sus aclaraciones se corresponden con lo dicho por el docente (excepto indicar el resultado del límite en el eje *y*), en el orden que el docente expone.

Agrega también la frase siguiente: *factorizada, el dominio sigue siendo* $\Re - \{-2\}$ *por la función primitiva.* Luego al lado del gráfico escribe: *ahora debo sacarle el* -2 *determinado en el dominio.*

Incluso agrega la palabra *hipérbola* (debajo de racional).

Por último escribe: *para determinar el límite voy a ir tomando por izquierda y derecha valores próximos a* -2.





Aunque el AL 2 intenta mantener en sus apuntes el hilo de la clase, no toma en cuenta, por ejemplo, el comentario que realiza el docente sobre el uso de las tablas de valores y seguramente sea un recurso que el docente invitará a utilizar al momento de explorar posibles valores de límites.
Lo que sigue es un segundo momento de la clase, donde el docente intenta que los alumnos extraigan significado de la definición de límite.
El docente consulta a los alumnos qué es el límite, nadie contesta. Finalmente aclara que lo debe definir independientemente de los ejemplos que ha dado, ya que hasta ese momento lo que ha intentado es que lo comprendan en forma intuitiva. Dice: *Voy a escribir con símbolos la definición y vamos a ir desmenuzándola en función de los ejemplos anteriores*. *El concepto de límite fue abordado por Cauchy, luego volveremos a hablar de él cuando veamos derivada*.
Mientras escribe en el pizarrón, va leyendo en voz alta lo que escribe de espaldas a los alumnos y luego pregunta: *¿qué copian? ¿Entienden algo?*

Debajo copiamos textual lo escrito en un primer momento en el pizarrón:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{si } x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Sigue: *Vamos a ver qué son estas letras griegas, épsilon, delta. Nos dicen que son mayores que cero y ahí nos están dando una condición. Luego aparece un condicional.* Posteriormente pregunta: *¿qué son estas rayitas? ¿recuerdan?* (y señala las barras de módulo), aclarando su nombre y recordando que es un tema que ya han desarrollado en detalle en una asignatura anterior. Se dirige entonces al afiche[6] y dice oralmente: *Lo que tenemos acá es una inecuación modular*. Luego, donde ya estaba escrito como saber previo "módulo", escribe "inecuación modular" en el afiche.

Seguidamente expresa: *¿De qué otra manera podemos expresar esa inecuación modular?* Escribe luego en el afiche: $|x| \leq a$ para intentar que los alumnos hagan una analogía. Pregunta: *¿A qué es equivalente?* Nadie contesta y escribe $-a \leq x \leq a$ aclarando que vale por la definición de módulo. Vuelve entonces a la definición de límite escrita y debajo de ella desarrolla las expresiones que tienen módulo, mientras va diciendo: *Luego, entre la resolución de ambos módulos coloco la implicación* y escribe su símbolo. Aclara también que si existe una implicación hay un antecedente y un consecuente. Continúa explicando en lenguaje natural oral qué es un entorno reducido y escribe en otra parte del pizarrón su notación en símbolos.

En el pizarrón quedó registrado lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{si } x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$-\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

$$-\delta + x_0 < x < \delta + x_0 \Rightarrow -\varepsilon + L < f(x) < \varepsilon + L$$

$$(-\delta + x_0; \delta + x_0) \Rightarrow (-\varepsilon + L; \varepsilon + L)$$

Pregunta: ¿qué significa el δ? Un alumno contesta una constante y luego el docente vuelve a preguntar: ¿qué será ese δ del intervalo? Sigue: el x es el centro,

[6] El docente cuando comenzó la clase colgó en otro pizarrón un afiche donde aclaró que iría escribiendo los saberes previos que los alumnos debían tener para comprender el tema (tal vez con el objetivo que los repasen).

entonces ¿qué será ese δ ? ¿Una distancia será? Nadie contesta y dice: por eso acá aparece positiva (y señala la definición). Es un radio. Luego se dirige al gráfico del primer ejemplo (el indicado en la tabla), señala los intervalos dibujados y dice: Estos intervalitos que habíamos marcado acá (los señala en el ejemplo 1, que describimos anteriormente) entonces son entornos y para poder definir un entorno (y se dirige al afiche donde estaba escrito) necesito el centro y el radio de ese intervalo abierto. Pregunta: ¿cuál es la diferencia entonces entre entorno y entorno reducido? Nadie responde. Luego dice: ese centro puede o no pertenecer al intervalo, al entorno, entonces cuando no pertenece al entorno vamos a estar hablando de entorno reducido y matemáticamente se nota con una tilde o con un asterisco. Luego vuelve a preguntar: entonces en el ejemplo 1 tenemos ¿un entorno o un entorno reducido? Rápidamente dice: Es un entorno reducido, entonces en nuestro ejemplo 1 tenemos un entorno reducido porque el -2 no pertenece al dominio pero igual le calculamos el límite.

Observaciones del docente al primer momento de la clase

En el análisis global de la clase, desarrollado anteriormente, describimos la estrategia que utiliza el docente para que los alumnos se aproximen intuitivamente a la comprensión de la noción de límite funcional. Es claro, por lo tanto, que la decisión del docente es no partir de la definición conceptual de límite funcional, sino que su estrategia es que los alumnos asignen significados a partir de ejemplos, intentando llegar a la definición. Si bien el mensaje en lenguaje natural tiene un hilo conductor claro y fluido, existen algunos momentos de la clase donde se advierten imprecisiones matemáticas en el medio oral. En ningún momento de la clase el docente dicta algo de lo que enuncia oralmente para que el alumno pueda registrarlo en su cuaderno, ni tampoco deja escrito con palabras en el pizarrón lo que enuncia oralmente. En el medio escrito quedan plasmados símbolos que mirados en sí mismos no presentan un hilo conductor. Selecciona solamente expresiones simbólicas e incorpora algunas palabras sueltas como *izquierda* y *derecha,* (cuando se refiere a la forma de aproximarse a la función en un punto) pero que no comunica el mensaje dado por el docente en el medio oral.
Notemos que el alumno AL 1 sólo copia del pizarrón y no reconstruye el hilo conductor. No indica el resultado del límite, – 4, en el gráfico; no marca los entornos en los ejes que dibujó el docente y no agrega ni las flechas ni las palabras

izquierda y derecha. Esto en cuanto a lo que quedó registrado en el pizarrón, pero además, tampoco agrega ninguna aclaración personal en su apunte.
El alumno AL 2 reconstruye parcialmente en su escrito el hilo conductor. Agrega aclaraciones que se corresponden con lo dicho por el docente, en el orden que lo expone en la clase y también alguna pequeña aclaración personal (por ejemplo, la palabra hipérbola).

Observaciones del docente al segundo momento de la clase

En este segundo momento de la clase el docente decide escribir la definición de límite, aclarando que primero lo hará en símbolos y que *la irá desmenuzando*. Enuncia nombres de los símbolos *épsilon, delta*; se detiene a realizar un breve repaso de la noción de módulo para luego poder aplicarlo en la definición, entendiendo que escribir la definición sin utilizar módulo es *desmenuzarla.* Mientras opera con ambos módulos presentes en la definición, menciona la *implicación,* recordando el nombre del símbolo. Luego explica en lenguaje natural oral qué es un entorno reducido, quedando únicamente en el pizarrón un dibujo del entorno, y en el afiche su notación. Vuelve luego al ejemplo 1, mostrando los entornos dibujados en los ejes coordenados y aclarando que δ es una distancia y por eso es positiva.
El docente finaliza así lo que considera su explicación de la definición de límite funcional. Decimos que en el medio oral el profesor utiliza un registro coloquial, cuyo hilo conductor no está dirigido a que los alumnos se aproximen a comprender la definición de límite. Expresamos que *se aproximen* porque vale aclarar que el concepto de límite es una noción sumamente compleja y muy difícil de comprender en un primer momento. En el medio escrito, no encontramos un hilo conductor, pues el docente selecciona solamente expresiones en lenguaje simbólico y en ningún momento de la clase queda registro de algo en lengua natural.

5.4.4. Conclusiones

Atendiendo a las decisiones que pueden tomar los alumnos en una clase de Matemática, en cuanto a lo que dejan registrado en sus apuntes, encontramos diversidad de matices. El análisis de este caso nos permite inferir que el Alumno 1, quien opta por copiar sólo lo que está escrito en el pizarrón, sin registrar nada de lo enunciado oralmente por el docente en lenguaje natural puede, entre otras, enfrentarse a tres situaciones:

- Si comprende el lenguaje natural que el docente utiliza en el medio oral, puede o no extraer significado de las expresiones simbólicas cuando vuelva a leer su apunte.
- Si no comprende el lenguaje natural que el docente utilizó en el medio oral, puede ocurrir que, además de copiar lo que queda en el pizarrón, copie lo que dice el docente para luego intentar comprender a partir de más elementos.
- Si no comprende el lenguaje natural que el docente utiliza oralmente puede ocurrir que no intente copiar lo que dice el docente, y que sólo copie lo del pizarrón, sin darse cuenta de lo perdido.

A su vez, el Alumno 2, quien opta por copiar lo que está escrito en el pizarrón y agrega alguna frase o palabra de lo que el docente expone en el medio oral puede, entre otras, enfrentarse a dos situaciones:

- Si comprende el lenguaje natural que oralmente utilizó el docente, puede extraer o no significado del lenguaje simbólico cuando vuelva a leer su apunte, y seguramente tendrá posibilidades de hacerlo.
- Si no comprende el lenguaje natural que el docente utilizó oralmente, puede ocurrir que copie lo que dice el docente para luego intentar comprenderlo.

Los alumnos involucrados en este estudio ya han adquirido a lo largo de su escolaridad lenguaje oral y lenguaje simbólico, y el docente a su vez incluyó en su explicación los nombres de los nuevos símbolos utilizados en esta nueva definición de límite. Podemos entonces suponer que el alumno está en condiciones de leer la definición en lenguaje simbólico. Sin embargo, esta lectura a manera de decodificación, no asegura que comprenda el significado ni le otorgue sentido a este concepto. Recuperar el mensaje encerrado en la expresión $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 4$, o al menos asignarle significado, no es tarea fácil.

Si bien el lenguaje natural utilizado por el docente en el medio oral tiene un hilo conductor, éste no aparece en el medio escrito y el profesor no tiene la intención de que el alumno copie en sus apuntes algo de lo que enuncia oralmente.

Existe sí una síntesis de saberes previos y de nuevos símbolos en el afiche utilizado por el docente, y en el medio escrito (pizarrón) prevalecen casi exclusivamente expresiones simbólicas.

En el segundo momento relatado de la clase, el docente define el concepto de límite funcional. La definición que escribe no está completa, no presentó la función, ni el objeto matemático que estaba definiendo, ni su notación. Lo notable es que no comienza con un análisis global de la definición, sino que atiende a los símbolos y a realizar una revisión de nociones ya conocidas y/o comprendidas por los alumnos, como el concepto de módulo.

El docente *decodifica* los símbolos, con un formato particular de columnas, como indicamos en la descripción del episodio. El alumno en este caso debe extraer significado ya que una definición es parte de la teoría formal matemática, la cual en general se expresa en lenguaje simbólico. Un alumno al extraer significado debe poder explicitar la asignación de significados asociados a los símbolos.

Nosotros consideramos, además, que el alumno debe comprender el significado global de dicha definición, otorgarle un cabal sentido y comprender el mensaje que encierran los símbolos.

Según Cañón (1993), la Lógica le otorga consistencia a la Matemática, pero eso no la agota. Una de las características de la investigación en Educación Matemática es la diversidad de disciplinas que se utilizan.

En nuestro caso, la Linguística nos aporta algunos elementos importantes. Lo sintáctico y lo semántico son dos dimensiones del lenguaje, y aristas también utilizables para el análisis semiótico. Lo sintáctico es el análisis de la relación entre los distintos signos o símbolos del lenguaje y la semántica es el estudio de la relación entre los signos y sus significados.

Si nos remitimos al lenguaje simbólico en Matemática, a esta decodificación símbolo a símbolo mencionada anteriormente en este estudio, la podemos relacionar débilmente con esta dimensión sintáctica del lenguaje; y a la captura del mensaje que ocultan las proposiciones matemáticas, también podemos relacionarla con la segunda dimensión nombrada anteriormente (el análisis semántico), el cual a su vez es mucho más contextualizado. Pero esto no se agota, todo vuelve a relacionarse en un amplio entretejido complejo.

Gardner (1991) cita:

> [...] una de las dificultades más importantes que se produce en el aprendizaje de las Matemáticas tiene que ver precisamente con la diferente utilización del léxico en la vida cotidiana y en el lenguaje matemático. Mientras que en una conversación normal se tiene bastante libertad en lo referente al uso del lenguaje y las interpretaciones del mismo vienen dadas por el contexto, en el caso de las Matemáticas el lenguaje tiene un significado muy preciso. La presencia de ambigüedades o imprecisiones como las utilizadas de manera

cotidiana pueden ocasionar numerosas dificultades. Así, por ejemplo, la palabra *es* puede adoptar cuatro expresiones simbólicas diferentes en Matemáticas: igualdad, pertenencia a una clase, existencia y participación. [...] las personas novatas o con pocos conocimientos matemáticos suelen traducir los problemas numéricos de forma literal y frase por frase. Por el contrario, los expertos [...] suelen realizar una traducción mucho más global. [...] Esta traducción rápida y lineal de los novatos (y los alumnos son novatos casi por definición) contribuye a que no sean detectadas las posibles inconsistencias o incoherencias en el texto. [...] (pp.68-69).

5.5. Referencias bibliográficas

Ausubel, D. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. Nueva York: Holt, Rinehart y Winston.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(3),* 210-230.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bruner, J. (1998). *Desarrollo cognitivo y educación*. Madrid: Morata.

Camós, C. y Rodríguez, M. (2009a). *Exploración del uso de los lenguajes natural y simbólico en la enseñanza de matemática superior*. Extraído el día 2 de febrero de 2011 de http://cibem6.ulagos.cl/ponencias/COMUNICACIONES/MABEL%20RODRIGUEZ(CONGRESO%20MATEMATI CAS)/Articulo-Camos-Rodriguez(texto%20completo).pdf.

Camós, C. y Rodríguez, M. (2009b). Los lenguajes del docente y su relación con los apuntes del alumno. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología 1(1),* 139-164.

Cañón, C. (1993). *La Matemática: Creación o Descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Carnelli, G.; Falsetti, M.; Formica, A. y Rodríguez, M. (2007). Un estudio del aprendizaje en validación matemática a nivel pre-universitario en relación con distintas interacciones en el aula. *Suma 58,* 25-40.

Colombano, V. (2009). Propuesta para superar algunos modelos intuitivos no apropiados de límite funcional. *Revista de Educación Matemática.* Extraído el

2 de febrero de 2011 de http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_ edu/documents/vol_25/prop_11.pdf.

Colombano, V. y Rodríguez, M. (2009). Una propuesta para atender la persistencia del modelo Dinámico-práctico luego de la enseñanza de límite funcional. *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy: UNLu.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall. *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153-165). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. Conferencia impartida en las *XVI Jornadas del Seminario Ínter universitario de Investigación en Didácticas de las Matemáticas*. Zaragoza.

Delgado Rubí, R. (1997). Las habilidades matemáticas. *Seminario taller de Didáctica de la Matemática.* Universidad Tecnológica Nacional, Regional Haedo. Argentina

Duval, R. (1996). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hit (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Falsetti, M.; Marino, T. y Rodríguez, M. (2004). Validación en Matemática en situación de aprendizaje. *Memorias del VI Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy: UNLu.

Ferrer Vicente, M. (2000). *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana*. Tesis de doctorado no publicada. Instituto Superior Pedagógico Frank País García Facultad de Ciencias, Departamento de Matemática-Computación, La Habana, Cuba.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *EMA 7(2)*, 127-170.

Fusaro Pinto, M. & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. *Proc. of the 23rd Conference of PME 3,* 281-288. Israel.

Gardner, H. (1991). *The unscholed mind. How children think and how schools should teach*. NY: Basic Books. Traducción al español de F. Meler-Ortí. *La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar las escuelas*. Barcelona: Paidós, 1993.

Godino, J. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. *Comunicación presentada al VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica*. Granada.

Godino, J.; Font, V.; Contreras, A. y Wilhelmi, R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática educativa 9(1),* 117-150.

González, V. y Rodríguez, M. (2006). Un modelo para evaluar la validación matemática. *Revista Educación Matemática 18(3)*, 103-124.

Halliday, M. (1978). *Language as Social Semiotic*. Londres: Arnold.

Halliday, M. (1986). *El lenguaje como semiótica social*. México: FCE.

Juter, K. (2005). Limits of functions–how do students handle them? *Pythagoras 61*, 11-20.

Juter, K. (2007). Students' Conceptions of Limits: High Achievers versus Low Achievers *The Montana Mathematics Enthusiast 4(1)*, 53-65.

Lyons, J. (1980). *Semántica*. Barcelona: Teide.

Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics 27(3)*, 249-266.

Piaget, J. & García, R. (1989). *Psychogenesis and the History of Science*. New York: Columbia University Press.

Rodríguez, M.; Carnelli, G. y Formica, A. (2005). Una evaluación de habilidades matemáticas*, Suma, 48*, 33-43.

Talizina, N. (1985). Los fundamentos de la enseñanza superior. *Conferencia presentada en Dpto. de Estudios para el perfeccionamiento de la Educación Superior*. Universidad de La Habana, Cuba.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12(2)*, 151-169.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques 10 (2), (3)*, 133-170.

Vigotsky, L. (1934). *Pensamiento y Lenguaje.* Madrid: Visor.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education 22 (3)*, 219-236.

6
Resolución de Problemas

Mabel A. Rodríguez

6.1. Encuadre teórico

En este capítulo presentamos la línea de la Didáctica de la Matemática que suele denominarse Resolución de Problemas, proviniendo de la traducción de *Problem Solving*, o Escuela Anglosajona e incluso Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Podría decirse que esta escuela tiene su origen con los desarrollos de Polya (1954, 1965, 1981) y con el correr de los años diversos autores han estudiado y trabajado en ella. Podemos mencionar a Schoenfeld (1985, 1992), González (1998), Koichu, Berman & Moore (2003a,b); Krulik & Rudnik (1987); Lesh & Harel (2003); Borasi (1986); Campistrous y Rizo (1996), entre otros.

Muchos autores hoy en día utilizan expresiones como “enseño mediante problemas” o “el enfoque de mis clases es el de la resolución de problemas” y no siempre el significado otorgado a estas frases coincide con que “la línea de la Didáctica de la Matemática seleccionada es la Resolución de Problemas”. Consideramos que esto puede deberse a que la expresión *resolver problemas* no conllevó en sus inicios una carga teórica, como hoy en día la tiene debido a los avances en los desarrollos de la Didáctica de la Matemática. Un modo de conocer el significado de ese tipo de frases es relevar la bibliografía que sostiene las posturas o propuestas. En ella uno podrá advertir si el autor se está refiriendo a “la resolución de problemas” en el sentido de esta Escuela de la Didáctica de la Matemática o no.

Si tuviéramos que sintetizar el espíritu de este enfoque, diríamos que *el énfasis está puesto en que los estudiantes se conviertan en buenos resolutores de problemas*. Al decir esto queremos **resaltar el interés en que adquieran herramientas y construyan estrategias para abordar problemas, a la vez que el foco no está puesto en la enseñanza de un contenido matemático específico**. Esto por supuesto que no significa que en la resolución de problemas no haya matemática, lo que se pone de relieve es que en un contexto de resolución de problemas que tocan contenidos matemáticos, el docente querrá que el estudiante se comporte como un matemático: explore, experimente, analice sus avances, cambie de rumbo, reflexione sobre lo hecho, advierta cómo está pensando y encarando la tarea, etc. Como iremos viendo a lo largo del capítulo, esto que aquí expresamos será central para comprender la diferencia entre ésta y otras líneas teóricas, al mismo tiempo irá quedando claro cómo esto incide en el modo de: planificar la clase, intervenir en el aula y evaluar aprendizajes.

Los elementos teóricos centrales en esta línea de la Didáctica de la Matemática son, en primer lugar, el concepto de *problema*, las *estrategias heurísticas* o simplemente *heurísticas*, las *etapas en la resolución de un problema* y la *metacognición*. A continuación iremos desarrollando cuestiones básicas sobre cada una de ellas.

6.1.1. Sobre la noción de problema

El concepto de *problema*, para esta escuela, es central y a la vez complejo de asir. Diversos autores han propuesto sus propias definiciones, acorde al trabajo que deseaban encarar plasmando las características que consideraban relevante resaltar.

Por mencionar algunas, citamos las siguientes:

Comenzamos con Polya (1981), quien definió la noción de problema de la siguiente manera: “Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata”[7] (p.117).

Krulik & Rudnik (1987) establecen que “Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que

[7] Cfr: …*to have a problem means: to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately atteinable, aim (sic).*

requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma”[8] (p.3).

Labarrere (1996) enuncia:

> un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; (…) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar. (Labarrere (1996), citado por Nápoles Valdés y Cruz Ramírez, (1999), p.24).

Es interesante el hecho de que, más allá de la definición final que se tome, cualquiera de ellas contempla ciertas características comunes y, eventualmente, se diferencia en otros aspectos.

Las características comunes a toda definición de problema son las siguientes:

- Existe una persona que ha de resolver la actividad (un resolutor).
- Existe un punto de partida y una meta a alcanzar.
- Existe un cierto bloqueo o resistencia que no permite acceder a la meta inmediatamente.

A partir de estas características, primeramente resaltamos el hecho de que en realidad uno define el concepto de *problema para un sujeto*, y no simplemente la noción de *problema*. Esto expresa que lo que para un individuo resulta ser un problema bien podría no serlo para otro. Esta relatividad al sujeto es una característica inherente al concepto y a la vez empieza a poner de manifiesto la complejidad de su uso en el aula. En segundo lugar, resaltamos la tercera condición que pone en puntos opuestos a los problemas y los ejercicios, entendiendo estos últimos como actividades para cuya resolución el camino a seguir es claro para el sujeto.

Por ejemplo, si los estudiantes conocen la fórmula resolvente de la ecuación cuadrática, una actividad que diga “resolver la siguiente ecuación cuadrática $2x^2 - 5x + 3 = 0$” resultaría ser un ejercicio, y por lo tanto no sería un problema para esos estudiantes. En oposición, si no conocieran dicha fórmula, la actividad bien podría resultar un problema.

Por una cuestión de no recargar la escritura, diremos *problema* entendiendo con ello que nos referimos a *problema para un sujeto*.

[8] Cfr: *[a problem is] a situation, quantitative or otherwise, that confronts an individual or group of individuals, that requires resolution, and for which the individual sees no apparent or obvious means or path to obtaining a solution (sic).*

Hemos mencionado las características comunes a distintas definiciones de problema. Mencionamos aquí algunas características que no forman parte de lo común a todas las definiciones pero que algunos autores suman. Entre ellas sólo mencionamos las tres siguientes.

- La motivación (que el estudiante se sienta motivado a resolver la actividad).
- Las herramientas matemáticas (explícitamente se pide que el estudiante disponga de las herramientas necesarias para resolver).
- El desafío (que resulte un desafío para quien resuelve).

Para cerrar este apartado, consideramos la siguiente definición que puede verse en Chacón, Farías, González y Poco (2009) que retoma una propuesta hecha por González (1998).

> Un *problema para un individuo* es una situación que requiere solución y éste, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato. (p.3).

En el apartado 6.3.1 daremos algunos criterios para la elaboración de problemas.

6.1.2. Sobre la noción de heurísticas

Los términos *heurísticas* o *estrategias heurísticas* serán utilizados indistintamente en este texto y hacen referencia a lo que Polya (1981, p.10) define como "el estudio de medios y métodos de la resolución de problemas"[9].

Como diversos autores han trabajado sobre este concepto, sumamos dos aportes. Por un lado Verschaffel (citado por Koichu, Berman & Moore, 2003a) define las heurísticas como "…estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y transformación del problema" (p.2). Por otra parte, Koichu *et al* (2003a), partiendo del conocimiento que las heurísticas se describen empíricamente o bien se acompañan de ejemplos puntuales que permitan entender el concepto, presentaron descripciones generales de las estrategias independientemente del contexto, como pueden verse en el artículo citado.

Cabe resaltar que las heurísticas se ponen en juego cuando el sujeto está enfrentado a la tarea de resolver un problema pero no se circunscriben a estrate-

[9] Cfr: *[I wish to call heuristics...] the study of means and methods of problem solving (sic).*

gias exitosas que permiten obtener una respuesta correcta al problema. Veremos aquí que el uso de heurísticas suele darse en diversos momentos, por ejemplo a la hora de intentar comprender el enunciado, en la verificación de la solución, por mencionar un par. Estas estrategias se ponen en juego cuando el individuo está buscando la forma de resolver el problema. Aparecen en esos momentos de incertidumbre, exploración, indecisión y su uso no es necesariamente válido desde el punto de vista matemático.

Podemos mencionar algunas heurísticas más comunes, entendiendo que de ninguna manera podríamos listarlas todas, y que la lista siempre quedará abierta a la creación de nuevos recursos en los momentos de incertidumbre.

Algunas heurísticas son:

- Utilizar un método de expresión o representación adecuado: verbal, gráfico, algebraico, numérico.
- Razonar por analogía.
- Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos.
- Considerar casos particulares.
- Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y generalizar (razonamiento de tipo inductivo).
- Verificar usando casos particulares.
- Trabajar desde el final.
- Dividir el problema en sub-problemas.
- Simplificar el problema.
- Introducir un elemento auxiliar.
- …

Explicamos y ejemplificamos algunas de ellas.

<u>Simplificar el problema</u>: se refiere a que el sujeto en un primer momento simplifica el problema para pensar un caso más simple. Habiendo resuelto éste, vuelve al problema inicial y trata de llevar su forma de pensar al caso planteado.

Imaginemos que, para algún estudiante, el siguiente enunciado constituya un problema: *Indicar de cuántas formas pueden sentarse 10 personas en 10 butacas alineadas de una fila de un cine*.

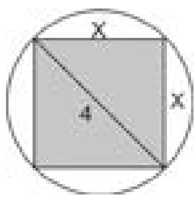
En este caso, un sujeto puede simplificar el problema planteando un número menor de personas y butacas. En ese caso, podría representar mediante un esquema la situación y entendería la forma en la que podría contar en el caso general.

P1	P2	P3

Aquí ha utilizado un esquema (otra heurística) y ha recurrido a una forma de simbolizar las personas (otra heurística). A partir de aquí puede pensar en la solución, exhibiendo exhaustivamente todos los casos y contando. Si en esta exploración el sujeto no encuentra algo que trascienda este caso particular, y se queda en la cuenta, no podrá "volver" al problema y resolverlo. Por otra parte, podría reconocer que tiene 3 posibilidades para la primera butaca, y que por cada una de ellas tiene 2 para la segunda y una única para la tercera y que esta forma de pensar podría extenderse al caso de 10 sujetos. Si así fuera podría pensar en regresar al problema con ideas extraídas de la simplificación que realizó. Si no hace esta última parte, puso en juego la heurística en el abordaje del problema pero no le alcanzó para resolverlo.
Trabajar desde el final: se refiere a que el sujeto imagina tener una solución al problema y a partir de ella piensa qué condiciones deberían cumplirse para que esa solución se dé.

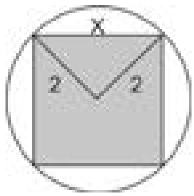
Supongamos que la siguiente actividad es problema para un estudiante: *indicar qué longitud debe tener el lado de un cuadrado que esté inscripto en un círculo de radio 2.*

Si el estudiante hace un gráfico de la situación como el siguiente, y a partir de él plantea $2x^2 = 16$ y a partir de allí avanza, estaría utilizando esta heurística.



Observemos que si el sujeto no sabe cuál es la longitud buscada, pero imagina que la tuviera, concibe el problema resuelto y, a partir de ello, prosigue en la búsqueda de la solución. Ese es el sentido del uso de esta heurística.

Esta misma actividad permite explicar el significado de la heurística: *Introducir un elemento auxiliar*. En ese gráfico, la presencia del trazo de la diagonal del cuadrado es central para poder reconocer un triángulo, sus características y plantear la ecuación que permite avanzar hacia la solución. El trazo de esa diagonal es, en este caso, el uso de la heurística *Introducir un elemento auxiliar*. Del mismo modo, podrían haberse trazado dos radios, como lo indica la figura siguiente y éstos hubieran sido el elemento auxiliar mediante el cual se podía hacer el planteo: $2^2 + 2^2 = x^2$.



En este mismo ejemplo puede verse también la conveniencia de utilizar las heurísticas: *recurrir a dibujos, esquemas o gráficos* y *seleccionar un método de representación adecuada*, el simbólico, luego de haber establecido el gráfico con "la solución" en él.

6.1.3. Sobre las etapas en la resolución de problemas

Polya (1973) ha modelizado el proceso de resolución de problemas estableciendo cuatro etapas o fases:

- comprender el problema,
- concebir un plan,
- ejecutar el plan y
- verificar la solución obtenida.

Idealmente estas cuatro etapas guiarían la resolución de un problema, pero dado que esta es una modelización, no necesariamente se dan todas, ni en este orden y podría haber idas y vueltas de modo que se pase por algunas de ellas más de una vez.

Su planteo está acompañado por una serie de preguntas que permiten entender a qué se refiere con cada etapa.

El siguiente esquema muestra esta relación entre las etapas y las preguntas:

ETAPAS	PREGUNTAS
Comprender el problema	¿Cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente / insuficiente / redundante / contradictoria para determinar la incógnita?
Concebir un plan	¿Es semejante a un problema conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar?, ¿podría imaginarse un problema análogo más simple / general / particular?, ¿puede resolver una parte del problema?, etc.
Ejecutar el plan	¿Puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución?, ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?
Examinar la solución obtenida	¿Puede usted verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puede verlo de golpe?, ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Otros autores han propuesto otros modelos para la resolución de problemas que, desde nuestra opinión, están muy relacionados con el presentado aquí. Para ampliar en esta dirección, puede verse el trabajo de Rodríguez Jara (2008).

6.1.4. Sobre la noción de metacognición

Entre la diversidad de aportes con los que se cuenta hoy en día en Educación Matemática, tomamos la definición de metacognición propuesta por González (1998) según la cual:

> La Metacognición (Mc) es un constructo de naturaleza teórica que alude a los *conocimientos que una persona tiene acerca de su propia actividad cognitiva*; así que su ámbito está vinculado con la toma de conciencia en cuanto a las acciones cognitivas interiorizadas que una persona lleva a cabo cuando realiza algún esfuerzo intelectual; en el caso específico de la resolución de un problema, implica el reconocimiento, por parte del resolvedor, de los procesos internos de pensamiento que él activa cuando intenta resolverlo (p.6).

Este aspecto, que ha acuñado Schoenfeld (1992) en su estudio sobre la resolución de problemas, incorporó un aspecto que se considera central y propio de esta línea. Según él, el pensamiento metacognitivo puede monitorear, controlar y dirigir el propio proceso cognitivo. Se debe analizar qué camino se ha elegido y cuál no, qué y por qué se ha hecho, etc.

Como decíamos al inicio del capítulo el foco está puesto en que los estudiantes sean buenos resolutores de problemas. Esto incluye, además de resolver problemas y utilizar heurísticas, que ellos conozcan cómo trabajan, controlen sus acciones y en función de los resultados que van obteniendo, ajusten, modifiquen, refuercen, etc., en definitiva autorregulen su proceder. Esto último se enmarca en tareas de reflexión metacognitiva que el estudiante debería realizar.

Pensemos por ejemplo en el uso de las heurísticas. Se espera que en algún momento el estudiante reconozca que algunas estrategias le están sirviendo para avanzar en el proceso de resolución de problemas, más allá del contenido matemático que éstos tengan. Debería advertir que hay cuestiones *comunes* que él está utilizando para, luego, poder *decidir* conscientemente, utilizarlas ante nuevos problemas. Esta tarea necesariamente es propia de cada sujeto, nadie podría realizarla por él, sin embargo vinculado a esto, el docente tiene un rol central en la clase. Se le presenta otra tarea compleja, la de activar –en sus estudiantes– la reflexión metacognitiva. Con esto queremos decir estimular este tipo de reflexiones, promoverlas, compartir la diversidad de posibilidades, etc. En el apartado 6.3.2 veremos cómo podemos dar algunas pautas para que el docente en la clase promueva este tipo de reflexiones metacognitivas en sus estudiantes.

6.2. Ideas para aplicar este enfoque en un curso de Matemática

En esta sección nos dedicamos a presentar algunas ideas para aplicar este enfoque en un curso de Matemática que, como ocurre usualmente, está regido por la necesidad de enseñar contenidos, de tipo conceptual, matemáticos. La idea, básicamente, es articular ambos enfoques. Es claro que en la mayoría de las situaciones habrá necesidad de enseñar algún concepto, procedimiento, teorema, etc. pero por ello, ¿estamos obligados a dejar a un lado este enfoque porque no son compatibles? Decididamente no. Mostramos aquí algunas posibilidades que, sin distorsionar el espíritu de la línea, permiten convivir con otros enfoques o modos de enseñanza.

Por un lado, a nivel planificación anual tendremos que establecer: objetivos para el curso, contenidos, modalidad de trabajo en el aula, evaluación y acreditación, etc. Veamos cada uno de ellos.

6.2.1. Respecto de los objetivos

Sin dudas habrá que plantearse objetivos que refieran a lo que deseamos que el estudiante aprenda en términos de "resolver problemas". Sólo a modo de ejemplo mencionamos algunos:

Se espera que el estudiante:

- utilice diversidad de heurísticas en resoluciones de problemas,
- identifique sus fortalezas y debilidades como resolutor de problemas.

La primera de ellas apunta a la incorporación de heurísticas, cuestión central en esta línea. La segunda, en cambio, es un objetivo que atañe a la reflexión metacognitiva que el estudiante debería ir desarrollando a lo largo del curso.

Por supuesto que existirán otros objetivos que tengan la intención de establecer qué es lo que el estudiante debe saber en términos de contenidos matemáticos de tipo conceptual (aplicar distintas fórmulas, argumentar sobre la validez de proposiciones, utilizar fluidamente el lenguaje simbólico y la lengua natural, conocer enunciados de teoremas, realizar cálculos tanto numérica como simbólicamente, resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones, etc.). Estos últimos, usualmente, son los únicos que figuran en las planificaciones anuales. La propuesta es sumar otros objetivos que sean pertinentes con la Resolución de Problemas y coherentes con la modalidad de trabajo que se planificará para que el estudiante los alcance.

6.2.2. Respecto de los contenidos

En una planificación anual, usualmente, los contenidos se organizan por unidades temáticas. Si hemos decidido incorporar la resolución de problemas como "algo a ser enseñado" porque queremos que los estudiantes lo aprendan (y por lo tanto plasmamos esto en objetivos y evaluaremos sobre ello), necesariamente deberemos dejar registro de este otro tipo de contenido en dicha planificación. Ya no serán contenidos de tipo conceptual, sino que serán contenidos del quehacer matemático afín a la resolución de problemas.

Hay dos modos sencillos de resolver el tema de los contenidos en una planificación anual. Una de ellas consiste en presentar las unidades "usuales", primeramente, y una última unidad será la "unidad sobre resolución de problemas". Recordemos que listar las unidades: Unidad 1, Unidad 2,… Unidad 5, no significa necesariamente que la secuencia en la que deban enseñarse sea primero la 1, inmediatamente después la 2 y así siguiendo hasta la última. Para cambiar esto en las planificaciones, el docente puede explicar de qué modo abordará la secuencia de las unidades. Por ejemplo una de ellas podría ser transversal e ir acompañando al desarrollo de los contenidos de las otras. Este último caso es una de las posibilidades que tenemos pensando en incorporar este enfoque en un curso de Matemática en el que hay requerimientos de aprendizaje de contenidos específicos. Es decir, se listan las unidades numeradas consecutivamente, las primeras serán las estándar con contenidos de tipo conceptual, la última la referida a resolución de problemas y se explica que el tratamiento de la última será transversal a todas.

Esto permite que la resolución de problemas no quede relegada a una última etapa, pero obliga a pensar una forma de evaluar las unidades que contemple algo particular para evaluar en función de los objetivos planteados referidos a la resolución de problemas. Podríamos imaginar que si en una semana hay tres días de clase, en dos de ellos durante todo el año se trabajan contenidos, y en el tercero se trabaja resolución de problemas. Vale la pena resaltar que, para no alterar el espíritu del enfoque teórico, los problemas que deberían plantearse ese "tercer día semanal" no debieran ser del contenido matemático trabajado esa semana, sino de cualquiera de los anteriores e incluso de años anteriores.

Otra forma de resolver esta articulación es simplemente reasignar los tiempos para las primeras unidades, acortándolos, y dejar un tiempo hacia el final del curso para el trabajo con los problemas. En este caso, todo el nuevo trabajo quedaría concentrado al final, la evaluación sería la usual para las primeras unidades y sólo se modificaría para la última. Aquí es más simple de concebir que los contenidos matemáticos con los que se elaborarían los problemas para esa unidad, podrían ser cualesquiera de los trabajados y en cualquier orden.

6.2.3. Modalidad de trabajo en el aula

Usualmente en las planificaciones anuales el docente debe anticipar la modalidad de trabajo que plantea para el aula. Dado que distintos individuos pueden utilizar diversas estrategias, podrían pensar el mismo problema distinto y su reflexión metacognitiva es absolutamente personal, la modalidad de trabajo sugerida es *individual*. Esto no quita que en alguna ocasión el docente decida organizar trabajo en grupos. Por ejemplo, este recurso podría ser útil si los estudiantes encuentran que el bloqueo inicial que el problema les genera es demasiado sostenido en el tiempo. Cuando cada estudiante ya leyó el problema, lo pensó e hizo sus primeros intentos, si se desanima, podría invitarse a armar grupos. La interacción en ellos, el hecho de compartir lo pensado, tal vez genere nuevas ideas y posibilidades. Cabe resaltar que se sugiere que los grupos sólo se armen luego de que cada estudiante haya trabajado algún tiempo con el problema. De otro modo, se corre el riesgo de que alguno de ellos se sume a los pensamientos de otro y no genere su propia resolución ni aplique sus estrategias.

6.2.4. Evaluación

Para definir la evaluación de los aprendizajes, al momento de la planificación anual se deberá tener presente que ésta se establece en función directa de los objetivos. Aquí nos focalizaremos exclusivamente en la evaluación de los aprendizajes referidos a la resolución de problemas. Solo a modo de ejemplo: si se han planteado objetivos que postulan que el estudiante adquiera estrategias heurísticas, se debería evaluar si las adquirió y si se planteara que identifique fortalezas y debilidades como resolutor de problemas deberíamos evaluar si las identificó.

Deberíamos lograr coherencia entre: los objetivos planteados, la modalidad de trabajo en el aula y el sistema de evaluación. Para esto es necesario incorporar instrumentos de evaluación apropiados que permitan recabar datos para tomar las decisiones respecto de los objetivos referidos a la resolución de problemas. Los instrumentos de evaluación más usuales, como los parciales, corresponden a pruebas semi-estructuradas y no serían apropiados para recabar este tipo de dato. En cambio, se requiere utilizar instrumentos que permitan evaluar este tipo de habilidades más complejas al mismo tiempo que evaluar el proceso de aprendizaje dado que es en éste en el que, por ejemplo, se ponen de manifiesto el uso de heurísticas más allá de que la resolución alcanzada sea correcta. Evaluar resultados miraría sólo el éxito final, mientras que la adquisición de heurísticas podría no darse en ese punto. Con todo esto mencionamos como posibles instrumentos apropiados para evaluar el proceso de aprendizaje[10] a: las *listas de cotejo*, *rúbricas*, *portafolios* y *diarios*.

En caso de estar en un curso que combina la enseñanza de contenidos de tipo conceptual con la resolución de problemas habría que seleccionar instrumentos para los objetivos de cada parte, generando así un sistema de evaluación. Cabe resaltar que tanto los objetivos de aprendizaje como los criterios de la evaluación

[10] No confundir con evaluar el procedimiento en la resolución de una actividad.

que se han de utilizar en un curso debieran compartirse con los estudiantes. Éstos deberían saber qué es lo que se espera que ellos aprendan durante el curso y cómo y cuándo se los evaluará.

Presentamos cada uno de estos instrumentos mencionando algunas características relevantes que lo caracterizan e incluimos un ejemplo.

Lista de cotejo

- Permite evaluar en distintos momentos aspectos establecidos previamente: de contenido, actitudinales, de trabajo en grupo, etc.
- Formato: cuadro de doble entrada.

En la primera columna se listan los aspectos a evaluar y en la primera fila distintos momentos de tiempo. En cada celda se marca "presencia o ausencia" o "valoración" (bien, regular o mal, por ejemplo).

Ejemplo:

	Día 1	**Día 2**	**Día 3**	**…**	
Reconoce los datos del problema					
Organiza los datos					
Planea una resolución utilizando elementos matemáticos					
Utiliza elementos matemáticos					
Propone una respuesta					
Verifica la solución obtenida					
Redacta su procedimiento					

Este instrumento también sería útil para evaluar el proceso de aprendizaje de contenidos conceptuales, con tal de diseñar una tabla que en la primera columna plasme esa intención.

Rúbricas

- Instrumento que presenta indicadores de desempeño por niveles.
- Formato: cuadro de doble entrada.

En la primera columna se listan las habilidades a evaluar y en la primera fila los niveles de desempeño posibles. Cada celda incluye un descriptor que indique el logro de dicha habilidad en el nivel correspondiente.

Ejemplo:

	Nivel menos desarrollado	**Nivel de desarrollo intermedio**	**Nivel avanzado de desarrollo**
Búsqueda de una posible solución	- No organiza la información. - Trabaja sin rumbo. - No puede explicar por qué hace lo que hace. - Utiliza una escasa variedad de heurísticas.	- Organiza la información. - Hace pruebas sin poder anticipar por qué las propone. - Utiliza heurísticas variadas.	- Organiza la información. - Utiliza variadas heurísticas. - Anticipa un plan de acción. - Puede explicar qué hará.
Verificación de la solución hallada	- No verifica la solución hallada.	- Verifica la solución en casos en los que sus estrategias son "estándar" (solución de ecuaciones, por ejemplo).	- Dispone de diversas estrategias para verificar la solución propuesta.
Etc.			

El docente da a conocer esta tabla a sus estudiantes y, en el trabajo periódico, le indica en qué nivel está y lo registra, para cada una de las habilidades que propuso.

Portafolios

- Es una colección de trabajos de los alumnos.
- El formato es "una carpeta" que contiene las actividades ordenadas y organizadas temporalmente.
- El docente explicita criterios de conformación del portafolio. Puede permitir o no que los alumnos participen de la selección de los trabajos y de los criterios de selección.
- La última actividad suele ser una reflexión sobre el trabajo completo.

El docente solicita la entrega de los trabajos que serán incorporados al portafolio en espacios de tiempo relativamente cortos. Algunos de los criterios que él puede utilizar, o discutir y acordar con los estudiantes, para la conformación de la carpeta son:

- Incluir trabajos que muestran aprendizaje. Explicitar cuál es el aprendizaje alcanzado en él.
- Seleccionar trabajos que muestran errores superados. Entregar tanto el trabajo con el error como la superación del mismo.
- Seleccionar los mejores trabajos.
- Pedir que entreguen todos los trabajos domiciliarios que el docente asigna.
- Que incluyan las tareas que conformen una secuencia que evidencie evolución en el aprendizaje. Explicitar cuál es el aprendizaje alcanzado.

El docente retira los portafolios y para evaluarlos podría establecer criterios (al modo de una tabla de especificaciones que contenga qué es lo que espera. Por ejemplo: entrega completa, prolijidad, uso apropiado del lenguaje matemático, explicaciones claras, reflexiones profundas, etc.). Sería deseable que los estudiantes conozcan dicha tabla de especificaciones que se constituirá en su criterio para evaluar antes de la entrega de las tareas que conforman el portafolio.

En este caso no presentamos un ejemplo pues habría que mostrar los criterios y variedad de tareas (se puede ver un ejemplo desarrollado en Rodríguez, 2006) lo que lo haría demasiado extenso.

Diarios

- Recopila información referida al proceso de trabajo del estudiante.
- Útil para desarrollar aspectos metacognitivos: reflexión acerca de las diferentes actividades de aprendizaje, de los contenidos y los procesos de adquisición de conocimientos, dificultades, etc.

Ejemplo:

Cada día de clase se indica: fecha, conceptos trabajados en clase, qué te despertó curiosidad, preguntas que te hagas, cuestiones que te quedaron confusas, qué aprendiste hoy, otras cosas que quieras agregar.

Otra forma de diseñar un diario podría ser: en cada día de clase indicá fecha y dejá por escrito todo lo que vas haciendo, pensando, experimentando. Agregá al final de cada día comentarios, cosas que no quedaron claras, lo que consideres que aprendiste o no, etc.

Sugerimos también considerar instancias de evaluación oral. Tenemos evidencias que permiten afirmar que hay heurísticas en los estudiantes que no se plasman en resoluciones por escrito, pero que en diálogos se ponen de manifiesto. Para detalles sobre esto, ver Marino y Rodríguez (2009).

6.3. Sobre la clase

En esta sección ahondamos un poco más en el trabajo en una clase de matemática. Eso incluye pensar previamente los problemas, tanto sea para seleccionarlos de algún texto como para diseñarlos y cómo se imagina la gestión del docente. Nos referimos a continuación a la etapa de diseño de problemas. Considerando algunos criterios que estableceremos aquí, la selección de problemas extraídos de un texto –tanto sea para utilizarlos textualmente o para modificarlos– requeriría de un análisis previo que coteje que dichos criterios están presentes.

6.3.1. Diseño de problemas

El hecho de diseñar una actividad que genere cierta resistencia al estudiante requiere, por parte del docente, de un buen conocimiento de sus estudiantes en términos de lo que ellos pueden/saben hacer.

Para el diseño de problemas sugerimos atender a los siguientes criterios:

- *Conocer qué saben/conocen sus estudiantes.*

El docente debería, primeramente, poder describir qué procedimientos pueden aplicar sus estudiantes y qué conocimientos disponen. También le será útil conocer cómo cada uno de ellos percibe la dificultad en tareas usuales. Esto último permitirá conocer una escala de lo que el estudiante considera extremadamente difícil, y tal vez por eso abandone y no intente resolver, y lo que considera muy simple, y no resultaría un problema sino más bien un ejercicio.

Para esto pueden diseñarse diversos instrumentos, desde la observación del docente, a la revisión de las carpetas de trabajo o a las pruebas diagnósticas. Sobre estas últimas, sugerimos al lector interesado la lectura de Chacón *et al* (2009).

- *Redactar la consigna de un modo no familiar.*

Si la consigna resultara demasiado familiar, el estudiante tal vez imagine inmediatamente el camino de solución. Si éste es válido no habrá habido bloqueo inicial y por lo tanto la actividad no habrá resultado ser un problema para ese sujeto.

- *En un análisis previo, chequear que la resolución de la actividad admita variedad de heurísticas.*

Este criterio permite al docente conservar una alta probabilidad de que sus estudiantes exploren diversos caminos, más allá de que resuelvan correctamente. Si a la hora de analizar qué heurísticas podrían ponerse en juego, sólo aparece una o dos de ellas, sería interesante rever el enunciado de modo de dejarlo más abierto, con más posibilidades de toma de decisiones por parte del resolutor.

Ejemplo:

El problema mencionado en el apartado 6.1.2., con un grado más de generalización, como indicamos a continuación, podría resultar problema para un estudiante que culmina los estudios de nivel medio y puede aplicar el teorema de Pitágoras, resolver una ecuación cuadrática, y operar con números irracionales en forma simbólica o aproximada.

Problema: *Indicar qué longitud debe tener el lado de un cuadrado que esté inscripto en un círculo.*

Suele ocurrir que los enunciados escritos en lenguaje natural favorecen el bloqueo inicial, al no advertirse ni una cuenta por hacer, ni una ecuación por resolver, gráfico por realizar, etc. Este enunciado, en particular, no presenta números, lo que también causa cierto desconcierto. Entre las heurísticas posibles de ser utilizadas, encontramos gran diversidad. Ya mencionamos antes: recurrir a dibujos, esquemas o gráficos, introducir un elemento auxiliar, trabajar comenzando desde el final, utilizar una forma de representación adecuada. Podemos sumar: considerar casos particulares, si el estudiante propone un valor numérico para el radio. Si esto lo hace en varios casos intentando encontrar un patrón, estaría usando la estrategia de generalizar inductivamente. También podría encontrar la respuesta simbólicamente, dar un valor para el radio y verificar numéricamente. Esto sería verificar usando casos particulares. Seguramente puedan pensarse otros caminos y otras heurísticas.

Para más ejemplos de problemas, ver Colombano, Isla Zuvialde, Marino y Real (2009).

6.3.2. La gestión de la clase

En la sección 6.2., donde hablamos de cómo organizar una planificación anual, mencionamos que dentro de este enfoque, el trabajo de los estudiantes mayoritariamente es individual.

Aquí planteamos algunas ideas para ayudar a pensar en las intervenciones docentes. En este enfoque debería haber, al menos, dos tipos de intervenciones docentes bien diferenciadas:
- *Atención a dudas durante la resolución de problemas.* Éstas deberá hacerlas ante preguntas, dudas, imposibilidad de avanzar, necesidad de confirmar que la respuesta es correcta, etc.
- *Generación de momentos de reflexión metacognitiva*. Estas intervenciones serán necesarias para activar en los estudiantes esta cuestión central para este enfoque. Sin la intervención docente apropiada, es altamente probable que esa reflexión no sea realizada por los estudiantes.

Para la atención a dudas durante la resolución de problemas

Es interesante pensar, entonces, en generar algunas pautas para que las intervenciones docentes, a la hora de atender dudas o responder preguntas, sean pertinentes. Esta observación, que bien podría ir más allá de una particularidad de esta línea teórica de la Didáctica de la Matemática en particular, cobra en ella un rol importante. La razón es que una intervención no apropiada podría indicarle a un estudiante, por ejemplo, el camino a seguir para resolver una situación y si así fuera, el docente sin querer habría transformado el problema en un ejercicio y todo lo que se desea que el estudiante experimente, deja de tener posibilidades.

Una guía simple para esto es tener presente el cuadro de las etapas y preguntas que presentamos en el apartado 6.1.3. Si pensamos en utilizarlo como un repertorio de preguntas para ayudar a los estudiantes, se torna en un excelente y amplio recurso para utilizar en la inmediatez que se requiere ante una pregunta de un estudiante. El docente podrá percatarse de cuál de las etapas está transitando el estudiante. Por ejemplo, vemos a un estudiante con la hoja en blanco y le dice *"profe, no sé ni por dónde empezar, ¿me ayuda?"*, el docente puede pensar "mi alumno aún está en la etapa de comprender el problema", entonces recurre mentalmente a las preguntas asociadas a esa etapa y puede intervenir, ayudándolo con sugerencias o preguntas de este estilo: *"¿tenés claro* *cuáles son los datos?, ¿podrías imaginar cómo será la respuesta que deberás dar?, ¿será un número, una expresión, un gráfico, etc…?"*, etc. Si quiere ayudarlo, el docente sabe que luego de esto el estudiante deberá concebir un plan, por lo tanto recurre nuevamente a las preguntas asociadas a esta etapa, y podría sugerir: *"fijate si algún problema conocido podría serte de ayuda, o pensá si podrías utilizar algún resultado, ¿podrías pensar en un problema similar pero más simple?"*, etc. Claro que la idea es <u>no</u> dar todas las ayudas juntas. Aquí indicamos posibilidades, pero esperamos que se advierta la intención y que no se tome esto como un libreto pre-establecido que el docente debería seguir. No es esta última la intención.

Para generar momentos de reflexión metacognitiva

Antes de que el docente intente generar momentos de reflexión metacognitiva en sus estudiantes, éstos deben haber resuelto una variedad interesante de problemas. Deben haber pasado tiempo en esta tarea, deben haberse enfrentado a problemas que requirieron diversos contenidos matemáticos, haber tenido la posibilidad de utilizar una misma heurística en más de un problema, etc. Es decir es una tarea para iniciar con los estudiantes cuando éstos estén relativamente cómodos con el trabajo. Entonces, el docente debería dedicar un tiempo considerable para traer a escena nuevamente algunos enunciados, problemas para cuya resolución se compartan heurísticas, de distintos contenidos matemáticos, actividades que les hayan resultado ejercicios y no problemas, etc. La idea es que invite a pensar a sus alumnos y que cada uno de ellos registre sus respuestas. Esto lo decimos porque cada uno tendrá diferencias con los otros y probablemente no todos puedan hablar en la clase. Deberían registrar lo que piensan.

A modo de ejemplo: el docente invita a los estudiantes a pensar en lo que han resuelto, lo que les costó más, lo que les fue más simple, lo que les gustó y lo que no. Puede hacerle preguntas como: *"cuando estabas trabado, sin poder empezar, ¿te acordás qué preguntas te hice?"*. La idea con esto es que el estudiante advierta la pregunta que le disparó una idea, una posibilidad de cambio, etc., y piense que él mismo podría apelar a dichas preguntas en otro caso similar. Queremos resaltar la diferencia entre este tipo de intervención y otra que podría decirles a los estudiantes que tomen nota de "preguntas útiles a la hora de resolver problemas". Esto no sería activar la reflexión metacognitiva. El listado de preguntas útiles podría ir conformándolo cada estudiante. Luego de una primera clase de este estilo, el docente podría promover la redacción de un listado. Cada estudiante generaría el suyo propio, a lo largo del curso, no en un único momento. Incluso el docente podría preguntarle si ese listado le sería útil y en ese caso, para qué, cómo lo usaría, etc.

Con estas acciones el estudiante gana autonomía y comienza a disminuir su dependencia del profesor.

6.4. A modo de cierre

Primeramente queremos resaltar que entendemos que la Resolución de Problemas no es incompatible con los lineamientos curriculares que se centran en la enseñanza de contenidos de tipo conceptual. Sólo es cuestión de idear formas de articular y para ello hemos intentado dejar algunas sugerencias y criterios.

Un problema complejo es la selección de los problemas por la diversidad de estudiantes. Aquí también, el docente necesitará ir aprendiendo a realizar esta tarea, a conocer a sus estudiantes y ajustar las consignas. Muy probablemente necesite contar con una “familia” de problemas. Esto es luego de haber generado una actividad que uno supone que sí será un problema para la mayoría de los estudiantes, generar otro/s enunciado/s un poco más complejo/s (para aquellos estudiantes que resuelvan inmediatamente la actividad, pudiendo no haberles resultado ser problema) y otro/s enunciado/s un poco más simple/s para quienes el primero haya quedado demasiado alejado de sus posibilidades. La idea es que sean temáticamente afines, que hablen de lo mismo, que con poco cambio uno genere problemas más o menos complejos, por eso los llamamos informalmente familia de problemas.

También en la práctica de diseño de problemas, el docente irá observando que redactar una consigna con un largo itemizado de preguntas, cuidadosamente graduadas de menor a mayor complejidad, de tal modo que al resolver las primeras se facilitan las siguientes, se opone a la generación de problemas. Cuanto menos indicación precisa haya de cómo resolver, menos cantidad de sugerencias, más probabilidad habrá de que la actividad pueda resultar ser problema para los estudiantes. En esta tarea, el docente probablemente cambie el modo de concebir los diagnósticos. Usualmente éstos sólo comunican largas listas de tareas y conocimientos que los alumnos <u>no</u> disponen. Esto es interesante, pero poco operativo. Lo que necesitamos saber es lo que sí saben; aunque sea poco, es el punto de partida en el que ellos se podrán mover.

Cerrando este capítulo, en el que intentamos describir puntos centrales del enfoque teórico, esperamos que quede más claro que sólo decir “enseño usando problemas” o “en mi clase los estudiantes resuelven problemas” no es condición suficiente para asegurar que se está pensando y trabajando bajo esta línea. Basta imaginar clases tradicionales, con exposición de definiciones, ejemplos, resolución de ejercicios rutinarios, finalmente un problema de aplicación y una evaluación de contenidos estándar o incluso de opción múltiple. No podríamos decir que un tal docente está utilizando el enfoque de la Resolución de Problemas en su clase de Matemática. Análogamente, si el docente utiliza el contexto de un "problema" para hacer surgir un nuevo contenido matemático pero su interés está en que el estudiante aprenda el contenido, sus propiedades, etc. tampoco sería pertinente decir que el docente está enmarcado en la Resolución de Problemas. Debemos ser cuidadosos cuando nos expresamos y estar atentos cuando leemos para comprender exactamente el significado de lo que nos intentan decir.

Finalmente decimos que aunque utilizar este enfoque o combinarlo con otros requiere un trabajo minucioso de diseño (diagnósticos, problemas, instrumentos de evaluación), la gestión de clase dará incertidumbre en los comienzos, los estudiantes no estarán acostumbrados, etc., sería interesante no renunciar a aplicar estas ideas...y una forma es empezar de a poco…

6.5. Referencias bibliográficas

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics 17*, 125-141.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas matemáticos*. Ciudad de la Habana: Pueblo y Educación.

Chacón, M.; Farías, S.; González, V. y Poco, A. (2009). Un procedimiento para establecer criterios para elaborar problemas. *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática*. Buenos Aires: Edumat.

Chacón, M. y Rodríguez, M. (2009). Un acercamiento al conocimiento metacognitivo sobre resolución de problemas de estudiantes de nivel pre-universitario. Comunicación presentada en la *XXXII Reunión de Educación Matemática* (REM), Universidad Nacional de Mar del Plata. Buenos Aires.

Colombano, V.; Isla Zuvialde, D.; Marino, T. y Real, M. (2009). El problema de diseñar problemas. *Actas de la XXXII Reunión de Educación Matemática*. Mar del Plata.

González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. *Zetetiké 6* (9), 59–87.

Koichu, B.; Berman, A. & Moore, M. (2003a). Changing teachers' beliefs about students' heuristics in problem solving. Artículo presentado en: *3rd. Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Italia.

Koichu, B.; Berman, A. & Moore, M. (2003b). Very able students think aloud: an attempt at heuristic microanalysis. *3rd International Conference: Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students*, Bulgaria.

Krulik, S. & Rudnick, J. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers* (2nd ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Lesh, R. & Harel, G. (2003). Problem Solving, Modeling and Local Conceptual Development. *Mathematical Thinking and Learning 5(2-3)*, 157-190.

Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma* XXX (2), 165-186.

Nápoles Valdés, J. y Cruz Ramírez, M. (2000). La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones. *Función Continua 8*, 21-42.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*, Vol I y II. Princeton: Univ. Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton: University Press. 2nd Edit.

Rodríguez, M. (2006). Diseño y análisis de un port-folio en un curso de matemática pre-universitaria. *Yupana 3*, 57-69.

Rodríguez Jara, M. (2008). *Modelos para trabajar los problemas*. Extraído el 30 de enero de 2008 de http://www.rmm.cl/index_sub3.php?id_contenido =11964&id_seccion=4241&id_portal=635.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.) *Handbook for research on mathematics teaching and learning.* New York: MacMillan.

7
Educación Matemática Realista

Betina Zolkower y Ana Bressan

7.1. Introducción

Este capítulo trata acerca de la *Educación Matemática Realista* (EMR), corriente didáctica en desarrollo desde fines de los años 60 en torno al trabajo de Hans Freudenthal, sus colegas y sus discípulos, en el Instituto de la Universidad de Utrecht (Holanda) que hoy lleva su nombre (*Freudenthal Institute for Mathematics and Science Education*)[11].

Hans Freudenthal (1905-1990), doctorado en la Universidad de Berlín, fue un matemático de alto nivel especializado en Topología, Álgebra e Historia de la Matemática, que desarrolló su carrera académica y teorías pedagógicas en Holanda por haber debido emigrar a causa de la llegada de los nazis al poder. Freudenthal fue un incansable propulsor de cambios en la enseñanza de la matemática en Holanda y en otros países europeos. Gran parte de su popularidad proviene de su actuación como fundador y participante activo en el

[11] La meta central de este instituto es contribuir a que "el aprendizaje de la Matemática, dentro y fuera de la escuela, sea una actividad desafiante en la que las aptitudes de los alumnos se aprovechen de manera óptima, posibilitándoles construir el conocimiento matemático y las capacidades que necesitarán más tarde, tanto en su vida diaria como en la profesión que elijan" (www.fi.uu.nl, traducción de las autoras).

Grupo Internacional de Psicología (PME) y Educación Matemática, la revista *Educational Studies in Mathematics* y la Comisión International para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM).

En innumerables escritos, Freudenthal manifiesta su oposición a las corrientes pedagógico-didácticas y a las *innovaciones* en la enseñanza vinculadas a la matemática que se propiciaban a mediados del siglo pasado, incluidas la taxonomía de Bloom, las evaluaciones estructuradas, el uso de métodos cuantitativos en la investigación educativa, la aplicación directa en las aulas de las ideas de Piaget, la separación entre investigación educativa, desarrollo curricular y práctica docente; y la introducción de la matemática *moderna* o *conjuntista* en la escuela (Gravemeijer & Terwel, 2000)[12].

Dice Freudenthal: "La imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre (sic) y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la de la sociedad" (1991, p.132). Al presente, esta visión se sostiene en la currícula de muchos países y en el diseño de las evaluaciones del Programa Internacional de Evaluación (PISA) de los Estudiantes, donde la *competencia matemática* se define como la capacidad de un individuo para reconocer y comprender el papel que esta disciplina desempeña en el mundo, emitir juicios matemáticos bien fundados y utilizar y relacionarse con la matemática de modo tal de satisfacer sus necesidades actuales y futuras como ciudadano constructivo, responsable y reflexivo (OECD, 2006; de Lange, 2003).

Las publicaciones de Freudenthal sobre educación matemática se remontan al año 1948. Con el correr del tiempo desarrolla a través de ellas, junto con otros colaboradores del *Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática* (IOWO), fundado por él en 1970 en la Universidad de Utrecht, las bases sobre las que, al presente, la EMR continúa desarrollándose y expandiendo su esfera de influencia. Como describe Treffers (1987), la EMR se basa en los siguientes principios:
1) *La exploración fenomenológica*: la búsqueda de fenómenos ricos, significativos y no pre-estructurados con vías a desarrollar en los alumnos nociones intuitivas que los lleven a la formación de objetos matemáticos.
2) *El uso de modelos y símbolos*: el desarrollo, a partir de esas nociones intuitivas, informales y ligadas a contextos, de nociones matemáticas más formales, en un proceso de matematización progresiva apoyado por una gran variedad de modelos (diagramas, esquemas, formas de notación, etc.).

[12] Para más detalle, ver Goffree (1993), Treffers (1993) y Gravemeijer y Terwel (2000). Acerca de las contribuciones de Freudenthal como matemático, consultar van Est (1993).

3) *El uso de construcciones y producciones de los alumnos*: dado que lo que los alumnos hacen por sí mismos es significativo para ellos, hacer uso de sus construcciones y producciones durante los procesos de enseñanza es esencial para que estos aprendan a matematizar.
4) *La interacción*: en situaciones de interacción, las contribuciones de diversos alumnos pueden ser comparadas y contrastadas lo cual les permite reflexionar acerca de la actividad matematizadora, tanto la propia como la de otros, considerando las ventajas relativas de los diferentes modelos y formas de simbolización.
5) *El entrecruzado de ejes y temas curriculares*: es importante considerar a las secuencias didácticas en sus múltiples interrelaciones. Por ejemplo, cuando se trabaja en estadística, ¿qué conocimientos de álgebra o de ciencia necesitan los alumnos? A la hora de enseñar la noción de distribución, ¿con qué otras nociones estadísticas debería vinculársela?

Con base en estos principios, especialistas en EMR colaboran con docentes en el diseño de secuencias didácticas, procesos en los que la observación, la reflexión y la descripción detallada de fenómenos de aprendizaje-enseñanza cumplen un papel crucial en el mejoramiento de los diseños y su diseminación[13].

En lo que sigue presentamos esta corriente didáctica con ejemplos de experiencias realizadas por miembros del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM) el cual, desde el año 2000, se dedica a la investigación, el diseño curricular y la formación y capacitación de docentes dentro de esta línea.

7.2. Matematización progresiva

En una ponencia dirigida a docentes de matemática, Freudenthal (1971) dice:

> La matemática es una actividad de resolución de problemas, de búsqueda de problemas, pero también organización de un objeto de estudio. Este puede ser un objeto de la realidad que llama a ser organizado de acuerdo a patrones matemáticos, si los problemas reales necesitan ser resueltos. También puede ser una cuestión matemática, resultados nuevos o viejos, propios o de otros, que tienen que ser organizados de acuerdo a nuevas ideas, para comprenderlos mejor, en un contexto más amplio, o a través de un enfoque axiomático […].

[13] E.g.: La serie *Mathematics in Context* para grados 5to a 9no, publicada por la Enciclopedia Británica (la cual incluye versión en castellano); la tesis sobre la enseñanza de la Estadística (Bakker, 2004); y diseños de software para trabajar Geometría tridimensional (Boon, 2009).

Continúa Freudenthal,

> A los niños pequeños les enseñamos la matemática como actividad, pero cuando maduran se convierten en seres racionales, tendemos a enseñarles un sistema matemático prefabricado y bien organizado bajo el supuesto implícito de que los seres racionales comprenden los sistemas deductivos. Ustedes saben que esto no funciona bien (pp. 413-414).

Transmitir a los alumnos una matemática pre-fabricada, producto de la actividad de los matemáticos o los autores de libros de texto es, según Freudenthal (1973) una inversión anti-didáctica. En cambio, él propone enseñarles a los alumnos a matematizar. Treffers (1987) distingue dos dimensiones en la matematización: horizontal y vertical. Matematizar horizontalmente consiste en convertir un problema de la realidad en un problema matemático haciendo uso del sentido común, la intuición, la observación, la aproximación empírica y la experimentación inductiva. Matematizar verticalmente consiste en moverse dentro de la realidad matemática haciendo uso de la esquematización, la generalización, la prueba, el rigor y la simbolización. Como lo describe Freudenthal (1991),

> La matematización horizontal conduce del mundo de la vida al mundo de los símbolos. En el mundo de la vida se vive, se actúa (y se sufre); en el otro se crean los símbolos, se los recrea y manipula, mecánicamente, comprensivamente, reflexivamente: esto es la matematización vertical… Por cierto que las fronteras entre estos mundos están vagamente definidas. Ambos mundos pueden expandirse o también reducirse uno a expensas del otro (pp. 41-42).

Para enseñar a los alumnos a matematizar la realidad es necesario involucrarlos en actividades guiadas de organización de situaciones problemáticas realistas. ¿En qué sentido se usan aquí los términos *realista* y *realidad*? Dice Freudenthal (1991): "Entendemos como realidad aquello que el sentido común experimenta como real dentro de un cierto escenario" (p.17). En los grados inferiores se comienza trabajando en contextos y situaciones familiares cotidianas que involucran el uso de números, por ejemplo, gente que sube y baja de un autobús (van den Brink, 1991; Streefland, 2003). Más adelante, los números y sus relaciones se tornan familiares para los alumnos, enriqueciéndose así su sentido común, la esfera de lo que es real o significativo para ellos[14]. El equívoco

[14] Dice Freudenthal (1991), "El sentido común, para transformarse en matemática genuina y poder progresar, debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cris-

común de interpretar "realista" en un sentido restringido resulta en gran parte de "nuestro error al elegir este nombre" dice Gravemeijer (1997, p.311). En holandés, *zich realis-eren* significa imaginar. En este amplio sentido, una situación es realista en tanto se presenta ante el sujeto como realizable, razonable o imaginable (Freudenthal, 1973, 1991; van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Por ejemplo, en la elaboración de secuencias para enseñar nociones de geometría y medida, estimación, razones y proporciones, la EMR recurre a obras de ficción tales como *Los viajes de Gulliver*.

Freudenthal (1991) propone como objetivo de la enseñanza desarrollar en los alumnos una disposición matemática la cual incluye: buscar lo esencial en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, simbolizaciones y sistemas axiomáticos; descubrir en estos características comunes o similares, analogías e isomorfismos; ejemplificar ideas generales; descubrir objetos y operaciones nuevas; buscar atajos, abreviar estrategias e inventar nuevas simbolizaciones; y reflexionar acerca de la propia actividad considerando la cuestión a mano desde diferentes perspectivas o puntos de vista. Según Freudenthal (1991), la disposición matemática incluye también: usar lenguaje funcional y variables convencionales; captar el nivel de precisión adecuado para un determinado problema, identificar estructuras matemáticas en un contexto (y excluir el uso de la matemática cuando ésta no sea relevante o *legal* para organizarlo); y considerar la propia actividad como objeto de reflexión para alcanzar un nivel más alto.

Desarrollar esta disposición requiere de un proceso de aprendizaje-enseñanza que tome la forma de una *reinvención guiada* (Freudenthal, 1991) orientada a que los alumnos aprendan:

> "…no la matemática sino a matematizar, no abstracciones sino a abstraer, no los esquemas sino a esquematizar, no las fórmulas sino a formalizar, no los algoritmos sino a algoritmizar, no el lenguaje sino a verbalizar…" (p.49, traducción de las autoras).

Desde el punto de vista del diseño curricular, la reinvención guiada se apoya en la *fenomenología didáctica*, esto es, en la búsqueda de contextos y situaciones problemáticas que promuevan la matematización (Freudenthal, 1983). Se trata de investigar las manifestaciones y los usos de determinados objetos matemáticos (por ejemplo, los números, las fracciones, razones y

talizan en reglas (por ejemplo, la conmutatividad de la suma) y éstas, a su vez, se transforman en sentido común, a un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor –una jerarquía tremenda que se logra gracias a un notable inter-juego de fuerzas" (p.9, traducción de las autoras).

proporciones, las ecuaciones y las funciones, los ángulos, etc.[15]) tal como éstos aparecen en el lenguaje coloquial y en la vida cotidiana y, a partir de allí, elaborar teorías locales para la enseñanza de esos temas. La fenomenología didáctica se nutre tanto de la Historia de la Matemática (teniendo en cuenta los casos paradigmáticos en el desarrollo de las ideas matemáticas y su evolución temporal) como las producciones y construcciones de los alumnos (Streefland, 1991, 2003).

La EMR entiende al aprendizaje como un proceso discontinuo que involucra niveles crecientes de estructuración, abstracción, generalización y formalización (ver figura 1, adaptación de Gravemeijer, 1994).

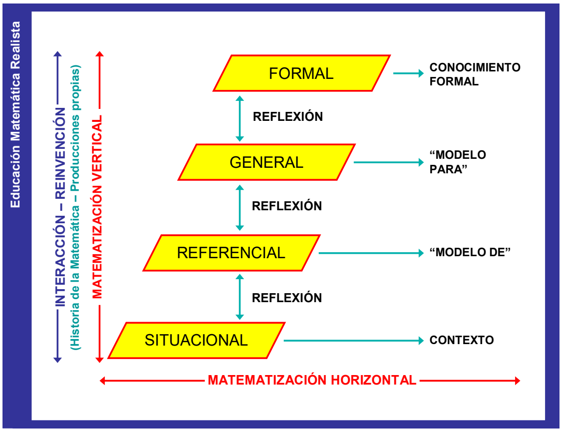


Figura 1. Niveles de matematización

El pasaje de un nivel a otro, que suele darse de modo súbito marcando discontinuidades en el aprendizaje, involucra la simbolización esquemática de una situación por medio de un *modelo.* Poco a poco, este *modelo de* va desprendiéndose de la situación referencial hasta convertirse en un *modelo para*, una

[15] “Encarar los ángulos desde una perspectiva fenomenológica revela varios aspectos. Los ángulos pueden ser tangibles, como los ángulos rectos de una mesa, o imaginarios, por ejemplo si pensamos en el ángulo entre un rayo de sol y el piso. Además, los ángulos pueden ser estáticos o dinámicos, como en ‘un giro de 90º’ y pueden usarse para indicar dirección, como en el caso de la brújula. Finalmente, pueden usarse para indicar una posición en un sistema de coordenadas como el de latitud-longitud” (Gravemeijer, 1998, p.60, traducción de las autoras).

herramienta para organizar situaciones homólogas a la inicial (Gravemeijer, Cobb, Bowers & Whitenack, 2000; Gravemeijer, 2004).

Como lo indica la figura 1, la distinción entre *modelo de y modelo para* involucra cuatro niveles: situacional, referencial, de generalización y formal. En el nivel *situacional*, la situación problemática se organiza por medio de estrategias que surgen espontáneamente de la misma. En el nivel *referencial (modelo de)* aparecen los modelos gráficos, notaciones y procedimientos que esquematizan el problema, pero éstos se refieren de un modo u otro a la situación particular. Al nivel *general (modelo para)* se llega a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior distanciándose de toda referencia al contexto. En el nivel *formal* se trabaja con procedimientos y notaciones generales y convencionales desligadas de los contextos y situaciones que les otorgaron su significado inicial, quedando abierta la posibilidad de retornar a los mismos si fuera necesario.

Para promover estos procesos es crucial trabajar en torno a problemas que puedan resolverse usando diversas herramientas y poniendo en juego múltiples estrategias (esto es, modos de usar tales herramientas) y procedimientos (Treffers, 1987). Como subraya van den Heuvel-Panhuizen (2005),

> El trabajo de los alumnos en torno a estos problemas puede traer a la luz los distintos niveles de comprensión y de destreza aritmética que estos poseen en ese momento particular. Esta información no solo es importante para tomar decisiones micro-didácticas sino que también sirve para guiar decisiones macro-didácticas. El recorte transversal de la clase (los distintos niveles de comprensión de los alumnos en un momento determinado) que se produce de esa manera muestra al mismo tiempo un corte longitudinal de la trayectoria de aprendizaje-enseñanza o al menos una parte de ésta. Las estrategias individuales de resolución de los alumnos revelan, en su conjunto, hitos del largo camino que la clase habrá de recorrer. Lo que surge en el aula en un momento determinado anticipa lo que está en el horizonte y más allá (p.38).

A modo de ejemplo, presentamos a continuación una situación problemática seguida de soluciones de nueve alumnos de 6º grado, tal cual las transcribió la docente (integrante del GPDM) en su cuaderno de planificación. Problema: *Una maestra necesita cortar trozos de piolín de 2,75 m. Ella tiene un ovillo de piolín de 80 metros. ¿Cuántos trozos de piolín puede cortar?*

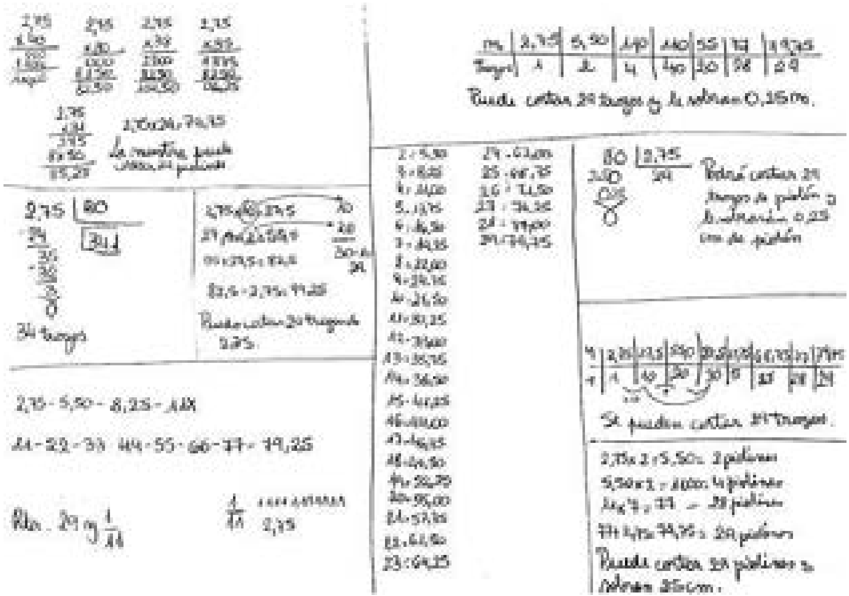


Figura 2. Soluciones propuestas al problema de los trozos de piolín

Otra condición favorable para la matematización progresiva es trabajar en grupos pequeños y heterogéneos (Freudenthal, 1991). Ilustramos este punto con lo realizado en un encuentro del GDPM de tres horas reloj en el 2006 en el cual participaron más de una veintena de docentes de primaria y de secundaria, algunos de los cuales trabajan también en Institutos de Formación Docente.

La situación a matematizar, extraída de Fried & Amit (2005), es la siguiente: *Queremos plantar flores y césped en un terreno rectangular cuyas dimensiones son 6 m x 10 m. El césped debe plantarse en cuatro triángulos rectángulos cuyos ángulos rectos son los del rectángulo. Los triángulos rectángulos en D y B son isósceles congruentes (figura 3). Las flores se plantarán en el paralelogramo restante.*

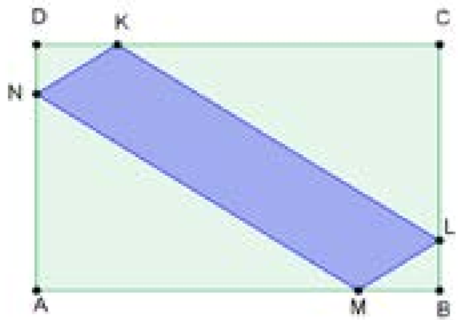


Figura 3. Diagrama de la actividad "Flores y césped"

"Flores y césped" es una situación abierta, planteada en un contexto geométrico, que invita a formular preguntas, generalizar, simbolizar y formalizar. Los participantes generaron las siguientes preguntas:

Docentes de primaria:
1) ¿Qué área está destinada a las flores y qué área al césped?
2) ¿Qué superficie es mayor, la de las flores o la del césped?
3) Si queremos bordear con conejitos rojos al paralelogramo de adentro, cada 10 cm ¿cuántos se necesitarían?
4) Si se quiere alambrar el terreno de flores y /o pasto ¿cuánto alambre se necesita?
5) ¿Qué parte del terreno está cubierta de flores y qué parte está cubierta de pasto?
6) Si el triángulo DKN se cubre con ½ kg de semillas de pasto ¿cuántas semillas necesitaríamos para todo el terreno?
7) Si queremos hacer paralelogramos sucesivos (concéntricos) de flores para poner distintos colores de flores, a 10 cm uno de otros ¿qué cantidad de flores de cada clase de color se necesitan?

Docentes de secundaria:
8) ¿Cómo se puede rediseñar el cantero manteniendo las mismas áreas de pasto y flores?
9) Mirando el material, ¿qué parte es DK de DC? ¿Qué parte es el segmento DN de DA?
10) ¿Cómo se prueba que los triángulos NDK y MLB son isósceles y congruentes?

11) ¿Es el triángulo CKL congruente con el NAM?
12) ¿Cómo podemos conocer las dimensiones del paralelogramo?
13) ¿Será NKLM un paralelogramo?
14) Si los triángulos HLM y NAM son congruentes, ¿será realmente un paralelogramo?
15) ¿Será siempre un paralelogramo?
16) Si se supone que hay distintas posibilidades de paralelogramos ¿todos cubren la misma área? ¿Cuál sería el área máxima? ¿Qué sucede con el área de los triángulos al variar el área de los paralelogramos?
17) ¿Cuándo deja de haber superficie para las flores?

En esta colección de interrogantes se evidencian dos niveles en la interpretación del enunciado del texto y el diagrama: en general, una visión intuitiva y concreta por parte de los docentes de primaria ligada a un tratamiento rígido de la noción de medida versus una más formal, aunque tradicional por parte de los de secundaria.

El trabajo en torno a la pregunta 16 dio lugar, de modo sincrónico, a soluciones, representaciones y simbolizaciones con distintos niveles de sofisticación y generalidad matemática, lo cual enriqueció la comprensión de la noción de matematización progresiva por parte de los docentes participantes en esta experiencia. En la figura 4 se pueden ver algunas de las representaciones y soluciones generadas durante el encuentro de capacitación.

La heterogeneidad del grupo favoreció intercambios de ideas en los que se trató de comprender las herramientas con las que cada docente (o sub-grupo) contaba, qué factores frenaban la generalización y cómo el uso de diferentes modelos (aritméticos, gráficos, algebraicos y geométricos) aportó a enriquecer la comprensión de la situación problemática en cuestión. Fue sorprendente el modo en que los maestros de primaria lograron expresar y trabajar con generalizaciones no obstante su dificultad para expresarlas con símbolos matemáticos convencionales.

La pregunta acerca del área máxima del cantero de flores llevó al tratamiento de la no conservación del área y el perímetro y su independencia mutua; la idea de variable y de función y su representación aritmética, geométrica, algebraica y gráfica; la aproximación a ideas del análisis matemático tales como límite, máximos y mínimos y a la formulación de otras preguntas que se trabajaron en instancias posteriores.

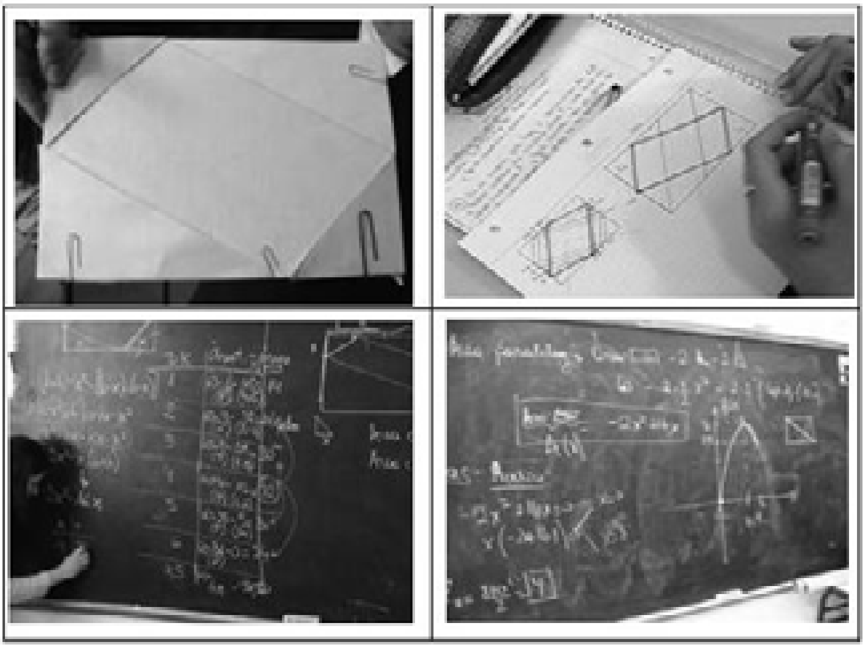


Figura 4. "Flores y césped": representaciones y soluciones

En suma, "Flores y césped" resultó un contexto ideal no sólo para formular preguntas, organizar la situación por medio del modelo rectangular, la tabla de doble entrada, ecuaciones, funciones y gráficos sino también para reflexionar, con los docentes del GPDH, sobre cómo generar y apoyar procesos de modelización, simbolización, generalización y demostración matemática en el aula.

7.3. Contextos y situaciones

El contexto, según Freudenthal (1991), es un "dominio de la realidad el cual en un determinado proceso de aprendizaje se revela al alumno para ser matematizado" (p.73). Lejos de ropajes artificiales con los que se disfrazan contenidos matemáticos puros, los contextos son recortes de la realidad que diseñadores curriculares y docentes presentan a los alumnos para incitarlos a matematizar. Explica Freudenthal, "Tratar al contexto como ruido que perturba un mensaje matemático claro, es un error; el contexto mismo es el mensaje y la matemática el medio para decodificarlo" (p.75). Cuando un contexto es significativo para el alumno, éste sirve de punto de partida para su actividad matemática en tanto moviliza su sentido común y sugiere el uso de estrategias informales ligadas a la situación en cuestión. Es importante subrayar que el que un contexto sea o no realista depende de la experiencia previa del alumno y/o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo.

Desde este punto de vista resulta tan "real" o "realista" para un alumno del primer ciclo trabajar en torno a situaciones que involucran cambios en el número de pasajeros de un autobús durante distintas trayectorias como lo será, años más tarde, trabajar directamente con el lenguaje de flechas como herramienta para simbolizar tales cambios (van der Brink, 1991), abriendo la puerta al trabajo con operadores y ecuaciones en los años superiores.

Al describir en detalle una investigación a su cargo acerca de la enseñanza de las fracciones en la que se comienza con la noción de fracción y razón simultáneamente a partir de matematizar situaciones de reparto equitativo (por ejemplo, 5 barras de chocolate a repartir entre 6 chicos), Streefland (1991) explica las funciones de los contextos realistas: primero como recurso para producir matemática y después como dominio para su aplicación. Tomando la realidad significativa como punto de partida, los alumnos pueden cruzar[16] la frontera que lleva a la matemática –en interacción con sus pares, guiados por el docente y con el apoyo de modelos apropiados que emergen de su actividad organizadora– aprendiendo a estructurar, organizar, simbolizar, visualizar, esquematizar y mucho más. Simultánea o posteriormente, pueden progresar en su tratamiento del material dentro de la matemática misma, incrementando su eficiencia de procedimientos, usando abreviaturas y reemplazando el lenguaje coloquial por el lenguaje convencional de símbolos y variables.

Desde esta perspectiva, se sostiene también que para desarrollar la capacidad de pensar matemáticamente de los alumnos y de ese modo elevar el nivel de competencia matemática de la ciudadanía, es necesario, durante los procesos de aprendizaje-enseñanza, abordar e interrogar de manera crítica las relaciones entre la matemática y sus usos (y abusos) en las esferas de la ciencias (sociales, naturales y exactas) y la tecnología. Para ilustrar este punto, presentamos a continuación dos contextos realistas trabajados por integrantes del GPDH en sus aulas.

El primero, "21.000 millones de Playmobiles", forma parte de una investigación en curso acerca del papel del docente y las funciones del lenguaje en

[16] Este trabajo se basa en *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (Freudenthal, 1983).

situaciones de interacción de toda la clase. La actividad de matematización de los alumnos de esta clase (7º grado) giró en torno al siguiente contexto:

> La Voz de Galicia (20/8/2008, edición impresa): Los conocidos 'clicks,' pequeños muñecos de plástico de la empresa alemana de juguetería Playmobil, triplican la población de la Tierra, al sumar más de 21.100 millones de unidades desde que se iniciara su producción a principio de los años 70. "Si los pusiéramos a todos ellos alineados, la fila de figuras daría la vuelta a la Tierra dos veces y media," destaca Andrea Schauer, gerente de Playmobil, en una entrevista que publica el semanario alemán *Die Zeit* […]

La lectura de este recorte de diario llevó a la clase a preguntarse: ¿Será cierto que 21.000 millones de Playmobiles pueden dar 2 ½ vueltas a la Tierra (considerando su circunferencia aproximada de 40.000 km)?

En las figuras 5 y 6 presentamos una reproducción de los papeles afiche con trabajos de alumnos registrados en afiches por la docente.

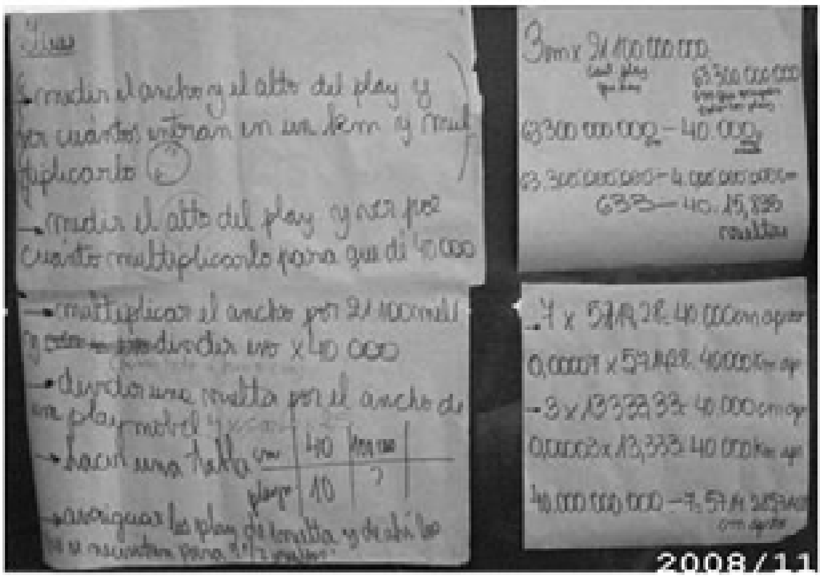


Figura 5. "Playmobiles": ideas y soluciones

Figura 6. “Playmobiles”: ideas y soluciones

En torno a estas producciones, alumnos y docente entablaron una conversación que duró más de 40 minutos. Durante ese intercambio, se compararon y contrastaron estrategias de solución. A la luz de éstas se revisaron las ideas propuestas inicialmente como herramientas para resolver el problema. Por último, se formuló de forma oral y escrita la conclusión que dio respuesta a la pregunta inicial, que uniendo esa cantidad de muñecos se podían dar muchísimas más vuelta a la Tierra que lo se dice en *La Voz de Galicia*. Las anotaciones (en distinto color y letra) se fueron agregando a los afiches durante la conversación.

El segundo ejemplo, “Midiendo líquenes”, consiste en una investigación, realizada en dos aulas de 4º grados en el año 2005, dentro del marco de un proyecto sobre biodiversidad en los bosques circundantes cuyo objeto fue que los alumnos adquirieran conocimientos de ciencias naturales y tomaran conciencia del problema de la conservación de especies. Durante una salida conjunta por los alrededores de la escuela, los alumnos observaron gran cantidad de musgos y líquenes. De vuelta en el aula, cada grupo analizó y discutió las preguntas que habían surgido y, acto seguido, se acordó en trabajar los siguientes interrogantes: ¿Quiénes albergan más micro-bio-diversidad de musgos y líquenes, las plantas nativas o las exóticas? ¿Qué tipo de vida aloja la micro-bio-diversidad de la plaza? Con el objeto de abordar estas preguntas, alumnos y docente diseñaron un método para recoger información. Cuenta la docente:

> Fue ahí donde apareció de modo casi inesperado la conexión con la matemática. Los chicos de un 4º propusieron comparar los musgos y líquenes de árboles nativos con los de árboles exóticos para así poder saber en qué especies había más cantidad o una mayor distribución. A los chicos del otro 4º les interesaba saber qué tipo de vida alojan estos organismos albergados en distintos sustratos. Aunque no estaba en mi planificación trabajar área y perímetro en ese momento, decidí que tan propicia oportunidad no podía ser desaprovechada ya que se había presentado de forma natural, dentro de un contexto que daba sentido al tratamiento de estas nociones. Cada grado se enfrentó con la necesidad de determinar superficies de forma irregular. [17]

Estos dos ejemplos ilustran la idea de matematizar como una actividad que consiste en plantear y resolver un problema genuino a partir de un fragmento de la realidad circundante. Esta es también una instancia paradigmática del principio de entre-cruzamiento de los ejes y las disciplinas escolares, en este caso, la matemática y las ciencias naturales y, dentro de ésta, la problemática de la preservación del medio ambiente.

7.4. Modelos

Para Freudenthal (1991) "el modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal" (p.34, traducción de las autoras). Esta noción de modelo no alude a un artefacto o representación pre-constituida o impuesta de antemano sino a una entidad que emerge y se va desarrollando durante un determinado proceso de reinvención guiada. Al principio los modelos están estrechamente ligados a los contextos y situaciones de los que emergen; poco a poco se van despegando de la situación particular hasta adquirir el carácter de modelos formales y generales y, por lo tanto, aplicables a otros contextos y situaciones. Como expresamos anteriormente, esto consiste en el paso de "modelo de" una situación específica a "modelo para" razonar matemáticamente en situaciones variadas fuera y dentro de la matemática misma.

[17] Para una versión detallada de esta experiencia, consultar a www.gpdmatematica.org.ar

Entre los modelos que se trabajan en la EMR se destacan: el dinero, el *rekenrek* (ábaco bicolor de 20 bolitas) en dos filas idénticas de estructura ○○○○○●●●●●; situaciones paradigmáticas tales como el colectivo (van den Brink, 1991) –junto con el lenguaje de flechas para simbolizar situaciones dinámicas (antes/después)–, la "casa de los panqueques" (Streefland, 1991), la reunión de padres en la escuela, la fábrica de caramelos en paquetes de 10 unidades (Gravemeijer, 1994); el modelo circular, la barra doble o de porcentajes, la tabla de razones (Middleton & van den Heuvel-Panhuizen, 1995; Middleton, van den Heuvel-Panhuizen & Shew, 1998, van den Panhuizen-Panhuizen, 2003); los collares bicolores estructurados en grupos de 10 (Treffers, 1993) que llevan a la línea numérica "abierta" como modelo aritmético (Treffers & de Moor, 1990; van den Heuvel-Panhuizen, 2001, 2008; Whitney, 1985); la línea numérica como modelo para resolver ecuaciones lineales (Kindt *et al*, 1998; Dickinson & Eade, 2004) y la notación de libreta y la tabla de combinaciones para trabajar sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (Reeuwijk, 1995). El uso de estos y otros modelos es crucial como *antídoto* contra una de las inversiones anti-didácticas (Freudenthal, 1973) más graves en la instrucción matemática: *la algoritmización y la formalización prematura*.

Los modelos favorecen la suba en los niveles de matematización en la medida en que emerjan de contextos familiares o imaginables a los alumnos (esto es, que sean viables o reinventables) y tengan suficiente flexibilidad para ser aplicables en un nivel más avanzado o más general. El modelo debe apoyar la matematización vertical sin bloquear el camino de regreso al contexto o situación que le dio su sentido inicial, permitiendo así que el alumno recupere el sentido de sus acciones sobre el mismo. Dicho de otro modo, los modelos deben comportarse de manera natural o evidente, ajustarse a o acomodar estrategias informales y ser útiles para organizar una gran variedad de contextos y situaciones (Treffers, 1987; Gravemeijer, 1994).

Por ejemplo, la barra de porcentajes emerge inicialmente de la matematización horizontal en el contexto de playas de estacionamiento o salas de cine, para indicar, mediante el sombreado, cuántos lugares están ocupados y cuántos están disponibles; poco a poco la barra se va desprendiendo de esa referencia contextual, tornándose una herramienta formal para trabajar con y reflexionar acerca de los porcentajes (Middleton *et al*, 1998; van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

La figura 7 ilustra cómo tres alumnos de 6º grado usan la tabla de razones, el modelo de barra y la línea numérica doble para resolver el siguiente problema: *Teo contestó correctamente 27 de las 40 preguntas de su prueba final. Si para pasar de grado necesita el 60% de preguntas correctas ¿habrá pasado de grado?*

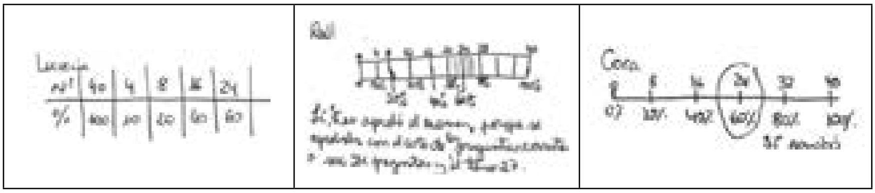


Figura 7. Tres modelos para trabajar con porcentajes

A diferencia de los algoritmos convencionales, estos tres modelos diagramáticos mantienen visibles aspectos centrales del contexto o la situación a matematizar; permiten llevar a cabo y tomar nota de pasos intermedios hacia la solución; se adaptan fácilmente al nivel de cada alumno; sugieren el uso de atajos (favoreciendo la *esquematización progresiva*); y admiten el uso de varias estrategias (multiplicar y dividir por la unidad seguida de ceros, duplicar, etc.)[18]. El trabajar simultáneamente con estos tres modelos permite considerar las ventajas relativas de cada uno para resolver tal o cual clase de problemas así como también explorar, explicitar, simbolizar, generalizar y formalizar las relaciones matemáticas inscriptas en ellos (Shreyar, Zolkower & Pérez, 2009).

Entre las herramientas de algebrización que propone la EMR se destacan la tabla de combinaciones y la notación de libreta (van Reeuwijk, 1995; Romberg, 2001). Para ilustrar el uso de estos dos modelos semi-formales que favorecen la algebrización progresiva, presentamos dos problemas extraídos de la unidad "Comparar Cantidades" de la serie *Las matemáticas en contexto* (Meyer & Pligge, 1998) seguidos de soluciones realizadas por alumnos de tercer año.

Negocio de mascotas: *A continuación (figura 8) se muestra una tabla de combinaciones en la que se registraron algunos de los precios en pesos, de combinaciones de canarios y hámsteres en un negocio de mascotas. Halla el costo de cuatro canarios y un hámster. Muestra tu resolución.*

[18] Que un modelo sirva o no para favorecer procesos de matematización depende significativamente de su tratamiento en manos de autores del libro de texto y docentes. Con base en entrevistas abiertas a alumnos de primaria, van den Heuvel-Panhuizen (2008) ofrece un análisis crítico de situaciones de *inversión anti-didáctica* en las que la línea numérica abierta, lejos de servir como herramienta flexible, se presenta de manera prescriptiva y algorítmica.

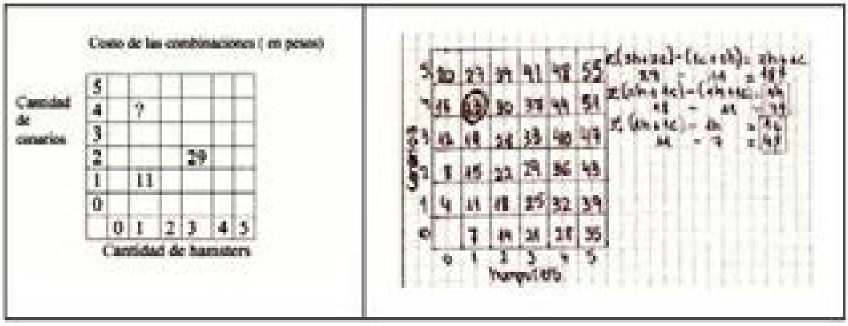


Figura 8. "Canarios y hámsteres": tabla de combinaciones

La tabla de combinaciones, ligada a las de doble entrada ya conocidas por los alumnos, organiza los valores de las dos variables intervinientes en los ejes *x* e *y*, siendo los puntos en los cuadrantes el valor que las liga según la relación planteada en cada ecuación.

El restaurante de Mario: *Mario administra un restaurante mexicano y está muy ocupado. Va de una mesa a otra anotando todas las órdenes. A continuación se puede ver cómo escribe las órdenes en su libreta. Algunas órdenes no tienen indicados los precios. ¿Puedes averiguarlos? Inventa dos nuevas órdenes y anótalas en la libreta. Averigua el precio de cada ítem.*

ORDEN	*TACO*	*ENSALADA*	*BEBIDA*	*TOTAL*
1	*2*	*4*	---------	*$ 10*
2	*1*	*2*	*3*	*$ 8*
3	*3*	-------------	*3*	*$ 9*
4	*1*	*2*	-----------	
5	*1*	-------------	*1*	
6	*2*	*2*	*1*	
7	*4*	*2*	*3*	
8				
9				
10				

ORDEN	TACO	ENSALADA	BEBIDA	TOTAL	
1	2	4	—	$ 10	
2	1	2	3	$ 8	
3	3	—	3	$ 9	
4	1	2	—	$ 5	(1) : 2
5	1	—	1	$ 3	(3) : 3
6	2	2	1	$ 8	(4) + (5)
7	4	2	3	$ 14	(3) + (4)
8	—	—	3	$ 3	(2) − (4)
9	3	—	—	$ 6	(3) − (8)
10		2	—	$ 3	(4) − (9) : 3

Figura 9. "El restaurante de Mario": notación de libreta

Como se aprecia en la figura 9, el estudiante trabaja primero con las dos primeras órdenes para comparar tacos y ensaladas dado que en la orden (2) la cantidad de estos ítems es la mitad que en la (1). Divide la (1) por 2 y eso le permite comparar directamente las dos órdenes: 1 taco y dos ensaladas cuestan 5 pesos; sustituyendo mentalmente 5 en la segunda, queda que 5 pesos más 3 bebidas hacen 8 pesos. El estudiante explica: "*entonces es igual a 8 menos 5 o sea que tres bebidas es igual a 3, entonces dividí por 3 y me dio que una bebida es igual a 1 peso. Una vez que saqué las bebidas pude sacar los otros datos. Ahí dice que 3 tacos más 3 pesos que es la bebida es igual a 9 pesos, entonces 3 tacos es igual a 9 menos 3 que es 6 pesos; entonces 1 taco es igual a 6 dividido 3 igual a 2 pesos. De ahí pude sacar lo que eran las ensaladas. Dos tacos más 4 ensaladas era igual a 10 pesos, que era el dato que me daba ahí; entonces 4 ensaladas era igual a 10 menos 4, porque 2 tacos es igual a 4 pesos, 4 ensaladas es igual a 6, entonces 1 ensalada es igual a 6 dividido 4 que es 1,5 pesos. Una vez que hice esto, lo que hice en la tabla fue sumar los precios básicamente.*"

La notación de libreta[19] (figura 9) lleva al procedimiento de reducción de incógnitas en disposición matricial. Cada fila representa una ecuación que corresponde a una combinación. Una fila puede ser multiplicada o dividida por una constante para obtener ecuaciones equivalentes, o bien, pueden sumarse

[19] Este modelo encuentra antecedentes en la China antigua donde los matemáticos utilizaban un método similar, conocido como *Fang Cheng* (método de tablas), que fue el precursor de las matrices (Streefland y van Ameron, 1996).

o restarse las filas con el propósito de generar una fila más simple o llegar a tener una sola incógnita. La ventaja de este modelo es que, a diferencia de la tabla de combinaciones, permite resolver sistemas de ecuaciones con más de dos incógnitas.

Desde hace varios años, los docentes de secundaria del GPDM, utilizan con gran éxito la tabla de combinaciones y la notación de libreta en sus clases de álgebra. Estas herramientas les permiten a sus alumnos dar sentido a los métodos convencionales, esto es, entender en qué consiste un sistema de ecuaciones, qué es lo que se busca, qué son ecuaciones equivalentes, por qué puede haber una única, varias o ninguna solución para un determinado sistema y cuál es el método más conveniente para hallar tales soluciones. Por lo general, el tránsito hacia el trabajo con sistemas puros le ocasiona a estos alumnos pocas dificultades y, cuando esto ocurre, pueden hacer uso de estos modelos y, a través de ellos, rememorar las situaciones paradigmáticas que les dieron lugar, para poder así re-significar las operaciones que realizan a nivel algebraico formal.

7.5. Interacción y reflexión

Desde la perspectiva de la EMR, reflexionar y matematizar están estrechamente vinculados (Freudenthal, 1991; Goffree & Dolk, 1995). Dice Freudenthal (1973): "En tanto el alumno no es capaz de reflexionar acerca de su propia actividad, el nivel más alto permanece inaccesible para él" (p.130). En los procesos de reinvención guiada, la interacción cumple un papel central, siendo clave el modo en que el docente maneja estos eventos con miras a maximizar oportunidades para la reflexión y la producción, el intercambio y la apropiación de ideas (Dekker & Elshout-Mohr, 2004; Elbers, 2003).

Para que esto sea posible, el aula debe funcionar como un espacio de acción y reflexión individual, grupal y colectiva donde los alumnos no sólo se ocupen de responder las preguntas y resolver los problemas que propone el docente o el libro de texto (al estilo de: *"A ver, chicos, ¿qué nos pide el problema?*), sino también de formular ellos mismos preguntas matemáticas; compartir, comparar, contrastar y evaluar ideas, métodos de resolución y modos de utilizar herramientas, diagramar situaciones y simbolizar y generalizar relaciones matemáticas.

Por lo general, en la clase de matemática las "puestas en común" ocurren una vez que el problema ya está resuelto, sirviendo de ocasión para presentar y debatir estrategias y resultados e institucionalizar lo aprendido. Bajo la batuta de un docente capaz de guiar los intercambios con habilidad, estas situaciones de interacción sirven de terreno propicio para reflexionar sobre lo hecho y elevar el nivel de matematización de los alumnos.

La práctica de una docente con la que la primera autora trabaja desde hace años (Zolkower & Shreyar, 2007), nos llevó a preguntarnos: a) ¿qué ocurre cuando las puestas en común toman la forma de un "pensar juntos en voz alta" donde en lugar de que cada alumno hable, en tiempo pasado, de lo que hizo o pensó para resolver el problema, la clase conversa en tiempo presente y modo subjuntivo y condicional, compartiendo ideas *in statu nascendi* (por ejemplo: *"Y si yo quisiera…." "¿Cómo se podría… "*)? y b) ¿en qué medida y de qué modo este tipo de conversaciones apoyan la apropiación del quehacer matematizador por parte de los alumnos[20]? A continuación presentamos una instancia de este tipo de interacción en palabras escritas por la propia docente (6º grado).

"En el trabajo con porcentajes usando la calculadora surgió de los chicos la pregunta: ¿por qué para obtener el 115% de 240 usando la calculadora da lo mismo apretar el 240, el signo x, el 15, el signo de % y el signo +, que hacer 240 x 1.15? A algunos chicos primero les costó explicar este fenómeno. Otros trataban de explicarlo con diagramas que mostraban que cuando apretás la tecla + en la calculadora después de haber calculado el 15% de 240, eso se corresponde con el 1 del 1.15 y que el 0.15 es lo mismo que el 15%. Cuando lo miramos entre todos, les pregunté: 'Qué porcentaje del total es el resultado?' El 115%, contestaron. Ahí empezaron a levantar la mano desesperados diciendo que eso era 1,15.

Entonces nos pusimos a jugar con otros ejemplos: 'Si hago 240 x 2.15, ¿qué porcentaje estaría averiguando? Y si hiciera 240 x 3.17? ¿Y si quisiera saber el 159% de 240, con qué multiplicación lo podría reemplazar? ¿Y el 79% de 1500?' Algunos dijeron 1500 x 7.9. Otros 1500 x 0.79. Otros propusieron 1500 x 79/100. ¡Y, obviamente, no podía ser que todas esas cuentas a la vez fueran correctas! Para descartar las que no lo son, pasaban los decimales a fracciones 0,79 = 79/100 = 79%. ¡Es esa! La otra no puede ser porque 7,9 es igual a 790/100 = 790%.

Como estaban tan entusiasmados, les pregunté: '¿Cómo podríamos reemplazar de otra forma lo que hace la calculadora cuando uno aprieta la tecla %. Una es esa: multiplicar por el decimal equivalente, ¿cuál podría ser otra?' Algunos chicos empezaron a dar ejemplos donde multiplicaban el número por el porcentaje que querían y después dividían por 100. Todos estuvieron de acuerdo con eso. Como parecía que lo tenían claro, les pregunté: ¿cómo podríamos hacer si quisiéramos calcular un porcentaje cualquiera para cualquier número, sin pensar ya en el 240

[20] En una investigación en curso, se abordan estas preguntas a través del análisis gramático-funcional de registros de este tipo de conversaciones (Shreyar, Zolkower y Pérez, 2009).

o en los otros ejemplos que ya vimos.' Salta Raúl de atrás, muy tranquilito como siempre, diciendo: '¡Un número x por un número x dividido 100!' Algunos lo miraron diciendo ¡Ah, bueno! Como si fuera una eminencia. Raúl se puso colorado y se encogió de hombros como si lo que dijo hubiera estado mal. Le pedí que lo repitiera. Al resto de la clase le pregunté: ¿cómo anotamos eso que dijo Raúl? ¿Estará bien? Para un número poné x, me dictaban. Multiplicado poné un por (X). Ahí otra x pero no, no es la misma porque no es el mismo número. Convinimos en ponerle otra letra, eligieron a. Entonces quedó: x X a/100, donde a es el porcentaje que querés saber y x el número, el 100%.

Tal como en el caso de "Midiendo líquenes", la docente aprovecha aquí una circunstancia imprevista que surge a partir de la pregunta de un alumno para fomentar procesos de generalización y simbolización. Esta mini-lección ilustra la noción de interacción en un sentido amplio ya que se trata no sólo de la interacción docente-alumno y alumno-alumno sino también de un intercambio con la calculadora en tanto instrumento que encapsula procesos de matematización[21]. La calculadora cumple aquí un papel de contexto-modelo en tanto motiva y apoya el proceso de expresar, de modo simbólico y general, un atajo para calcular porcentajes "haciendo una sola cuenta."

Desde la perspectiva de la EMR, formular y resolver problemas cumple un rol fundamental. Sin embargo, de lo que se trata no es de enseñar a resolver este u otro problema particular sino de desarrollar en los alumnos la capacidad y disposición para matematizar (i.e. aritmetizar, geometrizar, algebrizar, formalizar, etc.). Para lograr este objetivo, el docente debe presentar preguntas abiertas dentro de contextos y situaciones realizables o imaginables por sus alumnos, tratar de comprender las ideas y el modo de pensar de los mismos interesándose genuinamente en qué dicen y hacen, y favorecer situaciones de interacción, trabajando en forma alternativa, a nivel de toda la clase y en grupos pequeños. Es crucial aquí que el docente, a partir de las ideas que proponen los alumnos, fomente procesos de reflexión con miras a elevar el nivel de matematización de cada alumno y de la clase en su conjunto. Esto último requiere un docente capaz de anticipar los hitos fundamentales en la trayectoria de matematización progresiva que se ha de recorrer.

---

[21] Sobre aportes de la EMR al diseño didáctico para el trabajo con applets, calculadora y calculadora científica, *minitools* y otras herramientas tecnológicas, consultar: Bakker (2004), Boon (2009), van der Kooij (2001) y van Reeuwijk y Meyer (2004).

7.6. A modo de cierre

Si la actividad primordial de los alumnos es matematizar, ¿cuál es, entonces, la actividad primordial de los maestros y profesores? Según Freudenthal (1991) es la de *didactizar*, entendida ésta como actividad organizadora que tiene también una dimensión horizontal y una vertical:

> La matemática surgiendo de la matematización es espejada por la didáctica surgiendo de la didactización. Nótese que el paralelismo intentado aun se extiende a distinguir la didactización horizontal y vertical: Desde la realidad didáctica para tornarse consciente de ella por un lado y para paradigmatizar por el otro (p.45, traducción de las autoras).

Horizontalmente, los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza-aprendizaje que emergen en sus aulas y en las de otros; verticalmente, reflexionan y generalizan a partir de esas situaciones en el camino hacia reinventar su propia caja de herramientas micro y macro-didácticas para facilitar la matematización.

Nuestra intención al escribir este texto fue ofrecer ideas y compartir recursos para que aquellos lectores a los que les interese puedan *re-inventar* esta propuesta didáctica, moviéndose, en caminos de ida y vuelta, entre la práctica áulica y la reflexión teórica. Esperamos haber logrado contagiar nuestro entusiasmo, y el del resto de los integrantes del GPDM, de continuar estudiando, investigando y contribuyendo a esta línea didáctica que, a nuestro juicio, hace tan valiosos aportes al viejo proyecto, que no por viejo ha perdido su vigencia, de "una matemática para todos" (Freudenthal, 1973).

Notas

1. Los textos citados corresponden a traducciones de las autoras de los originales.
2. Se agradece especialmente a la profesora María Fernanda Gallego la lectura y corrección literaria de este capítulo.

7.7. Referencias bibliográficas

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrech: Instituto Freudenthal, CD-β Press.

Boon, P. (2009). Designing educational software for 3D geometry. *Educational Designer 1(2)*, 1-11.

Dekker, R. & Elshout, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level rising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics 56*, 39-65.

de Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. In B. Madison, y L. Steen. (Eds.) *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges. Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy held at the National Academy of Sciences en Washington, D.C.,* National Council on Education and the Disciplines. NJ: Princeton.

Dickinson, P. & Eade, F. (2004). Using the number line to investigate the solving of linear equations. *For the Learning of Mathematics 24(2)*, 41-47.

Elbers, E. (2003). Classroom interaction as reflection: Learning and teaching mathematics in a community of inquiry. *Educational Studies in Mathematics 54*, 77-99.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics 3*, 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Fried, M. & Amit, M. (2005). A spiral task as a model for in-service teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education 8(5)*, 419-436.

Goffree, F. (1993). Hans Freudenthal: Working on mathematics education. *Educational Studies in Mathematics 25(1/2)*, 21-49.

Goffree, F. & Dolk, M. (1995). *Standards for mathematics education*. Utrech: Instituto Freudenthal.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education 25(5),* 443–471.

Gravemeijer, K. (2004). Creating opportunities for students to reinvent mathematics. *Ponencia en la reunión de la ICME 10.*

Gravemeijer, K.; Cobb, P.; Bowers J. & Whitenack J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.) *Communicating and Symbolizing in Mathematics* (pp.225-273) Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies 32(6)*, 777-796.

Kindt, M.; Wijers, M.; Spence, M.; Brinker, J.; Pligge, M. & Burrill, J. (1998). *Graphing equations*. Chicago: Encyclopaedia Britannica Educational Corporation.

Meyer, M. & Pligge, M. (1998). Comparing quantities. In National Center for Research in Mathematical Sciences Education y Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in Context: A connected curriculum for grades 5-8*. Chicago: Encyclopaedia Britannica Educational Corporation.

Middleton, J. A.; van den Heuvel-Panhuizen, M. & Shew, J. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. *Mathematics Teaching in the Middle School 3(4)*, 302-312.

Middleton, J. A. & van den Heuvel-Panhuizen, M. (1995). The ratio table. *Mathematics Teaching in the Middle School 1(4), 282-288.*

Organización para la Cooperación Económica y el Desarrollo (OECD) (2006). *Pisa 2006 - Marco de la evaluación: Conocimientos y habilidades en ciencia, matemáticas y lectura*. Extraído el 10 de febrero de 2011 de http://www.oecd.org/dataoecd/59/2/39732471.pdf

Pérez, S. (2007). Midiendo…¡¿líquenes?! Extraído el 10 de febrero de 2011 de http://www.gpdmatematica.org.ar/experiencias_pdf/liquenes.pdf

Romberg, T. (2001). Designing middle-school mathematics materials using problems created to help students progress from informal to formal mathematical reasoning. In L. Leutzinger y S. Smith (Eds.) *Mathematics in the Middle* (pp. 107-119), National Council of Teachers of Mathematics.

Shreyar, S.; Zolkower, B. & Pérez, S. (2009). Thinking aloud together: A 6th grade teacher's mediation of a whole-class conversation about percents. *Educational Studies in Mathematics 73, 21-53.*

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer.

Streefland, L. & van Ameron, B. (1996). Fenomenología didáctica de las ecuaciones. *Proceedings ICME 8*. Sevilla. España.

Streefland, L. (2003). Learning from history for teaching in the future. *Educational Studies in Mathematics 54*, 37-62.

Treffers, A. (1987). *Didactical background on a mathematics program for primary* *education*. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal: Realistic Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics 25(1/2)*, 89-108.

Treffers, A. & de Moor, E. (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool. Deel II. Basisvaardigheden en cijferen.* Tilburg: Zwijsen.

Van den Brink, J. (1991). Realistic arithmetic education for young children. In Streefland, L. (Ed.) *Realistic mathematics education in primary school.*

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrech: Instituto Freudenthal.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54*, 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentrallblatt for Didaktik der Mathematik 37(4)*, 287-307.

Van Est, W. T. (1993). Hans Freudenthal (17 September 1905-13 October 1990). *Educational Studies in Mathematics 25*, 59-69.

Van Reeuwijk, M. (1995). *The role of realistic situations in developing tools for solving systems of equations*. Conferencia presentada en la reunión de la AERA, San Francisco, EEUU.

Whitney, H. (1985). Taking responsibility in school mathematics education. In Streefland, L. (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* II, (pp 123–141). Utrech, Holanda: OW&OC, Universidad de Utrech.

Zolkower, B. y Pérez, S. (2007). Pensando juntos en voz alta: El papel de una docente de matemática en el manejo de una situación de interacción de toda la clase. Presentación en la Escuela de invierno de la Universidad de San Martín, Buenos Aires.

Zolkower, B. & Shreyar, S. (2007). A teacher's mediation of a thinking-aloud discussion in a 6th grade mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics 65*, 172-202.

8
Educación Matemática Crítica

Sara Scaglia

8.1. Introducción

En estas páginas esperamos mostrar algunas lecturas y líneas de pensamiento a las que arribamos a partir de nuestra inquietud por el papel de la Educación Matemática en la sociedad actual.

Un punto de partida lo constituye la preocupación por entender el funcionamiento del aula de Matemática, con el fin de pensar cómo deberían transcurrir las clases. Imaginamos una clase de Matemática en la que *todos* los alumnos del nivel medio trabajan involucrados en actividades que los forman para actuar sobre las situaciones que se les presentan en la realidad que los circunda con ojos *informados* y *críticos*.

Otra preocupación es la de generar la posibilidad de que algunos de estos jóvenes, los que necesitan estar *preparados para el ingreso* a muchas carreras universitarias, construyan una base sólida con la que puedan abordar los estudios superiores.

Reconocemos la complejidad que cada una de estas cuestiones entraña, y ello nos previene de creer en recetas "mágicas". No obstante, creemos importante informarnos sobre las perspectivas de destacados especialistas en el campo acerca de las mismas.

Con el fin de iniciar la reflexión, exponemos las posiciones de algunos autores que trabajan e investigan en torno a algunas de estas preocupaciones. El recorrido seguramente es limitado y mejorable, constituye sólo una opción. La selección nos lleva por los derroteros de la Educación Matemática Crítica.

En la siguiente sección presentamos las ideas de algunos autores que han abordado la relación entre equidad y Educación Matemática. En particular, discutimos sobre la dificultad que supone pensar en una formación matemática igualitaria para todos.

En la sección 8.3. abordamos las ideas consideradas más importantes de la Educación Matemática Crítica. Para ello realizamos un recorrido construido a partir de las lecturas e interpretaciones de diferentes documentos publicados por Ole Skovsmose, desde 1994 hasta la actualidad.

En el apartado 8.3.1. explicamos el sentido en que se afirma que la Educación Matemática es crítica. En 8.3.2. presentamos una reflexión epistemológica sobre la perspectiva de Skovsmose acerca de la Matemática, que es considerada por este autor una racionalidad crítica. En consonancia con esta posición, en 8.3.3. incluimos los componentes de la alfabetización matemática. Para finalizar con la descripción de esta corriente, en 8.3.4. presentamos algunas cuestiones que atañen al trabajo del docente en el aula de Matemática.

En la sección 8.4. proponemos un ejemplo de trabajo en la clase de matemática en el que los alumnos asumen un rol protagónico, puesto que se les exige producir, argumentar, defender sus producciones y valorar (recurriendo a argumentos matemáticos) las de sus compañeros.

Finalmente, en la última sección presentamos algunas reflexiones que involucran una toma de conciencia sobre la complejidad del problema que esperamos abordar. La meta es colaborar, con las herramientas que tenemos a mano en la clase de Matemática, para que nuestros alumnos desarrollen la capacidad de adoptar decisiones y situarse ante las diversas circunstancias que conforman la realidad subjetiva de cada uno desde una posición informada y crítica.

8.2. Equidad y Educación Matemática

La necesidad de recapacitar sobre la relación entre los términos que conforman el título de esta sección viene preocupándonos desde hace tiempo. Una lectura rápida podría presuponer que poco tiene que ver la Educación Matemática con la cuestión de la equidad. Sin embargo, como veremos a continuación, algunos autores vienen reflexionando sobre ello.

Secada, Fennema y Adajian (1997) compilan un libro cuyo título (traducido) es *Equidad y enseñanza de las Matemáticas: Nuevas tendencias*. En su Introducción plantean el objetivo de trascender el sentido clásico de *equidad*, habitualmente entendida "en términos de igualdad (o desigualdad) de oportunidades educativas; como constructo cuantitativo; o centrada en las entradas, los procesos o los resultados de la educación" (p.15), para abordar en sus capítulos las experiencias de diversos autores que exploran concepciones alternativas para el término. Entre los problemas que dan lugar a la publicación del libro, Secada *et al* (1997) mencionan la necesidad de que la *equidad*, considerada como área de investigación académica creciente y en constante evolución, tenga en cuenta y se sitúe

> en el contexto de los desarrollos de la metodología académica y en el de los problemas críticos contemporáneos relativos a la educación. La investigación sobre la equidad debería prever los nuevos problemas sociales y las nuevas líneas de investigación y reglamentación, en vez de ir a remolque, teniendo que realizar después una especie de recapitulación intelectual; debería plantearse lo que podría suceder. La investigación fundada en la cuestión de la equidad tendría que formar parte del plan desde el primer momento (p.16).

Desde nuestra posición, este llamado de atención sobre la necesidad de que la investigación sobre la equidad permita anticipar los problemas sociales, resulta especialmente interesante.

Clements (2000) aborda la problemática de la igualdad de oportunidades educativas en Educación Matemática, mostrando las limitaciones y los problemas que se presentan cuando se la pretende alcanzar a partir de la imposición por parte de la administración educativa de un currículum escolar común. Parte de la interpretación de equidad en Educación propuesta por la UNESCO, que implica:

- equidad en el acceso (la posibilidad de llegar a grupos desfavorecidos),
- equidad en el trato (referido a la necesidad de proporcionar el mismo trato a todos los alumnos y de la existencia de un currículum sensible a la diversidad cultural en el aula), y finalmente,
- equidad en los resultados (el compromiso de alcanzar metas comunes con todos los alumnos).

Clements (2000) realiza una cruda descripción de la situación (una década atrás) de muchos países, en los que buena parte de la población no logra completar el nivel de escolaridad básico, y proporciona ejemplos en los que la diferencia de género implica graves diferencias en el acceso a la educación. Este autor muestra la complejidad que entraña también la equidad en los procesos y en los resultados de la educación. Por ejemplo, ante la incorporación en un aula de alumnos que hablan una lengua diferente a la del profesor[22], este autor se pregunta:

> ¿Qué debería hacer el profesor? ¿Qué matemáticas debería intentar enseñar y qué metodología usar? […] Aunque se presupone que la mayoría de los jóvenes dejará la escuela en unos años, algunos de ellos demuestran tener considerables habilidades académicas. ¿Debería esto afectar a las decisiones sobre qué matemáticas debería enseñárseles? ¿Debería el profesor seguir el currículum matemático básico oficial, cuando parece obvio que muchos de los jóvenes no están preparados para aprender lo prescrito? (p.60).

Los ejemplos que proporciona Clements (2000) son extremadamente preocupantes. Tal es el caso de los niños de una aldea de Papúa Nueva Guinea que no hablan el idioma oficial y deben aprender la Matemática escolar enseñada en una lengua que no comprenden, por un docente que desconoce la lengua nativa y que posee un conocimiento limitado de su cultura. Esta situación no nos resulta completamente ajena. Los niños de la comunidad toba, cuyas familias han tenido que desplazarse de su lugar de origen (principalmente de la Provincia del Chaco) hacia ciudades del litoral del país en busca de mejores condiciones de vida, comienzan la escuela primaria desconociendo prácticamente el idioma español, lo que origina un retraso escolar, y en muchos casos, el abandono de la escuela (Bou, 2000).

Las preguntas planteadas en la cita anterior de Clements ponen de relieve un supuesto que se viene sosteniendo desde algunas propuestas curriculares, como la del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1991, 2003): el de esperar que todos los alumnos sigan el mismo currículum matemático básico. Veamos, por ejemplo, lo propuesto en la presentación de los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios de la Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente, donde se aborda el interrogante acerca de qué pueden ofrecer las escuelas ante la profunda desigualdad de la sociedad argentina:

> En primer lugar, mayores oportunidades de aprender aquellos saberes necesarios para integrarse plenamente en la sociedad. Saberes que deben

[22] En la última década se ha ido incrementando la inmigración en distintos países, a los que acuden habitantes de algunas regiones muy desfavorecidas del planeta con la perspectiva de mejorar sus situaciones.

> estar al alcance de todos los niños y las niñas del país, de manera tal que nos permita compartir el mundo a todos los argentinos, y reafirmar, desde el Estado, el derecho y la oportunidad de todos a acceder a nuestra cultura[23].

Esta aspiración es absolutamente digna, pone de manifiesto buenas intenciones por parte de la administración educativa, pero como muestra Clements (2000), muchos educadores cuestionan si debería existir un núcleo básico común para todos. Este autor se pregunta, tomando en parte a Bishop (1988):

> ¿Debe la sociedad insistir en que todos los niños estudien el núcleo común básico de conocimientos y habilidades constituidos por las Matemáticas, con M mayúscula, internacionalizadas? [...]. Si la respuesta a esta pregunta es afirmativa, entonces las preguntas siguientes son: ¿Qué partes de las Matemáticas, con M mayúscula, son suficientemente «básicas» y «comunes» para que todos los niños, de cualquier parte del mundo, necesiten conocerlas? ¿Sobre qué argumentos se fundamenta la afirmación de que ese conocimiento es básico para todos los niños? (p.66).

Estas afirmaciones llevan a considerar con cuidado las cuestiones de equidad en Educación Matemática. Clements (2000) finaliza, sin embargo, con cierto grado de optimismo: "es posible que el mundo esté cerca de conseguir una educación primaria y secundaria para todos. Esto significaría que existiría una forma de matemáticas para todos, aunque las matemáticas en un lugar no fueran las mismas que en otro" (p.73).

El Diccionario de Uso del Español de María Moliner (1996) proporciona algunas acepciones del término equidad que parece necesario discutir:

> 5. Cualidad de los fallos, juicios, repartos, etc., en que se da a cada uno o se trata a cada uno como *corresponde a sus méritos o deméritos: "Es discutible la equidad del fallo del jurado". *Justicia. Se atribuye también a la persona cuyos juicios, fallos, etc., poseen esa cualidad.
>
> 6. Cualidad de un trato en que ninguna de las partes sale injustamente mejorada en perjuicio de otra.

Estas acepciones parecen destacar el hecho de que el concepto de equidad no supondría dar lo mismo a cada alumno, sino de darle a cada uno lo que le corresponde, atendiendo a que ninguno resulte injustamente mejorado en perjuicio de otro. Esta perspectiva resulta, sin embargo, controvertida; y las preguntas que nos planteamos ahora son las siguientes: ¿de qué modo se determina

[23] Portal de la Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente: http://www.me.gov.ar/curriform/nap.html

el conocimiento matemático que necesita (o peor aún: le corresponde a) cada individuo? ¿Quedaría esta decisión en manos del docente, de los diseñadores de currículos, o de los burócratas de turno? ¿En función de qué parámetros o criterios se basa esta "adjudicación" de conocimientos adecuados para cada sujeto? Estas preguntas muestran una vez más la complejidad que entraña la relación entre equidad y Educación Matemática.

Skovsmose y Valero (2007) por su parte, sostienen que la relación entre educación matemática y equidad es *crítica*, en el sentido de que "dependiendo del contexto y de cómo se organice la educación matemática, puede apoyar a la justicia social o crear y perpetuar procesos de exclusión" (p.49).

Estos autores examinan algunos rasgos del orden social actual que es preciso considerar para discutir la relación entre Educación Matemática, justicia social, equidad y democracia. Plantean dos paradojas de la sociedad de la información, a saber:

- La paradoja de la inclusión se refiere al hecho de que los procesos actuales de globalización, aunque enuncian una preocupación por la inclusión, excluyen a ciertos sectores sociales.
- La paradoja de la ciudadanía alude al hecho de que la educación, aunque parece lista para preparar en términos de ciudadanía activa, adapta al individuo al orden social establecido (pp.45-46).

Con respecto a la primera paradoja, señalan la discriminación brutal que están ejerciendo los procesos de globalización, asociados a un capitalismo de crecimiento libre. Afirman que la mayor parte de los habitantes del Cuarto Mundo[24] conoce la abundancia cercana que, sin embargo, está fuera de su alcance. Este análisis es muy importante para tratar de entender el recrudecimiento de "formas de actividad económica «pervertidas» o «ilegales» [que] se establecen de modo natural entre los grupos marginados y el capitalismo globalizado" (p.52). La venta de estupefacientes o de objetos robados son ejemplos, en tanto que "el robo llega a ser una forma extendida de supervivencia".

En cuanto al papel de la Educación Matemática en este escenario, Skovsmose y Valero (2007) mencionan diferentes perspectivas. La primera sostiene que no merece la pena invertir en Educación Matemática para los grupos marginados, porque no se obtendrá un resultado rentable que permita afrontar

[24] El "Cuarto Mundo" incluye las áreas de la sociedad de la información que no son estructuralmente pertinentes (Castells, 1999, citado en Skovsmose y Valero, 2007). Según Skovsmose abarca grandes porciones del "mundo en desarrollo" (que comprende África, Latinoamérica y la mayor parte de Asia) y también algunas regiones de Europa, Estados Unidos de América, Japón y Australia.

los costos necesarios para llevar adelante esta acción. La segunda, en cambio, asume que la sociedad necesita contar con una fuerza de trabajo bien entrenada, lo que justifica una inversión educativa en ese sentido. La tercera considera que la sociedad, además de necesitar trabajadores rasos, necesita consumidores con capacidad para participar en la producción y reproducción de estructuras políticas, económicas y culturales. Según la cuarta, "la educación debería proporcionar espacios para la resistencia y la construcción de imaginarios sociales alternativos" (p.53). Cualquiera de estas perspectivas, afirman, requiere de una cualificación matemática que la gente debe poseer.

Con respecto a la segunda paradoja, señalamos aquí que si bien existe un discurso en torno a la educación para la construcción de ciudadanía, el tipo de información que predominantemente se hace llegar a los estudiantes *en tanto* ciudadanos, los reduce a meros consumidores. "Los consumidores podrían hacer inversiones, o tomar un préstamo, podrían también votar, recibir servicios, cumplir obligaciones, o, en otras palabras, ser ciudadanos" (Skovsmose y Valero, 2007, p.53). Se plantea por lo tanto la necesidad de pensar en una alfabetización matemática crítica, que les permita a los sujetos usar el conocimiento y las competencias matemáticas al actuar como ciudadanos, aunque trascendiendo el rol de consumidores rasos.

8.3. Educación Matemática Crítica. Un camino posible

8.3.1. La concepción de Educación Matemática Crítica

Al hablar de "Educación Matemática Crítica" la referencia central es Ole Skovsmose. Este investigador danés, caracterizado por Paola Valero como "un librepensador multifacético" publicó en 1994 un libro en inglés cuyo título (traducido) es *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*[25]. En este capítulo esperamos desarrollar algunos puntos centrales del enfoque de Skovsmose.

¿Qué significa la afirmación: "la Educación Matemática es crítica"? Para responder esta pregunta vamos a seguir diversos trabajos de Skovsmose. El título de uno de ellos (Skovsmose, 2008) resume su posición: "Crítica como incertidumbre". En el mismo afirma: "Una educación matemática crítica puede ser caracterizada en término de la preocupación con respecto a los diferentes

[25] La versión en español se editó en Colombia, por *Una Empresa Docente* y Universidad de los Andes en 1999, y fue traducida por Paola Valero.

roles socio-políticos que la matemática en acción y la educación matemática podrían jugar" (p.4).

Esta cita pone de manifiesto la doble dimensión que tiene para Skovsmose la Educación Matemática, y utiliza los términos "empoderamiento" o "desempoderamiento" para referirse a ello. Sostiene que no es posible afirmar que la Educación Matemática entrañe algún tipo de peligro, que conduzca a posiciones dictatoriales o que apoye las características más problemáticas de cualquier proceso social. Sin embargo, tampoco es posible afirmar que la Educación Matemática, por sí misma, contribuya al desarrollo de un ciudadano crítico que sustente ideales democráticos.

> Los roles socio-políticos de las matemáticas no están fijados ni determinados. Ambos roles, el de héroe o el de canalla, están disponibles para ser actuados a través de la educación matemática. En este sentido, afirmo que la educación matemática es crítica (Skovsmose, 2004b, p.3).

La expresión "Matemática en acción" alude a los procesos mediante los cuales las abstracciones matemáticas pueden ser proyectadas en la realidad (Skovsmose, 2004a). Se trata, tal como él afirma, de procesos inversos a los de abstracción, que consisten en extraer las ideas matemáticas de fenómenos y observaciones empíricas.

Para tratar de clarificar el concepto, afirma que

> cuando usamos las matemáticas como base para el diseño tecnológico, llevamos a la realidad un mecanismo tecnológico que ha sido en parte conceptualizado por medio de las matemáticas. Primero, este mecanismo existe en el mundo de las matemáticas, después es implantado en la realidad por una construcción efectiva (p.1).

Se produce así lo que Skovsmose denomina "un acto de habla matemático", y estos actos forman parte de casi cualquier acción socio-tecnológica. De ese modo, la "Matemática en acción" pasa a formar parte de nuestro entorno.

Hay una situación utilizada por Skovsmose en diversos trabajos (Skovsmose, 2004a, 2010), en la que muestra un ejemplo de "Matemática en acción", que pone de manifiesto cómo opera la Matemática en los procesos de toma de decisiones y planificación tecnológica. Se trata de los modelos de reservas de pasajes de aviones. Su ejemplo está basado en un trabajo de Clements titulado: "¿Por qué las aerolíneas a veces sobre-reservan vuelos?" (Skovsmose, 2004a).

La sobreventa de pasajes aéreos es moneda corriente en las aerolíneas. En nuestro país, desde el año 2007 la Defensoría del Pueblo de la Nación viene recibiendo denuncias por esta razón. En 2008, un ministro de la Nación manifestó en distintos medios que la sobreventa de pasajes en una empresa nacional alcanzaría los 140 millones de dólares[26]. Skovsmose, como es de esperar, no desarrolla su ejemplo a partir de lo que ocurre en nuestro país, sino que el problema ha sido observado en muchos países.

La sobreventa de pasajes se realiza para maximizar los beneficios, o bien para asegurarse de que los precios se mantengan dentro de valores razonables, porque las empresas esperan prevenir la posibilidad de que se realicen vuelos con asientos vacíos. Cabe señalar que los costos de los vuelos son casi los mismos, tanto si el avión viaja completo como si lo hace con asientos vacíos. Veamos: el salario de los pilotos y del personal es el mismo. Puede variar el costo por el servicio de a bordo, pero es un costo mínimo. El avión lleno de pasajeros consume un poco más de combustible, pero de nuevo la diferencia es pequeña respecto del avión vacío. Una estrategia de mercado es entonces prevenir que se realicen vuelos con asientos vacíos, que resultan costosos para estas empresas.

En cada vuelo, es bastante probable que algunos pasajeros que hayan reservado pasaje no se presenten. Es más, se contempla la posibilidad de cambiar un vuelo por otro, con algún costo extra para el pasajero. Por tanto, la posibilidad de sobreventa se vuelve más real.

¿Dónde aparece la Matemática aquí? Skovsmose (2004a) plantea que para llevar adelante la estrategia de sobreventa se requieren algunos análisis de mercado. Se necesita conocer la probabilidad de que un pasajero que ha realizado una reserva no se presente. Esta probabilidad, según estudios estadísticos, varía según la hora de vuelo, el día de la semana, las ciudades de origen y de destino de los vuelos, la época del año, entre otras variables. En función de esa probabilidad, se venden más pasajes de los disponibles.

Como afirma Skovsmose (2004a):

> El principio tradicional de ‘No vender más pasajes que la cantidad de asientos’ se sustituye por el siguiente más complejo: ‘Sobrevender pasajes, pero hacerlo de modo que el ingreso sea maximizado, considerando la cantidad de dinero que se pagará como compensación, el destino, la hora de partida, el día de la semana, y los efectos a largo plazo de haber dejado a los pasajeros con reservas válidas sin la posibilidad de volar’ (pp.6-7).

[26] Información consignada en el Portal de la Federación Iberoamericana del Ombudsman, http://portalfio.org/inicio/index.php?option=com_content&view=category&layout =blog &id=197&Itemid=200421&limitstart=185

En los aeropuertos, cuando se presenta un caso de sobreventa de pasajes y un pasajero debe cambiar su vuelo (por supuesto, los gastos ocasionados deberían correr por cuenta de las empresas), es habitual que los empleados de las aerolíneas articulen excusas del tipo: “ha habido un fallo de tipo informático”, “no entendemos cómo pudo haber ocurrido esta situación”. Lo más probable es que no estén informados sobre las razones que han ocasionado esta contrariedad. La realidad es que se elaboran modelos matemáticos que “regulan” (si podemos decirlo de esta manera) la venta de pasajes aéreos, incluyendo la posibilidad de la sobreventa. Se trata de un ejemplo de “Matemática en acción” al servicio de las empresas aéreas.

8.3.2. La perspectiva sobre la Matemática

Ernest (2010) afirma que el estado crítico de la sociedad proporciona una preocupación primordial para la Educación Matemática Crítica: “¿cómo contribuir más efectivamente a la mejora de la condición humana y cómo abordar el problema universal que enfrenta la humanidad, identificado por D’Ambrosio como el de la supervivencia con dignidad?” (p.3).

Plantea entonces un listado de cuestiones que debería afrontar la Educación Matemática Crítica, y uno de los dominios considerados para el abordaje de esta pregunta es el epistemológico: “¿Qué es la Matemática, qué Filosofías de la Matemática hay, y qué presupuestos subyacen en estas visiones y Filosofías de la Matemática?” (p.3).

Skovsmose (2010) enumera diferentes perspectivas sobre la Matemática:

1) Como una forma sublime de racionalidad. Cualquiera sea el origen de las nociones matemáticas (el resultado de un juego formal gobernado por reglas bien definidas, un proceso mental particular, un mundo ideal al que tenemos acceso a partir de nuestra inteligibilidad, entre otros), éstas constituyen una producción intelectual extraordinaria, superior.

2) Como una racionalidad “maligna”. La matemática, si es considerada como el lenguaje de las ciencias, podría de algún modo sustentar los aspectos problemáticos del desarrollo científico. Cabe considerar, a modo de ejemplo, los efectos devastadores de algunos desarrollos tecnológicos sobre el medio ambiente.

3) Como una forma insignificante de pensamiento. Skovsmose afirma que en el discurso de muchos teóricos contemporáneos que analizan las caracterís-

ticas más generales de nuestra condición social, no se presta ninguna atención especial al rol de la Matemática.

4) Una cuarta perspectiva, defendida por Skovsmose, consiste en considerar a la Matemática como una racionalidad crítica. Esta racionalidad tiene, según la posición de Skovsmose (2010) dos rasgos:

- es significativa, dado que impacta sobre todas las esferas de la vida social,
- es indeterminada, en el sentido de que podría dirigirse hacia cualquier dirección.

Para entender mejor estos rasgos describimos, siguiendo a Skovsmose (2010), las cinco características de la “Matemática en acción”:

1) La imaginación tecnológica

La imaginación juega un papel importante en los desarrollos tecnológicos y la matemática, por su parte, interviene en cualquier proceso de diseño, construcción, toma de decisión u organización. Por tanto, Skovsmose habla de la ‘imaginación tecnológica basada en la matemática’.

2) El razonamiento hipotético

Es esencial para la toma de decisiones en cualquier emprendimiento tecnológico. Se trata de prever los resultados posibles ante cualquier acción, y ello es posible gracias a la modelización matemática. En la construcción de un modelo se escogen determinadas variables y otras se ignoran, en función de las necesidades e intereses de quien ordena el modelo. Otro aspecto de la modelización matemática es que siempre deja lugar para el surgimiento de contingencias. La emergencia de la sociedad en riesgo es parte del desarrollo de la tecnología basada en la Matemática.

3) La legitimación o justificación

Skovsmose (2010) se ocupa, en primer lugar, de señalar la diferencia entre estos dos términos:

> la justificación refiere a un soporte genuino lógico y propio de una afirmación, decisión o acción. Una justificación asume que algún grado de honestidad lógica ha sido ejercido. No ocurre lo mismo con la legitimación. Se puede legitimar una acción proponiendo una argumentación sin mucha significación lógica (p.14).

Un modelo matemático sirve indistintamente para legitimar y para justificar. En el ejemplo mencionado anteriormente, la sobreventa de pasajes se realiza con base en una fórmula que de algún modo legitima los resultados. Skovsmose habla de “ecuaciones cínicas” para referirse a los modelos matemáticos que se construyen atendiendo al análisis costos-beneficios en torno a una situación planteada. La aplicación de cualquier forma de ecuaciones cínicas desdibuja la diferencia entre legitimación y justificación basada en la Matemática.

4) La realización

Refiere al hecho de que el modelo matemático puede pasar a formar parte de nuestro entorno.

Muchos objetos (televisores, teléfonos, medicina, computadoras, tarjetas de crédito, etc.) y muchas prácticas de nuestra tecno-naturaleza[27] son formateados a través de la Matemática. El costo del taxi, del boleto del colectivo, los índices económicos, por ejemplo, son definidos por medio de algoritmos matemáticos. Estos índices representan parámetros que son utilizados en la toma de decisiones por parte de los gobiernos, las compañías y los consumidores (Skovsmose, 2010).

5) La eliminación de responsabilidad

Skovsmose (2010) plantea que las acciones basadas en la Matemática suelen ocultar o suprimir la responsabilidad. Propone como ejemplo el caso del empleado de la empresa de aerolíneas que vende el pasaje, quien además informa sobre el precio y la existencia de lugares disponibles, entre otras cuestiones. Sin embargo, no es responsable de la información que proporciona la computadora: los precios del pasaje, las formas de pago, o sobre cualquier información que provenga de procedimientos definidos algorítmicamente. Cabe preguntarse,

[27] Con la expresión “tecno-naturaleza” Skovsmose refiere a un entorno tecnológicamente estructurado.

entonces, ¿quién es responsable de las acciones ejercidas por una computadora? De este modo, afirma Skovsmose, se suprime la estructura de responsabilidad.

Los modelos matemáticos parecen infundir objetividad a la situación y a las decisiones que se adoptan. Skovsmose (2010) afirma que

> hay muchas formas de imbuir objetividad en los cálculos: una de ellas es a partir de la elaboración de ecuaciones cínicas. Su arbitrariedad podría cubrirse por una abrumadora cantidad de cálculos formales, que permitirán fundar el resultado en una necesidad, aunque se trate de una necesidad insertada (p.18).

A partir del análisis de los rasgos característicos de la Matemática en acción, Skovsmose (2010) sostiene que la racionalidad matemática es crítica, en el sentido de que es significativa e indeterminada. Para mostrar su significancia, Skovsmose pone de manifiesto cómo la Matemática forma parte de la imaginación tecnológica, del razonamiento hipotético, de la legitimación y la justificación, de la realización y de la eliminación de la responsabilidad. La discusión de estas dimensiones de la Matemática en acción enfatiza que la racionalidad matemática es indeterminada, en el sentido de que no es posible asignar características divinas ni demoníacas a la Matemática en acción. "Como cualquier acción, la matemática en acción puede ser discutida en un rango de cualidades. Tales acciones pueden ser beneficiosas, costosas, sorprendentes, arriesgadas, aburridas, etc. En este sentido veo la matemática como una racionalidad crítica" (p.20).

8.3.3. La alfabetización matemática

Skovsmose (1999; p.111) interpreta a la alfabetización matemática como un proceso integrado por la "composición de diferentes competencias: la Matemática, la tecnológica y la reflexiva":

- Competencias matemáticas: suponen "las habilidades llamadas comúnmente matemáticas, como las competencias para reproducir pensamientos matemáticos, teoremas y demostraciones, ejecutar algoritmos y realizar cálculos" (Skovsmose, 1999; p.111). Retomando un ejemplo presentado en Scaglia y Nagel (2008), una competencia matemática es la habilidad para calcular un porcentaje o la habilidad para construir e interpretar un gráfico de barras.

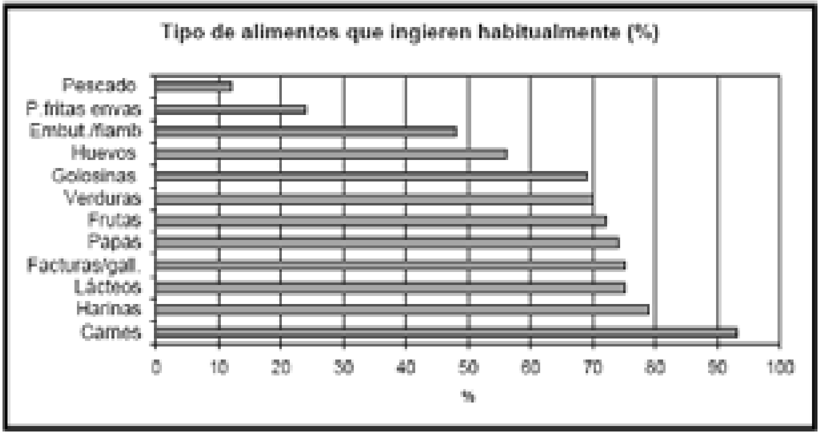


Figura 1. Hábitos alimenticios de los jóvenes argentinos
(Fuente: Kornblit, Mendes Diz y Adaszko, 2006)

- Competencias tecnológicas: suponen la habilidad para resolver problemas enunciados en lenguaje natural, que surgen y se aplican en el mundo natural, social y cultural en el que viven los sujetos y en su vida cotidiana (Skovsmose, 1999). Continuando con el ejemplo de Scaglia y Nagel (2008), consideremos el gráfico de la Figura 1, elaborado durante una investigación correspondiente a los hábitos alimenticios de los jóvenes de nuestro país (Kornblit, Mendes Diz y Adaszko, 2006). Algunas cuestiones a analizar podrían ser las siguientes: ¿cuáles son los tipos de alimentos que ingieren más de la mitad de los jóvenes de Argentina según el gráfico?, ¿cuáles son los menos consumidos?
- Competencia reflexiva "es la competencia necesaria para ser capaces de tomar una posición justificada sobre asuntos tecnológicos" (Skovsmose, 1999; p.111). Siguiendo con el ejemplo anterior, se podría preguntar a los jóvenes si consideran que deberían modificarse los hábitos alimenticios de los jóvenes de Argentina, invitándolos a que desarrollen algunas justificaciones para apoyar sus respuestas.

Es importante señalar que para que surja la posibilidad de desarrollar el conocimiento reflexivo, se hace necesario trabajar en un contexto determinado

(Skovsmose habla de *escenario de investigación*[28]), de modo de crear una riqueza semántica que permita ingresar en el aula un lenguaje de reflexión que no sería posible si nos mantuviéramos encasillados en la terminología matemática (Skovsmose, 1999). El conocer reflexivo se puede desarrollar si se plantea una situación abierta. El gráfico de barras anterior da pie para desarrollar un proyecto de trabajo en torno a la alimentación de los jóvenes, por ejemplo a partir de la pregunta: ¿Son saludables nuestros hábitos alimenticios? Los problemas que habitualmente suelen plantearse en clase y en los libros de texto no establecen condiciones para la reflexión, porque el problema en sí no tiene importancia para el alumno y el contenido de la solución del problema se vuelve irrelevante. Skovsmose plantea que la reflexión se reduce a contestarse preguntas como las siguientes: ¿hicimos bien la cuenta?, ¿el resultado está presentado de una manera que resulte satisfactoria para el profesor?

En lo que respecta al conocer reflexivo específicamente, Skovsmose (1999) propone seis puntos de entrada, que sugiere a través de los interrogantes que pueden plantearse los profesores y los estudiantes durante el trabajo en la clase de Matemática.

Un primer grupo de preguntas surge cuando se finaliza una actividad y apunta a los aspectos matemáticos, como ser: "¿hicimos correctamente los cálculos?, ¿seguimos el algoritmo de manera apropiada?, ¿hay diferentes maneras de controlar los cálculos?, ¿usamos el algoritmo de la forma correcta?" (p.131). Todas estas preguntas se responden dentro del campo de la Matemática. Por ejemplo: el gráfico de barras de la Figura 1, ¿está bien construido?, ¿están bien calculadas las longitudes de las barras?

El segundo punto de entrada al conocer reflexivo, que sigue apuntando a las herramientas matemáticas, lo propone a partir de la pregunta: ¿usamos el algoritmo apropiado? En el caso del proyecto en torno a los hábitos alimenticios, podríamos preguntarnos: ¿habría algún otro tipo de gráfico estadístico que ponga de manifiesto con mayor claridad la información en torno a los hábitos alimenticios?

El tercer punto de entrada enfoca sobre la "confiabilidad de la solución en un contexto específico". La pregunta que plantea es: ¿podemos confiar en los resultados de ese algoritmo? En este caso, empezamos a buscar el aspecto tecnológico. A modo de ejemplo, supongamos que planteamos a alumnos de nivel medio un proyecto para abordar la temática de la alimentación de los

[28] Un escenario de investigación consiste en una situación particular que tiene la potencialidad para promover un trabajo investigativo o de indagación (Skovsmose, 2000).

alumnos de la escuela. En el marco del mismo, los alumnos deben diseñar una encuesta, aplicarla a los estudiantes y estudiar los resultados. Las preguntas que podemos plantearnos son las siguientes: la información obtenida a partir de la encuesta, ¿hasta qué punto pone de manifiesto los hábitos alimenticios de los alumnos de nuestra escuela?, ¿de nuestra ciudad?, ¿de nuestro país?

El cuarto punto de entrada para el desarrollo del conocer reflexivo enfoca sobre el hecho de que en algunas circunstancias, la Matemática y las técnicas formales pueden ser herramientas no necesarias para alcanzar un fin tecnológico. A veces es preferible un método más intuitivo. Skovsmose (1999) propone entonces la pregunta: ¿podríamos hacer algo sin cálculos formales? En el ejemplo que estamos presentando: ¿podríamos averiguar si son saludables nuestros hábitos alimenticios sin recurrir a una encuesta? Se pretende atacar con ella la falsa ideología que dice que los métodos formales deben privilegiarse. El conocer reflexivo incluye hacer una distinción entre técnicas formales e intuitivas, reconociendo que las primeras no siempre funcionan, ni dan siempre una respuesta apropiada.

El quinto punto de entrada propone buscar consecuencias más amplias del uso de técnicas específicas durante la solución de un problema. Se plantea el interrogante: ¿cómo afecta el uso de un algoritmo, apropiado o no, a un contexto específico? Por ejemplo: las preguntas del cuestionario, ¿están formuladas de modo objetivo?, ¿permiten recabar información válida y fiable?

El sexto (y último) punto de entrada del conocer reflexivo consiste en tratar de pensar acerca de la manera como hemos reflexionado sobre el uso de la Matemática. La pregunta que se formula es: ¿podríamos haber hecho una evaluación de otra manera? En el ejemplo que estamos desarrollando: la encuesta y el análisis de datos realizados, ¿son adecuados para abordar los problemas relacionados con los hábitos alimenticios de los jóvenes? ¿Proporcionan información de interés para el conocimiento y la superación de algunos trastornos alimenticios (anorexia, bulimia) que suelen presentarse en la población juvenil? Estas preguntas tienen sentido en el marco del proyecto.

8.3.4. En el aula de Matemática

Para concluir con esta descripción de las principales ideas en torno a la Educación Matemática Crítica, revisamos algunas cuestiones que atañen a la clase de Matemática.

En otro de sus trabajos, Skovsmose (2000) describe distintas tipologías de clases de Matemática cruzando dos dimensiones.

En la primera dimensión sitúa dos paradigmas de las prácticas en el salón de clase, a saber:

- El paradigma del ejercicio, en el que ubica a la Educación Matemática tradicional. "En primer lugar el profesor presenta algunas ideas y técnicas matemáticas y a continuación los estudiantes trabajan en ejercicios seleccionados por el profesor" (Skovsmose, 2000; p.3).
- El enfoque investigativo. Skovsmose (2000) incluye en este enfoque el trabajo por proyectos montados en escenarios de investigación.

En relación con este último, Skovsmose (2000) sostiene que:

> Un escenario de investigación invita a los estudiantes a formular preguntas y a buscar explicaciones. La invitación está representada en la expresión de la profesora ¿qué sucede si…? Y la aceptación de la invitación por parte de los estudiantes se puede reconocer por las expresiones ¡sí! y ¿qué puede suceder si...? De esta manera los estudiantes se involucran en un proceso de exploración. La pregunta de la profesora ¿y, por qué es que...? se convierte en un reto que los estudiantes parecen haber asumido cuando dicen ¡sí! ¿por qué será que...? Este reto los lleva a buscar explicaciones. Cuando los estudiantes se apropian del proceso de exploración y explicación de esta manera, se constituye un escenario de investigación que a su vez genera un nuevo ambiente de aprendizaje. En un escenario de investigación los estudiantes están al mando (p.8).

En la segunda dimensión, sitúa "las "referencias" que sirven de base para el significado que los estudiantes pueden construir de los conceptos matemáticos y de las actividades en la clase. Las referencias que pueden utilizarse son de tres tipos:

1. la propia Matemática: las preguntas y actividades refieren exclusivamente a este dominio;
2. la semirrealidad: "no una realidad que de hecho podemos observar sino una realidad construida, por ejemplo, por el autor de un libro de texto";
3. las situaciones de la vida real.

En la siguiente tabla reproducimos una matriz de Skovsmose (2000), en la que muestra los seis ambientes de aprendizaje que se generan a partir del cruce de las dos dimensiones anteriores.

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemática pura	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Ambientes de aprendizaje. (Tomado de Skovsmose, 2000, p.10)

El ambiente (1) es característico de las clases en que los alumnos resuelven una larga lista de ejercicios repetitivos, desconociendo el sentido del trabajo matemático llevado a cabo, aplicando una serie de reglas cuya razón de ser también desconocen.

El ambiente (2), en cambio, es típico de las clases en las que se les brinda la oportunidad a los alumnos de construir el sentido de sus saberes, trabajando en torno a consignas que aluden únicamente a la Matemática. Algunas propuestas de este tipo en nuestro país pueden encontrarse en algunas publicaciones nacionales. En Sadovsky (2005) se pueden consultar algunos supuestos didácticos de estos enfoques. En Sessa (2005) se presentan actividades que propiciarían el paso de la Aritmética al Álgebra y en Itzcovich (2005) se discuten propuestas para rescatar la Geometría en la clase de Matemática.

La actividad referida a los hábitos alimenticios de los jóvenes en Argentina, circunscripta a la lectura e interpretación de la información que proporciona el gráfico, podría considerarse representativa del ambiente (3). Esto es así porque si bien el gráfico proviene de un estudio real, es utilizado aquí sólo a los efectos de que los alumnos pongan en práctica algunos conocimientos específicos referidos a los gráficos de barras.

Otro caso típico del ambiente (3) es la resolución de problemas que involucran funciones cuadráticas, como el siguiente: “Si se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, ésta sube hasta cierto punto y luego empieza a caer. La relación que existe entre el tiempo t que la piedra lleva en el aire cuando se encuentra a una altura y está dada por la fórmula $y = -5t^2 + 20t + 10$. ¿Cuándo alcanzará el punto más alto? ¿A qué altura estará ese punto?”[29]. La resolución de este problema es idéntica a la del siguiente ejercicio: “Hallar las coordenadas

[29] Extraído de http://www.ing.unp.edu.ar/matematica/Modulos/Unidad_5.PDF.

del vértice de la parábola de ecuación $y = -5t^2 + 20t + 10$", sólo que en este último caso nos situamos en el ambiente (1).

El ambiente (4) supone trabajar en un contexto de semirrealidad (es decir, se trata de situaciones ficticias), en el que los alumnos exploran e intentan hallar explicaciones de las relaciones matemáticas que van encontrando. Un ejemplo típico es la *carrera al 20*, el conocido juego propuesto por Brousseau (citado en Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) que introduce a los alumnos en el estudio de la congruencia módulo n.

Retomando el ejemplo de la situación referida a los hábitos alimenticios de los jóvenes, el ambiente (5) (el paradigma del ejercicio en situaciones de la vida real) se presenta si se les pide a los alumnos que elaboren un gráfico de tablas similar al dado, que represente los hábitos alimenticios de la clase. En tanto que el (6) se presentaría, por ejemplo, si se propone a los alumnos desarrollar un proyecto que permita conocer los hábitos alimenticios de los estudiantes de la escuela.

Un proyecto característico del ambiente (6) exige trabajo interdisciplinario, donde el docente de matemática planifique junto a docentes de otras disciplinas generando situaciones de aprendizaje que sean adecuadas para cada grupo, atendiendo los intereses de los alumnos, la realidad circundante y las oportunidades que pueden presentarse en determinados momentos (por ejemplo, el año en que se realiza el campeonato mundial de fútbol podría proporcionar un escenario propicio para plantear un proyecto de trabajo interdisciplinar).

Según Skovsmose (2000) el trabajo en el aula de matemática debería pasar por los distintos ambientes de aprendizaje. Incluso el ambiente (1) resulta adecuado en algunas situaciones: una vez que los alumnos han descubierto una relación o propiedad matemática, puede ser conveniente pasar por un 'período de consolidación', durante el cual los estudiantes tengan la oportunidad de trabajar con ejercicios relacionados. "Es importante que los estudiantes y el profesor juntos encuentren un camino entre los diferentes ambientes de aprendizaje" (2000; p.17).

Para terminar con esta selección de aportes del principal exponente de la Educación Matemática Crítica, queremos destacar un aspecto que nos parece de gran importancia para la promoción de clases de Matemática como las que imaginábamos en la Introducción de este capítulo, y tiene que ver con la invitación a conocer las expectativas que tienen nuestros alumnos respecto de sus vidas adultas. Skovsmose, Alrø y Valero (2008) consideran que la construcción del significado de los conocimientos matemáticos no pasa únicamente por la comprensión de los conceptos matemáticos. En esta significación otorgan un papel importante a la percepción que tienen los estudiantes de sus posibilidades futuras en la vida, en el marco del contexto sociopolítico en el que se desenvuelven.

Si los estudiantes están convencidos de que lo realizado en la clase de Matemática se encuentra absolutamente divorciado de sus intereses y expectativas sobre el futuro, difícilmente puedan construir motivos para aprender. Skovsmose y Valero (2007) mencionan el reto de "hacer de los estudiantes seres reales" para la investigación en Educación Matemática.

8.4. Un ejemplo de trabajo en el aula

En esta sección describimos un ejemplo en el que se ponen de manifiesto algunas fortalezas y dificultades que deberá afrontar el profesor de matemática interesado en retomar los lineamientos de la Educación Matemática Crítica en el diseño de sus clases.

Como reconoce Skovsmose, sería conveniente que en la planificación de las actividades a desarrollar a lo largo del año escolar se pueda alternar entre los distintos ambientes de aprendizaje. Pensamos, sin embargo, que en buena parte de las clases de matemáticas de la escuela secundaria predominan actividades que corresponden a los ambientes del tipo (1) y (3).

En la sección anterior hemos mencionado algunos documentos bibliográficos desarrollados por especialistas en didáctica de la matemática argentinos, en los que se pueden encontrar propuestas de enseñanza representativas del ambiente (2). Cabe señalar que este tipo de propuestas, que propician una participación activa de los alumnos, requieren de una predisposición especial del docente, que no puede controlar todos los resultados, construcciones y significados que los alumnos alcanzan a elaborar.

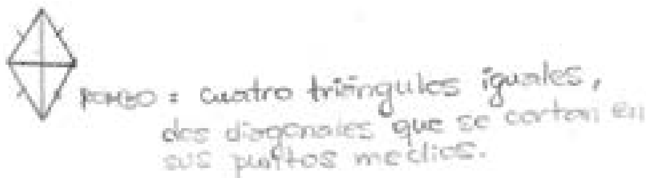
A modo de ejemplo, veamos una actividad planteada con el objeto de que los alumnos conjeturen, analicen y justifiquen propiedades de las diagonales de los paralelogramos (Götte, Renzulli y Scaglia, 2010). Un propósito central de la actividad, que excede la revisión de los contenidos geométricos involucrados, es introducir a los alumnos en el modo de argumentar característico de la matemática. Se solicita a los alumnos de segundo año de la escuela secundaria (que trabajan en grupos) que *escriban las condiciones que deben cumplir las diagonales de un cuadrilátero para que sea un cuadrado* (o un rombo o un rectángulo). En la resolución de esta consigna los alumnos ponen en juego el razonamiento plausible. Básicamente realizan observaciones y análisis de dibujos (hechos a mano alzada o con instrumentos de geometría) para elaborar hipótesis, examinarlas, hasta llegar a una solución que estiman adecuada. Luego se intercambian las producciones escritas entre grupos que han trabajado sobre los mismos cuadriláteros, y se pide ahora que cada grupo valore la producción de sus compañeros, a partir de la siguiente consigna: *pensar y dibujar cuadriláteros que no sean cuadrados pero que cumplan las condiciones escritas por sus compañeros*.

Cuando no existen cuadriláteros que satisfagan la última consigna, significa que las condiciones planteadas para las diagonales del cuadrado son las adecuadas. Si los alumnos, en cambio, logran dibujar cuadriláteros cuyas diagonales cumplen con las condiciones planteadas por sus pares, y sin embargo, estas figuras no son cuadrados, entonces han encontrado contraejemplos. En este último caso, el grupo que escribió las propiedades debe reformularlas, y así comienza de nuevo el ciclo, que culmina cuando no existen contraejemplos para las condiciones formuladas.

Veamos la producción de un grupo de alumnos que debía describir las condiciones que cumplen las diagonales de un cuadrado:

"Las diagonales de un cuadrilátero, para que éste sea cuadrado, deben cortarse en sus puntos medios. Luego de trazarlas quedan determinados cuatro triángulos iguales."

El grupo que debía buscar contraejemplos produce la siguiente respuesta:



Leyenda: "Rombo: cuatro triángulos iguales, dos diagonales que se cortan en sus puntos medios".

La figura encontrada constituye un contraejemplo adecuado. A partir del mismo, el primer grupo rehace las condiciones, y ahora escribe:

"Para que un cuadrilátero sea cuadrado:

* Sus diagonales deben cortarse en sus puntos medios.

* Deben ser iguales.

* Al trazarlas quedan determinados 4 triángulos iguales."

Estas condiciones son adecuadas. La condición de perpendicularidad de las diagonales es reemplazada por la determinación de cuatro triángulos iguales. El docente, en ese momento, debe evaluar la equivalencia (o no) de estas condiciones, y por eso señalamos anteriormente que este tipo de trabajo característico del ambiente (2), y en general de los escenarios de investigación, genera situaciones imprevistas para el docente, que debe estar dispuesto a mostrar ante los alumnos que, en ocasiones, no tiene una respuesta inmediata. Pensamos, no obstante, que ello es saludable, porque muestra la verdadera 'cocina' del trabajo matemático.

La siguiente consigna, siguiendo con el ejemplo propuesto, es *probar la propiedad enunciada.* En el caso que estamos mostrando, los alumnos produjeron la siguiente prueba:


Probar la propiedad enunciada.

Siguiendo las propiedades escritas podemos afirmar que dentro de esa figura se forma cuatro Triángulos Isósceles los cuales poseen un par de ángulos iguales, esto que en Total hay 8 ángulos iguales, dividiendo los 360° que debe sumar un cuadrilátero por 8, da como resultado 45° cada uno. Por lo tanto los ángulos interiores de este cuadrilátero van a medir 90°. Viendo que los cuatro Triángulos son iguales entonces sus lados También son iguales

Los alumnos prueban que el cuadrilátero cuyas diagonales cumplen las condiciones enunciadas es un cuadrado (demuestran que posee cuatro ángulos rectos y que sus lados son iguales).

Es evidente que los alumnos que han participado en esta clase están muy lejos de ser meros receptores de conocimientos. Al contrario, han adoptado un papel protagónico en la construcción de sus saberes, confrontando sus opiniones, emitiendo juicios sobre las producciones de sus pares y justificando las afirmaciones realizadas.

Con 'la excusa' de estudiar matemáticas se pueden generar espacios de discusión muy interesantes, donde los alumnos intercambien opiniones, defiendan sus ideas, aprendan a expresar argumentos y a defenderlos. Se debe dar lugar a la posibilidad de recuperar el aula como lugar de lo simbólico, de la palabra. Ello supone generar espacios (a partir de las propuestas) donde se anime a los estudiantes a poner en duda cada cosa que se presente, a aportar discusiones y explicaciones de los fenómenos, a criticar cada situación. Los alumnos deberán especular con la posibilidad de que las conjeturas sean ciertas o falsas, de un modo paciente, escuchando y respetando el punto de vista de otros (Almeida y Chamoso, 2001).

En el otro extremo de esta concepción está la enseñanza tradicional, donde los estudiantes están sentados en sus bancos, anotando en su cuaderno lo que dice el profesor y lo que éste escribe en el pizarrón, sin cuestionar la legalidad ni el sentido de las afirmaciones presentadas (Almeida y Chamoso, 2001):

> ésta es la manera de preparar ciudadanos antidemocráticos e inflexibles: antidemocráticos porque las personas aceptarán cualquier cosa que digan sus líderes en lugar de llegar a un juicio razonado a través de la reflexión crítica; inflexibles porque, ante la falta de pensamiento crítico, los ciudadanos no sabrán transferir sus habilidades de conocimiento a una situación diferente, ya sea en otro contexto social, cultural, o de otro tipo (Almeida y Chamoso, 2001; p.105).

8.5. Reflexiones finales

En este capítulo hemos presentado algunas de las ideas que consideramos más importantes de la Educación Matemática Crítica. Recurrimos profusamente, con mayor frecuencia de lo conveniente, al uso de citas del "padre" de esta corriente. A modo de disculpa y de justificación, podemos decir que uno de nuestros principales temores ha sido el de tergiversar los dichos, las asunciones y las convicciones de este lúcido y comprometido educador.

Entre las principales razones por las que seleccionamos este enfoque mencionamos la mirada crítica que adopta para la Educación Matemática, el grado de compromiso que asume con la problemática de la inclusión y la exclusión, y la mirada holística que propone, trascendiendo una reflexión circunscripta a la clase de Matemática, para reconocer otras dimensiones propias del entorno sociopolítico en el que estas clases se desarrollan.

Entre las cuestiones que propone, vislumbramos algunos elementos a tener en cuenta para pensar esa clase “imaginada” que proponemos en la Introducción. La utilización de escenarios de investigación proporciona la posibilidad de desarrollar el conocer reflexivo. La toma de conciencia de los distintos ambientes de aprendizaje y de la necesidad de alternar estos ambientes, permite involucrar a los estudiantes en una acción reflexiva. Finalmente, la atención de los porvenires de los estudiantes constituye un llamado de atención que debe atenderse si se espera promover la producción de significado.

Una idea principal que queremos subrayar para finalizar esta reflexión sobre el enfoque de la Educación Matemática Crítica, es el lugar privilegiado en el que sitúa al educador matemático. La afirmación de que están disponibles para ser actuados a través de la Educación Matemática tanto el rol de héroe como el de canalla, señala el compromiso que se plantea para los docentes, quienes debemos tomar conciencia de que las decisiones que adoptamos en la planificación de nuestro trabajo diario no son irrelevantes e inocuas. Cabe mencionar aquí unas palabras de Paulo Freire (2003; p. 56):

> Tenemos que recordar que la historia no empieza ni termina con nosotros. Creo que es necesario ser más humildes en relación a nuestra tarea histórica individual. […] Si humildemente sé que soy uno entre miles, que la historia no se acaba con mi muerte o mi generación, sino que sigue, entonces comprenderé que lo mínimo que pueda hacer siempre resultará útil.

Retomando las preocupaciones que motivaron este recorrido, estamos en condiciones de afirmar que avanzamos en el estudio de la compleja relación entre equidad y Educación Matemática. El conocimiento de esta complejidad no resuelve, por sí solo, el problema de la falta de equidad en Educación Matemática. Sin embargo, nos proporciona algunas ideas, esbozos de herramientas para comenzar a trabajar en pos de abordar este problema.

8.6. Referencias bibliográficas

Almeida, D. y Chamoso, J. M. (2001). ¿Existen lazos entre democracia y matemáticas? *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 28*, 100-109.

Bishop, A. (1988). Aspectos sociales y culturales de la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias 6(2)*, 121-125.

Bou, L. C. (2000). The new urban poor: the Tobas Indians. *Development in practice, 10(1)*, 71-76.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE-Horsori.

Clements, K. (2000). Matemáticas en la escuela: cuestiones de equidad y justicia. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (coords.) *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp.57-77). Barcelona: Col. Ice-Graó.

Ernest, P. (2010). The scope and limits of critical mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal* 25. Versión Online.

Freire, P. (2003). *El grito manso.* Buenos Aires: Siglo veintiuno editores Argentina.

Götte, M.; Renzulli, F. y Scaglia, S. (2010). El contraejemplo en la producción de conjeturas de propiedades geométricas. *Revista de Educación Matemática 25(1).* Trabajos de Investigación y Propuestas de Enseñanza-2009. Extraído el 2 de febrero de 2011 de http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_25/prop_01.pdf.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Kornblit, A.; Mendes Diz, A. y Adaszko, D. (2006). *Salud y enfermedad desde la perspectiva de los jóvenes. Un estudio en jóvenes escolarizados en el nivel medio en todo el país.* Buenos Aires: Instituto de Investigaciones Gino Germani, Facultad de Ciencias Sociales, UBA. (IIGG Documentos de Trabajo, Nº 47).

Moliner, M. (1996). *Diccionario de Uso del Español*. Madrid: Gredos.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. Sevilla: S.A.E.M. Thales.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada: S.A.E.M. Thales.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos, desafíos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Scaglia, S. y Nagel, M. (2008). La alfabetización matemática de jóvenes y adultos. *Novedades Educativas, 20(213)*, 86-90.

Secada, W.; Fennema, E. y Adajian, L. (1997). Introducción. En W. Secada, E. Fennema y L. Adajian (comps.) *Equidad y Enseñanza de las Matemáticas:*

nuevas tendencias (pp.15-19). Madrid: Ministerio de Educación y Cultura y Ediciones Morata.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Universidad de los Andes y Una empresa docente.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Ema 6(1)*, 3-26.

Skovsmose, O. (2004a). Mathematics in Action. *Philosophy of Mathematics Education Journal 18*. Versión Online.

Skovsmose, O. (2004b). *Critical mathematics education for the future*. Regular Lectures in the 10th International Congress on Mathematical Education. Extraído el 2 de febrero de 2011 de http://www.icme10.dk/pro ceedings/pages/regular_pdf/RL_Ole_Skovsmose.pdf

Skovsmose, O. (2008). Critique as Uncertainty. *Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI.* (Rome, 5–8 March 2008). Working group #3. Mathematics Education and Society. Extraído el 20 de noviembre de 2010 de: http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG3/ WG3.html

Skovsmose, O. (2010). Mathematics: A Critical Rationality? *Philosophy of Mathematics Education Journal 25*. Versión Online.

Skovsmose, O., Alrø, H. y Valero, P. (2008). Antes de dividir, se tiene que sumar. 'Entre-vistar' porvenires de estudiantes indígenas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática 1(2)*, 111-136.

Skovsmose, O. y Valero, P. (2007). Educación matemática y justicia social: hacerle frente a las paradojas de la sociedad de la información. En J. Giménez, J. Díez-Palomar y M. Civil (coords.) *Educación matemática y exclusión* (pp.45-61), Barcelona: Graó.

9
Epistemología Genética

Myriam Ortiz Hurtado

9.1. Introducción

En este capítulo presentamos algunos aspectos del Programa de Investigación de AprendEs[30] y del desarrollo que ha tenido. Iniciamos con una observación respecto del título del capítulo. Consideramos que un título que se ajusta más al contenido aquí presentado sería "Indagación didáctico matemática en una perspectiva escolar derivada de la Epistemología Genética". Sin embargo, abusando del lenguaje, hemos optado por hacer referencia a la *Epistemología Genética*, con el fin que se entienda como el enfoque aquí presentado. Esperamos que lo planteado sea un aporte para los profesores formadores de profesores y maestros; y para los investigadores en Educación Matemática.

El capítulo lo hemos organizado en seis partes que tratan respectivamente los aspectos siguientes: una breve presentación de AprendEs; el marco teórico en que se apoya la investigación; el problema que se aborda y los resultados a obtener; la metodología de indagación y la metodología en la formación de los maestros; el acompañamiento desde la investigación a los maestros, en sus intentos iniciales de cambio; y resultados de investigaciones sobre iniciación a la aritmética.

[30] Centro de investigación y de Estudios sobre el Aprendizaje Escolar.

9.2. Presentación de AprendEs

El Centro de Investigación y de Estudios sobre el Aprendizaje Escolar, AprendEs, es una institución sin ánimo de lucro creada en noviembre de 1999. Cuenta con una trayectoria de estudio acerca del aprendizaje escolar de las Matemáticas y la formación de los maestros de más de 25 años, a la cual han estado vinculados la mayoría de los actuales integrantes, bajo la orientación de la directora. Esta trayectoria investigativa se inicia con el análisis y revisión crítica de la actividad docente del maestro de Matemáticas y de los deficientes resultados de la misma y ha logrado mantenerse hasta hoy con el concurso de estudiantes y maestros estudiosos[31].

En este ámbito hemos gestado y desarrollado la línea de investigación que aquí se presenta. Aunque la concebimos como una línea de investigación –y no es común que en la formación de profesores en Argentina se estudien cuestiones metodológicas propias de diversas líneas de investigación– consideramos valioso que los formadores de maestros y, a partir de ellos, los estudiantes del profesorado logren un acercamiento a ella, pues les permite conocer un enfoque nuevo y, si lo consideran pertinente, seguir estudiando y transitándolo durante su desempeño profesional.

9.3. Marco teórico derivado de la Epistemología Genética

El Programa de Investigación de AprendEs se orienta por un marco teórico derivado de la Epistemología Genética, el cual comprende los aspectos siguientes:

1. Un análisis crítico de la enseñanza tradicional de las Matemáticas, y el soporte filosófico de la misma así como de las características de los elementos que en ella intervienen y de las relaciones que se establecen entre estos elementos.
2. Una postura epistemológica explícita respecto del conocimiento y el aprendizaje escolar y una interpretación dentro del contexto escolar de los planteamientos de: cómo es posible conocer, de dónde proviene el conocimiento y cómo se pasa de un estado a otro de mayor conocimiento.

[31] En este documento nos referimos a los maestros y profesores de Matemáticas como maestros, sin hacer discriminación entre los del nivel de primaria y de secundaria. Igualmente, la escuela es la institución educativa en general, donde se forman los niños y/o los jóvenes, sin hacer diferencia por nivel o características específicas de las instituciones.

3. Una serie de elaboraciones en las que se introducen y fundamentan nuevas expresiones, se explicita y precisa el significado de algunas existentes y se resignifican otras actuales en el ámbito educativo, atendiendo a la determinación que del significado de las mismas se tiene a partir de la concepción epistemológica asumida.

9.3.1. Análisis crítico de la enseñanza tradicional

Se entiende por enseñanza tradicional la forma más generalizada de enseñar, la de mayor tradición y arraigo social y cultural, la que suponen debe ser, tanto los maestros, como los alumnos, los padres de familia y las autoridades educativas. Enseñanza tradicional, ejercida en la "institución educativa" que desde sus orígenes tiene la función "de transmitir conocimientos" (Ortiz, 1990a, 1995a, 1999a).

De acuerdo con esta función se han determinado de manera coherente los elementos fundamentales de la educación escolar, sus características y relaciones. Para la enseñanza de las Matemáticas estos elementos se pueden describir de la manera siguiente:

- Maestros de Matemáticas formados para que cumplan la función de enseñar transmitiendo conocimientos elaborados por otros, y la función de evaluar a sus alumnos según los resultados que obtengan a partir de lo enseñado. Docentes en lo fundamental expositores, que responden eficientemente por la enseñanza y ejercen una profesión eminentemente práctica que los distancia de la actividad intelectual.

- Conocimientos matemáticos escolares que provienen de otros conocimientos elaborados por estudiosos de las Matemáticas; los cuales por razones no explícitas, o no siempre conocidas por los maestros, han sido convertidos en contenidos a enseñar y a pesar de las reformas, se mantienen y transmiten sin mayores modificaciones.

- Alumnos que aprenden por repetición algoritmos y técnicas para resolver ejercicios y problemas escolares de Matemáticas. Aprendizaje que según Piaget no se constituye en conocimiento. Se reduce a obtener "datos" que en el mejor de los casos se convierten en "información o datos procesados" que el alumno aplica por transferencia a los contextos en que se le requiera.

- Recursos tales como: textos, materiales, tecnologías avanzadas, métodos y condiciones particulares de cada escuela, que son eficientes para la enseñanza. Homogéneos, únicos, determinados de antemano, que facilitan la enseñanza y posibilitan mayor cobertura. Facilitan el "hacer del maestro" y son objeto de estudio de la didáctica entendida como metodología de la enseñanza (Hernández y Ortiz 1993, 1999b).

- Enseñanza homogénea descontextualizada de la actividad cotidiana del estudiante, la práctica colectiva de su entorno, y de las exigencias y proyecciones sociales. Enmarcada en valores tradicionales como la meritocracia y la evaluación. A todos los alumnos se los trata de la misma manera, se les dan las mismas posibilidades y se les plantean las mismas exigencias. Los méritos individuales justifican la desigualdad de los resultados.
- La evaluación como el mecanismo por el cual se califica o descalifica al estudiante. Es diseñada y aplicada por el maestro al terminar de desarrollar cada unidad del programa, o al final de cada bimestre, o del año escolar. Es el instrumento de medición, de lo que el maestro supone debió aprender el alumno. Constituido por pruebas homogéneas en las que lo importante es la memoria y la transferencia de conocimiento, al replicar enunciados, teoremas o demostraciones, o al resolver ejercicios o problemas escolares de Matemáticas. En general el buen estudiante es aquel que resuelve los ejercicios y problemas del libro, o los propuestos por el maestro.
- Enseñanza con metas no explicitadas claramente, desconocidas y por lo tanto no compartidas por los alumnos y los maestros. Los maestros ubican la razón de la enseñanza en las exigencias de conocimientos de los niveles superiores de la escolaridad. Y los alumnos la razón de ir a la escuela en las exigencias, deseos y recomendaciones de los adultos que les facilitan la asistencia a la escuela y en las posibilidades de ascenso en la escala social. El aprendizaje no es una necesidad ni una responsabilidad personal de la cual se benefician alumnos y maestros.

Considerar que la función del maestro es transmitir conocimiento y evaluar los resultados que se espera obtener y que las Matemáticas son objeto de enseñanza más que objeto de aprendizaje, convierte la acción del maestro y los contenidos que enseña, en el centro de la actividad en el aula.

La didáctica en este esquema es una técnica que se ocupa de la transmisión eficiente de los conocimientos, de la optimización de los recursos y de la actividad del maestro. El problema de la didáctica es mejorar la enseñanza y su objeto de estudio son los "haceres del enseñante": la transmisión, la evaluación, la motivación y el uso de recursos y métodos que mejoren la exposición por parte del maestro y faciliten la comprensión de los alumnos.

Maestros, contenidos a enseñar, formas de trabajo en el aula, recursos, formas de evaluar son los elementos determinantes de la enseñanza. Si bien los alumnos están presentes sólo cumplen la función de receptores.

Las características y relaciones entre estos elementos están determinadas por la función que cumplen en la escuela y se justifican en una concepción, explícita o no, de la escuela y el conocimiento, derivada del positivismo lógico (Ortiz, 1999c) en lo filosófico y del conductismo en lo psicológico.

La enseñanza se ha convertido en un sistema paradigmático de concepciones, creencias, comportamientos y actitudes inducidos por la experiencia y los conocimientos anteriores; sistema articulado y coherente, que da respuesta a la mayoría de los problemas de la enseñanza, pero que ha sido poco eficiente en cuanto al aprendizaje por parte de los estudiantes.

En el sistema de la enseñanza tradicional, el aprendizaje como proceso de construcción de conocimientos no tiene cabida. Éste no es responsabilidad de los maestros, ni de los estudiantes. Para los maestros, los estudiantes no aprenden Matemáticas por razones como las siguientes: no saben lo que deberían saber de los cursos anteriores; no hacen las tareas, no se interesan, no tienen facilidades, en la casa no les colaboran, no tienen el libro, tienen problemas de desnutrición, no estudian, etc. Y según los estudiantes, ellos no aprenden Matemáticas porque no les gustan, son muy difíciles, no tienen facilidad para ellas, el profesor no explicó bien, les tiene rabia, no consiguieron el libro, mi papá tampoco las aprendió, etc.

Las concepciones epistemológicas en que se apoyan por un lado la transmisión de conocimientos y por otro el aprendizaje como proceso de construcción son incompatibles. También los son las características de los elementos que intervienen y determinan el aprendizaje en una y otra concepción, las relaciones entre estos elementos y las normas institucionales que los regulan (Ortiz, 1990a; 1994a; 1999b).

Entender la escuela tradicional como un sistema coherente y articulado, e identificar lo que ha sido la enseñanza para el aprendizaje de parte de los estudiantes, permite asegurar que transformar la educación tradicional no es tarea fácil. Se requiere no sólo conocerla en profundidad e identificar sus deficiencias, sino elaborar a través de la investigación otro sistema alternativo, articulado e igualmente coherente que muestre en las prácticas educativas escolares ser más eficiente respecto del aprendizaje y desarrollo de los estudiantes (Furió, 1994). Con el fin de aportar en esta tarea se hace investigación por parte del gruo de AprendEs.

9.3.2. Interpretación del legado de la Epistemología Genética

La Epistemología Genética da una explicación a problemas centrales del conocimiento. Fue formulada como teoría epistemológica por Piaget, a partir las elaboraciones logradas por el mismo, respecto del comportamiento del individuo y el desarrollo de la inteligencia, las cuales plasmó en la Psicología Genética.

Por tanto, recurrir a la propuesta epistemológica de Piaget como marco teórico para fundamentar la opción de construcción de conocimiento en el aula, exige una interpretación en términos de los contextos y situaciones escolares, de los planteamientos de la misma, respecto de los interrogantes siguientes: cómo es posible conocer, cómo se pasa de un estado a otro de mayor conocimiento, de dónde proviene el conocimiento y qué carácter tiene el conocimiento construido (Ortiz, 1999b).

A lo largo de este documento se utiliza con frecuencia la expresión construcción de conocimiento escolar o proceso de aprendizaje, con la cual se da una interpretación en términos escolares a la concepción epistemológica del conocimiento desarrollada por Piaget. En esta interpretación se asumen los siguientes fundamentos:

a) La actividad significativa del sujeto es la fuente de su conocimiento. Actividad significativa en el sentido que, para el diseño de la misma tiene en cuenta el conocimiento que posee el aprendiz, el entorno en que se desempeña y la experiencia y práctica cotidianas de ese entorno. Y en el sentido que es una actividad pertinente para el aprendizaje que se pretende y para las condiciones de aprendizaje del aprendiz.

b) El conocimiento es aprendizaje obtenido a través de procesos de construcción. Como tal es posibilitado por los conocimientos anteriores y las estructuras mentales que posee el individuo. Se aprende a partir de la actividad y reflexión individual y colectiva y de la confrontación social. En los procesos de aprendizaje, el conocimiento y el individuo que aprende se construyen mutuamente. El aprendizaje, como proceso de construcción de conocimiento posibilita cada vez un mejor diálogo con el objeto de aprendizaje y la respuesta a mayor cantidad de preguntas respecto del mismo. Igualmente sugiere y posibilita nuevos conocimientos y nuevas preguntas.

c) El conocimiento elaborado se constituye en la organización del mundo de las experiencias, es consistente y viable y en cada momento se corresponde con las formas de pensamiento del individuo y con su actividad cotidiana.
d) El maestro es la persona que por su mayor experiencia y formación es responsable de: diseñar, proponer y orientar el desarrollo de las actividades de aprendizaje; generar y mantener en el aula condiciones de acción y comunicación que permitan la realización de éstas y la confrontación de los resultados.

La propuesta de construcción de conocimiento de la Epistemología Genética (Piaget y García, 1982) plantea a la escuela la opción de una educación centrada en el aprendizaje, que integre de manera coherente los elementos que intervienen y determinan los procesos de construcción de conocimiento escolar, con la meta de realización humana, individual y colectiva que se pretende para estudiantes y maestros.

Los elementos determinantes del aprendizaje como proceso de construcción, si bien tienen la misma denominación de los que intervienen en la enseñanza, se caracterizan, ponderan y relacionan entre sí, de manera diferente. En primera instancia, son determinantes de los procesos de aprendizaje escolar los estudiantes, sus conocimientos y desarrollo, y sus maneras de aprender. Una prefiguración de las características de los estudiantes y de los demás elementos que definen estos procesos, en una escuela centrada en el aprendizaje, es la siguiente:

- Maestros formados para orientar el aprendizaje en el aula y responder solidariamente por él, que sean profesionales de la docencia y se comporten como académicos por formación y convicción (Mockus, 1992).
- Estudiantes que aprenden a partir de las actividades que realizan y del análisis y confrontación de las mismas, que confían en sí mismos, se comprometen y responden por su aprendizaje.
- Contenidos escolares que establecen lo necesario, posible y pertinente de aprender durante la escolaridad, de acuerdo con: las demandas lógicas, históricas, epistemológicas y psicológicas de los conocimientos matemáticos escolares y del conocimiento y desarrollo de los estudiantes; las demandas didácticas y socio culturales debidas al aprendizaje como proceso de construcción, a las exigencias y las posibilidades del individuo y el contexto, y a la pertinencia respecto de estos elementos.

- Recursos eficientes para el aprendizaje, que corresponden a las diversas maneras de aprender de los estudiantes y a las necesidades de cada momento específico de aprendizaje.
- Formas de trabajo en el aula que propician el desarrollo de actividades y la elaboración individual y colectiva, así como la confrontación y argumentación racional.
- Formas de evaluar que permiten revisar y ajustar oportunamente las actividades, y la manera de actuar de los participantes, con el fin de mejorar los procesos individuales y colectivos de aprendizaje en el aula.
- Y objetivos que establecen como propósito del quehacer del maestro y de los estudiantes en el aula, el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento, como parte fundamental del desarrollo integral de los individuos y sus comunidades.

Al cambiar la función del maestro de transmisor de conocimientos, por la de *orientador de aprendizaje* y la del estudiante de receptor de información por la de *actor y autor* de su propio aprendizaje, debe cambiar necesariamente la formación del maestro y la responsabilidad frente al aprendizaje tanto del maestro como de los estudiantes.

Igualmente la didáctica en esta concepción deberá centrarse en el problema de los "saberes del aprendizaje", entendidos como los saberes que desde diferentes disciplinas posibilitan dicho aprendizaje, dando soporte teórico y práctico al maestro para el diseño de actividades a proponer a los estudiantes y para la orientación en el aula del desarrollo de las mismas.

9.3.3. Elaboraciones propias y resignificación de términos

Parte de la consolidación de la línea de investigación que estamos describiendo se ha dado por la fundamentación teórica de la misma, lograda durante el proceso de indagación. Para esta fundamentación ha sido necesario precisar a qué nos referimos, desde la perspectiva epistemológica en que trabajamos, con cada una de las expresiones que ha sido necesario introducir y/o resignificar. Actualmente se cuenta con una elaboración teórica que da cuenta del significado de expresiones como las siguientes:

- "maestros orientadores de aprendizaje" y "orientación de aprendizaje en el aula";

- "aprendizaje escolar como proceso de construcción", "actividades de aprendizaje significativas", "recursos y formas de trabajo pertinentes para el aprendizaje";
- "didáctica del aprendizaje de las Matemáticas"; "análisis didáctico como mecanismo de investigación", "niveles de complejidad lógica de un concepto matemático" y "niveles de complejidad didáctica de un conocimiento matemático escolar", "redes de complejidad didáctica", "nodos y conexiones que constituyen una red";
- "conocimientos cotidianos", "conocimientos prácticos", "nociones" y "conceptos"; "conocimientos necesarios, posibles y pertinentes de aprender durante la escolaridad"; "Matemáticas como disciplina, como conocimientos socialmente aceptados y exigidos y como conocimientos prácticos cotidianos";
- "el taller como forma de trabajo que posibilita la reelaboración y/o construcción de conocimiento en el aula".

El análisis de la enseñanza de las Matemáticas y de la concepción de conocimiento en que se apoya, la identificación de las principales deficiencias, así como el estudio sistemático de la Epistemología Genética y la interpretación en términos de contextos y situaciones escolares, de la concepción constructivista del conocimiento desarrollada por Piaget, nos condujo a conocer y comprender la enseñanza habitual y la necesidad de su transformación y a identificar las posibilidades y exigencias que la necesidad de transformación de la misma plantean a la investigación.

9.4. Problema a abordar y resultados esperados de la investigación

Con un conocimiento y comprensión básica de la enseñanza habitual, se precisó el problema a resolver durante la investigación. En la perspectiva de una escuela centrada en el aprendizaje, el propósito de la investigación que desarrollamos es contribuir a generar condiciones que posibiliten la construcción de conocimiento matemático en el aula. Estas condiciones son concernientes a la formación de los maestros y la transformación de las formas de trabajo en el aula.

Se pretende generar conocimiento en cuanto a la formación matemática y didáctica que requieren los maestros orientadores de aprendizaje y en cuanto a la formación práctica profesional que les exige este nuevo rol, en el aula. ¿Qué deben aprender los maestros y cómo lo deben aprender para lograr idoneidad académica y habilidad práctica que les permitan orientar el aprendizaje de las Matemáticas escolares? Este problema exige resolver de manera paralela el problema de identificar los conocimientos necesarios, posibles y pertinentes de aprender por los niños y jóvenes durante la escolaridad. Lo necesario de aprender, de acuerdo con la complejidad lógica y didáctica de los conocimientos, la exigibilidad social y las condiciones y posibilidades de los estudiantes. Lo posible, de acuerdo con la complejidad didáctica de los conocimientos matemáticos escolares, las condiciones y posibilidades de los estudiantes, y las posibilidades y exigencias del entorno. Y lo pertinente, según la especificidad de cada contexto, las exigencias y proyección de los estudiantes en su entorno y las condiciones y posibilidades de unos y otros.

Lo que un maestro necesita saber para orientar el aprendizaje en el aula, depende de lo que se quiera que aprendan los estudiantes. Por tanto, se pretende además generar conocimiento didáctico respecto de los conocimientos matemáticos a aprender en la escuela, la complejidad didáctica de estos y las posibles secuencias de aprendizaje de los mismos. ¿Qué es lo mínimo indispensable que hay que aprender de Matemáticas durante la escolaridad? ¿Qué niveles de complejidad didáctica tienen los conocimientos a aprender y qué secuencias probables de aprendizaje se pueden identificar?

Establecido lo que podrían aprender los estudiantes y lo que deberán aprender los maestros, se pretende también obtener conocimiento debidamente documentado acerca de cómo y qué aprenden de Matemáticas y didáctica los maestros y qué proyectan a su trabajo en el aula. Igualmente se obtendrá conocimiento acerca de las posibilidades de influir desde la investigación, en la transformación de las formas de trabajo en el aula.

En una etapa avanzada de la investigación, contando con maestros formados dentro de la propuesta de orientación de aprendizaje y con instituciones que faciliten y apoyen los procesos de cambio que emprendan los maestros en el aula, se obtendrán conocimientos igualmente documentados, acerca de los procesos de aprendizaje de las Matemáticas escolares, por parte de los estudiantes de diferentes instituciones y niveles.

Los avances obtenidos en torno a los problemas abordados en la investigación, así como la descripción detallada de la metodología, etapas y fases, pueden verse en los informes de investigación de los proyectos desarrollados, a partir de la creación de AprendEs[32].

---

[32] Ver informes de investigación en la biblioteca de Colciencias, Bogotá, códigos No. 33-11-11535, 1142-11-14060 No. 3318-11-14526 y Ortiz (2005).

Considerando que hemos hecho un recorte para esta presentación, queremos poner énfasis en algunos resultados y mencionar algunas pautas metodológicas que entendemos ofrecen lineamientos a tener en cuenta en los intentos de cambio en la forma de trabajo del maestro de Matemáticas.

9.5. Metodología y algunas pautas para el trabajo con docentes

La metodología a que hacemos referencia comprende dos partes. Una relacionada con el cómo se desarrolla la investigación y otra referida a la forma de trabajo que se adopta durante el desarrollo de los programas de formación de los maestros. La forma de trabajo que utilizamos para la formación de los maestros es coherente con lo que se pretende haga el maestro en el aula.

9.5.1. El análisis didáctico como mecanismo metodológico de indagación

Con una interpretación en términos escolares de la propuesta de la Epistemología Genética y los aportes de otras disciplinas acerca del comportamiento y formas de aprendizaje del individuo y las comunidades, hemos establecido elementos fundamentales que intervienen y determinan los procesos de construcción de conocimiento matemático en la escuela. El estudio de estos elementos y del conocimiento matemático a aprender durante la escolaridad, es el objeto de la Didáctica de las Matemáticas en esta perspectiva. El mecanismo de indagación que nos ha permitido avanzar en este estudio didáctico matemático, es el que hemos denominado "análisis didáctico".

A través del análisis didáctico se han determinado: los conocimientos matemáticos necesarios, posibles y pertinentes de aprender por los estudiantes durante la escolaridad y las probables secuencias de construcción de los mismos; los conocimientos matemáticos, didácticos y profesionales requeridos por el maestro para orientar el aprendizaje en el aula y las posibles actividades de aprendizaje a desarrollar por los maestros a través de programas de formación; así como posibles actividades a proponer a los estudiantes en el aula.

Lo necesario de aprender de Matemáticas en la escuela es en principio el conocimiento matemático que ha sido aceptado y exigido socialmente como tal, para el desarrollo y desempeño del individuo y la sociedad en cada época.

Lo que se debe enseñar de Matemáticas en la escuela, se ha establecido de alguna manera respondiendo a la exigencia social, pero no corresponde a lo necesario, posible y pertinente de aprender por los estudiantes teniendo en cuenta: la necesidad lógica y didáctica; la posibilidad psicológica, epistemológica y de contexto del individuo; y la pertinencia para el individuo mismo, el entorno y la sociedad.

Eso que se debe enseñar se da a conocer, en el currículo escolar, a través de enunciados que se refieren en unos casos a nociones, conceptos y procedimientos matemáticos; en otros a logros que se esperan obtener o a competencias por desarrollar. Sin embargo, lo que es necesario, se puede y es pertinente aprender, no ha sido determinado. Aportar con este conocimiento es una de las metas de AprenEs.

Para establecer lo necesario y pertinente de aprender de Matemáticas, es preciso:

- Determinar y comprender los conceptos matemáticos de los que se derivan los conocimientos socialmente aceptados y exigidos.
- Identificar los niveles de complejidad lógica de éstos, la génesis (o posible génesis) y los diferentes niveles de elaboración que han tenido.
- Intuir las situaciones, conocimientos y formas de pensamiento que posibilitaron la elaboración de una noción o concepto matemático y los conocimientos y formas de pensamiento que a la vez fueron posibles, a través de la historia, a partir de las diferentes elaboraciones de tales nociones y conceptos.

Para determinar lo posible y pertinente de aprender durante la escolaridad se requiere:

- Conocer y comprender los niveles del desarrollo del pensamiento y de las formas de conocer de los individuos, los logros de cada nivel y la manera como se integran estos logros a otros niveles de mayor conocimiento y desarrollo.
- Identificar las exigencias del entorno y la práctica colectiva en el mismo; la experiencia individual cotidiana escolar y no escolar, los conocimientos y el desarrollo de pensamiento logrados por esta experiencia.
- Establecer la proyección académica y social deseable para los estudiantes y maestros y la relación de estos elementos con el aprendizaje escolar.

Teniendo como recursos las Matemáticas escolares a enseñar; las Matemáticas como disciplina, su historia y epistemología, la psicología genética y la antropología, la observación y conocimiento del entorno y la exploración de actividades de aprendizaje con niños y maestros; con el análisis didáctico ha sido posible estudiar, además de los aspectos mencionados, lo siguiente:

1. Esquematizar en redes de complejidad didáctica, las nociones y conceptos matemáticos necesarios y posibles de aprender y los conocimientos, saberes, actividades y experiencias cotidianas que se relacionan con esas nociones y conceptos.
2. Organizar en redes de complejidad didáctica las nociones y conceptos matemáticos posibles y pertinente de aprender y los conocimientos, saberes, actividades y experiencias cotidianas que se relacionan con esas nociones y conceptos.
3. Establecer a partir de las redes de complejidad lo necesario de aprender en un nivel específico de escolaridad, atendiendo a la complejidad lógica y al carácter acumulativo del conocimiento matemático.
4. Identificar el tipo de actividades y formas de pensamiento que podrían facilitar el aprendizaje de estas nociones y conceptos y a la vez las actividades y formas de pensamiento que el aprendizaje de los mismos posibilita.
5. Identificar los conocimientos iniciales, saberes, actividades, experiencias y expresiones cotidianas de los estudiantes y los maestros que los aproximan a (o distancian de) los conocimientos matemáticos a aprender. Ampliar con éstos las redes de complejidad.

Algunas de las tareas que se realizan durante el análisis didáctico son las siguientes:

- El estudio de las nociones y conceptos matemáticos involucrados en el currículo escolar y la identificación de los conocimientos matemáticos que les son prerrequisito.
- La exploración crítica en la historia de las Matemáticas, del surgimiento y evolución de esas nociones y conceptos, de sus prerrequisitos y de otros conocimientos que han estado relacionados con unos y otros.
- El análisis de las posibles situaciones, conocimientos y formas de pensamiento que posibilitaron el desarrollo de éstos.
- La determinación de las expresiones del lenguaje, las situaciones, experiencia y conocimientos cotidianos que aproximan y respectivamente distancian de las nociones y conceptos necesarios de aprender.
- La observación y análisis del entorno en que se desempeñan estudiantes y maestros, de las actividades y experiencias cotidianas en ese entorno y de las exigencias del mismo.
- El estudio y análisis de la proyección académica y social, deseable para los estudiantes.

- El diseño y exploración con maestros y estudiantes de actividades aprendizaje.
- La observación y análisis de las formas de aprendizaje, los niveles de desarrollo y los conocimientos iniciales, que los estudiantes y los maestros ponen en evidencia durante el desarrollo de las actividades de aprendizaje.
- La elaboración de redes de complejidad.

Todo lo anterior y lo observado durante la exploración es determinante para adecuar las actividades de aprendizaje, estructurar programas de formación, identificar probables secuencias de construcción y establecer propuestas curriculares de Matemáticas, así como para fijar las categorías de análisis que permiten dar cuenta de lo observable del proceso de aprendizaje de los maestros y los estudiantes y las posibilidades de incidir en la transformación de las formas de trabajo en el aula.

9.5.2. La formación de los maestros

Por considerar que el aspecto central del programa de investigación es el de incidir en la formación de los maestros, hemos querido incorporar en este texto un apartado acerca de las características de los programas de formación que se obtienen como resultado de la investigación.

Los programas de formación de maestros se diseñan a partir de identificar los conocimientos matemáticos que se quiere que aprendan los estudiantes y los conocimientos matemáticos, didácticos y profesionales que requieren los maestros. Con una aproximación inicial a estos conocimientos se inicia el proceso de diseño y exploración –con diferentes grupos de maestros y también de estudiantes– de actividades de aprendizaje de los conocimientos matemáticos escolares. Durante el trabajo con los diferentes grupos se evalúan y adecuan, una y otra vez, las actividades propuestas.

A partir de los resultados con los diferentes grupos se identifican actividades básicas para la reelaboración o aprendizaje de dichos conocimientos y se integran en una propuesta de programa de formación.

Un ejemplo de actividades básicas diseñadas en AprendEs, que constituyen un programa de formación en aritmética, dirigido a maestros, son las siguientes:

Actividades relacionadas con los sistemas de numeración en diferentes bases, que comprenden tareas como: agrupar y reagrupar cantidades discretas, expresar reagrupamientos verbalmente, con gráficos y con los símbolos propios de cada base. Contar, enumerar y hacer cálculos a partir de diferentes reagrupamientos;

análizar la relación de los reagrupamientos, con los diferentes sistemas de numeración y las operaciones aritméticas; analizar los algoritmos de las operaciones y la justificación aritmética de los mismos y analizar la conveniencia o no de introducirlos como parte del aprendizaje escolar.

Los programas de formación se desarrollan con una metodología que hemos denominado y fundamentado como el Taller de reelaboración de conocimientos (Ortiz, 1995c y 1999a y Torres, Moreno y Ortiz, 1995). Esta metodología le permite al maestro vivenciar en su rol de estudiante, procesos de aprendizaje de las Matemáticas escolares basados en su propia actividad y reflexión y en la confrontación con los demás.

Los programas de formación derivados de la indagación se organizan en tres partes consecutivas. En el desarrollo de cada parte, los maestros reelaboran conocimientos didácticos y matemáticos que corresponden a aspectos fundamentales de su ejercicio profesional.

En la primera parte, el trabajo de formación se centra en los conocimientos matemáticos de los maestros y en la reflexión acerca de su actividad docente y los resultados de la misma.

En la segunda parte se privilegia el diseño, por parte de los maestros, de actividades de aprendizaje y la orientación en el aula del desarrollo de las mismas, así como el estudio y adecuación del programa escolar del curso a su cargo. En esta parte del programa de formación, los maestros estudian el programa de Matemáticas del curso a su cargo y adecuan algunos temas del mismo, de modo que sea posible desarrollarlos a través de actividades de aprendizaje, diseñadas por ellos. Diseñan actividades referidas a los temas escogidos y orientan el desarrollo de las mismas en el aula. Durante este período en que los maestros ponen a prueba sus aprendizajes y habilidades para hacer cosas diferentes en el aula, los investigadores hacen exploración acerca de los resultados del programa de formación. ¿Qué de lo reaprendido y discutido durante la formación de los maestros, trasciende inicialmente hasta el aula? es la pregunta que centra la mirada de los investigadores. A la par con la observación y el análisis del trabajo del maestro, los investigadores ponen a prueba los mecanismos de seguimiento a la actividad en el aula.

La tercera parte del programa de formación se centra en la asesoría y acompañamiento al maestro en los procesos iniciales de transformación de sus formas de trabajo en el aula.

9.6. Descripción de la etapa de indagación, centrada en el acompañamiento y asesoría al trabajo del maestro en el aula

Si los maestros deciden iniciar de manera sistemática la transformación de su forma de trabajo en el aula, continúan vinculados al programa de formación recibiendo asesoría y acompañamiento hasta tanto consideren que tienen la formación necesaria para asumir de manera autónoma dicho proceso. Los maestros que optan continuar con la tercera parte del programa de formación, elaboran durante ésta una propuesta de programa de Matemáticas para el curso en que trabajan y diseñan actividades de aprendizaje básicas. Esta propuesta de programa y las actividades diseñadas se someten a prueba por los mismos maestros durante un año escolar. Los investigadores acompañan este proceso asesorando en el estudio del programa, así como en el diseño de las actividades, la orientación del desarrollo de éstas en el aula, la evaluación y adecuación de las mismas y en la interpretación y análisis de lo que sucede en el aula y de lo que hacen y aprenden los estudiantes.

En esta etapa los investigadores –durante la fase de estudio y elaboración teórica– además de continuar el análisis didáctico, analizan los temas a desarrollar por los maestros y la manera como podrían abordarlos desde una propuesta de orientación de aprendizaje; identifican los prerrequisitos de conocimiento que esos temas demandan de los estudiantes y las posibilidades de integrarlos a los temas a trabajar por los maestros en el aula; diseñan actividades de aprendizaje para los maestros y se estudian posibles diseños de las actividades de aprendizaje para el aula. La reflexión teórica en esta fase es de carácter didáctico y atiende a los aspectos pedagógicos, culturales, psico-genéticos, epistemológicos y matemáticos, que están en juego en el aula durante la orientación del desarrollo de las actividades de aprendizaje.

La fase de exploración de esta etapa de acompañamiento al maestro se desarrolla en dos sentidos. Una exploración que hace el maestro mismo y que le aporta a su formación profesional, en la cual pone a prueba las actividades de aprendizaje que diseña, la forma como puede orientar el desarrollo de las mismas en el aula y de la observación y análisis de lo que pasa con su grupo de estudiantes y con él mismo en este nuevo rol de orientador.

Y otra, la exploración que hacen los investigadores del tipo de orientación que hacen los maestros, los conocimientos matemáticos y didácticos que trascienden al aula y ponen de manifiesto en el diseño de las actividades, en la orientación del desarrollo de las mismas, en la interpretación y evaluación de lo que hacen los estudiantes y de lo sucedido en el aula. También se incluyen los mecanismos de seguimiento al trabajo del maestro en el aula; los instrumentos de recolección de la información, la organización y análisis de la misma.

El análisis en esta fase se centra en los conocimientos matemáticos, didácticos y profesionales que los maestros ponen de manifiesto tanto en el diseño como en la orientación del desarrollo de las actividades en el aula.

En la fase de experimentación se hace el seguimiento sistemático y análisis cualitativo del trabajo del maestro en el aula, atendiendo al manejo y comprensión de los conocimientos reelaborados, a las actividades que diseñan, a la forma como orienta el desarrollo de las mismas, interpreta y evalúa lo que hacen y aprenden los niños.

9.7. Algunos resultados de la investigación acerca de la iniciación en la aritmética

En el trabajo de indagación realizado acerca de la iniciación en la aritmética (Ortiz, 1999c) se obtuvo como resultado una propuesta de programa de formación para maestros de preescolar y primer grado de primaria. Se trata de un programa tendiente a posibilitar la reelaboración de las nociones de cantidad, conservación de cantidad, número cardinal, orden, serie numérica y conteo; y de los conocimientos que se relacionan con estas nociones los cuales, de acuerdo con Piaget, son prerrequisito de las mismas.

Mencionamos aquí algunas observaciones y conclusiones obtenidas durante la indagación, al desarrollar con maestros el programa de formación, incluyendo acompañamiento para el diseño y orientación del desarrollo de sólo dos o tres actividades en el aula.

El trabajo en forma de taller, a través del cual se desarrolla el programa de formación, enfrenta a los maestros a situaciones de aprendizaje totalmente nuevas y les genera al principio muchas inquietudes, dudas e interrogantes de los cuales se tuvo evidencia durante la experimentación.

Con respecto a la forma de trabajo establecida y el proceso de aprendizaje de los maestros se observó:

1. La integración de los maestros a la nueva forma de trabajo es paulatina, algunos alcanzan un nivel aceptable de autonomía en el desarrollo de las actividades y de compromiso individual y de grupo con su proceso de formación, otros sin embargo no.

2. Al principio no identifican con facilidad lo que aprenden a partir de la reflexión y actividad individual y de grupo. Consideran la falta de precisión en las discusiones iniciales como improcedente para el aprendizaje. Reclaman con frecuencia que se les den indicios de si sus realizaciones y aportes son o no acertados. Asumen como necesario para su aprendizaje que el orientador (maestro para ellos), enuncie la conclusión o elaboración a que deben llegar.
3. En la medida que se avanza en el proceso logran mayor comprensión y se empiezan a identificar con la forma de trabajo utilizada, incluso consideran que puede ser apropiada para el trabajo con los niños.

Logros de los maestros respecto de la reelaboración de las nociones, observados en la primera parte del desarrollo programa fueron:

1. Admitieron el entorno próximo como objeto de aprendizaje del maestro, y de los niños en su iniciación escolar y el énfasis que en la observación, caracterización y comparación de sus elementos exige este aprendizaje. Avanzaron en el conocimiento clasificatorio del entorno, diferenciaron entre rasgo y característica e identificaron características comparables. Se aproximaron a comprender la clasificación como la organización a partir de semejanzas y la ordenación como la organización a partir de la comparación de diferencias. Establecieron correspondencias por función e identificaron la justificación de éstas.
2. Identificaron la cantidad como diferente e independiente del número y el conteo, y a la correspondencia entre elementos, como una forma de comparación cuantitativa no numérica entre montones.

Respecto de los intentos de los maestros de trabajar de manera diferente en el aula se observó:

1. La reelaboración de las nociones de iniciación de la aritmética que surgen en la primera parte del programa de formación no da a los maestros elementos suficientes para transformar de manera autónoma su actividad en el aula, es necesario prever formas de asesoría y apoyo para el trabajo con los niños.
2. Con respecto al programa escolar los maestros inicialmente tienen claro que los niños deben aprender los números y algo de las operaciones, tienen ideas vagas en cuanto a lo que se refiere a la clasificación, la ordenación y la correspondencia y dan poca importancia a la planeación y organización previa de los contenidos. Al final se advierte que han avanzado en cuanto

al conocimiento, comprensión y organización de un programa para preescolar o primer grado de primaria desde la perspectiva del aprendizaje por construcción. Se refieren con mayor claridad a las posibles actividades, al conocimiento que pretenden que logren los niños a través de éstas y a las nociones con que se relacionan cada actividad y el conocimiento a lograr. Reconocen la necesidad que tienen de aprender acerca de los contenidos de la aritmética elemental y la importancia y necesidad de la planeación y el diseño previo de las actividades.

3. La revisión de los videos de las visitas de observación que se hicieron a la escuela y la evaluación de lo que pasó en el salón de clase, les permitió constatar lo mal que resultan las cosas cuando no se ha preparado suficientemente la actividad, no se ha pensado en cómo orientarla y en qué puede pasar.
4. En cuanto al diseño de actividades de aprendizaje por parte de los maestros se observó que no fue fácil atreverse a hacer cosas diferentes. El intento inicial les generó angustia. Por una parte sentían que estaban aprendiendo cosas y tenían conciencia de que el trabajo en el aula debería cambiar. Pero por otra, se sentían inseguros con respecto a sus propias posibilidades para hacer los cambios y mucho más inseguros con la manera como venían trabajando en el aula. Durante el estudio y revisión del programa y la asesoría para el trabajo en el aula, combinaron poco a poco actividades nuevas con su forma de trabajo tradicional.
5. En el desarrollo de las nuevas actividades se observó que les preocupaba la organización de los niños en grupos pequeños, por el número de niños y por la pérdida de control del curso. Reconocieron con preocupación que mientras atendían a un grupo, no podían estar pendientes de los demás y por lo tanto ya no controlaban totalmente la situación en el salón. Poco a poco fueron aceptando que la nueva forma de trabajo les obligaba a otro tipo de organización y a una relación diferente con los niños y el conocimiento. Les angustió lo difícil que es orientar la reflexión de los niños y el que con frecuencia no sabían qué hacer ni qué decirles.
6. Recurrentemente se mostraron preocupados por cómo hacer recapitulaciones y dar por concluido un tema y por la falta de profundidad con que suponían estaban trabajando.
7. Tomaron conciencia de que el trabajo en grupos les permite atender de manera más individual a los niños. Que los niños saben y pueden hacer

muchas cosas, algunas incluso que el maestro desconoce, y que cada uno y cada grupo trabaja de manera diferente y a ritmo también diferente.

8. Observaron que los niños poco a poco van logrando autonomía para trabajar individualmente y en grupo. Van siendo cada vez más recursivos y menos dependientes de la supervisión e indicaciones del maestro.
9. Constataron que una cosa es lo que el maestro supone y espera que hagan los niños y otra lo que ellos hacen. Pero también que, en la medida en que conocen más respecto de los conocimientos de los niños y la forma como aprenden, mayor aproximación hay entre lo esperado y lo que hacen. Les sorprendieron las explicaciones de los niños y las interpretaciones que dan.
10. Se observó además que la necesidad de pensar en las actividades a realizar en el aula posibilita que los maestros avancen en la reelaboración de sus conocimientos y reflexionen sobre ellos desde el ejercicio de su profesión. Es diferente hablar de la clasificación de los elementos del entorno o de la clasificación como noción, a hablar de la clasificación como actividad a realizar por los niños. Y lo mismo se puede afirmar con respecto a las otras nociones.
11. Al diseñar actividades para el aula y enfrentarse a orientar el desarrollo de las mismas por los niños, verificaron la necesidad de conocimiento de los elementos del entorno que tienen los maestros. Atendiendo a esta necesidad dedicaron tiempo a aprender al respecto.
12. Tomaron conciencia de la importancia de la observación y la comparación y de cómo las correspondencias permiten explicar el funcionamiento o la relación entre los elementos que se corresponden. Se dieron cuenta además de la incidencia que este tipo de actividades tienen en el desarrollo del pensamiento del niño.

Los resultados señalados respecto de la apropiación de la forma de trabajo por parte de los maestros y de los intentos de transformación de sus formas de trabajo en el aula se han reiterado en el desarrollo de los programas de formación que han sido parte de los cuatro proyectos de investigación, realizados con posterioridad al de iniciación en la aritmética. Esos resultados han mostrado la necesidad de modificar la estructura inicial de la propuesta de formación, incluyendo el acompañamiento a los maestros, por un período de por lo menos un año, en sus intentos iniciales de transformación de sus formas de trabajo en el aula. Este acompañamiento es el objeto de la investigación en la fase de experimentación de los programas de formación derivados de las fases iniciales de indagación.

9.8. Proyectos y temáticas en que se centra la investigación

El desarrollo del programa de investigación se materializa a través de proyectos centrados en temas transversales, si corresponden a lo específico de un grado escolar y en temas longitudinales si corresponden a temas desarrollados durante diferentes grados. Los proyectos desarrollados y por desarrollar abordan temáticas como las siguientes: iniciación en la aritmética; valor posicional, operaciones aritméticas y algoritmos; fracciones, números fraccionarios y números decimales; números enteros y números racionales; proporción y proporcionalidad; funciones y ecuaciones; iniciación de la geometría; geometría intuitiva, racional y analítica; trigonometría; azar, cambio y probabilidad; números reales, infinito e iniciación en el cálculo.

9.9. Referencias bibliográficas

Furió, M. (1994). Tendencias actuales en la formación del profesorado de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias 12(2),* 188-199.

Hernández, F. y Ortiz, M. (1993). La Didáctica: ¿Ciencia, técnica o arte? *I Coloquio Colombiano de Historia, Filosofía y Pedagogía de las Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia*. Bogotá.

Mockus, S. (1992). Reforma Académica Universidad Nacional de Colombia. Documento de Rectoría. Santa Fe de Bogotá.

Ortiz, M. (1990a). *Un programa de investigación en didáctica de las matemáticas.* Trabajo presentado en el Primer Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Ortiz, M. (1990b). *La investigación en didáctica de las matemáticas y la construcción del conocimiento*. Trabajo presentado en el Encuentro de investigadores en Aritmética. Colciencias y la Universidad Externado de Colombia. Bogotá.

Ortiz, M. (1994a). La investigación en Didáctica de las Matemáticas y la construcción de conocimiento matemático en el aula. *Memorias de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa.* San José de Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.

Ortiz, M. (1994b). *El maestro de matemáticas en una perspectiva constructivista*. Trabajo presentado en I Jornada de Historia, Filosofía y Pedagogía de las

Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México.

Ortiz, M. (1995a). *El maestro y las formas de trabajo en el aula en una perspectiva constructivista*. Trabajo presentado en Expo-ciencia y Expo-tecnología/95 Stand de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

Ortiz, M. (1995c). "El Taller" una forma de trabajo en el aula que posibilita la construcción de conocimiento matemático. *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática Ëlfriede Wenzelburger*, México D. F: Editorial Iberoamericana.

Ortiz, M. (1999a). *El maestro de matemáticas en la perspectiva del aprendizaje*. Trabajo presentado en El Seminario de Matemáticas. Escuela Normal Superior Veracruzana. Xalapa, Veracruz, México.

Ortiz, M. (1999b). *El aprendizaje por construcción y el aprendizaje como resultado de la transmisión y la orientación de actividades de aprendizaje en el aula.* Trabajo presentado en la Universidad Cristóbal Colón de Veracruz. México.

Ortiz, M. (1999c). *La iniciación de la aritmética. Una propuesta de formación de profesores desde la perspectiva del aprendizaje.* Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México. Cinvestav IPN, México, D. F.

Ortiz, M. (2005). De las fracciones como partes de… al racional como cociente. Aprendizaje por construcción, una innovación en el aula. *Proyecto Innovación e Investigación de las Matemáticas en el aula*. (pp.81-122). Bogotá: IDEP.

Ortiz, M. (1990a). Un programa de investigación en didáctica de las matemáticas. Comunicación presentada en el Primer Encuentro Nacional de Investigadores en Construcción del Conocimiento Físico Matemático. Colciencias. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, D. F.: Siglo XXI.

Torres, A.; Moreno, C. y Ortiz, M. (1995). En qué consiste el taller de matemáticas para niños y jóvenes. *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* La Habana.

10
La Historia de la Matemática y el futuro de la Educación Matemática

Juan Nápoles Valdés

10.1. Historia y Educación Matemática

Existe un consenso casi unánime entre los investigadores en Educación Matemática, acerca de la importancia de la perspectiva histórica en la formación docente y en la educación en general. En los últimos años se ha ido incorporando, sobre todo, la Historia de la Matemática a la teoría y a la práctica de su enseñanza. Así, se produjo un acercamiento entre estas áreas del conocimiento que fueron consideradas tradicionalmente ajenas entre sí.

Un cierto conocimiento de la Historia de la Matemática debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel, primario, secundario o superior, en particular. No sólo como instrumento directo de enseñanza, sino como formación propia.

Cuando revisamos el desarrollo histórico de un determinado concepto, vemos cómo se transforman resultados matemáticos en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente, con pasión y sufrimiento, por muchos hombres. ¡Cuántos teoremas de nuestros libros de textos, que parecen verdades inobjetables, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico, socio-cultural y biográfico! Basta analizar el Teorema de los Números Primos según Euclides y Hilbert para percatarnos de esto.

Varios autores han mostrado que de la Historia de la Matemática se pueden extraer variados recursos en beneficio de los alumnos, a la hora de presentar muchos temas matemáticos. Por supuesto, tenemos que señalar en primer lugar que el desarrollo histórico de un concepto no es siempre adecuado para diseñar un programa de una asignatura o un plan de estudios, aunque a veces podemos señalar las analogías entre las etapas históricas y las correspondientes etapas educativas: el trabajo educativo se puede basar en los resultados logrados en el desarrollo histórico, y sobre todo subrayar que la historia nos brinda multitud de modelos que se pueden utilizar en la Modelación Didáctica por analogía.

Se sigue entonces que la investigación sobre el papel de la historia en la enseñanza es considerada legítimamente como parte de la investigación en Educación Matemática. Por supuesto que debemos tener en cuenta el uso educativo de la Historia de la Matemática en diferentes niveles, y que estos niveles pueden dar lugar a diferentes intervenciones educativas.

Un detalle no menos importante es el hecho que el ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*) incluyó este tema como definitivo en la agenda del *International Congress in Mathematics Education* de Japón en el año 2000. El documento de discusión previo al congreso consideró algunas cuestiones tales como:

- Nivel del sistema educativo en el que adquiere relevancia la Historia de la Matemática como herramienta de enseñanza.
- Consecuencias de la utilización de la Historia para la organización y la práctica de la clase.
- Utilidad de la Historia de la Matemática para los investigadores en Educación Matemática.
- Incorporación de la Historia de la Matemática en el currículum.
- La enseñanza de la Matemática puede realizarse desde distintas perspectivas: heurística, lógica y a través del enfoque histórico.

10.2. Principales vínculos entre la Historia y la Educación Matemática

En Nápoles (2009) presentábamos los principales puntos de contacto entre la Historia y la Educación Matemática:

1. La Historia de la Matemática como tema de reflexión.
2. Intervención de la Historia de la Matemática en la Educación Matemática.

   2.1. Intervención de la Historia de la Matemática en la formación de profesores de Matemática.

   2.2. Intervención de la Historia de la Matemática en el aprendizaje de la Matemática.
3. La Historia como fuente para el desarrollo de nuevas ideas matemáticas.

En este caso, queremos detenernos en los puntos 2.1 y 2.2, de vital importancia para nuestro quehacer diario. Nuestro interés se centra en los trabajos de las siguientes tres temáticas:

(1) Historia de los conceptos matemáticos.

(2) Historia en la formación (y el perfeccionamiento) de profesores.

(3) Historia en el aula de Matemática.

En las categorías (1) y (2) nos encontramos con trabajos que tienen que ver con el desarrollo histórico de los conceptos que intervienen en la Matemática escolar (algoritmos, gráficos, la regla de los signos, los ángulos, etc.). Un aspecto se refiere en particular a la Historia de la Matemática como una herramienta para la investigación de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en situaciones multiculturales: a través de una comparación de la historia de la demostración, obtener y aplicar diferentes esquemas de razonamiento, hasta llegar a las hoy llamadas *"Demostraciones Sin Palabras"*, también llamadas *"Nelsen's Proofs"*[33].

El objetivo de los trabajos realizados en torno a (1) es doble. Por un lado el desarrollo de las ideas matemáticas ayuda al maestro a superar los obstáculos epistemológicos. Por ejemplo, una comparación del algoritmo de la multiplicación maya y el Método de la Gelosía, puede llevar al desarrollo de nuevos procedimientos en el aula, para las operaciones elementales (Nápoles, 2010b); además, estudiando las definiciones históricas de figuras similares propuestas en el aula, puede llevar a los alumnos (entre 12-13 años) a considerar los diferentes enfoques y comparar sus consecuencias en la construcción de los objetos matemáticos[34]. Por otro lado, estos artículos responden a la necesidad de los docentes de conocer la Historia de una manera organizada. Ellos no sólo dan

[33] Ver Nápoles (2010a).

[34] Ver, por ejemplo, Bagni, 2000.

información, sino que también proporcionan materiales para la reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de las dificultades, intrínsecamente inherentes, a determinados conceptos matemáticos.

Algunos documentos de la categoría (2) esbozan explícitamente una secuencia de enseñanza para los cursos de formación o capacitación dirigidos a profesores. Para realizar esta secuencia de modo realmente eficaz, es necesario considerar en primer lugar las dificultades de aprendizaje y seleccionar los materiales históricos como consecuencia de esta elección. Por ejemplo, si tenemos en cuenta el Álgebra, destacamos los siguientes puntos críticos sobre ella:

- Simbolismo,
- la relación entre la Aritmética y el Álgebra,
- la relación entre la Geometría y Álgebra,
- dar sentido a la manipulación,
- el obstáculo del formalismo (generalización, abstracción, etc.).

Después buscaremos a lo largo de la Historia del Álgebra para descubrir momentos parecidos en los puntos anteriores. De esta manera, los maestros toman conciencia de las dificultades encontradas por los estudiantes y los medios para estudiar la naturaleza de estas dificultades. Es evidente que la naturaleza epistemológica de los obstáculos juega un papel relevante en este proceso.

Con el fin de capacitar a los maestros y para planificar secuencias de enseñanza puede ser útil tener en cuenta, en la enseñanza de un tema determinado, como éste se ha desarrollado en la Historia.

Nos parecen especialmente interesantes los trabajos en la categoría (3), ya que nos pueden mostrar cómo las ideas teóricas se ponen en práctica. Como cuestión concreta, el problema de la utilización de la Historia en la enseñanza de la Matemática es ampliamente discutido desde diferentes puntos de vista. Hay matemáticos famosos que defienden este uso: algunos de ellos han aplicado sus ideas en varias direcciones (Weil, 1980 y 1984). Entre los educadores de la Matemática, quienes siguen los lineamientos de Freudenthal están promoviendo el uso de la Historia a través de *"reinvención guiada"* (Freudenthal, 1973). Barbin (1994) introduce el concepto de *"dépaysement"* (alienación). Explica que la integración de la Historia de la Matemática en la Educación sustituye al proceso habitual con retos y percepciones diferentes, haciendo lo familiar desconocido. Como sucede cuando una persona se encuentra en un paisaje extraño, después de una fase inicial de desconcierto hay intentos de sustitución y de orientación. Este fenómeno es particularmente adecuado para ser utilizado en cursos de formación del profesorado (antes de graduarse o en ejercicio). A través de su *dépaysement* y las fases siguientes de la sustitución y de la orientación, la Historia ofrece a los profesores la oportunidad de replantearse sus ideas sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos y en los procesos de construcción de estos conceptos en nombre de los estudiantes.

Los trabajos en la categoría (3), es decir, los documentos sobre la Historia en el aula, permiten comprobar a través de experimentos reales el uso que ofrece la Historia, mostrando sus limitaciones y orientaciones para su uso. Por ejemplo, el análisis de diversos errores graves cometidos por nuestros estudiantes, llamados en inglés *howlers*, puede permitirnos buscar la génesis histórica de las operaciones con fracciones y orientar pequeñas actividades de investigación de nuestros alumnos[35].

Al comentar sobre sus experiencias, a veces los maestros señalan que la construcción que hacen sus estudiantes de los objetos matemáticos sigue el mismo camino de la evolución histórica y por lo tanto, su confianza en la eficacia del uso de la Historia se basa en este hecho. Los testimonios y descripciones de experiencias que realizan los profesores sobre sus clases muestran que, en general, el docente no utiliza la Historia para guiar a sus estudiantes en la construcción de los objetos matemáticos siguiendo exactamente el camino de sus antepasados, sino discutiendo y confrontando puntos de vista modernos y antiguos (la *reinvención guiada* de Freudenthal).

En cuanto al aspecto epistemológico de la investigación en Educación Matemática, notemos que varios trabajos se centran principalmente en las representaciones epistemológicas (es decir, representaciones de las formas cognitivas posibles referidas a algunos conceptos matemáticos en particular) y de las representaciones histórico-epistemológicas. En esta perspectiva, las diversas interacciones complejas entre la Historia y la Didáctica requieren importantes supuestos epistemológicos. Por ejemplo, la selección de datos históricos es relevante y, además, varios problemas están relacionados con su interpretación, siempre basado en las instituciones culturales y las creencias (Radford, 1997). Anteriormente hemos señalado que para hacer eficiente el uso de la Historia en la enseñanza de la Matemática hay que integrar la Historia en el currículo y no añadirla, lo que significa que tiene que ser puesta en relación con los paradigmas teóricos, como los obstáculos epistemológicos, el enfoque socio-cultural, las perspectivas "voces y ecos", etc.

---

[35] Ver Nápoles (2009b).

En los documentos de las tres temáticas o categorías señaladas anteriormente, el entrelazamiento entre la Historia y la Epistemología es bastante evidente. La Historia provee el contenido en su devenir histórico y la Epistemología actúa como un apoyo a la construcción de planes de estudio, ya que ofrece algunas reflexiones interesantes sobre la reorganización del currículo en una perspectiva de innovación educativa. La influencia de las diferentes opciones epistemológicas en el desarrollo curricular es también clara, por ejemplo, en ocasiones se ha organizado el Análisis Matemático por *estructuras* (digamos, estudiar las funciones en una y varias variables, después límite, continuidad, etc.) y no siguiendo la habitual organización de estudiar primero el caso de una variable real y pasar después a funciones de varias variables.

Asimismo, la Epistemología puede ser un apoyo eficaz para los cursos de formación del profesorado, ya que promueve una reorganización significativa de los conocimientos (*Saber*) en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Otro aspecto muy importante se refiere a la reflexión epistemológica relacionada con conceptos y objetos de la Matemática (D'Amore, 2000). Algunas opciones epistemológicas importantes surgen tanto en el trabajo de los profesores, y en la dirección tomada por la sociedad con respecto a la formación del profesorado y, además, algunos significados diferentes y la importancia de las competencias y habilidades se tratan desde una gran variedad de perspectivas epistemológicas.

10.3. Dificultades teóricas para incorporar la Historia en la Educación Matemática[36]

La incorporación de la Historia en la Educación Matemática, en particular en la educación secundaria, ¿es en verdad fácil y sencilla? Por supuesto que no, el uso de la Historia de la Matemática en el aula requiere la elección de relevantes temas históricos, la producción de materiales para el aprendizaje, y la búsqueda de espacio para el estudio histórico en los actuales planes de estudio de Matemática. Estos son, a primera vista, sólo problemas prácticos, que no son para menospreciar, por supuesto, pero la cuestión que nos ocupa es si esta incorporación en la Educación Matemática no es problemática, en principio.

Sería conveniente que tuviéramos claro que los historiadores de la Matemática son como los antropólogos que estudian culturas matemáticas diferentes de la

[36] Seguimos a Fried (2008).

nuestra. Los historiadores deben considerar la Matemática como en constante cambio y no eterna, inmutable. Así Unguru (1979) ha escrito

> La Historia de la Matemática es Historia no Matemática. Es el estudio de los aspectos idiosincrásicos de la actividad de los matemáticos que se realizan en el estudio de la nomotética, es decir, de lo que es el caso por la ley. Si uno es escribir la Historia de la Matemática, y no la Matemática de la Historia, el escritor debe tener cuidado de no sustituir a la nomotética de la idiosincrasia, es decir, no para hacer frente a la Matemática pasada como si la Matemática no tuviera pasado más allá de las diferencias triviales en la apariencia externa de lo que es básicamente un núcleo duro de contenido inmutable (p.563).

En vista de esto, el problema teórico de la combinación de la Historia de la Matemática y la Educación Matemática comienza realmente con los problemas prácticos que mencionamos al comienzo de esta sección. Desde la elección y presentación de material histórico, los educadores de Matemática deben ajustarse a las necesidades curriculares, que se dirigen generalmente hacia el aprendizaje en la clase de Matemática, es decir, deben filtrar la Historia para satisfacer las necesidades predeterminadas, haciendo a la Historia una herramienta más que un tema a estudiar. Por muy bien intencionados que sean, los educadores de Matemática se ven forzados a una posición que tiene menos que ver con la exactitud histórica que con el enfoque histórico, siempre teniendo en cuenta que la objetividad histórica no debe ceder ante las necesidades pedagógicas[37].

10.4. Ejemplos para la discusión

Los ejemplos que brindamos a continuación sólo deben tomarse como una guía ilustrativa de lo que podemos hacer en nuestras aulas.

10.4.1. El problema de la división (reparto)

Dividir, como operación inversa a la multiplicación, podría ser considerada una operación que no nos lleva a mayores complicaciones, más allá de las derivadas por su práctica. Sin embargo, una de las vías que el profesor puede utilizar para

[37] Al respecto recomendamos ver las posiciones extremas criticadas por Garciadiego (1997).

consolidar la misma, son problemas obtenidos del Papiro Rhind (ca. 1650 a.C). Son ejemplos de ello los siguientes.

1) Problema 25. Una cantidad con la mitad de ella añadida es 16. ¿Cuál es la cantidad?

2) Problema 34. 10 panes se reparten entre 3 hombres de manera que el segundo recibe la mitad que el primero y el tercero la cuarta parte que el primero. ¿Cuánto recibe cada uno?

Analicemos el primero de ellos. El escriba utiliza el método de *regula falsi*, es decir, ensaya diversas "soluciones" para obtener la correcta. Así, supone que la cantidad es 2, luego:

$$2+2\left(\frac{1}{2}\right)=3$$

El análisis de varios casos más, todos enteros, nos llevará a la consideración que debe haber una proporcionalidad entre la cantidad real y la hipotética, respecto al resultado obtenido con la primera y con la segunda. Dicho de otra manera, hay que establecer una proporcionalidad como la siguiente:

$$\frac{x}{2}=\frac{16}{3}$$

Para nosotros es fácil obtener la solución

$$x=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$$

Sin embargo, el escriba no procedía así, lo primero que hacía era dividir por 16, utilizando el método de duplicación, de donde

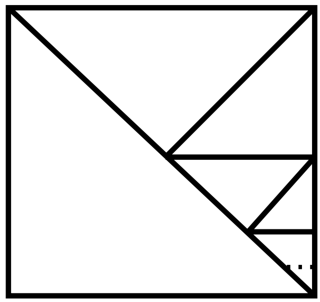
1	**3**
2	6
4	**12**

Como 12+3=15, siendo la solución hipotética 3, su tercera parte es 1, lo que nos permite obtener 16, por tanto, teniendo en cuenta la columna izquierda y este último resultado, la mitad de la solución es entonces:

$$5\frac{1}{3}$$

Multiplicando por 2 se obtiene la cantidad buscada.

Este tipo de problemas pueden ser abordados en los años subsiguientes a la enseñanza primaria, lo que coadyuvaría a la consolidación de la misma, sin hablar de que los estamos iniciando en la práctica matemática habitual. Hay un paralelismo entre lo que nos muestra la historia y el "modo de hacer" de nuestros estudiantes. La Matemática también debe ser experimentación, prueba y error, el método de *regula falsi* que hemos presentado puede ser aplicable a infinidad de problemas matemáticos, y más que posibilidad debería ser una realidad.



10.4.2. Series infinitas, el infinito actual en el aula

Cuando introducimos la noción de serie infinita, debemos tener en cuenta que una suma de infinitos sumandos es, con frecuencia, considerada por los alumnos como "infinitamente grande" (tal y como pensaban los griegos contemporáneos de Zenón) así que, primero de todo, debemos superar la idea errónea de "infinitos sumandos equivale a suma infinitamente grande".

Se pueden usar recursos geométricos para superar esta dificultad, por ejemplo, a partir de la figura, un cuadrado de área 1, de donde se obtiene:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

Si bien la utilización de recursos geométricos puede causar problemas en algunos alumnos con dificultades para coordinar la representación geométrica en términos simbólicos es, probablemente, la mejor vía para superar la primera dificultad "infinitos sumandos, suma infinitamente grande".

La utilización de este ejemplo, o el análisis de la Paradoja de Aquiles y la Tortuga, de Zenón, podría llevar a nuestros estudiantes a la idea de que una serie es una suma de infinitos términos en progresión geométrica (o aritmética), por lo que tenemos una nueva dificultad que superar y la historia volverá a brindarnos los recursos necesarios.

En 1703 Guido Grandi (1671-1742) notó que de la suma infinita 1-1+1-1+1-… es posible obtener tanto 0 como 1:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) +\ldots = 0 + 0 + 0 + 0 +\ldots= 0$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) +\ldots = 1$$

Por lo que consideró (como muchos matemáticos del siglo XVIII) que su suma es ½. Es fácil ver esto haciendo $S = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 -\ldots$ por lo que

$$S = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 -\ldots = 1 - (1 – 1 + 1 – 1 + 1 -\ldots)$$

De donde: $S = 1 - S$ y por lo tanto $S = 1/2$.

La incorporación de las observaciones de diversos matemáticos respecto a la suma de Grandi nos lleva a dos cuestiones fundamentales:

1) La existencia de S asegura una cualidad importante en las sumas infinitas.

2) ¿Cómo obtener S en el caso general?

Ambas cuestiones relacionadas directamente con la consolidación de nociones primordiales en la Educación Matemática, es decir, la introducción de las series infinitas en el aula no es simple y algunos aspectos deben ser considerados, por ejemplo, límite de una función, la manipulación del infinito y la generalización de las habituales operaciones de suma y multiplicación. Por supuesto que esta no es la única cuestión subyacente aquí, la distinción entre el infinito actual y potencial es otra de las cuestiones a las que los docentes debemos prestarle especial atención en nuestras aulas.

10.4.3. La construcción en Matemática

A pesar de la existencia de técnicas constructivas en varias ramas de la Matemática, utilizaremos dos ejemplos como punto de partida.

Euclides demostró que se pueden construir, con regla y compás, polígonos regulares de 3, 4, 5 y 15 lados, así como todos los deducidos de los anteriores por bisección reiterada de sus lados. Estos eran, sin embargo, todos los polígonos regulares que los griegos sabían construir; no conocían ningún método geométrico para construir polígonos regulares de 7, 9, 11, 13, 14 y 17 lados, por ejemplo. Durante los 2000 años siguientes parece que nadie llegó a sospechar que sería posible construir algunos de estos polígonos. La cuestión tuvo que esperar hasta el 30 de marzo de 1796, cuando un joven a punto de cumplir los 19 años, Carl Friedrich Gauss[38], construía con las normas euclídeas el polígono regular de 17 lados. Ese mismo día empezó un diario en el que fue apuntando, durante los 18 años siguientes, algunos de sus más grandes descubrimientos; y el primer registro es, naturalmente, el de la construcción del polígono regular de 17 lados. Años más tarde, y como puede leerse en su diario, Gauss demostraba que con las herramientas euclídeas se puede construir un polígono regular de n lados cuando:

a) $n = 2^p$, p = 2, 3, ... (se construye mediante bisectrices).

b) *n* es un primo de Fermat F_i .

c) *n* es de la forma $2^p F_i \cdot F_k \cdot F_m \ldots$ donde los $F_i, F_k . F_m, \ldots$ son ciertos primos de Fermat, es decir, *n* es un producto de números distintos de las dos clases anteriores.

Así, por ejemplo, el polígono regular de 9 lados no se puede construir con regla y compás, pues aunque $n = 9 = 3.3$ y 3 es un primo de Fermat, el factor 3 está repetido, de aquí que según el inciso c) no puede construirse euclidianamente el eneágono. Igualmente le sucede a los polígonos de 7, 11, 13, 14, 18, 21, 22, 23, 25, ... que tampoco son construibles.

De hecho hasta la fecha los únicos primos de Fermat conocidos son 3, 5, 17, 57 y 65537 barajándose a posibilidad de que F_p es compuesto para todo $p > 4$. El tema ha venido provocando tanto interés en la comunidad matemática que F. J. Richeliot en 1832 publicó una extensa investigación del polígono de 257 lados y el profesor Hames de Lingen dedicó 10 años de su vida a la construcción del polígono regular de 65337 lados.

[38] Johann Carl Friedrich Gauss. Nació el 30 de abril de 1777, en Brunswick y murió el 23 de febrero de 1855, en Göttingen. Fue un matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado "el príncipe de la Matemáticas" y "el matemático más grande desde la antigüedad", Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido en la historia.

Es interesante la discusión del Método de Arquímedes[39], en el que pueden vincularse diversos conocimientos matemáticos y se puede utilizar el ordenador y un Sistema de Cálculo Simbólico (por ejemplo, el *Derive*), como herramienta de cálculo y como medio de razonamiento en Geometría[40].

El otro ejemplo que presentaremos en este epígrafe es el de máximo de una función. Este concepto, tal y como se utiliza actualmente en Matemática, se desarrolló progresivamente: a medida que las necesidades prácticas se hacían sentir, se agregaban las definiciones necesarias. Y es a causa de eso que se llegó a una proliferación de nociones vagas e inexactas, que tienen una curiosa similitud con el concepto que se forman nuestros alumnos.

Comencemos por una pregunta sencilla. ¿Cómo puede variar el área de un rectángulo cuando el perímetro es constante? Tome su mayor valor tomando, por ejemplo, 12 como el valor del perímetro.

La construcción de varios rectángulos, por ejemplo de lados 4 y 2, 5 y 1 … nos lleva a confeccionar la siguiente tabla:

Lados		**Área**
4	2	8
5	1	5
3 ½	2 1/2	8 3/4
3	3	9

Así los estudiantes pueden concluir que el área mayor se obtiene cuando los lados son iguales, es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado. Con el *Cabri*, por ejemplo, podemos partir de un segmento AB de longitud 6 (el semiperímetro) y situando el punto medio P, la construcción de los diversos casos anteriores puede obtenerse variando a la izquierda (o la derecha) P, sabiendo que AB+AP+PB=12 y APxPB=Área, en concreto, lo que hemos hecho es obtener el máximo de la función $f(x)=(3-x)(3+x)=9-x^2$ siendo $3-x=AP$ y $PB=3+x$.

Lo que hemos hecho nosotros es, ni más ni menos, recrear el método de Fermat para obtener máximos y mínimos planteado en su **"Methodus ad disquirendam maximam et minimam"**:

> *"Sea a cualquier incógnita del problema (de uno, dos o tres dimensiones, dependiendo de la formulación del problema). Vamos a indicar el máximo o mínimo de a en términos que podrían ser de cualquier grado.*

[39] Ver Boyer (1987).

[40] Para una experiencia en ese sentido, consultar Cortés (1997).

Vamos a reemplazar la incógnita original a por a+e y vamos a expresar la cantidad máxima o mínima en términos de a y e que implique cualquier grado. Adecuaremos [adégaler], para usar el término de Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima y vamos a sacar sus términos comunes. Ahora resulta que ambas partes contienen términos en e o sus potencias. Vamos a dividir todos los términos por e, o por una potencia superior a e, de modo que e se eliminará por completo de por lo menos uno de los términos. Suprimimos entonces todos los términos en que e o una de sus potencias siguen apareciendo, e igualaremos las otras; o, si una de las expresiones se desvanece, igualaremos, lo que es lo mismo, los términos positivos y negativos. La solución de esta última ecuación dará el valor de a, lo que llevará al máximo o mínimo, utilizando nuevamente la expresión original." (Fauvel, 1990, pp.18-30).

En nuestro caso tenemos que AB=6, a=AP, luego PB=6-a y el producto, el máximo que estamos buscando, será $ba-a^2$. Sea ahora a+e el primer segmento de b, el segundo será b-a-e y el producto de los segmentos $ba-a^2$ (adecuado con el precedente $ba-a^2$). Suprimiendo términos comunes obtenemos

$$be \sim 2ae+e^2,$$

dividiendo todos los términos por e

$$b \sim 2^a+e$$

suprimiendo e

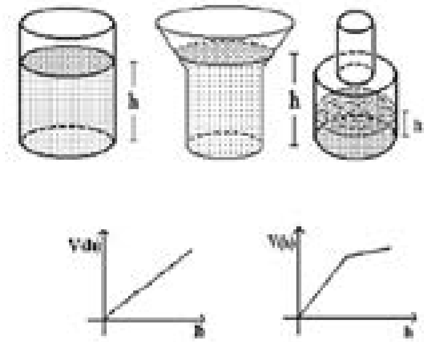
$$b=2^a.$$

Para resolver el problema basta con tomar a como la mitad de b, es decir, a=3..

10.4.4. Colofón

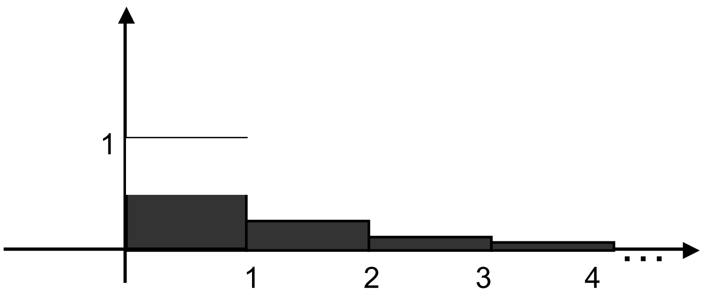
Estos ejemplos pueden ser utilizados de diversas formas, e interrelacionados entre sí. Dos preguntas que podrían ilustrar esta última cuestión son las siguientes:

I. ¿Podrían identificar las funciones que corresponden a la función Volumen-altura de las figuras presentadas?



La cuestión central aquí, es identificar la pendiente constante de la primera gráfica y el punto de no derivabilidad del segundo.

II. ¿Puede construir una figura infinita con área finita?



Este caso nos lleva a considerar una función como suma infinita, de hecho, geométricamente puede obtenerse que su suma es 1, sin ir más allá de percatarse que cada rectángulo es la mitad del anterior, teniendo el primero un área de ½.

10.5. El futuro de la Historia de la Matemática en la Educación Matemática[41]

La Historia de la Matemática no es sólo una caja de pinturas con la que uno puede hacer la imagen de la Matemática más colorida, para captar el

[41] Ver también Bagni (2005), Fried (2008) y Hitt (1995).

> interés de los estudiantes en los diferentes niveles de la educación, es una parte de la imagen misma. Si se trata de una parte tan importante, que va a dar una mejor comprensión de lo que trata la Matemática, si va a ampliar los horizontes de los estudiantes, tal vez no sólo sus horizontes matemáticos... entonces debe ser incluida en la enseñanza. Heiede (1996, p.241).

El resultado de todo esto parece ser que, en lo que respecta a la Historia de la Matemática, la Educación Matemática se enfrenta a un dilema: ser fiel a los compromisos de la Educación Matemática y verse "obligados" a adoptar una visión edulcorada de la Historia o ser fiel a los compromisos de la Historia de la Matemática y verse obligados a dedicar tiempo a las ideas matemáticas y filosóficas que pueden no ser relevantes para el currículo de Matemática en general. Sin embargo, este dilema no debe ser tomado como un argumento para repudiar cualquier intento de incorporar la Historia de la Matemática en la Educación Matemática o, peor aún, como un intento por parte de los historiadores de la Matemática para proteger sus propias ideas. Entonces, el dilema realmente se convierte en que en lugar de la frase "la Educación Matemática, como suele ser concebida", debería decir, "como ha sido concebida". Más que una negación de la Historia de la Matemática en la Educación Matemática, el dilema se debe tomar como un desafío a reconsiderar la naturaleza de la Educación Matemática para que la Historia de la Matemática como una actividad seria se convierta en una parte integral de lo que significa ser la Educación Matemática.

Esta reconsideración no implica necesariamente la revolución. En efecto, aunque se ha tendido en ciertas direcciones en el pasado, la comunidad de la Educación Matemática ha sido, de hecho, un proceso continuo de auto-definición[42]. En los últimos años, el desplazamiento de la atención de la comunidad hacia los aspectos socioculturales de la Educación Matemática se compromete a mover el campo de direcciones a un enfoque no-superficial de la Historia de la Matemática en la Educación Matemática no sólo posible, sino necesario. Estos estudios socio-culturales, aunque estimulados, en parte, por los problemas prácticos de las grandes poblaciones de inmigrantes en Europa y Norteamérica (y en la propia Argentina por varias razones) y la globalización general de la Educación Matemática, implica una visión de la Matemática como un sistema cultural (por citar el título del conocido libro de Wilder (1981)). De acuerdo con este punto de vista, en la investigación educativa existen corrientes como la etnomatemática de D'Ambrosio y las investigaciones semióticas, que ponen énfasis en el conocimiento matemático y el pensamiento como algo que surge

[42] Ver Kilpatrick (1992).

dentro de un sistema cultural generado por signos, como apunta Radford (2003). Y estas corrientes, cuando no invitan a un análisis histórico directamente, son coherentes con la Historia de la Matemática como el historiador la concibe. En cierto modo, lo que ha sucedido es que la visión original se refleja en el ICMI, el punto de vista sostenido por Smith y Klein, que la Matemática tiene valor cultural y, por tanto, con una historia que debe tomarse en serio, por fin, se ha tomado en serio. Y, sin duda, la voluntad del ICMI en el futuro, tiene un importante papel en su desarrollo y en la clarificación de sus implicaciones.

Nos gustaría señalar que existen dos efectos secundarios del el uso de recursos históricos en nuestras aulas:

1) A los participantes se les proporcionó la motivación para aprender un poco de Historia de las Matemáticas. Aunque no es nuestro objetivo principal.

2) Convertimos nuestras aulas en verdaderos laboratorios de Matemática, donde los estudiantes "hacen Matemática" para resolver determinados problemas, una forma consciente de hacerlos partícipes del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Este proceso, que nos lleva a diseñar una modelación didáctica en nuestro laboratorio, se puede resumir de la siguiente manera:

- Lectura de los programas y planes de estudio de Matemática.
- Lectura de la historia.
- Señalar a las raíces cognitivas de los conceptos.
- Confrontar las raíces cognitivas en la historia y en los programas de Matemática.
- Diseñar la secuencia de enseñanza-aprendizaje.

Quisiéramos destacar que los problemas no son la única fuente de desarrollo de la Matemática, debemos incorporar los ejemplos y los teoremas, en ambos están plasmados también las fuerzas del desarrollo matemático, y son material de primer nivel para nuestro trabajo en el aula.

Para finalizar, vamos a hacer tres sugerencias sobre líneas de acción para la investigación en Educación Matemática:

1. En el plano teórico, deben promoverse las discusiones entre los historiadores, epistemólogos, psicólogos, antropólogos y educadores de matemáticas.

2. En un nivel práctico, los modelos de contraste y conceptualizaciones entre la evolución ontogenética y filogenética también deben tomarse en considera-

ción. Esto puede llevar a una mejor comprensión de los tipos de intervenciones pedagógicas que se pueden realizar.

3. Reconceptualizaciones teóricas entre dominios ontogenético y filogenético deben ser realizadas y explicitadas en cuanto a la forma en que puede enmarcar la Ingeniería Didáctica y el Diseño de Secuencias Didácticas.

10.6. Referencias bibliográficas

Appel, K. y Haken, W. (1986). The four color proof suffices. *The Mathematical Intelligencer 8(1)*, 10-20.

Bagni, G. T. (2000). "Matematica e bellezza, bellezza della matematica". *Rivista di Matematica dell'Università di Parma 6(3),* 51-61.

Bagni, G. (2005). Infinite series from History to Mathematics Education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Extraído el 1 de marzo de 2012 de http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/bagni.pdf

Barbin, É. (1994). Préface, in Commission Inter-Irem Épistémologie et histoire des mathématiques. *Quatrième université d'été d'histoire des mathématiques*, IREM de Lille, ii-iii.

Boyer, C. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Cortés, J. C. (1997). Estudio matemático del trazado general de polígonos regulares. Una experiencia en el aula con Derive. *Epsilon 39*, 149-158.

D'Amore, B. (2000). Concetti e oggetti in matemática. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma 6(3)*, 143-151.

Detlefsen, M. y Lyuker, M. (1980). The four color theorem and mathematical proof. *The Journal of Philosophy LXXVII(4),* 803-820.

Dieudonné, J. (1972). *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Madrid: *Alianza Universidad*.

Euclides (1991-1996). *Elementos*. Madrid: Editorial Gredos.

Fauvel, J., (1990). *Mathematics through history*. York: Q.E.D. Books.

Filloy, E. (1995). *Didáctica e historia de la geometría euclideana*. Dpto. de Matemática Educativa, CINVESTAV.IPN, México.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fried, M. (2008). "History of Mathematics and the Future of Mathematics Education". *Mathematics Education: an ICMI perspective* (WG5) April, 1-5.

Garciadiego A. (1997). Pedagogía e historia de las ciencias, ¿simbiosis innata? En F. Zalamea (Ed.) *El velo y la trenza,* Editorial Universidad Nacional (Bogotá).

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange 21(1)*, 6-13.

Heiede, T. (1996). History of mathematics and the Teacher. En Calinger, R. (Ed.), *Vita Mathematica*. The Mathematical Association of America, 231-243.

Hitt, F. (1995). "Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa". *Educación Matemática*, 7 (1), 63-75.

Kilpatrick, J. (1992). History of Research in Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.3-37), New York: Macmillan Publishing Company.

Lolli, G. (1991). *La máquina y las demostraciones. Matemática, lógica e informática*. Madrid: Alianza Editorial.

Löwenhein, L. (1946). On making indirect proofs direct. *Scripta Mathematica 28(2),* 101-115 (ed. y revisión inglesa de W. O. Quine).

Müeller, I. (1981). *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements.* Cambridge: MIT Press.

Nápoles, J. E. (2009a). La Historia de la Matemática y su relación con la Educación Matemática. Conferencia inaugural VIII CAREM. Buenos Aires.

Nápoles, J. E. (2009b). La ingeniería didáctica y las prácticas pedagógicas, Taller, VIII CAREM: Buenos Aires.

Nápoles, J. E. (2010a). Demostraciones matemáticas: ayer, hoy y mañana. Curso, X Encuentro Regional de Docentes de Matemática, FaCENA, UNNE.

Nápoles, J. E. (2010b). La ingeniería didáctica y las prácticas pedagógicas, Minicurso, V CIEM, ULBRA, Canoas/RS (Brasil).

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics, *For the Learning of Mathematics 17(1)*, 26-33.

Radford, L. (2003). On Culture and Mind: A Post-Vygotskian Semiotic Perspective with an Example from Greek Mathematical Thought. En M. Anderson, A. Sáenz Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (Eds.) *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp.49-79), New York: Legas.

Recalde, L. (1994). El papel del infinito en el surgimiento de la topología de conjuntos. Tesis de maestría no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Rotman, B. (1988). Towards a semiotics of mathematics. *Semiótica 72(1/2)*, 1-35.

Schatz R. y Grouws, D. (1992). Mathematics teaching practice and their effects. En D. Grouws (Ed.) *Handbok of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NCTM, New York: MacMillan.

Swart, E. (1980). The philosophical implications of the four color problem. *American Mathematical Monthly* 87, 697-707.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: does it exist? En A. Howson (Ed.) *Developments in mathematical education, Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education* (pp.194-209), Cambridge: Cambridge University Press.

Tymoczko, T. (1979). The four color problem and its philosophical significance, *The Journal of Phylosophy LXXVI(2)*, 57-83.

Unguru, S. (1979). History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of the Art. *Isis 70(254)*, 555-565.

Vega, L. (1995). Demostraciones clásicas. *THEORIA X(24)*, 79-101.

Vega, L. (1997). Matemática y demostración: las vicisitudes actuales de una antigua liaison. En F. Zalamea (Ed.) *El velo y la trenza* (pp.49-79), Bogotá: Editorial Universidad Nacional.

Weil, A. (1980). History of mathematics: why and how. En O. Lehto (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp.227-236), Helsinki: Academia Scientiarum Fennica.

Weil, A. (1984). *Number Theory: An approach through history From Hammurapi to Legendre*. Boston: Birkhäuser.

Wells, D. (1991). *The Penguin dictionary of curious and interesting geometry*. Harmondsworth: Penguin Books.

Wilder, R. (1981). *Mathematics as a Cultural System.* New York: Pergamon.

11
Posiciones realistas en Filosofía de la Matemática

Sandra Visokolskis

11.1. Introducción

Desde sus comienzos, la Filosofía Analítica del siglo XX marcó para la Matemática (y la Lógica) un lugar de relativo *privilegio*, aislándola del contexto de lo empírico, dentro del cual la tendencia ha sido un intento de adoptar un criterio unificado a través de una metodología dominante, a partir de la cual los métodos demostrativos de las ciencias formales han marcado el estilo desde donde evaluar la eficacia de cualquier otra disciplina científica.

Sostenemos e intentamos justificar que la noción de demostrabilidad entendida como la noción *fuerte* de justificación en Matemática, ha jugado un papel condicionante en la distinción analítico-sintética subyacente al original planteo de la Filosofía Analítica, a tal punto que haría imposible cualquier propósito holista de incluir a la Matemática en el corpus *verdaderamente* científico. Y todo este planteo llevaría a visualizar a la Matemática como un ámbito de gran privilegio metodológico, en desmedro de los otros métodos que aplican las demás disciplinas.

En este tipo de interpretación de la Matemática subyace fuertemente un estilo de realismo matemático, el cual buscamos aminorar pero no por ello abandonar enteramente, rescatando del mismo ciertas tesis que creemos son vitales para expresar la relevancia de lo abstracto como un tipo de entidad con existencia en sí misma.

Es por ello que, en vistas a no abandonar un universo realista en Filosofía de la Matemática, proyecto que implica un compromiso ontológico fuerte, pero a la vez debilitando sus tesis para poder así dar cuenta de la realidad de la práctica matemática, proponemos una alternativa de realismo matemático, que tendría sus raíces en una confrontación de las tesis realistas y antirrealistas respecto de las entidades matemáticas, sostenidas por diversos autores, y que daría lugar a extender la misma hacia otras disciplinas científicas. Esto equivaldría a considerar a la Matemática como una actividad seudo-empírica.

La Matemática en la actualidad posee un desarrollo multifacético, cubriendo dominios de interés para muchas otras disciplinas. Sin embargo, no siempre y no todo lo que los matemáticos produjeron o producen, fue hecho en función de brindar servicios a otras áreas temáticas, sino por el sólo placer de profundizar en el mundo de las entidades abstractas.

Pero una pregunta que uno puede formularse es qué realidad poseen tales entidades. Esta es la pregunta filosófica por la ontología matemática. Diversas posiciones han surgido en la Historia de los fundamentos de la Matemática intentando dar respuesta a esta pregunta.

Tal vez la salida más natural e intuitiva a este interrogante lo constituye la posición que suele denominarse "realismo platonista" o simplemente "platonismo (en Matemática)". El platonismo, en una versión *standard,* postula la existencia real de un mundo de objetos independientes de la mente de cualquier individuo o grupo social que los imaginara o intuyera. Ellos yacen allí, y todo lo que el matemático debe hacer es descubrirlos.

Hersh (1997), en su libro titulado *What is Mathematics, really?*" resume de manera muy clara en qué consiste esta posición, en líneas generales:

> El Platonismo afirma que los objetos matemáticos son reales e independientes de nuestro conocimiento. Las curvas de Peano, los conjuntos infinitos y las variedades infinito-dimensionales –todos miembros del zoológico matemático– son objetos definidos, con propiedades definidas, conocidas o desconocidas. Estos objetos existen fuera del tiempo y el espacio físico. Nunca fueron creados. Nunca cambian. Por la ley lógica del tercero excluido, una cuestión significativa acerca de cualquiera de ellos tiene una respuesta, aún si la sabemos o no. Según el Platonismo, un matemático es un científico empírico, como un botánico. Él no puede inventar, porque todo ya está allí. Él sólo puede descubrir. Nuestro conocimiento matemático es objetivo e inmodificable,

porque es conocimiento de objetos externos a nosotros, independientes de nosotros, que son de hecho incambiables (p.11).

El propósito de este capítulo es mostrar una posición realista alternativa a la platonista, en una búsqueda de dar sentido a la práctica matemática misma, más allá de teorizaciones demasiado ajenas a la realidad que vivencia un investigador matemático en el proceso de generar conocimiento en este dominio del discurso filosófico. Ello traería, como consecuencia, una visión más ampliada de la filosofía de la matemática, que permitiera acercarse hacia su enseñanza, relativizando así la fuerza teórica de cualquier posición filosófica, y contribuyendo así al trabajo docente propiamente dicho. Este beneficio se notará al nivel de ciertas temáticas concretas que mencionaremos, por ser ellas prolíficas a la hora de proveer de recursos didácticos a los docentes, pudiendo eventualmente generalizarse estas temáticas en el futuro a otras no tratadas aquí.

11.2. Realismos en Matemática

Diversos filósofos e historiadores de la ciencia han presentado a la Matemática como una dama fiel con todas las *garantías* que los hombres necesitan para comprometerse con ella: una compañía segura en un cálido hogar donde todo queda pautado de entrada y corre por carriles seguros, sin traspiés, como si no pudieran surgir por ningún lado *proposiciones indecidibles*.

Una dama que no molesta a la hora de averiguar qué es lo que pasa ahí afuera, en el mundo *verdaderamente* real, pero que a la vuelta de las andadas de su marido por el mundo de la experiencia, inseguro, riesgoso, le garantiza el único y auténtico refugio capaz de proporcionar el ansiado final feliz ya preconcebido.

En este trabajo proponemos una imagen de la Matemática más *realista*. A la hora de buscar respuestas a todas las preguntas en el terreno de la Filosofía de la Matemática, ninguna teoría conforma enteramente.

Una cuestión crucial que desde la década del 30 del siglo XX aproximadamente ha venido perturbando a aquellos interesados en buscar o refutar un fundamento para la Matemática, ha estado ligada al papel que juegan las oraciones indecidibles en un programa que intente dar cuenta con verdad, de todo cuanto enuncia.

Las posturas realistas en Filosofía de la Matemática ven con buenos ojos la presencia de tales enunciados. Ellos permiten justificar la existencia de una verdad más allá de toda capacidad humana para reconocerla, condición suficiente para postular la existencia de objetos independientemente de todo conocimiento que los seres humanos podamos poseer.

Con lo cual, las proposiciones indecidibles no deberían considerarse como limitaciones que excluyen la existencia de una realidad objetiva, sino como limitaciones lógicas en los modos de cómo llevar a cabo observaciones a tener en cuenta a la hora de entender los fenómenos en cuestión.

Por ello conviene aquí detenernos un instante para recordar en qué consiste y sobre todo cómo se inició la discusión sobre la indecidibilidad en Matemática.

La cuestión de la indecidibilidad en Matemática surgió como una consecuencia colateral a propósito de la resolución de un problema que en 1900 David Hilbert formulara en ocasión del Congreso Internacional de Matemática convocado en París. Allí Hilbert propuso resolver una serie de problemas matemáticos organizados en una prolija lista, entre los cuales, el décimo trataba acerca de ecuaciones diofánticas y de la posibilidad de "diseñar un proceso según el cual se pueda determinar en un número finito de operaciones, si la ecuación [diofántica en cuestión] es soluble para números racionales enteros" (Hilbert, 1902, pp.478-479).

La respuesta ante este problema es que no existe un método para la obtención del conjunto total de soluciones del mismo, lo cual quiere decir que es "indecidible". Esto implica que el problema de *"decisión"* al que se enfrentó Hilbert –y que se ha dado en llamar "el décimo problema de Hilbert"– consiste en encontrar un procedimiento efectivo *que permita decidir* en un número finito de pasos (es decir, un algoritmo) *para cualquier ecuación polinomial* con coeficientes enteros (es decir, ecuación diofántica) si ella posee o no soluciones enteras.

La solución de este problema generó un conjunto de resultados a lo largo de varios años, comenzando por los trabajos de Julia Robinson, Martin Davis y Hilary Putnam, llegando a la instancia clave del resultado presentado por Juri Matiyasevich. Ninguno de estos pasos pudo haberse llevado a cabo sin los importantes avances introducidos por Kurt Gödel, Alonso Church y Alan Turing en torno a la noción de recursividad, apuntando a una formalización de la noción de computabilidad. Claramente, un problema de idiosincrasia numérica se convirtió en un problema de decidibilidad, un fenómeno extraño y novedoso para esa época.

De este modo, se concluye la respuesta al problema cuando durante los años 70 del siglo XX, Matiyasevich (1993) respondió negativamente al mismo: no existe tal algoritmo. Ello equivale a demostrar que los conjuntos recursivos de enteros son diofantinos y, como consecuencia, la teoría positiva existencial de los enteros es indecidible en el lenguaje de los anillos {0,1,+,.}.[43]

Pero si bien todos los diferentes tipos de realismo en Matemática –uno de cuyos casos extremos es el platonismo– aceptan de buen modo la indecidibilidad en Matemática, como fuera planteado arriba, no todos ellos se manifiestan de la misma manera.

Es el propósito de este capítulo presentar una versión realista alternativa al platonismo, que defendemos y que denominamos "realismo pluralista". Esbozaremos cómo esta posición puede ofrecer una perspectiva diferente que aporte elementos para reforzar la actividad docente.

Para avanzar en esa dirección debemos entonces precisar la noción de "platonismo" desde la cual discutimos y abordamos nuestra propuesta.

11.2.1. Platonismo: una caracterización

Podemos caracterizar al platonismo como un realismo extremo en Matemática que presenta las siguientes características:

P_1. Hay una *realidad matemática*.

P_2. Esta realidad está conformada por elementos (llamados los objetos o entidades matemáticas, las proposiciones matemáticas y las relaciones matemáticas), que constituyen una totalidad: el "mundo matemático".

P_3. Esta realidad es a priori, objetiva, externa a todo sujeto (y por tanto, a todo lenguaje, descripción y/o teoría).

Llamaremos a esta tesis "tesis de la autonomía de la Matemática".

P_4. La realidad matemática se representa por medio del lenguaje de manera biunívoca a través de una relación de referencia o extensión, según se trate de términos constantes o variables por un lado y objetos por el otro, o a través de una relación de verdad si lo que se pretende relacionar es proposiciones con oraciones o fórmulas bien formadas.

P_5. Existe un criterio (o método) *único* de justificación objetiva que determina la existencia (o no) de un supuesto objeto matemático, y la verdad (o falsedad)

[43] Para un mayor desarrollo de la temática de la decidibilidad en Hilbert, confrontar con Visokolskis (2000).

de una proposición, estipulando si un determinado término refiere o no y si un enunciado o fórmula matemática bien formada es verdadera o no.

Este método es la *demostración matemática* (con sus diversas variantes).

P_6. Existe una teoría matemática ideal que permite describir con verdad (aunque no necesariamente actual) la totalidad del "mundo matemático".

Observemos que, debido a P_5, el platonismo posee un método inferencial poderoso. Su potencial deductivo es lo que lo hace ser el modelo especial que lo coloca en el pedestal desde donde imponer normas a todo otro proceder explicativo, y no sólo en Matemática, sino que adquiere así un dominio amplio sobre todas las otras disciplinas científicas.

Pero por otra parte, adolece de fuertes críticas a nivel descriptivo. En efecto, –y este es nuestro punto de ataque, el que creemos es el talón de Aquiles del platonismo– hay situaciones en Matemática que no son fehacientemente caracterizadas desde esta postura extrema. Como casos ejemplares al respecto mencionemos aquellas situaciones en las que los matemáticos operan a nivel heurístico y no de manera conclusiva mediante procedimientos deductivos axiomatizados. Allí lo que prevalece es la búsqueda de explicaciones más que de justificaciones demostrativas. La clave está en contestar los "porqué" y no tanto los "cómo", tratando de entender los modos de descripción más que los mecanismos probatorios de aquello que se intenta caracterizar. Así, la tarea de creación matemática no necesariamente recurre a procedimientos axiomáticos sino que se vale de todo cuanto permita dar cuenta de los resultados buscados. Luego habrá tiempo para hallar justificaciones adecuadas. Parece entonces que en la etapa inicial de los desarrollos matemáticos, la batuta la toma el nivel descriptivo y no el nivel inferencial. El platonismo no aceptaría este tipo de "realidad" fluctuante que tiene una existencia sólo potencial y no actual.

11.3. Otros realismos en Matemática

Un realismo platonista no sólo nos presenta un mundo autónomo de objetos y proposiciones matemáticas, sino que además intenta dar cuenta de la justificación de las afirmaciones matemáticas sustentando una particular noción de verdad de tipo correspondentista.

Es posible discutir al platonismo al menos desde dos ángulos o planos distintos:

(i) desde la manera en que está compuesta la realidad matemática (plano ontológico),

(ii) desde el tipo de justificación (y por tanto el tipo de verdad asumida) que da garantía a sus afirmaciones (plano semántico-epistemológico).

Se intenta defender una caracterización de realismo, contraria al platonismo, que no admitiría una división tajante entre estos dos planos. Veamos por qué.

Comencemos con el plano ontológico: pareciera que en la actualidad una relatividad conceptual es aceptada sin un rechazo masivo generalizado. Pero si la intención de uno es, por un lado, no abandonar esta actitud, pero por el otro mantener una postura realista, entonces el camino escogido por Hilary Putnam en Filosofía de la Matemática presenta una síntesis de ambos aspectos[44].

¿Es posible llevar la relatividad conceptual al extremo de suspender el juicio respecto de la manera misma en que la realidad matemática está caracterizada en objetos? ¿Se puede dudar respecto de las nociones que han sido consideradas *primitivas* en teoría de conjuntos, esto es, de las nociones de "existencia", "pertenencia", "elemento"?

El platonismo responde a esto claramente que no, ya que sin duda, primero tenemos la materia prima a partir de la cual podemos hablar, en un segundo plano, de esquemas conceptuales, teóricos, lingüísticos, todos los cuales son categorizaciones que los sujetos realizan, con el propósito de alcanzar esa realidad primigenia ya autoidentificada y clasificada de por sí en objetos. La tarea epistemológica viene después, y se limita a representar adecuadamente, mediante el uso del lenguaje, una realidad exterior e independiente de todo sujeto, escogiendo cada vez mejores descripciones que se ajusten a una realidad ordenada a priori.

Las entidades matemáticas, según el platonismo, son los conjuntos, las funciones, matrices, ecuaciones, vectores, etc., objetos autónomos, con existencia previa y separada de cualquier sujeto. El matemático tiene entonces por tarea colocar rótulos que permitan bautizarlas. No hay ninguna construcción de parte del sujeto; *sólo hay que hacer arqueología: descubrirlas y etiquetarlas.*

El "realismo interno" de Putnam propone una alternativa a esta visión, respondiendo afirmativamente a la pregunta antes formulada.

Supongamos que nos preguntamos cuáles son los elementos que constituyen el plano euclideano. Una respuesta posible es: los puntos. Entonces, de acuerdo a esto, los puntos son objetos concretos. Pero otra variante sería:

---

[44] Sus desarrollos al respecto pueden encontrarse en varias de sus obras, como por ejemplo en Putnam (1975, 1981, 1987 y 1988).

no, los puntos no son las partículas elementales del plano; quienes cumplen esta función son las circunferencias, y los puntos son construcciones abstractas a partir de la noción primitiva de circunferencia, como límites de sucesiones de circunferencias concéntricos. O también, si se quiere, como intersecciones de haces de rectas, siendo en este caso la recta nuestra noción primitiva.

Pero entonces, ¿todo vale? La decisión respecto de lo que existe, ¿es pura convención? No, no da lo mismo cualquier cosa. Pues cada una de estas versiones se apoya en una teoría diferente y, ya dentro del marco de una visión de mundo aceptada, la respuesta deja de ser convencional.

Es imposible evitar cualquier descripción del plano euclideano que no sea apoyada en alguna teoría. Pero, una vez aceptada convencionalmente una de tales versiones, no se elude la respuesta: ella está determinada, y no está sujeta a convenciones arbitrarias, opiniones o decisiones culturales.

Hay una subdeterminación intrateórica, una relativización a contextos teóricos mayores. Cualquier descripción del plano euclideano requiere para su comprensión de la posibilidad de asimilar alguna teoría que la englobe.

En *Razón, Verdad e Historia*, Putnam (1981) dice:

> Los ‘objetos’ no existen independientemente de los esquemas conceptuales. Desmenuzamos el mundo en objetos cuando introducimos uno u otro esquema descriptivo, y puesto que tanto los objetos como los símbolos son internos al esquema descriptivo, es posible indicar cómo se emparejan (p.61).

Y en *The Many Faces of Realism* (y la misma cita en *Representación y Realidad*, p 175) Putnam (1987) dice:

> Podemos y debemos insistir que algunos hechos están para ser descubiertos y no meramente legislados por nosotros. Pero esto es algo que se debe decir cuando uno ya ha adoptado una manera de hablar, un lenguaje, un ‘esquema conceptual’. Hablar de ‘hechos’ sin antes especificar el lenguaje a ser usado es hablar de nada; la palabra ‘hecho’ no tiene fijado su uso por la realidad misma más que la palabra ‘existe’ o la palabra ‘objeto’ (p.36).

La perspectiva internalista nos permite responder por ejemplo de dos maneras distintas a la pregunta: ¿cuántos objetos posee este conjunto?, si el caso es que en el “mundo lógico de Carnap” hay tres individuos x_1, x_2, x_3. Trivialmente, desde esta teoría, hay tres elementos. Pero si tenemos en cuenta las sumas mereológicas de Lezniewski, diremos que sus elementos son todas las posibles combinaciones de sumas entre x_1, x_2, x_3.

Así, según la versión de lógica polaca dada, habrá $2^3 = 8$ elementos, a saber: el individuo nulo, x_1, x_2, x_3, $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $x_1 + x_2 + x_3$.

Ninguna de ambas teorías es *la* teoría correcta y la otra es la teoría falsa. Ambas pueden convivir. Ambas cumplen dos requisitos muy preciados por cualquier realista:

R_1. Consistencia interna.

R_2. Compatibilidad con nuestra experiencia cotidiana.

Ser realistas no implica creer que hay una única teoría (aún ideal) que permite describir lo que realmente es, o una única salvo isomorfismo. Nunca podemos describir sin caer en ciertos usos del lenguaje que suponen una aceptación explícita o implícita de alguna o algunas teorías.

Creer en objetos, es entonces:

(i) creer en una realidad objetiva, y

(ii) creer en una teoría que categorice esa realidad precisamente en esos objetos y no en otros.

Así, vemos que el platonismo afirma:

R_1. Consistencia interna.

R_2. Compatibilidad de la teoría con la experiencia.

R_3. Única correspondencia de la experiencia con la teoría, es decir, para cada situación existe una y sólo una teoría que responde a ella en todos sus detalles.

Es esta última tesis R_3 que rechazamos, y con ello aceptamos un realismo más débil que el platonismo, en tanto que debe cumplir sólo dos de sus tesis. ¿Y qué ganamos con este debilitamiento? Más aún, ¿seguimos siendo "realistas" afirmando sólo R_1 y R_2? Antes de responder a esta pregunta, pasemos ahora al plano semántico-epistemológico.

La adopción de un único método justificatorio en Matemática ya desde que la Matemática misma se constituyó como disciplina cognoscitiva, ha mostrado ser productiva. ¡Qué mejor argumento que éste para continuar aceptando sin discusión el status epistemológico de la misma! La demostración se presenta no sólo como un método *interno* de justificación en Matemática, proporcionando argumentos deductivamente concluyentes, sino que también como uno *externo*, esto es, como un método de justificación *del* conocimiento matemático. La demostración es una noción epistémica, pues pretende algo más que ser garantía de un resultado matemático consistente. Pretende ser garantía de una *creencia*: la que *todos* los sujetos que afirman tal resultado poseen.

Si cada demostración apoya una creencia, entonces, se podría decir que el método demostrativo mismo es el generador de creencias matemáticas; y no sólo de creencias sino de creencias garantizadas, esto es, de conocimiento matemático. La noción de verdad matemática, entonces, pasa a ser una noción epistémica, se deriva de nuestras creencias, depende de nuestras prácticas de confirmación o justificación.

Tal vez ésta sea la razón por la cual la Matemática sea considerada una disciplina *objetiva*. Esta capacidad de convicción, de aceptación general que supera toda duda posible de todo individuo que se enfrente a ella es, como dijimos al comienzo del capítulo, una razón de peso para creer en la existencia de una realidad matemática.

Podríamos presentar la siguiente objeción:

Toda disciplina que juzgue sus resultados a partir de un único criterio (el demostrativo en este caso), o bien cae en circularidad (o, más precisamente, en una petición de principio), o bien prejuzga la cuestión.

En efecto: si (como más arriba se planteó) resulta que la demostración matemática es a la vez un método de justificación interno de la Matemática y externo, como externo tiene la pretensión de dar fundamento. Y en este caso no podría ser usado para defender ninguna tesis previa a su adopción, sino se expondría a la objeción de ser inadecuado; toda tesis previa sería prejuiciosa, no se apoyaría en el método.

En cambio, si por el contrario, se parte de alguna tesis (por ejemplo, supuestos ontológicos y epistemológicos respecto del mundo matemático), se corre el riesgo de acusación de circularidad, ya que la manera de justificar a estas mismas tesis es a partir del método.

Es decir: primero, afirmación de supuestos básicos; segundo, adopción del método; tercero, aplicación del método para justificar los supuestos primeros.

La crítica aquí expuesta a la unicidad del método proviene de una inquietud por manifestar una situación real, que de hecho se da entre los matemáticos: en el desarrollo de una investigación, surgen resultados parciales que tienen una apariencia de convicción elevada, cuya aceptación no necesariamente pasa ninguna prueba deductivamente concluyente. Se suele decir, oír decir, o leer en estos casos: "*suena* trivial", "se *ve* que se cumple tal cosa", "se *deja* como ejercicio para el lector", etc.

Las razones que llevan a tal aceptación son a veces imponderables. Por cierto que pueden estar sujetas a errores: no necesariamente ha habido la *debida* confirmación teórica. Pero como heurística, resulta ágil y provechoso adoptar tal actitud.

En el preámbulo a *El Método*, Arquímedes se dirigía a Eratóstenes así:

> He creído oportuno confiarte por escrito las características propias de un método según el cual te será posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la Mecánica. Algo que, por lo demás, estoy convencido, no es en absoluto menos útil en orden a la demostración de los teoremas mismos. Pues algunos que primero se me hicieron patentes por la Mecánica, recibieron luego demostración por Geometría, habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscaba sin la menor idea al respecto. (Arquímedes, 1966, p.34; 1986, p.35; 1993, p.61).

Y más adelante dice: “Lo que hemos aducido no demuestra ciertamente este resultado, sin embargo da a la conclusión visos de verosimilitud”.

Esta institucionalización de un único método que produce justificación concluyente ha dominado la Historia de la Matemática hasta el momento mismo de la discusión por sus fundamentos. Recién a partir del siglo XX hay un verdadero cuestionamiento filosófico respecto de los patrones de justificación en esta disciplina.

Generalmente se enfoca esta disputa desde el punto de vista de la naturaleza de los objetos matemáticos, y no pensando que la cuestión de fondo estaría ligada al lugar o status ontológico de la demostración matemática misma.

Si lo analizamos desde esta perspectiva, podemos notar que el formalismo –una de las tres corrientes filosóficas que se impusieron en los inicios de la Filosofía de la Matemática, junto con el logicismo y el intuicionismo– obvia la cuestión acerca de la existencia de entidades matemáticas y destaca las virtudes de la consistencia como elemento clave para garantizar objetividad. Concretamente, el formalismo niega toda realidad matemática y se queda con una noción de existencia reducida a una mera consistencia lógica.

En cambio, la postura constructivista asigna al método el lugar central, para luego, en un segundo paso, decir qué es lo que existe: sólo existe aquello para lo cual es posible obtener una construcción finita del mismo.

Logicismo, formalismo e intuicionismo rescataron del olvido (filosófico) el mayor tesoro que la tradición euclideana ha querido preservar: el rigor proporcionado (en cada caso con variantes) por una concepción de la Matemática basada en la posibilidad de axiomatización, en una *reducción* de esta disciplina a un conjunto de definiciones, axiomas, teoremas y demostraciones de los mismos, la cual nos proporciona una imagen de la Matemática que no describe "realmente" la compleja actividad del investigador.

El sueño hilbertiano de formalización exhaustiva, así como las aspiraciones de Brouwer de poder llevar a cabo un proceso de construcción de toda la Matemática existente, o la ambición de Russell de reducir todo a la Lógica, todas estas alternativas vieron frustrados sus proyectos, por razones teóricas intrínsecas a la Matemática y por razones o limitaciones humanas.

Tal vez la verdadera gran revolución respecto del método en Matemática surge con la introducción de computadoras en distintos procesos de su desarrollo.

Hay dos roles distinguibles que hoy juegan en la aparición de las mismas: por un lado, colaboran con el matemático en el propósito de formalización exhaustiva, cubriendo lagunas de demostración predecibles por el investigador, aunque muchas de ellas tediosas, acortando los tiempos, acelerando los procesos deductivos.

Por otro lado, y tal vez esto presente mayor interés filosófico, colaboran con el matemático, que es quien las programa, en la obtención de resultados no alcanzados previamente por nadie, y por métodos y tiempos que escapan de toda capacidad física y comprensión para rastrearlos.

En particular, el caso más llamativo a que se hace referencia lo constituye la demostración del "teorema de los cuatro colores", presentado en 1976 por Apel, Haken y Koch, y que fuera conjeturada cerca de un siglo atrás.

El teorema plantea la posibilidad de colorear una superficie plana o una esfera usando únicamente cuatro colores, de tal manera que dos regiones con un único punto en común deberían poseer el mismo color.

El problema que aquí se plantea, entre otros, es que se está en presencia de una demostración de dicho teorema pero con la propiedad de permanecer incompleta en principio si se tiene en cuenta que la manera en que opera en determinados pasos es haciendo elecciones probabilísticas de casos. El tiempo que significaría *rastrear*[45] todo el programa haría de este trabajo uno humanamente imposible.

Tanto el caso de Arquímedes con la implementación de un método mecánico, como el del teorema de los cuatro colores, pueden ser pensados como *buenas estrategias heurísticas*. Pero el propósito de este trabajo es interpretarlas

---

[45] La palabra que se tiene en cuenta aquí es traducción del verbo inglés *to survey*, palabra un tanto problemática en cuanto a la determinación de su referencia.

como claros ejemplos de procesos objetivos de convicción que los matemáticos adoptaron como pseudo-pruebas de ciertos teoremas, pero que en realidad podrían haber sido considerados verdaderas justificaciones *si* relajáramos las condiciones de garantía demostrativa.

No es que se deba desechar la clásica noción de *demostración matemática* sino que se debería ampliar, a tal punto de incluir por ejemplo demostraciones computarizadas (aún cuando éstas no permitan a los sujetos rastrear paso a paso sus resultados), o por ejemplo las demostraciones mecánicas de Arquímedes o cualquier tipo de *verificación* gráfica o analítica que permita *convencer*, aunque no necesariamente de manera concluyente a quien accede a ella.

En el trabajo titulado *¿Qué es la verdad matemática?,* Putnam cita un ejemplo todavía más sorprendente y que ha estado en boca de todo matemático que se queje de falta de rigor en su disciplina: el caso de la correspondencia biunívoca entre números reales y puntos de una recta ilimitada por ambos extremos. Asombra por lo natural que resultó *aceptar* esta cuestión durante tantas generaciones de matemáticos, como si hubiera plena evidencia de la misma.

La Matemática se nos presenta con un carácter cuasi-empírico en más oportunidades de lo que parece, menos estable y con más fisuras que las que se suelen destacar.

Aún el mismo platonismo muestra la incerteza en el método al aparecer los *famosos* enunciados indecidibles. Estas oraciones sólo muestran los límites de justificación que una determinada teoría posee. Pero no refutan la teoría.

Paradójicamente, éstos tienden a reforzar la imagen de este tipo de realismo, ya que permite manifestar un tipo de existencia más allá de todo alcance humano. Pero entonces, si este es el caso también de las lagunas que un programa al estilo propuesto por Apel y Haken presentan, ¿por qué no creer en este tipo de resultados si uno se manifiesta realista?

Davis y Hersh (1981) en su libro titulado *Experiencia Matemática* invitan a aceptar al matemático típico como un platonista de lunes a sábado y un formalista los domingos. Dicen:

> Esto es, cuando está [el matemático] haciendo matemática, está convencido que está tratando con una realidad objetiva cuyas propiedades intenta determinar. Pero entonces, cuando se lo desafía a dar un panorama filosófico de la realidad, encuentra más fácil pretender que después de todo no cree en ella.
>
> El matemático típico es tanto un platonista como un formalista: un platonista secreto con una máscara formalista que se coloca cuando la ocasión

lo requiere [o cuando los filósofos lo presionan con preguntas molestas, como diría Dieudonné] (p.322).

Lo que se plantea es la *adhesión* a un *realismo pluralista* donde cada teoría tendría sus propios alcances y sus maneras de constituir y justificar la existencia de los objetos matemáticos que ella caracterice. Ser realista no implica aferrarse a una única teoría.

Si, como dijimos antes, las demostraciones matemáticas permiten aceptar creencias, estos conjuntos de creencias pueden ir variando con las distintas culturas y épocas. Por tanto, sería razonable hallar nuevas pautas epistémicas que aseguren confiabilidad a *otros* métodos.

Nos queda pues responder acerca de las ventajas de degradar el platonismo debido a la pérdida de la tesis R_3: ¿qué tipo de "realismo" resulta en este proceso?

Habíamos mencionado antes que hay dos factores que entran en juego en el análisis de las debilidades y fortalezas de la elección de una perspectiva teórica en Filosofía de la Matemática: ellos son el potencial inferencial y la capacidad descriptiva.

Así, notamos que el platonismo privilegia el primero de estos dos factores en desmedro del segundo. Nuestra posición realista pluralista hace el camino inverso: nos importa más una adecuada caracterización de los elementos en juego que una precisión demostrativa. Al fin y al cabo, la aceptación de cualquier teoría es en principio provisoria y no definitiva, por más énfasis que pongamos en ella. Claro está, que si desde el comienzo partimos con una teoría que constituye un arma contundente para posibles defectos futuros, mejor será. Pero lo que interesa no es un acierto de entrada sino la construcción de hipótesis plausibles, que bien serían refutables pero que en principio serían sostenibles "mientras duren".

Esta actitud heurística "caritativa" es la que ha llevado a quienes la han puesto en práctica, al posible logro futuro de grandes resultados: Arquímedes nos presenta un fuerte ejemplo de tal situación cuando en su obra arriba mencionada –*"El Método"*, modo abreviado de llamar a este exquisito texto hallado recién en 1906[46]– plantea un procedimiento provisorio y conjetural para abordar el problema de hallar áreas de figuras y volúmenes de cuerpos geométricos. Luego, consigue obtener mediante el método de exhausción[47], un método demostrati-

[46] Para más información al respecto, confrontar en Visokolskis (1994).

[47] El término inglés "exhaustion" encuentra variadas formas de traducirse al castellano, según se haga énfasis en el sonido "s" o en la presencia de la letra "t". En el primer caso los autores traducen "exhaustion" utilizando la expresión "exhaución", y en el segundo caso lo hacen vía

vo garantido, los mismos resultados que otrora intentara llevar a cabo vía una metodología heurística improvisada por él pero hipotéticamente efectiva, como en realidad lo fue.

Así, rechazar la tesis R_3 a favor de una apertura teórica plural permite contemplar varias posibilidades a la vez sin descartar ninguna de ellas, por prejuicios teóricos a priori. La alternativa entonces es este realismo pluralista, democrático y caritativo a la hora de suspender el juicio respecto de la certeza, rigurosidad y exactitud de la propuesta hipotetizada como plausible.

Ello a su vez implica la aceptación de una ontología en la que lo posible es parte de lo real, y no la clásica y tradicional ontología platonista donde lo único real es lo actual, lo efectivo, lo que acontece con verdad. De esta manera, la epistemología que acompaña a una ontología de lo posible busca conciliar los aspectos representativos –únicos que contempla el platonismo dado que la realidad que existe de por sí sólo puede y debe ser entendida y no construida– con los aspectos creativos, y así dar lugar al desarrollo de hipótesis plausibles aunque no aún garantidas.

Además de citar el potencial inferencial y la capacidad descriptiva de una posición filosófica como la que ofrecemos acá, existe un tercer factor que contribuye fuertemente en su aceptación y consiste en su aplicación en el aula: de qué manera el trabajo docente puede beneficiarse con una perspectiva realista pluralista. Cabe aquí traer a cuenta el siguiente ejemplo concreto de situación aúlica: un tema frecuente en el trabajo docente consiste en dar respuesta a una pregunta típica del estudiante, a saber, ¿para qué sirve el estudio de estos temas matemáticos?, ¿se aplican a la realidad?, ¿dónde se ven implementados?, ¿qué tipo de objetos son éstos? El carácter abstracto y formal de las entidades matemáticas suele ser un tema urticante para los alumnos, que no ven necesidad de incrementar el mundo agregando objetos que nunca parecen tener algún tipo de utilidad práctica. Una postura realista extrema podría responder a todos estos interrogantes, advirtiendo que el mundo de la matemática es un mundo independiente y autónomo de aquel del estudiante, uno muy valioso, más perfecto y preciso. Como tal, este mundo sirve de modelo a nuestro mundo inseguro y nos guía hacia un camino de belleza extrema, rigor y pureza de su perfección, un bastión de infalibilidad. Qué mejor modelo que el de un mundo sin fisuras. En

---

el término “exhausción” o “exhauxión” o también “exhaucción”. Nosotros adoptaremos esta segunda opción en su primera acepción, es decir como “exhausción”, y con ello pretenderemos significar el total uso y consumo, agotamiento, acabamiento, clausura (ya sea por completitud o por vaciamiento, por perfección o extinción) de algo. En Matemática, se aplica a la completitud de un proceso infinito que busca “agotar” aquello que describe.

cambio, un realista pluralista no busca necesariamente el mejor de los mundos, sino crear mundos beneficiosos para los quehaceres habituales de la vida cotidiana. En este sentido, las abstracciones y formalismos matemáticos permiten crear formas nuevas de mirar la realidad, dejando así de pertenecer tan sólo al campo de nuestro pensamiento, para así adquirir vida, y por ello no sólo operar como modelos de nuestro pensamiento sino que se involucran con todo aquello que nos hace individuos. Poder realizar cálculos prácticos con ayuda de nuestros conocimientos cambia el estatuto ontológico de estos temas, ampliando sus modos de realidad, materializándolos y abriendo nuevos juegos del lenguaje y con ellos nuevas formas de comportamiento aplicables a diferentes situaciones cotidianas. Cuando uno adquiere un entrenamiento matemático, es curioso cómo localiza estructuras formales en hechos reales y viceversa, modeliza situaciones concretas mediante estructuras matemáticas. Este interjuego se ve enriquecido desde una ontología de lo posible, como la que ofrece un realismo pluralista, que no pretende operar sólo con lo seguro e irrefutablemente verdadero, sino también con lo posible y conjeturable, hasta tanto se demuestre su verdad. Este carácter hipotético muestra una apertura mental generalmente bloqueada desde los realismos extremos. Así, el lema de un realista pluralista será: la posibilidad abre puertas a la crítica; en cambio la seguridad, no sólo no las abre, sino que cierra aquellas puertas mal abiertas aunque promisorias.

11.4. Conclusión

Volviendo entonces a la metáfora de *la dama matemática*, Putnam presenta una alternativa interesante que intenta dar a la señora un papel más activo en el mundo real. Pero pareciera que le exige al menos *a largo plazo* que cumpla con los requisitos severos de proporcionar una verdad según los cánones más rigurosos, aún cuando esa verdad se alcanzara a posteriori. Pero entonces, todavía esta mujer es engañada: seducida a participar en los verdaderos problemas de una disciplina empírica, se le exige más aún que a los demás. ¿Por qué? Porque hasta ahora demostró que podía; que estaba en posesión de un método *casi* infalible. Que pese a todas las dificultades de no mostrarse enteramente inquebrantable, se comportaba *mejor* pues respetaba más allá de sus propios designios, los cánones establecidos, todo lo que la teoría le permitía.

¿Cuál sería una verdadera alternativa para la Matemática? ¿Cuál sería una verdadera liberación para esta dama?

Dejémosla andar por el mundo empírico y valerse de esos medios para garantizar su participación productiva en el mundo matemático, en el corpus de conocimiento matemático. Aceptemos patrones de justificación matemática que no se restrinjan tan sólo a las pautas impuestas por la clásica imagen deductiva aportada por la demostración.

Por otra parte, en general los matemáticos, en su labor diaria, no son tan rigurosos y al extremo formalistas. Su manera de trabajar, en la mayoría de los casos (sino en todos), no es siguiendo el modelo euclideano en todos sus pasos. Hay todavía una heurística puesta en marcha que los productos terminados y publicados no reflejan.

Si pretendemos describir una imagen más verosímil de esta actividad humana, no lo vamos a hacer exclusivamente desde un realismo platonista, ni tampoco, en el otro extremo, desde un nominalismo puro. Ninguna de todas estas formas es ni necesita ser refutada. Sólo hay versiones mejores o peores para determinados fines. Y en la medida que nos comprometamos con una elección teórica, todo correrá por carriles momentáneamente bien aceitados, hasta tanto las hipótesis subyacentes a esta posición no caigan en errores insoslayables.

11.5. Referencias bibliográficas

Arquímedes (1966). *El Método*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Arquímedes (1986). *El Método.* Madrid: Alianza Editorial.

Arquímedes (1993). *El Método relativo a los teoremas mecánicos.* Barcelona: Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Boston: Birkhäuser Houghton Mifflin Company Boston.

Davis, P.; Hersh, R. & Marchisotto, E. (1995). *The Mathematical Experience. Study Edition.* Boston: Birkhäuser Boston.

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics really?* Oxford: Oxford University Press.

Hilbert, D. (1902). Mathematical Problems. *Lecture Delivered Before the Second International Congress of Mathematicians at Paris in 1900.* Extraído el 2 de febrero de 2011 en http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/ problems.html

Matiyasevich, Y. (1993). *Hilbert's Tenth Problem.* Cambridge/London:The

MIT Press.

Putnam, H. (1981). *Reason, Truth, and History.* Cambridge: Cambridge University Press.

Putnam, H. (1987). *The Many Faces of Realism.* La Salle, Illinois.: Open Court.

Visokolskis, S. (1994). Arquímedes y el descubrimiento matemático: un caso histórico. En *Actas de las IV Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia. Selección,* 234-251. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba Ediciones.

Visokolskis, S. (2000). El décimo problema de Hilbert: elementos externos para una historia interna. *Cuadernos del Sur - Filosofía 30*, 159-172.

A modo de cierre

A lo largo de los once capítulos hemos hecho una recorrida por elementos centrales de distintas líneas teóricas que hoy en día son campos de investigación en Educación Matemática.

Cada uno de ellos ha sido presentado tratando de enfatizar en lo que lo caracteriza describiendo algunos de sus elementos teóricos más relevantes, pensando en que el texto sea de utilidad para un docente, o estudiante del profesorado de Matemática de nivel medio. Esto hace que hayamos optado por evitar, en la mayoría de los casos, incluir aspectos propios de investigaciones que focalicen en aspectos metodológicos o cuyos resultados sean demasiado puntuales o refieran a casos muy particulares.

Desde nuestra óptica, entendemos que la formación del profesor debe contemplar una diversidad de enfoques en Educación Matemática, a lo que debiera sumarse un conocimiento que permita, por un lado, analizar documentos (sean textos, secuencias, planificaciones de clases, etc.) y, por otro, fundamentar sus propias decisiones matemático-didácticas.

Una formación que contemple la diversidad de líneas didácticas e incluya herramientas para analizar y fundamentar, permitirá valorizar la profesionalización del docente dado que el mismo tendría elementos para sostener teóricamente la enorme cantidad de decisiones que involucra esta tarea en función de múltiples aspectos (instituciones, el contexto social, el grupo de estudiantes en particular, el contenido matemático a enseñar, etc.).

La Colección Educación de la Universidad Nacional de General Sarmiento reúne la producción editorial que resulta de las investigaciones, actividades y desarrollos en las áreas temáticas de educación, pedagogía, programación de la educación, política educativa, historia de la educación y didáctica. Estas líneas de investigación y docencia son fundamentales en el proyecto académico de la UNGS y tienen un desarrollo constante y permanente.

La formación del profesor debe incluir un conocimiento sobre temáticas de Educación Matemática que le permita entender las teorías subyacentes a los lineamientos curriculares, incorporar resultados de investigaciones y fundamentar sus propias decisiones matemático-didácticas. Cada uno de los once capítulos de este libro presenta, de la mano de autores que han trabajado y contribuido a su desarrollo, una temática diferente: algún enfoque de Didáctica de la Matemática, alguna línea de investigación en Educación Matemática, alguna aproximación didáctico-metodológica y Filosofía e Historia de la Matemática. Cada capítulo enfatiza lo que caracteriza a cada temática, describe algunos de sus elementos teóricos más relevantes y explicita distintas vinculaciones prácticas con la formación de profesores.
Esta obra posibilita a estudiantes de profesorados de Matemática, docentes formados y en actividad y también a formadores de profesores actualizar sus conocimientos en distintas temáticas de Educación Matemática y contribuir con su desarrollo profesional.

Colección Educación
Universidad Nacional de General Sarmiento

ediciones.ungs.edu.ar

eduvim
Editorial Universitaria Villa María

9 789876 301169