Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos

Mabel Rodríguez (coordinadora)

Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos

Patricia Barreiro, Inés Casetta, Martín Chacón,
Víctor González, Daniela Isla Zuvialde, Paula Leonian,
Tamara Marino y Mabel Rodríguez

EDICIONES UNGS

Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos / Mabel Rodríguez... [et al.] ; coordinación general de Mabel Rodríguez.- 1a ed . - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2019.
84 p. ; 20 x 14 cm. - (Educación. Educación en ciencias ; 2)

ISBN 978-987-630-440-5

1. Matemática. 2. Educación Científica. 3. Método Heurístico. I. Rodríguez, Mabel, coord.
CDD 510.7

EDICIONES **UNGS**

J. M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)
Prov. de Buenos Aires, Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507
ediciones@campus.ungs.edu.ar
ediciones.ungs.edu.ar

Diseño gráfico de colección: Andrés Espinosa
Diseño de tapa: Daniel Vidable
Diagramación: Eleonora Silva
Corrección: Edit Marinozzi

Impreso en Ediciones América
Abraham J. Luppi 1451, CABA, Argentina,
en el mes de diciembre de 2019.
Tirada: 400 ejemplares.

Libro
Universitario
Argentino

Serie
Educación en ciencias

Coordinación:
Mabel Rodríguez

Equipo editorial:
Gustavo Carnelli, Patricia Barreiro,
Tamara Marino y Paula Leonian

Esta serie reúne aportes del campo de la enseñanza de distintas ciencias. Enfocada inicialmente en la educación matemática, contribuye a la comunidad académica con textos útiles, claros en su presentación y accesibles a un público de estudiantes de la formación de profesores, docentes de nivel medio y superior y formadores de formadores e investigadores.

La serie se articula en dos subseries: *Ideas para la clase de matemática* e *Investigaciones en educación matemática*.

Investigaciones en educación matemática

Cada libro aborda una investigación realizada, desde sus primeras ideas hasta su culminación.

El lector encontrará, en la vivencia relatada por los propios investigadores, desde las preguntas iniciales que movilizaron el trabajo, las decisiones sobre la elección del marco teórico, el planteo de los objetivos y los detalles metodológicos; hasta los pormenores en el desarrollo del trabajo, las dificultades, los avatares, la necesidad de hacer ajustes teóricos o metodológicos y los cambios de rumbo sufridos durante el desarrollo de la investigación.

En cada texto se incluyen ejemplos, así como detalles metodológicos o teóricos y resultados, en la medida que se estima que son valiosos para brindarle al lector una clara idea del camino que se recorre al hacer investigación en educación matemática.

En cuanto resulte posible, se proponen articulaciones con la enseñanza, que también podrían ser capitalizadas por el lector para su rol docente.

Entendemos que los libros ofrecen un eslabón que permite acercar la producción de investigación en educación matemática, y los modos en los que esta se construye, a un público amplio de colegas –no necesariamente investigadores– interesados en conocer o utilizar resultados actualizados para su trabajo profesional docente.

Índice

Introducción

El interés por mejorar la inserción de los estudiantes en el nivel superior, y su desempeño en las primeras materias de grado, nos llevó a plantear la investigación que describimos en este libro.

El acceso a los estudios superiores es tema de investigaciones desde distintas perspectivas teóricas, entre ellas, la educación matemática. Un grupo de investigadores de la Universidad Nacional de General Sarmiento, ubicada en el conurbano bonaerense, junto con otro grupo de la Universidad Tecnológica Nacional, Regional Concepción del Uruguay, de la provincia de Entre Ríos, nos interesamos por plantear y desarrollar una investigación en este campo.

Pretendimos hacer un aporte contextualizado a cada institución que, por un lado, nos brindara información sobre el desempeño de los estudiantes en la transición del nivel medio al superior y, por otro, nos permitiera volcarlo en aportes para la tarea de los docentes que enseñan en ese tramo formativo.

Nuestras inquietudes iniciales se centraron en conocer las estrategias disponibles para abordar problemas matemáticos que tienen los estudiantes que atraviesan la articulación entre ambos niveles. Luego, tanto en la formulación del proyecto como en su desarrollo, fuimos incorporando matices e intereses, pero también descartando ciertos aspectos considerados inicialmente. Así, logramos llevar adelante un trabajo que nos brindó claridad sobre las herramientas disponibles en ingresantes como también acerca del trabajo docente que atiende a favorecer la formación de los estudiantes en esa transición.

La investigación se extendió por alrededor de cuatro años y fue llevada a cabo, en distintos momentos, por los siguientes docentes: Patricia Barreiro, Inés Casetta, Vilma Colombano, Martín Chacón, Stella Maris Farías, Omar Faure, Víctor González, Daniela Isla Zuvialde, Paula Leonian, Tamara Marino, Adriana Poco, Belén Ponce de León (becaria), Mónica Real y Mabel Rodríguez.

En el capítulo 1 presentamos las primeras inquietudes que nos planteamos como investigadores respecto de la formación de un estudiante que ingresa al nivel superior y el recorrido durante el proceso de investigación, desde los cuestionamientos iniciales hasta la formulación del proyecto que desarrollamos. Presentamos el porqué de enmarcar el trabajo en la Resolución de Problemas, como línea teórica de educación matemática, y las decisiones metodológicas que anticipamos.

El segundo capítulo contiene el relato de cómo desarrollamos el proyecto. Contamos las dificultades que se nos suscitaron, los avances, los cambios que decidimos incluir y los motivos que nos llevaron a hacerlos. Explicamos cómo llegamos a la necesidad de ajustar definiciones y establecer criterios operativos para distintas etapas de la investigación.

Todo el detalle referido a los resultados alcanzados se encuentra en el último capítulo, con precisiones teóricas y de índole metodológica. Además, decidimos incluir en él aportes para la tarea docente que resultaron como consecuencia del trabajo y que podrían aislarse de la investigación y capitalizarse como herramientas para el trabajo en el aula de matemática.

Esperamos que el libro resulte valioso no solo para los investigadores formados en educación matemática, sino también para quienes se inician en la actividad de investigación y para estudiantes del profesorado de matemática. Cada uno encontrará en el texto aportes que podrá capitalizar en función de sus intereses. Deseamos, a la vez, que la forma en la que relatamos el trabajo favorezca una lectura fluida y amena para el lector.

1
El recorrido hasta el planteo de la investigación

1.1. Introducción

En este capítulo presentamos el recorrido realizado desde que nos planteamos las primeras inquietudes e intereses a develar, hasta que logramos formular un proyecto de investigación que expresara, con detalle y precisión, cuál sería la meta a alcanzar y el camino que nos propusimos recorrer.

1.2. Las primeras inquietudes

Muchos investigadores y educadores están de acuerdo en que la resolución de problemas tiene un rol central en la producción de conocimiento matemático y por ello también debería tenerlo en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de esta disciplina. En consecuencia, creíamos –y lo sostenemos en la actualidad– que la enseñanza de la matemática debe considerar al estudiante como a un matemático en alguna medida, en el sentido que trabaja con problemas y cuestionamientos que son nuevos para él y realiza el mismo tipo de actividad que un matemático (explora, conjetura, analiza, etcétera), pero con los saberes puestos en juego adecuados a la materia y el nivel educativo que transita. El énfasis en este posicionamiento está puesto en que el estudiante comparta con el matemático el tipo de quehacer. De este modo, estaría realizando tareas cualitativamente cercanas a las de él, pero con contenidos cuantitativamente distantes.

Bajo esta primera premisa, compartida por la comunidad de educadores matemáticos, nos preguntamos, ¿es posible enseñarle a un estudiante a resolver problemas si sabemos que no hay un procedimiento a seguir que garantice su resolución?, ¿cómo resuelven problemas los matemáticos?, conocer el modo en que lo hacen, ¿podría ayudarnos a pensar en su enseñanza? Con estas preguntas en mente, indagamos aportes referidos a la enseñanza de la resolución de problemas. Cabe aclarar que, previamente a iniciar esta investigación, habíamos trabajado con problemas con la finalidad de enseñar *algún contenido*, es decir, con un enfoque que podemos enmarcar en la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1994). Pero nuestro interés se corrió de esta perspectiva y se focalizó en enseñar a los estudiantes *a que resuelvan problemas;* es decir, la resolución de problemas como fin o meta. Conocíamos los aportes de Charnay (1994), quien plantea tres usos de la resolución de problemas como metodología de enseñanza de la matemática: como una forma de aplicar conceptos previamente adquiridos, como una fuente para adquirir estrategias nuevas de resolución y pensamiento matemático y como un método para aprender un concepto desconocido. Nuestras preocupaciones se enmarcaban en el segundo tipo de uso.

El primer autor que tomamos para adentrarnos en el enfoque fue Polya (puede verse el trabajo inicial de este autor en la referencia de 1989, o bien, Pochulu y Rodríguez, 2012, para conocer una aproximación a la resolución de problemas actual, que incluye otros aportes). Al leer su trabajo entendimos que atendía a nuestros intereses, así que, ¡ya teníamos una idea de cómo comenzar a trabajar! Por ahí iríamos.

A esta altura no teníamos todavía precisiones acerca de qué plantear como preguntas ni objetivos de investigación. Había aún mucho camino por recorrer antes de llegar allí. Sí teníamos en claro cuál era la población con la que trabajaríamos, y es lo que describimos en el apartado siguiente.

1.3. Contexto

Nos interesaba trabajar con estudiantes ingresantes al nivel superior. Este grupo es heterogéneo, con variadas trayectorias educativas previas, transitan un cambio de nivel e institución educativa, por lo que requieren toda nuestra atención como docentes, dedicación y conocimiento para favorecer su inserción a los estudios superiores con herramientas adecuadas. La investigación que produce resultados específicos para este tramo formativo es, sin dudas, valiosa y es hacia allí hacia donde nos dirigimos.

Si conociéramos cómo se desenvuelven ante el trabajo con problemas matemáticos –si disponen o no de diversidad de formas de encararlos, de revisar lo hecho, de indagar, etcétera– estaríamos en condiciones de mejorar nuestra propuesta de enseñanza para fortalecer aquello que necesiten y así contribuir a que logren un tipo de aprendizaje que podrían capitalizar en los cursos siguientes. Dado que el equipo de investigación que llevaría adelante el proyecto estaba conformado por integrantes de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) y de la Facultad Regional Concepción del Uruguay de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN-CU), consideramos propicio situar nuestro estudio en los estudiantes de los cursos de ingreso de ambas instituciones.

Los cursos de ingreso de ambas instituciones tenían como propósito revisitar contenidos trabajados en la escuela secundaria y los problemas que se planteaban en ellos eran el medio para lograr tal fin. Más allá de las intervenciones o impronta que cada docente pudo haber dado, con o sin intención, enseñar a resolver problemas no formaba parte de las propuestas. Esto mismo ocurre en el nivel medio, según se percibe en los diseños curriculares de ambas provincias. De este modo, los estudiantes que ingresaban a estas universidades no habían recibido, ni recibirían en esta primera instancia, enseñanza específica para resolver problemas.

En este contexto, nuestro interés era conocer cómo los estudiantes resolvían problemas al finalizar el curso de ingreso, independientemente de los contenidos matemáticos específicos que sí habían sido objeto de enseñanza. Entendíamos que, de poder resolverlos, esto no habría sido producto de una enseñanza intencional, sino más bien se habría dado de forma espontánea.

Dos de los investigadores del equipo tenían trayectoria en investigación en matemática, lo que nos permitió considerar, como una primera línea de trabajo, la identificación de estrategias de resolución de problemas que ellos tenían en su bagaje de herramientas y que utilizaban en su quehacer matemático. Una segunda línea de trabajo fue caracterizar las estrategias de resolución de problemas que los estudiantes disponen al finalizar los cursos de ingreso al nivel universitario. Como hemos mencionado, capitalizaríamos este conocimiento para después fortalecer o complementar, desde la enseñanza, otras estrategias típicamente útiles en la resolución de problemas que no estuvieran disponibles en los estudiantes.

El tiempo estipulado para los cursos de ingreso de ambas universidades hizo que las primeras experiencias de campo se realizaran en la UNGS y, luego, se llevaran a cabo en la UTN-CU.

1.4. La definición de un proyecto inicial

Con nuestras inquietudes más claras y el conocimiento del contexto de trabajo, comenzamos a transitar un camino que nos permitió establecer un proyecto de investigación.

A continuación, contamos la elección del marco teórico a partir de la construcción de un estado del arte luego, presentamos la formulación de los objetivos de la investigación para, posteriormente, plantear las decisiones metodológicas asumidas.

1.4.1. El camino hacia el estado del arte y marco teórico

Como todo inicio, partimos de nuestras inquietudes y del conocimiento de la población a la cual estaría destinado el trabajo y comenzamos a buscar información con el fin de ir construyendo un estado del arte (revisión de antecedentes, estado actual del conocimiento, entre otras denominaciones). Cuando entendimos que nuestra búsqueda era suficiente como para constituirse en el estado del arte de nuestro trabajo, el paso siguiente fue establecer el marco teórico con el que trabajaríamos. Para detalles sobre la construcción del estado del arte, marco teórico y diferencias entre ambos, sugerimos ver el capítulo 7, en Rodríguez, 2016.

Tras las primeras búsquedas bibliográficas, rápidamente entendimos que nuestro gran marco sería la Escuela Anglosajona (también llamada Resolución de Problemas o Problem Solving) que tiene su origen con los desarrollos de Polya. Fue nuestra primera decisión para aproximarnos a definir el trabajo. Como toda línea de educación matemática, tiene una perspectiva sobre la enseñanza, el aprendizaje y cuenta con conceptos centrales, teóricos, que son definidos. El concepto clave que entendimos que podía sernos útil para comenzar a delinear la investigación es el de *heurísticas* y, por supuesto, el de *problema*. Con este último concepto nos encontramos ante una diversidad de definiciones, que presentaban variantes de acuerdo con quién fuera su autor y cuáles fueran los objetivos particulares de su investigación.

Respecto de las heurísticas, encontramos que existen en la literatura listados de heurísticas y de sus organizaciones, que ponen de manifiesto el momento –durante la resolución de un problema– en el que ellas son utilizadas, así como también la finalidad de su uso. Contábamos, además, con una organización de las estrategias heurísticas elaborada por integrantes de nuestro equipo de investigación en el marco de un estudio previo (Marino y Rodríguez, 2009).

Fue así que para el estado del arte consideramos la noción de problema dada por Polya (1981); Krulik y Rudnik (1980 en Nápoles Valdés y Cruz Ramírez, 2000); House, Wallace y Johnson (1983 en Nápoles Valdés y Cruz Ramírez, 2000); Labarrere (1989 en Nápoles Valdés y Cruz Ramírez, 2000) y la de heurísticas por Verschaffel (1999 citado por Koichu, Berman y Moore, 2003). Retomaremos esto más adelante.

Algunos aportes describen las heurísticas utilizadas en la resolución de problemas, y hacen énfasis en identificar en cuál de las distintas etapas de esa resolución se ponen en juego. Es así que indagamos respecto de modelos que intentan describir dichas etapas. Polya, precursor en esto, planteó cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución. Otros autores retoman este modelo y ajustan, modifican o agregan algunas cuestiones que desean resaltar. Estos modelos se presentan, en algunos casos, acompañados por preguntas que resultan útiles si se las considera como una guía para abordar problemas. Seguíamos sumando información que inicialmente consideramos valiosa y que nos permitía ampliar nuestra mirada sobre trabajos existentes. En esta búsqueda encontramos un aporte sustantivo de la mano de Schoenfeld (1992). En su estudio sobre la resolución de problemas, este autor incorpora un aspecto que considera central y propio de esta tarea: el *aspecto metacognitivo*. Según él, el pensamiento metacognitivo puede monitorear, controlar y dirigir el propio proceso cognitivo. Se debe analizar qué camino se ha elegido y cuál no, qué y por qué se ha hecho, etcétera.

Dentro de nuestro interés, como hemos afirmado, capitalizaríamos el conocimiento de las estrategias puestas en práctica por los estudiantes en la resolución de problemas, para posteriormente fortalecer o complementar desde la enseñanza, aquellas que no estuvieran presentes. Debido a que la enseñanza cobraría un lugar central en una segunda etapa de nuestro trabajo, indagamos sobre la resolución de problemas como *metodología de enseñanza* de esta disciplina. Nos interesó hacer una distinción entre la enseñanza a través de problemas y la enseñanza tradicional, tomando en cuenta las características del tipo de habilidad que el estudiante desarrolla y las actividades a las que se enfrenta, considerando clases bajo una u otra perspectiva. Investigadores de la línea cognitivista consideran que, en una enseñanza a través de problemas, las habilidades que desarrolla el estudiante requieren de pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991). A modo de ejemplo, mientras que en la enseñanza vía resolución de problemas las habilidades que se desarrollan son, entre otras, analizar, explorar, conjeturar, probar… en la enseñanza tradicional algunas de ellas son resolver, operar, repetir... Las actividades que suelen proponerse en clases de tipo tradicional proponen en su mayoría la aplicación de procedimientos, técnicas o propiedades previamente explicados. Mientras que, por el contrario, en clases enmarcadas en la resolución de problemas las consignas ofrecidas al estudiante no solo no deben anunciarle qué procedimiento o resultado aplicar, sino que tampoco deberían poner de manifiesto el conocimiento matemático que pondrá en juego. Claramente, la enseñanza vía resolución de problemas posibilita que el alumno se aproxime al quehacer del matemático.

Sin embargo, cuando un docente o una propuesta curricular expresan que la matemática se enseñará a través de la resolución de problemas, esta puede entenderse de diversas formas, tal como propone Charnay en la obra mencionada.

Finalmente, luego de la búsqueda bibliográfica, decidimos organizar la presentación del estado del arte en los siguientes apartados: a) la noción de problema y de heurísticas, b) modelos existentes sobre resolución de problemas y c) la resolución de problemas como metodología de enseñanza de la matemática.

A partir de allí, y de la enorme diversidad de información encontrada, consideramos que sería apropiado para nuestro trabajo partir del siguiente marco teórico: la definición de problema de Labarrere (en el capítulo 2 presentamos precisiones sobre esta noción), las etapas de resolución de problemas de Polya, los aspectos metacognitivos de Schoenfeld, el concepto de heurísticas que definimos a continuación y una organización de ellas que presentamos en la tabla que sigue. Tomando en consideración los aportes de Verschaffel (1999), quien explica lo que entiende como métodos heurísticos, asumimos las *heurísticas* como estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y la transformación de un problema que le ayudan significativamente al resolutor –aunque no se lo garantizan– a aproximarse a hallar una solución apropiada.

La siguiente tabla organiza a las heurísticas respecto de la *utilidad* que podrían tener en el marco de la resolución de un problema y se propone, para cada una, la descripción del significado pretendido.

Tabla de heurísticas

Descriptores generales	Heurísticas	Descripción
Planificar	Trabajar hacia delante	Abordar el problema partiendo de las condiciones y los datos dados.
	Trabajar empezando por el final	Suponer que se tiene una solución y analizar sus características.
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relacionada con el problema que puede ser útil para su resolución.
	Razonar por analogía	Recordar problemas resueltos anteriormente, cuya resolución resulte útil para abordar la resolución del nuevo problema.
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Realizar un dibujo	Realizar una descripción gráfica del problema mediante una figura, un diagrama o un gráfico.
	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Traducir el problema en un lenguaje diferente al dado que facilite el abordaje: del simbólico al coloquial o al numérico, etcétera.
Modificar el problema	Reducir a problemas ya resueltos	Realizar alguna variación en el problema que permite transformarlo en otro ya conocido.
	Reducir a un problema más sencillo	Realizar una simplificación para obtener un problema semejante pero más sencillo, cuyo abordaje ayude a resolver el problema original.
	Dividir el problema en subproblemas	Descomponer en subproblemas, analizarlos independientemente y luego, recombinar las soluciones parciales para formular una solución general.
	Introducir un elemento auxiliar	Presentar algún elemento que no fue dado en el enunciado del problema (como cambio de variables, construcción auxiliar, etcétera).
Examinar casos particulares	Análisis sistemático de casos (Inducción)	Asignarle valores a los parámetros del problema, para extraer pautas y realizar una generalización que permita avanzar en la resolución.
	Analizar casos límites o especiales	Considerar valores extremos para explorar la gama de posibilidades.
	Analizar ejemplos	Considerar valores cualesquiera que sirvan para ejemplificar y explorar el problema.
Examinar la solución obtenida	Verificar utilizando distintos registros de representación	Verificar la respuesta usando un registro de representación distinto de aquel en el que se produjo dicha respuesta.
	Verificar usando casos particulares	Verificar la respuesta en casos particulares.

Fuente: Marino y Rodríguez, 2009, p. 163.

Este marco teórico fue modificado en el transcurso de la investigación, como damos cuenta en el capítulo siguiente.

Es interesante advertir que, aunque nos propusimos estudiar las heurísticas que se ponen en juego cuando no fueron enseñadas, por las características de los cursos con los que trabajaríamos, nuestro posicionamiento inicial fue *considerar que las heurísticas son enseñables*. Bajo este supuesto, planteamos la segunda etapa de nuestra investigación. Otra cuestión importante a mencionar es que el hecho de querer identificar heurísticas en un contexto en el que no habían sido intencionalmente enseñadas, decidimos denominarlas *heurísticas espontáneas*, concepto que sumamos al marco teórico.

Disponer de cierta terminología teórica nos permitió retomar las preguntas iniciales y reformularlas del siguiente modo.

Luego de haber tomado clases con énfasis en la enseñanza de contenidos matemáticos, ¿cómo encara un estudiante la resolución de un problema?, ¿recurren a heurísticas espontáneas?, si es así, ¿a cuáles? ¿Hay alguna predominancia de heurísticas al resolver problemas según cuál sea el contenido matemático involucrado? ¿Es capaz el estudiante de activar su reflexión metacognitiva y reconocerel uso de una misma heurística incluso al abordar problemas con contenidos diferentes? ¿Qué relación tienen las heurísticas que utiliza el matemático con las que utiliza un estudiante?, ¿predomina en la investigación matemática el uso de alguna heurística por sobre otra? Las heurísticas que valora el matemático por la utilidad que le encuentra, ¿son las mismas que valora o utiliza el estudiante? ¿Es posible incidir favorablemente en la enseñanza de heurísticas a nivel preuniversitario? ¿Cómo manejar los aspectos metacognitivos en tal enseñanza?

A partir de allí, seleccionamos sobre qué trabajaríamos y planteamos los objetivos de la investigación, que fueron los siguientes:

- Caracterizar heurísticas espontáneas presentes en estudiantes ingresantes a ambas universidades.

– Explorar vínculos entre las heurísticas halladas y algún rasgo, que el estudiante pudiera identificar, del proceso de enseñanza o de aprendizaje.
– Analizar las heurísticas espontáneas de los estudiantes en relación con las heurísticas que utiliza el matemático en su tarea de investigación.
– Identificar heurísticas, relevantes para el trabajo matemático, que un estudiante debiera disponer.
– Explorar formas de enseñar heurísticas (se hará sobre algunas que se consideren relevantes y que estén poco desarrolladas en los estudiantes ingresantes).

1.4.2. El camino hacia las definiciones metodológicas

Sabemos que los objetivos expresan un *norte*, nuestras metas, lo que aspiramos lograr luego de desarrollar el trabajo. Con esto establecido, llega el momento de delinear *cómo* llegaremos a esas metas. ¿Qué es lo que necesitamos hacer para alcanzar los objetivos?, ¿qué pasos podríamos transitar?, ¿qué actividades realizar? En este apartado ofrecemos nuestras respuestas a estos cuestionamientos y ellas son las que le dan forma a la metodología de investigación (para detalles sobre este aspecto puede consultarse el capítulo 9 de Rodríguez, 2016).

A partir de las preguntas y de los objetivos planteados, los cuales incluían caracterizar, explorar relaciones y analizar tipos de estrategias, y considerando que no contábamos con conocimiento previo, entendimos que el trabajo debía ser inicialmente exploratorio con una metodología de trabajo de tipo cualitativa y enmarcada, en particular, dentro del enfoque socio-crítico de Carr y Kemmis (1988). Organizamos el trabajo planteando las dos etapas que describimos a continuación.

En una primera etapa nos propusimos:

- Ampliar el marco teórico.
- Si bien tomamos una postura incial sobre los conceptos de problema y heurística, sabíamos que al avanzar en el desarrollo de la investigación, íbamos a necesitar profundizar y ajustar estos conceptos.
- Recolectar información de las heurísticas presentes en los estudiantes hacia el final de los cursos de matemática de los ingresos de ambas universidades.
- Realizar esto mediante un test y entrevistas, ambos diseñados por el equipo.
- Recoger información sobre las heurísticas utilizadas por matemáticos.
- Realizaríamos esto a través de entrevistas a matemáticos, también diseñadas por el equipo.

Para la segunda etapa propusimos:

- Diseñar, fundamentar y aplicar un dispositivo didáctico para la enseñanza de alguna de las heurísticas menos presentes en las resoluciones de los estudiantes y más valoradas por matemáticos. Recabar datos durante la aplicación, analizarlos e informar.

Sin dudas, el desafío era importante y la distancia entre los miembros del equipo y la asincronía del trabajo no eran detalles menores. Confiados en que podríamos hacer un trabajo interesante, comenzamos a transitar el recorrido propuesto. ¿Creerá el lector que nuestro avance en la investigación fue fluido y lineal?, ¡por supuesto que no! Estuvo lleno de idas y vueltas, decisiones, cambios y sorpresas que recuperamos y compartimos en el capítulo siguiente.

2
El desarrollo de la investigación

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos el desarrollo del proyecto. Ponemos énfasis en explicar las dificultades que tuvimos, cómo surgieron ciertas necesidades, cambios de rumbo y las decisiones que fuimos tomando, o prioridades que asumimos, que nos permitieron completar el trabajo.

2.2. De la definición inicial de "problema" a la necesidad de ajustar el concepto

Para el marco teórico del proyecto tomamos la siguiente definición de *problema*:

> ... un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; [...] es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar (Labarrere, 1989, en Nápoles Valdés y Cruz Ramírez, 2000, p. 26).

A partir de ella iniciamos una búsqueda de enunciados que fueran problemas, es decir, que respondieran a esta definición. La intención era conocer lo que otros investigadores habían utilizado, de modo de disponer de un banco de problemas entre los cuales poder elegir aquellos que pudiéramos utilizar para nuestros estudiantes de los cursos de ingreso. Nos llevamos una primera sorpresa cuando *no encontramos problemas*. Empezamos a advertir que no existirían problemas universales, sino consignas que, para ciertos sujetos con determinados saberes, podrían resultar problema. Es más, entendimos que podría ocurrir que una consigna sea considerada *problema* bajo una cierta definición (de problema) y no serlo con otra definición. Es así que encontramos propuestas muy diversas bajo el paraguas de los problemas. Hallamos actividades bajo el título "Problemas de aplicación" en los que se debía poner en juego un cierto contenido. También aparecían listados de actividades organizadas por contenidos bajo la denominación de *problemas,* pero que al someterlos a un análisis no respondían a la definición adoptada. También dimos con consignas asociadas con el planteo de desafíos o lindantes con la divulgación matemática. Por otra parte, y en simultáneo, cada vez que tomábamos una consigna para decidir si cumplía la definición, y de ese modo poder considerarla *problema*, nos surgían interrogantes del tipo ¿qué significa que esas relaciones o nexos, que deben existir en un problema, no sean accesibles directa ni indirectamente a la persona? ¿Qué tipo de enunciados podrían cumplir con esta definición?, ¿cómo veríamos el esfuerzo que la persona debe realizar? Y si percibiéramos que no se esfuerza, ¿significaría esto que la consigna no fue un problema para esa persona?... Así empezaron nuestras dificultades, que se tornaron cada vez más insalvables y, por ello, decidimos no mantener la definición inicial.

En este punto, nos sentimos en una especie de retroceso, porque ya habíamos hecho una búsqueda bibliográfica y tomado una decisión, solo que recién al momento de utilizar la definición elegida, advertimos que no nos resultaba operativa. Fue en ese momento que decidimos establecer otra definición de *problema*, propia o ajena, con la que pudiéramos avanzar. Por supuesto, debía responder a la línea de resolución de problemas, pues este era el marco de nuestra investigación. Revisamos la búsqueda bibliográfica ya hecha, con una mirada mucho más fina. Utilizamos cada una de las definiciones que disponíamos para analizar las consignas que habíamos recolectado con el propósito de *fundamentar* (entendido como en el capítulo 1 de Rodríguez, 2016) si cumplían o no con las condiciones de ser problema. La variedad de definiciones que revisitamos y otras nuevas que encontramos, si bien compartían algunos aspectos o elementos, incluían rasgos muy diversos entre sí. Ninguna de ellas satisfizo nuestros intereses, por lo cual decidimos construir una definición propia. Para ello, retomamos los elementos compartidos de las diferentes definiciones y seleccionamos, de la diversidad de aspectos o condiciones que se incluían en las definiciones consultadas, aquellos con los que estábamos de acuerdo y considerábamos adecuados para nuestro contexto de investigación. En este proceso, discutimos acerca de si incluir o no como parte de la definición cuestiones referidas a si el sujeto debía disponer o no de las herramientas necesarias y suficientes para resolver la situación, o si era necesario que estuviera motivado para encarar la resolución. El hecho de contar con problemas era, desde el comienzo de la investigación, una cuestión clave para nosotros, pues al encararlos e intentar resolverlos es que los estudiantes podrían poner en juego heurísticas.

De lo que sí estábamos seguros era que nuestra definición debía incluir que el problema se refiriera a un sujeto, planteara una meta clara y generara un bloqueo inicial para alcanzarla. La importancia de la existencia de este bloqueo, entendido como el desconocer algún camino inmediato de resolución al momento de leer la consigna, radicaba en que en el intento de superar ese bloqueo el sujeto desplegaría sus estrategias, las cuales eran nuestro foco de estudio.

Basándonos en la definición de problema de González (1998), propusimos una definición propia de problema y fue la que adoptamos para nuestro proyecto:

> Un *problema para un individuo* es una situación que requiere solución y, éste, estando motivado (u obligado por las circuns-

> tancias académicas, personales o vitales) no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato (Colombano, Isla Zuvialde, Marino y Real, 2009).

Conformes con esto, seguimos buscando consignas para tratar de identificar cuáles podrían resultar problemas para nuestros estudiantes.

Durante esta etapa, analizamos diversidad de consignas. En ese trabajo, buscamos no poner el foco en el contenido matemático, pero a la vez intentamos sostener que nuestros estudiantes pudieran abordar la resolución apelando a contenidos vistos en los cursos de ambas instituciones. Esto no es un requerimiento que nuestra definición plasme, pero fue una condición que sumamos para el trabajo. Sabíamos también que los cursos de ingreso de la UNGS y la UTN-CU habían tomado sus decisiones didácticas sobre metodología, contenidos, objetivos, tiempos, etcétera, por lo que debíamos tener esto en consideración y, eventualmente, diferenciar la selección de problemas para uno y otro grupo de estudiantes. A su vez, el ingreso en la UTN era temporalmente posterior al de la UNGS. Ambas condiciones, contenidos y tiempos de inicio diferentes, nos llevaron a establecer criterios que pudiéramos compartir con los colegas de Entre Ríos para que ellos también seleccionaran problemas para *sus* estudiantes.

Muy pocas de las consignas catalogadas como problemas por otros autores (o en otros contextos) se ajustaban como tales para nuestro trabajo, de modo que tuvimos que hacer una parada y enfrentar *el problema de diseñar problemas.* Buscar consignas y ajustarlas no era suficiente.

2.3. Hacia el diseño de problemas

La dificultad para proponer problemas radicaba en equilibrar el no vislumbrar el medio que permita resolverlos (lo que llamamos *bloqueo inicial*) con lo referido a *la inmediatez en encontrar un* *camino de resolución.* Es decir, debíamos cuidar que el estudiante no pudiera resolverlo inmediatamente, pero que sí fuera capaz de encararlo, pudiendo o no llegar a la solución correcta, en un tiempo razonable. Por este motivo, entendimos que el estudiante debía disponer de conocimientos que pondría en juego, independientemente de que le resultaran, o no, útiles para lograr una respuesta acabada y/o correcta.

Todo este análisis previo a proponer problemas, nos puso de manifiesto que debíamos tener mucha información sobre nuestros estudiantes. Debíamos saber qué conocimientos matemáticos relativos a conceptos, propiedades y resultados tenían disponibles. Las respuestas a este planteo claramente podían ser sumamente disímiles entre ambas instituciones, por lo que los problemas para unos y otros seguramente serían diferentes. Sin esta información, no podíamos seleccionar ni diseñar problemas. Por ello, nos propusimos hacer un diagnóstico que debía permitirnos conocer saberes matemáticos disponibles por los estudiantes. Cabe resaltar que este propósito es bien diferente a tener la intención de diagnosticar la presencia de heurísticas o si los estudiantes eran o no capaces de resolver problemas. Allá fuimos, a pensar cómo diagnosticar esos saberes.

2.3.1. Sobre el diagnóstico de saberes matemáticos

Acordamos en que, además de indagar sobre sus saberes matemáticos, necesitábamos conocer qué tipo de situaciones los estudiantes percibían como fáciles o cercanas y cuáles consideraban situaciones muy difíciles o inaccesibles, entendiendo que lo que representara un problema para ellos debía ubicarse entre ambos extremos. Es decir, que la consigna no fuera de resolución inmediata pero tampoco inabordable. La finalidad del diagnóstico fue recabar información para conocer las particularidades de los estudiantes del ingreso de cada universidad, para luego diseñar problemas que atendieran a las características de cada grupo.

Tanto las búsquedas bibliográficas que realizamos sobre diagnósticos, como experiencias anteriores del equipo desde su rol docente, nos mostraron que en general los diagnósticos producían información acerca de lo que los estudiantes *no* sabían hacer. Eran, lo que llamamos al interior de nuestro equipo, *diagnósticos por la negativa*. Para nuestro trabajo, esta perspectiva no nos resultaba útil, dado que necesitábamos conocer qué era lo que sí sabían hacer. Entonces, nos dispusimos a diseñar un *diagnóstico por la positiva*.

El diagnóstico tuvo el formato de un test de resolución escrita e individual (se puede ver el diseño completo en Chacón, Farías, González y Poco, 2009). Tuvo dos partes bien diferenciadas entre sí, pero relacionadas. En la primera, indagamos acerca del conocimiento declarativo y procedimental con el que contaban los estudiantes. Esto lo planteamos a través de un listado de *ejercicios* que contemplaban el uso de contenidos matemáticos abordados en los cursos de ingreso de cada universidad. En los enunciados de estos ejercicios incluimos fórmulas, enunciados de teoremas, propiedades, etcétera, que eran necesarios para la resolución. De esta forma, nos focalizamos en observar si el estudiante, con esos resultados a su disposición, era capaz de aplicarlos exitosamente. La segunda parte fue diseñada para conocer la percepción del estudiante acerca de la dificultad de las actividades. Les solicitamos que seleccionaran, según el nivel de dificultad que a cada uno le generaran, actividades del material de estudio de cada curso. De esta manera, debían seleccionar consignas, distinguiéndolas entre: muy fáciles, adecuadas, difíciles o inabordables.

Una vez elaborados los instrumentos, los aplicamos en ambas universidades, en tiempos diferentes, como ya mencionamos. La primera parte del diagnóstico se realizó en el aula y la segunda fue domiciliaria, ya que requería de más tiempo, uso del material y una mayor reflexión por parte de los estudiantes para seleccionar las actividades con los criterios propuestos.

La logística de la recolección de datos a partir del diagnóstico fue compleja, sobre todo en lo referido a la segunda parte, ya que allí les habíamos solicitado que indicaran solamente número de ejercicio y página del libro. Por este motivo, no solo no veíamos enunciados, sino que la disparidad en la elección de ejercicios de cada tipo fue tal que, sacar conclusiones a partir de allí, se nos tornó ¡extremadamente complejo! Luego de una muy ardua tarea, logramos tener alguna idea acerca de lo que sabían hacer, los enunciados que advertían como muy sencillos y aquellos que les resultaban difíciles o inabordables.

Ya contando con esta información, teníamos todo lo necesario para proponer problemas para nuestros estudiantes.

2.3.2. El diseño de problemas

Comenzamos a pensar en cómo seleccionar o diseñar problemas...

En primer lugar, nos dimos cuenta de que debíamos ajustar nuestro lenguaje. Cada vez que nos referíamos a diseñar o seleccionar problemas, en realidad debíamos decir diseñar (o seleccionar) *potenciales problemas*, ya que en esta etapa previa era imposible saber con certeza si la situación catalogada como "problema" realmente lo sería para cada uno de los estudiantes del grupo. No se podría develar si la consigna resultaría o no problema para cada uno de los estudiantes, hasta no enfrentarlos a ella. Otra cuestión que advertimos fue la complejidad de atender a las particularidades de cada sujeto. Éramos conscientes de que, probablemente, los potenciales problemas que seleccionáramos no serían efectivamente problemas para todos los estudiantes; sin embargo, confiábamos en que para la gran mayoría sí, ya que en la selección o diseño habíamos atendido a las particularidades de la totalidad de alumnos.

Sabíamos que el diseño o la selección adecuada de potenciales problemas para los estudiantes era de vital importancia para nuestro estudio. Tal como hemos mencionado anteriormente, si acaso no resultaban problemas, no podríamos recabar datos sobre el uso de heurísticas.

En la tarea de conformar un "banco" de potenciales problemas para proponer a nuestros estudiantes, por un lado, seleccionamos consignas de actividades disponibles en la web y/o en el material de trabajo del ingreso, algunas tomadas textuales y otras modificadas, y, por otro, también diseñamos enunciados. Para garantizar que las consignas constituyeran potenciales problemas para cada grupo de estudiantes, buscamos que atendieran a los siguientes criterios:

- Que plantearan un objetivo claramente definido.
- Que, potencialmente, ofrecieran un bloqueo inicial, en cuanto se acercaran a las consignas consideradas difíciles en el diagnóstico, pero se diferenciaran de aquellas identificadas como muy sencillas o inabordables.
- Que tuvieran una redacción (o presentación) "no familiar", es decir diferente al estilo de lo que habitualmente se trabajaba en cada uno de los cursos.

Además de los aspectos mencionados, sumamos una condición que queríamos que se cumpliera para este trabajo y que, por lo tanto, consideramos al elegir, o diseñar, un enunciado como potencial problema.

> *Condición:* que el potencial problema admita el uso de variedad de heurísticas para abordar su resolución.

En el capítulo 3 se presenta un ejemplo de diseño de potencial problema, que cumple los criterios y esta condición, junto con su fundamentación.

Ya con el diseño de los potenciales problemas resuelto, avanzamos a la siguiente etapa: diseño de instrumentos para recabar datos que nos permitieran identificar heurísticas disponibles.

2.4. El problema de identificar heurísticas

Al pensar en cómo identificar heurísticas, retomamos el planteo del proyecto en el que habíamos establecido, entre otros, el objetivo de describir las heurísticas espontáneas de los estudiantes en relación con las que utiliza el matemático en su tarea de investigación; es decir, nos habíamos propuesto identificar heurísticas en matemáticos y en estudiantes. Con todo lo que habíamos aprendido hasta ese momento, entendimos que identificar heurísticas en matemáticos, con la definición que manejábamos, era a esta altura un planteo inadecuado. El matemático no utiliza heurísticas en el sentido que concebimos porque en su tarea controla las decisiones que toma. Si da ejemplos, simplifica el problema, lo divide en subproblemas, hace esquemas, etcétera, lo hace de manera premeditada, consciente. Por ejemplo, si decide simplificar el problema, lo hace a sabiendas de que cambia el problema. El matemático no consideraría que lo que resuelve dentro de alguno de estos avances constituye la solución a su problema. El manejo de las heurísticas que el matemático posee es lo que se denomina la *habilidad heurística* (Ferrer Vicente, 2000). Un estudiante novato, ciertamente, está lejos de tener ese control. El paralelo con matemáticos dejó de tener sentido, por lo que, a partir de este momento, desestimamos el planteo referido a ellos.

Para contar con información sobre el trabajo con problemas matemáticos y heurísticas utilizadas, habíamos previsto que los estudiantes entregaran periódicamente las resoluciones a una serie de problemas para, en una segunda instancia, aplicar un test y llevar a cabo entrevistas. Habíamos considerado abarcar entre tres y cinco comisiones de cada universidad, según disponibilidad, eligiendo, por lo menos, una de cada franja horaria.

Entendíamos que las entregas periódicas, junto con el test, nos permitirían seleccionar una muestra intencional de cada curso, eligiendo algunos estudiantes de buen rendimiento y otros de rendimiento medio o medio bajo en cada institución. No seleccionaríamos estudiantes cuyas entregas no mostraran alguna resolución o intentos, pues no podríamos identificar heurísticas.

La entrevista se plantearía para este grupo de estudiantes. Por un lado, tenía la intención de complementar la información, en lo que a heurísticas disponibles se refiere. Por otro lado, esperábamos identificar algún vínculo que el sujeto pudiera realizar entre las heurísticas disponibles y algún rasgo particular del proceso de enseñanza o de aprendizaje que él hubiera vivenciado.

Los imprevistos y los estudios adicionales que tuvimos que hacer, que hemos mencionado anteriormente, demoraron este inicio. A la altura en la que debíamos encarar esta etapa, el año lectivo estaba concluyendo, por lo que decidimos únicamente diseñar y aplicar el test y redefinir el modo de selección de la muestra, a partir de los datos que pudiéramos recabar con dicho instrumento.

2.4.1. El diseño del test para identificar heurísticas y su implementación

Diseñamos un test para la UNGS y otro para la UTN-CU, conformado por una selección de potenciales problemas para cada uno de los grupos de estudiantes (ver detalles en Colombano *et al.*, 2009). El test fue resuelto por los estudiantes de manera individual y domiciliaria. En la UNGS, pudimos validar su diseño aplicándolo inicialmente a un grupo; luego de los ajustes, realizamos el trabajo de campo con un total de alrededor de 150 estudiantes. Estos conformaron una muestra intencional, cuya elección se rigió por la factibilidad del acceso a los cursos que los docentes a su cargo nos habilitaron. El momento de implementación fue hacia el final de cursada. Entre las pautas para la resolución del test, incluimos el pedido de entregar los ensayos e intentos (borradores) y no solo la hoja con la resolución "pasada en limpio", debido a que nos interesaba inferir, de las resoluciones y los borradores, si las situaciones habían resultado problema para los estudiantes.

Además, el disponer de los borradores nos permitiría reconocer heurísticas desplegadas en sus intentos fallidos o exitosos.

Al analizar las entregas de los estudiantes advertimos que muchas de ellas, en particular en los borradores, mostraban intentos fallidos y tachones. Pudimos percibir cierta dificultad para avanzar en la resolución provocada por la resistencia ofrecida por la situación. Esto nos permitió confirmar que la selección de potenciales problemas había sido adecuada. Esas respuestas fueron los primeros datos que analizamos para comenzar a responder al objetivo de identificar las heurísticas espontáneas, pero sabíamos que solo con las producciones escritas no era suficiente para lograrlo. En Marino y Rodríguez (2009) habíamos advertido y reportado que, sin la instancia de entrevista oral, ciertas heurísticas y el modo en que fueron usadas podrían pasar desapercibidos, puesto que en lo escrito no siempre hay evidencias de ello. De esta manera, el siguiente paso que enfrentamos fue el diseño de entrevistas.

2.4.2. El diseño de entrevistas para identificar heurísticas y su implementación

Al analizar los tests entregados por nuestros estudiantes, observamos cuestiones que no quedaban del todo claras. Nuestra mirada estaba focalizada en identificar heurísticas puestas en juego, pero algunas resoluciones mostraban producciones que podían interpretarse de maneras diferentes. Por ejemplo, en los borradores encontramos ciertas cuentas o gráficos de los que no teníamos claro si habían sido parte de las estrategias utilizadas para lograr la resolución, para explorar el enunciado o para la verificación de lo presentado. El momento de entrevistar a los estudiantes debía permitirnos dilucidar estos casos. Debíamos seleccionar la muestra para llevar adelante las entrevistas, a la vez que enfrentábamos la tarea de diseñarla. Cuando formulamos el proyecto, y previmos entrevistar estudiantes, teníamos en nuestro imaginario un único protocolo de entrevistas idéntico para todos. Ahora bien, las producciones escritas eran disímiles, y la fuerza que había cobrado en todo nuestro trabajo el cuidado a lo personal y subjetivo nos hizo concluir que la uniformidad que habíamos anticipado al momento de la formulación del proyecto se manifestaba insuficiente. Debíamos abrirnos a la posibilidad de diseñar entrevistas personalizadas, que tomaran en consideración las producciones escritas de los estudiantes. Esto enfatizaba la necesidad de cuidar la muestra, pues nos dejaba más lejos aún de poder tener algún tipo de alcance numeroso.

Para la selección de los estudiantes a entrevistar, analizamos todas las producciones escritas y elegimos aquellas que mostraran un despliegue de recursos, entre ellos heurísticas, en el intento de resolver los problemas propuestos en el test, independientemente de si habían logrado resolverlos correctamente o no. De esta manera, el criterio no tenía que ver con encontrar resoluciones correctas y completas, sino que interesaba detectar esfuerzos por resolver, así como el uso de distintos recursos y estrategias en ese intento. Así, conformamos nuestra muestra, intencional, de diez estudiantes a entrevistar.

Llegó el momento de diseñar las entrevistas. Para ampliar nuestro conocimiento sobre la tarea de diseñar entrevistas personalizadas, iniciamos una búsqueda bibliográfica, poniendo el foco específicamente en aquellas que permitieran recabar datos acerca de los procesos de pensamiento que sigue un sujeto enfrentado a una tarea compleja. Nuevamente, por la preocupación de poder comunicar e interactuar con nuestro equipo de la UTN-CU, consideramos necesario disponer de algún procedimiento que fuera sencillo de compartir. A lo largo de la búsqueda nos encontramos con diversidad de tipos de entrevistas, más o menos pertinentes, en función de lo que se necesitaba indagar. Tuvimos que detener la marcha para estudiar y lograr un procedimiento que nos permitiera hacer cada uno de los diseños adecuadamente. Presentamos esos resultados de índole teórico-metodológica en el capítulo siguiente (sección 3.2.6.).

Con la muestra elegida y los protocolos personalizados y listos, contactamos a los estudiantes para entrevistarlos.

La implementación fue, inicialmente, compleja. A lo largo de las distintas entrevistas fuimos ajustando y mejorando la forma de aplicarlas. Algunas de las entrevistas necesitaban que el estudiante recuperara lo que había pensado cuando resolvió los problemas. Una dificultad, en esos casos, fue que recordara el proceso seguido. Otras de las entrevistas enfrentaban al estudiante a la resolución de un nuevo problema teniendo que pensar en voz alta: debía ir diciendo, mientras intentaba resolver, todo lo que pasara por su cabeza. En este caso, debimos cuidar que esta exigencia de la entrevista no le provocara bloqueos ni inhibiciones, puesto que podría obstaculizar el acceso a los datos que nos interesaban.

En relación con esto último, y más allá del diseño utilizado, entendimos que debíamos generar un ambiente distendido y de confianza, en el que el intercambio con los entrevistadores fuera percibido por el estudiante, no como una instancia en la que era evaluado u observado, sino como un espacio de trabajo en el que era muy valioso todo aquello que nos pudiera transmitir en relación con su forma de pensar y abordar los problemas, independientemente de lo correcto o no de su resolución.

En cuanto a las entrevistas, era necesario mantener el foco en lo que nos interesaba indagar, ya que a veces el intercambio que allí se daba podía derivar el tema hacia otros asuntos que, pese a tener relación, no nos darían datos útiles para responder al objetivo de la investigación. Otra de las cuestiones que tuvimos que cuidar fue el evitar que nuestro "rol docente" prevaleciera: no nos interesaba evaluar si la resolución era correcta o no, tampoco era nuestro objetivo ayudar a que el estudiante arribara a la respuesta correcta. Nuestro interés estaba en detectar el uso de heurísticas e intentar entender cómo fueron usadas. Si bien para cada entrevista teníamos un protocolo con preguntas, era muy fácil distraerse durante el intercambio y realizar intervenciones disruptivas.

Finalmente, resaltamos la importancia de la realización de *minutas*, a posteriori pero inmediatamente luego de terminada la entrevista. En estas minutas plasmamos, en crudo, impresiones, sensaciones, etcétera, que más tarde, al momento del análisis, fueron retomadas (para detalles del uso de las minutas y de los requisitos de los análisis sugerimos ver los capítulos 11 y 1, respectivamente, de Rodríguez, 2016).

En lo que sigue, nos focalizamos en el trabajo en la UNGS, para mencionar brevemente resultados hallados en el trabajo de campo, con la intención de describir la siguiente etapa de la investigación.

Luego de realizar todas las entrevistas, de articular y vincular la información obtenida tanto del análisis de la producción escrita como del relato oral, establecimos conclusiones acerca de cuáles estrategias heurísticas utilizaban en forma espontánea los estudiantes del ingreso. Los resultados principales, sobre las heurísticas disponibles en los estudiantes, los presentamos utilizando la denominación de la tabla de heurísticas (sección 1.4.1 del capítulo 1). Es así que las heurísticas más utilizadas por los estudiantes fueron las del grupo *seleccionar una representación adecuada para el problema*, que incluía realizar una descripción gráfica del problema en los casos en los que no venía dada; traducir el problema pasando del lenguaje coloquial a un registro algebraico o numérico, y las del grupo *examinar casos particulares,* relacionadas con realizar un análisis sistemático de casos, tratando de acercarse a una generalización, analizar casos límites y casos especiales. Las heurísticas que no habían aparecido en los tests fueron aquellas pertenecientes al grupo de *modificar el problema* en el que se incluía: reducir a problemas ya resueltos, reducir a un problema más sencillo, descomponer en sub-problemas o introducir algún elemento auxiliar.

A partir de observar que los estudiantes no manifestaban la disponibilidad de heurísticas relacionadas con *modificar el problema*, nos dedicamos a diseñar e implementar un dispositivo de intervención didáctica para las clases del ingreso, orientado a la enseñanza intencional de estas heurísticas.

2.5. El problema de la enseñanza de heurísticas

A partir de aquí sumamos al trabajo de investigación la tarea de pensar en la enseñanza. Debíamos poder separar ambas cosas, no confundir los objetivos de la investigación con los de la enseñanza; los datos a recabar para la investigación no necesariamente serían los mismos que aquellos que un docente necesita para evaluar su propuesta, etcétera. Pensar en la clase en vínculo con la investigación, nos abrió nuevamente un sinfín de desafíos que iremos detallando en lo que sigue.

El diseño de un dispositivo que nos permitiera enseñar las heurísticas del grupo de las de *modificar el problema,* debía atender varios aspectos que considerábamos centrales. En primer lugar, el dispositivo debía adecuarse a las particularidades y exigencias del ingreso de la UNGS, respetando, entre otras cuestiones, el cronograma establecido y la forma de evaluación. En segundo lugar, debía reflejar nuestra concepción general acerca de cómo se aprende. Para pensarlo por la negativa, sabíamos que no funcionaría plantear una clase expositiva en la que el docente presentara las distintas heurísticas y explicara cómo se usan. Tampoco debía basarse en la mera demostración o modelación por parte del docente sobre cómo se resuelven problemas apelando a heurísticas. Los pilares centrales de la enseñanza debían ser: propiciar el hacer del estudiante, esto es, enfrentarlo a resolver problemas, y fomentar la reflexión metacognitiva sobre ese hacer. Es decir, debíamos intervenir para que el estudiante ubicara en el plano consciente cómo se podían resolver o abordar problemas y qué estrategias resultarían útiles o pertinentes, o no, frente a diversos problemas.

Algunos de los interrogantes que tuvimos que enfrentar al encarar el diseño del dispositivo fueron: ¿cómo lograr que las heurísticas del grupo de *modificar el problema* fueran utilizadas por los estudiantes, si sabíamos que no las tenían disponibles?, ¿cómo propiciar una reflexión pertinente sobre su accionar, si no están acostumbrados a hacerlo?, ¿cómo hacer convivir la exigencia de trabajar ciertos contenidos con el interés por trabajar la resolución de problemas?, ¿cómo lograr que el uso de las heurísticas no quedara restringido a ciertos contenidos específicos?, ¿cómo debería intervenir el docente para favorecer el uso de estrategias y la reflexión sobre ellas?

Además de todos estos cuestionamientos sobre la enseñanza de heurísticas nos preocupó algo que entendimos que era previo: ¿y si los potenciales problemas no resultaban problema para todos los estudiantes?, ¿cómo manejar en la clase la relatividad al sujeto? Esto nos llevó a generar un nuevo concepto: el de *gama o familia de problemas*.

2.5.1. Gamas de problemas y el problema de la gestión de la clase

A esta altura nos preguntábamos cómo llevar una propuesta para enseñar heurísticas a un curso de matemática diseñado bajo otro enfoque, que tiene un cronograma que seguir y contenidos que abarcar. Este fue otro desafío que nos interesó encarar, específicamente para las heurísticas de *modificar el problema*.

La primera preocupación fue por nuestro rol docente, ya no como investigadores, y tuvo que ver con cómo llegar al aula preparados para afrontar que hubiera algunos estudiantes para quienes los potenciales problemas diseñados no resultaran problemas. Tal vez, en algunos casos, el potencial problema no resultaría problema, tanto por encontrarlo demasiado fácil de resolver o por considerarlo inaccesible. Esto nos llevó a una idea que luego resultó muy potente que es la de generar, a partir de un primer potencial problema, una gama o familia de problemas. Esto significa una colección de, al menos, tres potenciales problemas en el que el inicial resulta intermedio en complejidad. Llevamos otros dos, asociados, vinculados (desde las heurísticas que involucran) y muy cercanos en enunciado (por contexto y por lo que se debe trabajar), en el que uno de ellos aumenta la complejidad, y el otro la disminuye. Cuando nos referimos a la complejidad de cada uno de estos potenciales problemas, no estamos pensando en una dificultad a nivel de cuentas o de contenidos necesarios para poder resolverlos, sino en las heurísticas que podrían ponerse en juego cuando el alumno se enfrenta a ellos.

Con esta idea, tuvimos que diseñar, por cada potencial problema, un par más, de modo de que la terna estuviera emparentada y en la que cada uno de los enunciados siguiera siendo un potencial problema. Nos resultó sumamente útil esta forma de llegar al aula y funcionó como un bagaje muy efectivo para la tarea docente. Lo que no anticipamos fue que también nos ofrecería dificultades *la gestión de las gamas, en nuestras clases…* ¿Qué debíamos observar en el estudiante que nos diera indicios de que necesitábamos asignarle el problema más complejo o el de menor complejidad? Teníamos criterios para: diagnosticar saberes de los estudiantes, diseñar potenciales problemas, identificar heurísticas, diseñar entrevistas para complementar esa información, diseñar gamas de problemas… Nos faltaba respondernos este cuestionamiento para que dispusiéramos, finalmente, de indicaciones precisas para comunicar a otros cómo encarar de manera íntegra y completa la enseñanza de heurísticas. El capítulo 3 presenta con precisión el concepto de gamas de problemas y los criterios para gestionarlas en clases.

3
Resultados de la investigación

3.1. Introducción

En este capítulo retomamos conceptos, criterios y procedimientos que presentamos en los capítulos anteriores y sumamos resultados y ejemplos.

Entendemos que lo que presentamos aquí puede considerarse tanto como aportes para la investigación como para la docencia. Dependerá de con qué ojos lo mire el lector… Por eso es que, al momento de leer este capítulo, los invitamos a hacerlo desde dos perspectivas: una como investigadores y otra como docentes.

Tanto las definiciones precisas de los conceptos de problema, potencial problema y gamas de problemas, como la enunciación cuidadosa de los criterios para diseñarlos, para gestionar la clase, para plantear un diagnóstico o diseñar entrevistas, pueden ser tomados como aportes teóricos a la línea de resolución de problemas o como aportes a la docencia.

Enfatizamos esta doble lectura de lo presentado en este capítulo, pues nos interesa resaltar cómo hemos capitalizado mucho de lo que aprendimos durante este trabajo de investigación, para nuestro rol docente. Asimismo, esperamos que el investigador, o quien se inicia en esta tarea, pueda encontrar aquí las precisiones teóricas y metodológicas que necesita para su trabajo.

3.2. Aportes teóricos

3.2.1. Concepto de problema y de potencial problema

Como ya hemos comentado, durante el transcurso de la investigación tuvimos que tomar decisiones respecto de qué definición de problema consideraríamos. Para la línea en la que se enmarcó el trabajo, la resolución de problemas, un problema se contrapone a lo que usualmente se interpreta como *ejercicio*. Hemos enfatizado la relatividad al sujeto, por lo que consideramos que un *problema para un sujeto* es una situación en la que el sujeto no advierte de inmediato el camino que podría llevarlo a la resolución. Esto le produce un bloqueo inicial que lo lleva a utilizar distintas estrategias para intentar lograr su cometido. Las consignas pueden estar presentadas tanto en contexto extramatemático como intramatemático. Es decir que **no** es una condición que el concepto de problema incluya que debe estar presentado en un contexto extramatemático.

Luego de las idas y venidas relatadas en el capítulo anterior, construimos y adoptamos la siguiente definición de *problema para un individuo* del siguiente modo:

> Un problema para un individuo es una situación que requiere solución y, éste, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato (Colombano, Isla Zuvialde, Marino y Real, 2009).

Volvemos a traer aquí esta definición, que ya presentamos en el capítulo anterior, por la necesidad de explicitar que una situación es o no un problema, dependiendo de quién aborde su resolución y para retomar el concepto de potenciales problemas. Resaltamos que solo podremos confirmar que la actividad planteada resulta, o no, un problema para el estudiante en el momento en el que él se enfrente a su resolución. Como hemos dicho, cuando el docente planifica las actividades para desarrollar en su clase con la intención de que resulten problemas para sus alumnos, en realidad no tiene la certeza de que esto será así. Podría suceder que al implementar las situaciones que planificó estas no constituyan problemas para los alumnos (ya sea, por ejemplo, porque no identifican que hay algo por resolver, o porque la resolución les es obvia). En este sentido, decimos que al momento del diseño, las actividades que un docente planifica son *potenciales problemas.*

Por una cuestión de redacción y con el fin de simplificar el discurso, nos referiremos a estas situaciones como *problemas,* entendiendo que se trata de *potenciales problemas* a la hora del diseño, y *problema para un estudiante* si en el aula, efectivamente, lo fue para ese sujeto.

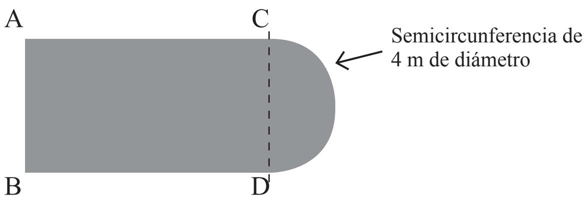
Hemos presentado en el capítulo anterior cómo surgió la necesidad de obtener información sobre el conocimiento matemático disponible en los estudiantes y cómo accedimos a ella mediante la aplicación de un diagnóstico que materializamos en un test. Compartimos aquí detalles sobre la elaboración de ese test.

3.2.2. Precisiones sobre el diagnóstico

El diagnóstico fue de resolución escrita e individual, incluyendo por un lado, consignas para recabar información sobre el conocimiento matemático declarativo y de procedimientos disponibles (consignas de *tipo A*) y por otro, consignas para conocer la percepción del estudiante sobre matices de dificultad de las actividades que formaban parte de su guía de ejercitación (consignas de *tipo B*).

Incluimos, a modo de ejemplo, algunas de las consignas del diagnóstico que aplicamos en la UNGS.

Ejemplo del diagnóstico: consigna de tipo A
Calcular el área y el perímetro exactos de la región sombreada, sabiendo que: ABCD es un rectángulo, con AB = 4 m y BD = 6 m; y que completa la figura, sobre el lado CD, un semicírculo de diámetro 4m.



Recordar que: el área del círculo se obtiene haciendo $\pi . r^2$, y la longitud de la circunferencia, haciendo $2. \pi . r$ donde r representa el radio de la circunferencia.

Mostrar los pasos de resolución.

Ejemplo del diagnóstico: consigna de tipo B
Completar la siguiente tabla de la siguiente manera:

- En cada una de las primeras dos columnas, anotá por lo menos dos ejercicios del libro del CAU[1] que hayas intentado resolver y te resultaron **Muy fáciles** o **Adecuados a tus conocimientos**, respectivamente.
- En la tercera columna, anotá por lo menos seis ejercicios del libro del CAU que hayas intentado resolver y te resultaron **Difíciles**. Tratá de que, por lo menos tres de esos ejercicios, tengan enunciado coloquial.

[1] CAU significa Curso de Aprestamiento Universitario, que es el nombre de la primera instancia al ingresar a la UNGS.

– En la última columna, anotá por lo menos dos ejercicios del libro del CAU que ni siquiera hayas intentado resolver porque su apariencia es difícil.

NOTA:
Mencioná a qué módulo del libro pertenecen y el número de ejercicio. Por ejemplo: Módulo 1 – Página 28 – Ej. 37. También aclará el número de edición y de impresión que aparece **al dorso de la primera página del libro**. Por ejemplo: 1ª edición, 4ª impresión.

Lo intenté resolver y me resultó…			Ni intenté resolverlos porque son de apariencia difícil
Muy fácil	**Adecuado**	**Difícil**	
Ej. … pág. … Ej. … pág. … Otros que quieras mencionar	Ej. … pág. … Ej. … pág. … Otros que quieras mencionar	Con enunciado coloquial: Ej. … pág. … Ej. … pág. … Ej. … pág. … Con cualquier tipo de enunciado Ej. … pág. … Ej. … pág. …… Ej. … pág. …… Otros:	Ej. … pág. … Ej. … pág. … Otros que quieras mencionar

En cuanto a los resultados del diagnóstico aplicado en la UNGS, pudimos observar a partir de las resoluciones de la primera parte que, mayoritariamente, los estudiantes podían: resolver ejercicios que involucran cálculo de área y perímetro en figuras compuestas sencillas; aplicar propiedad distributiva y factor común, obtener la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, representar una recta a partir de la expresión funcional; operar con números racionales; aplicar el Teorema de Pitágoras y la fórmula resolvente para resolver ecuaciones cuadráticas. También encontramos que, con algunas dificultades, eran capaces de: operar y aplicar propiedades de números irracionales sin aproximarlos, utilizar la propiedad que establece que el producto de dos números reales es cero si y solo si alguno de ellos lo es; utilizar el concepto de solución de una ecuación y aprovechar la información directa que brinda la expresión canónica de una función cuadrática.

De la segunda parte, pudimos extraer como conclusión general que los estudiantes del ingreso a la UNGS perciben como difíciles, las situaciones en las que se da alguna de las siguientes condiciones: los enunciados están dados en lengua natural, parte de la información debe extraerse de gráficos (en geometría, centralmente), deben manipular expresiones simbólicas complejas algebraicas o numéricas (irracionales expresados con símbolos), y hay presencia de parámetros para hallar en función de datos dados.

El diagnóstico completo, así como un detalle mayor de los resultados obtenidos, pueden verse en Chacón *et al.* (2009).

Dado que los criterios mencionados en el capítulo anterior para diseñar problemas incluían el conocimiento de los saberes disponibles en estudiantes, los cuales acabamos de detallar en los resultados del diagnóstico, estamos en condiciones de mostrar, a modo de ejemplo, una consigna que, al momento de nuestro trabajo, consideramos potencial problema para los estudiantes de la UNGS. Presentamos también la fundamentación de esa consideración.

3.2.3. Ejemplo de potencial problema y su fundamentación

Potencial problema

Comparar, para los distintos valores reales de a que sean posibles, $\frac{1}{a}\sqrt{5}$ y $a\sqrt{5}$.

Fundamentación
Recordamos los criterios mencionados en el capítulo anterior y, para cada uno, explicamos por qué consideramos que esta consigna lo atiende.

– Planteo de un objetivo claramente definido.

  Consideramos que se cumple. La intención que expresa la consigna es comparar números reales. Para cada valor del parámetro, las dos familias de números asumirán un valor fijo que deberán compararse. Asimismo se necesitará algún tipo de argumento general para poder responder de un modo completo.

– Planteo de un bloqueo inicial (consigna ni muy sencilla ni inabordable).

  Los resultados en la UNGS mostraron que los estudiantes podían manipular, con algunas dificultades, números irracionales sin aproximarlos y, con más comodidad, los racionales. En esta consigna, según el valor del parámetro, habrá que comparar números racionales o irracionales, por lo que habrá una dificultad intermedia. Sabíamos también que incluir parámetros sumaría dificultades, por lo que agregamos únicamente $\sqrt{5}$ sin incluir expresiones simbólicas con irracionales que fueran más complejas, para no tornar la consigna en inabordable.

– Redacción (o presentación) "no familiar", es decir diferente al estilo de lo que habitualmente se trabajaba en cada uno de los cursos.

  Esto lo tuvimos en cuenta, aunque es difícil mostrarlo aquí pues necesitaríamos que el lector conozca el material que utilizaban los estudiantes (ver Carnelli, Falsetti, Formica y Rodríguez, 2007).

Hasta aquí mostramos por qué es un potencial problema. Además, como anticipamos y debido a nuestro interés, sumamos la condición siguiente.

La consigna admita variedad de heurísticas utilizables para abordar la resolución.

A continuación fundamentamos que tal condición se cumple.

Revisar que este criterio se aplique es una tarea que requiere mucho trabajo. Esto se debe a que tenemos que anticipar posibles resoluciones, tanto correctas, como incorrectas, completas o incompletas y en cada una de ellas reconocer posibles heurísticas. Para hacer esto, sugerimos dos posibles caminos. O bien, resolver de distintas formas y mirar tales resoluciones en búsqueda de las heurísticas, o tener a mano algún listado de ellas e ir imaginando si podrían ser últiles al intentar resolver la actividad que estamos analizando.

Aquí, elegimos mostrar la diversidad de heurísticas que esta consigna admite, eligiendo el primer camino mencionado, aunque hacia el final del ejemplo, volcamos en la tabla de heurísticas lo hallado y agregamos otras posibilidades cuyo desarrollo matemático no incluimos aquí. De este modo, el análisis que presentamos no necesariamente es completo, pero dará buena idea del tipo de trabajo que se debe realizar y basta para fundamentar que el potencial problema cumple con el criterio adicional.

Posible resolución 1. Planteamos tres casos: $\frac{1}{a}\sqrt{5} = a\sqrt{5}$, $\frac{1}{a}\sqrt{5} > a\sqrt{5}$ o $\frac{1}{a}\sqrt{5} < a\sqrt{5}$.

Resolvemos cada uno: el primero parte de suponer $\frac{1}{a}\sqrt{5} = a\sqrt{5}$, o lo que es equivalente $\sqrt{5} = a^2\sqrt{5}$, de donde $1 = a^2$, por lo que $1 = a$ o bien $-1 = a$.

Una forma de encarar el segundo caso es resolver la inecuación $\frac{1}{a}\sqrt{5} > a\sqrt{5}$.

Si $\boxed{a > 0}$, $\sqrt{5} > a^2\sqrt{5} \Leftrightarrow 1 > a^2 \Leftrightarrow |a| < 1 \Leftrightarrow \boxed{-1 < a < 1}$.

De la intersección entre las condiciones recuadradas, resulta que $\boxed{0 < a < 1}$.

La otra posibilidad es que $\boxed{a < 0}$, en cuyo caso tenemos $\sqrt{5} < a^2\sqrt{5} \Leftrightarrow 1 < a^2 \Leftrightarrow |a| > 1 \Leftrightarrow \boxed{a > 1 \text{ o } a < -1}$.

Nuevamente hacemos la intersección de las condiciones recuadradas y obtenemos $\boxed{a < -1}$.

De este modo,tendríamos que los únicos valores de a para los cuales $\frac{1}{a}\sqrt{5}>a\sqrt{5}$ son $\boxed{0 < a < 1}$ o $\boxed{a < -1}$.

El último caso es análogo, lo que nos permitiría dar como respuesta al problema:

Rta. $\frac{1}{a}\sqrt{5}>a\sqrt{5}$ para todos los a que cumplen $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$;

$\frac{1}{a}\sqrt{5}=a\sqrt{5}$ para $a = 1$ o $a = -1$ y

$\frac{1}{a}\sqrt{5}<a\sqrt{5}$ para todos los a que cumplen $a \in (-1; 0) \cup (1, +\infty)$.

El valor $a = 0$ queda excluido desde el análisis inicial de la consigna, pues figura en el denominador de una de las expresiones.

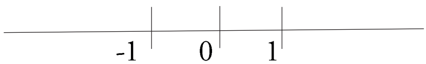
Posible resolución 2. Inicia del mismo modo, planteando los mismos tres casos: $\frac{1}{a}\sqrt{5}=a\sqrt{5}$, $\frac{1}{a}\sqrt{5}>a\sqrt{5}$ o $\frac{1}{a}\sqrt{5}<a\sqrt{5}$.

Resolvemos el primero del mismo modo anterior, hasta obtener $a = 1$ o $a = -1$.

A partir de allí consideramos que esos valores dividen a la recta real en intervalos y comparamos los valores de $\frac{1}{a}\sqrt{5}$ y $a\sqrt{5}$ eligiendo valores particulares tomados indistintamente en cada uno de los intervalos *(el lector experto sabe que si en cada intervalo propuesto, las expresiones que se van a analizar resultaran continuas, con saber el signo en cualquier punto se puede concluir que ese signo se conservará en todo el intervalo).*

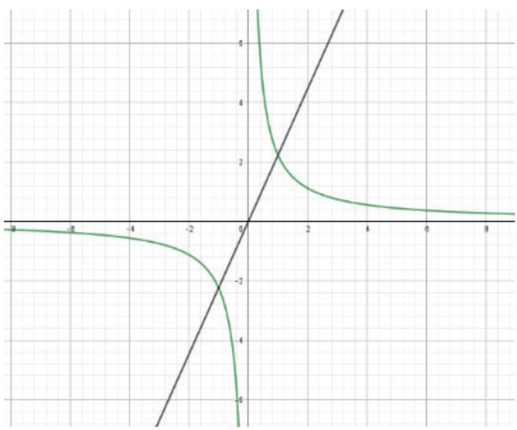
Tomando un valor en $(-\infty; -1)$, por ejemplo $a = -2$, evaluamos en cada expresión y obtenemos $\frac{1}{-2}\sqrt{5}$ y $-2\sqrt{5}$.

Podemos obtener un valor aproximado utilizando la calculadora, a saber: $-0{,}689\ldots$ y $-2{,}759\ldots$ de donde concluimos que para todo $a \in (-\infty; -1)$, $\frac{1}{a}\sqrt{5} > a\sqrt{5}$. Análogamente, se eligen valores en los otros intervalos. En esta resolución es posible que la exclusión del caso $a = 0$ pase inadvertida. Dependerá también de si el estudiante selecciona, o no, ese valor cuando elige uno cualquiera del intervalo $(-1; 1)$. Si lo hiciera, tal vez se dé cuenta de que debe excluirlo y ajuste la elección de los intervalos donde se debe analizar, proponiendo los siguientes cuatro.

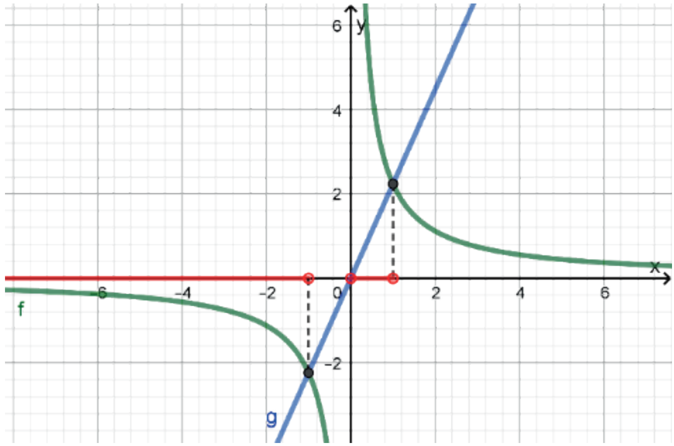


Llegaría a la respuesta correcta, en ese caso, o a una respuesta incorrecta, en otro caso.

Posible resolución 3. Podemos considerar que al variar a para distintos valores reales no nulos lo que en realidad obtenemos son funciones a valores reales: $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f(a) = \frac{1}{a}\sqrt{5}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(a) = a\sqrt{5}$. Desde este enfoque, tendríamos que comparar la función homográfica f con la lineal g. Graficando ambas funciones obtendríamos lo siguiente.



Y del análisis del gráfico, resulta que $f > g$ para los valores de x entre 0 y 1 y los menores que -1.



A partir de aquí, análogamente resolvemos los otros casos y obtenemos la misma respuesta.

Posible resolución 4. Un análisis más incipiente llevaría, por ejemplo, a dar valores para a y comparar. Por ejemplo, aproximando los valores de la raíz y haciendo cuentas en Excel produciría la siguiente tabla. Notar que los valores son aproximados, pero podría ser que el estudiante no advierta esto y considere que son exactos.

a	$a\sqrt{5}$	**decisión**	$\frac{1}{a}\sqrt{5}$
1	2,236	=	2,236
2	4,472	>	1,118
3	6,708	>	0,74533333
4	8,944	>	0,559
5	11,18	>	0,4472
6	13,416	>	0,37266667
7	15,652	>	0,31942857
8	17,888	>	0,2795
9	20,124	>	0,24844444
-1	-2,236	=	-2,236
-2	-4,472	<	-1,118
-3	-6,708	<	-0,74533333
-4	-8,944	<	-0,559
-5	-11,18	<	-0,4472
-6	-13,416	<	-0,37266667

Con esta elección, pasaría inadvertido lo que ocurre para valores entre 0 y 1 y entre -1 y 0.

Una respuesta alcanzable desde aquí, que resulta incompleta pues no habría quedado analizada la comparación para valores de a entre -1 y 1, y que además tiene el problema de la generalización sin justificación, sería la siguiente.

Rta. $\frac{1}{a}\sqrt{5} > a\sqrt{5}$ para todos los $a \in (-\infty; -1)$; $\frac{1}{a}\sqrt{5} = a\sqrt{5}$ para $a = 1$ o $a = -1$ y $\frac{1}{a}\sqrt{5} < a\sqrt{5}$ para todos los $a \in (1, +\infty)$.

Posible resolución 5. Otro abordaje similar al anterior pero menos organizado, resultaría de dar valores para a como sigue.

Notar que acarrea el error de considerar resultados racionales cuando son irracionales.

Con $a = 8$, $\frac{1}{a}\sqrt{5}$ = 0,27 y $a\sqrt{5}$ = 17,88, y 17,88 > 0,27

Con $a = 2$, $\frac{1}{a}\sqrt{5}$ = 1,118 y $a\sqrt{5}$ = 4,472, y 4,472 > 1,118

Con $a = -4$, $\frac{1}{a}\sqrt{5}$ = -0,559 y $a\sqrt{5}$ = -8,944, y -0,559 > -8,944 (incluso podrían cometer el error de compararlos al revés)

Con $a = -1$, $\frac{1}{a}\sqrt{5}$ = -2,23 y $a\sqrt{5}$ = -2,236, y -2,23 > -2,236 (si toman distinta cantidad de decimales en cada cuenta –por ejemplo, si distintos estudiantes calculan cada valor–), podrían concluir que los números son distintos, o si la cantidad de decimales que toman es la misma y usan la misma calculadora, concluirían que son iguales.

Podríamos seguir anticipando posibles resoluciones, pero para el ejemplo que queremos incluir aquí, es suficiente.

Pasemos, entonces, a identificar heurísticas con la finalidad de analizar si es posible poner en juego diversidad de ellas.

Encontramos que las resoluciones anteriores muestran el uso de las heurísticas que mencionamos a continuación. Aquí el lector debe vincular la indicación de la última columna con la parte de la resolución a la que refiere. Seguramente existan más relaciones entre resoluciones-heurísticas, que aquí no se explicitan, pero que que cada lector podrá advertir y, así, enriquecer el análisis.

Planificar	Trabajar hacia delante	Al dar valores al parámetro, comparar e intentar obtener una respuesta (en la resolución 4)
	Trabajar empezando por el final	Al plantear las inecuaciones y la ecuación y resolver (en la resolución 1)
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Uso de las propiedades para resolver inecuaciones y propiedades de módulo (en la resolución 1, en la 3)
	Razonar por analogía	Al interior de la resolución 1, si el alumno decide no resolver una de las inecuaciones por entender que es análoga a la resuelta
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Realizar un dibujo	El esquema realizado con la recta real (en la resolución 2)
	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	La formulación funcional del problema (en la resolución 3)
Modificar el problema	Reducir a problemas ya resueltos	
	Reducir a un problema más sencillo	Por ejemplo, si cambiara $\sqrt{5}$ por otro número para pensar con cuentas más sencillas le quedaría comparar $\frac{1}{a}$ y a (si puso 1 en el lugar de la raíz) o comparar $\frac{1}{a}.2$ y $a2$ (si quita la raíz y en su lugar pone 2)
	Dividir el problema en subproblemas	La separación en casos: con >, < e = y la reconfiguración posterior de la respuesta
	Introducir un elemento auxiliar	
Examinar casos particulares	Análisis sistemático de casos (Inducción)	La resolución 4, en la que los valores se toman ordenados con la intención de generalizar
	Analizar casos límites o especiales	Si indicara que para valores muy grandes de a, $\frac{1}{a}\sqrt{5}$ será muy pequeño a la vez que $a\sqrt{5}$ alcanzará valores muy grandes (y análogo con valores muy pequeños)
	Analizar ejemplos	La resolución 5 muestra una elección de valores más aleatoria que no necesariamente ayuda a conjeturar una respuesta general
Examinar la solución obtenida	Verificar utilizando distintos registros de representación	Si luego de la resolución 1, se verifica con la resolución 3. O luego de la resolución 3 se verifica como la 4
	Verificar usando casos particulares	Habiendo resuelto como 1, 2 o 3, dar ejemplos para verificar

La dificultad que intentamos hacer visible aquí es la que consideramos que vive el docente al diseñar consignas con la intención de que resulten problemas para sus estudiantes. La pregunta clave que el docente enfrenta es: ¿cómo manejarse ante la incertidumbre acerca de si las actividades resultarán –o no– un problema, ante la diversidad de estudiantes que tiene en su curso? Incluimos precisiones sobre esto en la siguiente sección.

3.2.4. Concepto de gama de problemas y ejemplo

Sabemos que la experiencia de trabajar con problemas en el aula se puede ver afectada por las particularidades de los distintos estudiantes: algunos, quizás, no puedan resolver las actividades que presentamos; a otros, por el contrario, podrían resultarles sumamente fáciles. Por ello, presentamos la noción de *gama o familia de problemas*, la que se encuentra asociada a conceptos que presentamos a continuación. A la consigna que el docente lleva al aula considerando que podría resultar problema para la mayoría, lo llamamos *problema base*. Para elegirlo, o diseñarlo, el profesor debe haber tomando en consideración lo que conoce de sus estudiantes (tal vez producto de su diagnóstico como fue mencionado en el apartado 2.2.1 del capítulo anterior). Partiendo de un problema base, se nos puede presentar alguna de las siguientes situaciones:

a. que la actividad planteada genere un bloqueo total a los estudiantes, impidiendo así que pongan en juego estrategias de resolución. En este caso, la situación que se genera inhabilita al estudiante como resolutor y estaría anulada la posibilidad del uso de heurísticas y, menos aún, de una reflexión metacognitiva. Podrían ni siquiera advertir que hay algo por resolver.

b. que les resulte tan accesible su resolución, que la situación se transforme en un ejercicio para ellos.

Frente a estas posibilidades, consideramos que el docente no debería llevar un solo problema a la clase, sino una *gama de* *problemas*: que le dé herramientas para operar en cada una de las opciones presentadas (Barreiro y Leonian, 2017). El concepto de *gama de problemas* alude a una familia de, al menos, tres problemas pensados con la siguiente lógica:

a. Un *problema base (PB)* que, como mencionamos, es aquel por el cual el docente tiene altas expectativas de que resulte problema para la mayoría de sus estudiantes.

b. Un *problema de complejidad menor (PCMe):* es un nuevo problema que versa sobre la misma temática que el *PB* (sea en contexto extra o intra matemático), se advierte cercano al *PB* y admite el uso de las mismas heurísticas (o de un grupo importante de ellas).

c. Un *problema de complejidad mayor (PCMa):* es otro nuevo problema con la misma temática, que también es cercano al PB, habilita el uso de las mismas heurísticas –o de la mayoría– que el PB, pero de un nivel mayor de dificultad.

No cualquier grupo de problemas conforman una gama; es importante que el estudiante no perciba una gran diferencia entre las distintas situaciones que se le pueden presentar, motivo por el cual los dos nuevos problemas deben ser muy cercanos a lo que plantea el PB. Una forma de pensar en la gama es concebir el PB y que los otros dos resulten de la manipulación de variables didácticas (Brousseau, 1994) que habilitan o inhabilitan ciertos modos de resolución.

A modo de ejemplo, presentamos a continuación una gama de problemas[2].

[2] Este problema fue elaborado en el contexto de una beca CIN, convocatoria 2013, que obtuvo Belén Ponce de León, y se desarrolló en el Instituto del Desarrollo Humano (UNGS). La becaria fue dirigida por Mabel Rodríguez y Patricia Barreiro y contó con la colaboración de Paula Leonian.

Ejemplo de gama de problemas

Problema base: Dos amigos juegan con cartas, utilizan un mazo de 50 cartas sin comodines.

> *Pedro le dice a Juan: "Elegí una carta del mazo. Duplicá el valor de tu carta. Al número que te resulta sumale 1. Multiplicá el resultado por 5. Si tu carta es de oro, sumale 4; si es de copa, sumá 3; si es de espada, sumá 2 y si es de basto sumale 1. Decime el resultado".*
> *Juan: 39 es el resultado que obtuve.*
> *Pedro (responde rápidamente): Tu carta es el 3 de oro.*
> *Juan: ¡¡Genial, esa es la carta!!*
> *¿Cómo hace Pedro para adivinar la carta? ¿Podrá siempre adivinar el mago? Explicar.*

Si analizamos posibles abordajes a este problema, podemos observar que se ponen en juego distintas heurísticas relacionadas con el grupo de *modificar el problema.* Resaltamos que lo expresado a continuación no constituye un análisis completo del problema en términos de heurísticas, pues haría falta mostrar (y vincular con teoría y afirmaciones) los desarrollos matemáticos, que aquí solo se mencionan. El lector podrá tomar los elementos identificados y realizar un análisis como el que presentamos en la sección anterior de este mismo capítulo.

Las heurísticas que identificamos son las siguientes:

- trabajar hacia adelante (al utilizar los datos que brinda el problema para poder abordarlo, planteando un número arbitrario con el que realiza una serie de operaciones),
- reducir a un problema más sencillo (pensando en las operaciones que se indican sin considerar el palo de la carta puesta en juego),
- dividir el problema en subproblemas (separando en cuatro situaciones, dependiendo de los distintos palos de las barajas),

– analizar ejemplos (al analizar casos particulares con la intención de encontrar una regularidad),
– reinterpretar el problema en un lenguaje diferente (utilizando una letra que simbolice el número de las cartas),
– trabajar empezando por el final (teniendo en cuenta la solución del problema, tratar de sacar alguna conclusión sobre lo que se pregunta).

Pensando en el contexto del problema y en las heurísticas que se ponen en juego, proponemos una situación similar, pero de acceso más simple, que se utilizaría para aquellos estudiantes para los que el bloqueo es total y no les permite avanzar. Presentamos el PCMe a continuación.

Problema de complejidad menor: Dos amigos, Pedro y Juan, juegan con 48 cartas españolas, sin comodín. En un determinado momento, Pedro divide el mazo según sus palos, quedando determinados 4 mazos correspondientes a cada palo. Luego le dice a Juan: "Elegí un palo".

Juan: Elijo oros.
Pedro toma el mazo de oros y le dice a Juan: "Ahora elegí una carta. Duplicá el valor de tu carta. Al número que te resulta, sumale 1. Multiplicá el resultado por 5 y finalmente sumale 4. Decime el resultado.
Juan: 39 es el resultado que obtuve.
Pedro (responde rápidamente): La carta que elegiste es el 3 de oros.
Juan: ¡¡Genial, ese es la carta que elegí!!
¿Cómo hace Pedro para adivinar la carta? ¿Podrá Pedro adivinar siempre la carta elegida? Explicar la respuesta.

La menor complejidad de este problema radica en la simplificación de los conjuntos de cartas según el palo. De esta manera, si bien intenta mantener las heurísticas que el PB admitía, no estará presente "dividir el problema en subproblemas". Pero en caso de retomar el PB, que en un principio no pudo encarar, podría surgir una nueva estrategia de resolución a partir de la experiencia de haber resuelto este último. Es decir, el PCMe está operando como si el estudiante hubiera aplicado la heurística de “reducir a un problema más sencillo”.

Si el problema le resultó un ejercicio, porque supo inmediatamente que es lo que debía hacer, sea o no correcto, se tendrá diseñado un problema de complejidad mayor, que presentamos a continuación.

Problema de complejidad mayor: Dos amigos, Pedro y Juan, juegan con 48 cartas españolas, sin comodín. En un determinado momento, Pedro le dice a Juan:

“Elegí una carta del mazo. Duplicá el valor de tu carta. Al número que te resulta sumá el 1. Multiplicá el resultado por 5. Si tu carta es de oro, sumá 4; si es de copa, sumá 3; si es de espada, sumá 13 y si es de basto, 14. Decime el resultado”.

Juan: 39 es el resultado que obtuve.
Pedro (responde rápidamente): Tu carta es el 3 oro.
Juan: No.
¿Cuál es la carta que eligió Juan? ¿Podría Pedro solicitar alguna condición para adivinar la carta rápidamente? ¿Podrá alguna vez adivinar rápidamente sin solicitar ninguna condición? Explicar la respuesta.

Este último caso muestra un problema en la misma temática, pero con una variación que habilita el uso de nuevas heurísticas, como, por ejemplo, reducir a problemas ya resueltos y razonar por analogía. La mayor complejidad de la situación radica en el tipo de pregunta que se realiza, la cual implica ponerse a pensar sobre las condiciones que necesitan o no agregar para adivinar la carta. Se supone que cuando ponemos a nuestros estudiantes a intentar resolver este problema ellos habrán resuelto inmediatamente el PB.

Algunas preguntas que nos surgieron fueron: ¿cómo saber si un estudiante está bloqueado o simplemente está aún pensando en el problema? Que no haya escrito nada en su hoja, ¿qué información nos da? Si advertimos que debemos intervenir para cambiar el problema por otro de otra gama, ¿cómo hacerlo de manera de no generar una situación de malestar para el estudiante?

Todas estas preguntas aluden a cómo intervenir en una clase enmarcada en la resolución de problemas. Intentando aportar en esta dirección, en el apartado siguiente compartimos algunas sugerencias o criterios para gestionar las gamas en la clase y para activar la reflexión metacognitiva de los estudiantes.

3.2.5. La gestión de la clase: intervenciones, gamas de problemas y reflexión metacognitiva

Algunos lineamientos generales sobre las intervenciones docentes bajo la perspectiva de la Resolución de Problemas son los siguientes:

> En este enfoque debería haber, al menos, dos tipos de intervenciones docentes bien diferenciadas:
>
> A. Atención a dudas durante la resolución de problemas. Estas deberán hacerlas ante preguntas, dudas, imposibilidad de avanzar, necesidad de confirmar que la respuesta es correcta, etcétera.
>
> B. Generación de momentos de reflexión metacognitiva. Estas intervenciones serán necesarias para activar en los estudiantes esta cuestión central para este enfoque.
>
> Sin la intervención docente apropiada, es altamente probable que esa reflexión no sea realizada por los estudiantes (Pochulu y Rodríguez, 2012, p.170).

Respecto del primer tipo de intervenciones, cabe mencionar que hay ciertos criterios que van más allá de esta línea y están en concordancia con nuestra mirada acerca de cómo intervenir en una clase de matemática frente a preguntas de estudiantes (para ampliar el concepto, ver Rodríguez, 2016). La clave en esta línea es tener presente *que nuestras intervenciones no deben destrabar el bloqueo del estudiante*, porque, de hacerlo, el problema se habrá transformado en *ejercicio*.

Las preguntas que Polya (ver Polya 1989, p. 19 o p. 25) asoció a cada una de las etapas de la resolución de problemas son pertinentes para que el docente, quien debe advertir en qué etapa está teniendo dificultades el estudiante, intervenga adecuadamente utilizando alguna de ellas.

A modo de ejemplo, si un estudiante aún no empezó a trabajar y pide ayuda, podemos suponer que no comprendió el problema e intervenir en esa dirección. Las preguntas mencionadas que Polya plantea para esta etapa serían pertinentes para este fin. Si, en cambio, terminó de resolver, y nos damos cuenta de que no verificó, podríamos intervenir para lograr que encare algún proceso de verificación. En este caso, tomaríamos las preguntas que este autor propuso para la etapa de verificar la solución.

Uno de los pilares importantes de esta línea es la reflexión metacognitiva. Pasar al plano consciente resoluciones realizadas, dificultades encontradas, propiedades o definiciones puestas en juego, etcétera, es lo que le permitirá al estudiante disponer de sus conocimientos y ser capaz de reutilizarlos ante otras situaciones, además de advertir dificultades o aspectos a mejorar. La naturaleza de la reflexión metacognitiva obliga a que cada estudiante la realice por sí mismo. Es un proceso absolutamente individual. Sin embargo, como docentes debemos incentivarla, generando espacios para que cada estudiante reflexione sobre su quehacer. A continuación, damos algunas ideas acerca de cómo intervenir durante la clase.

Para fomentar y guiar la reflexión metacognitiva de los estudiantes, tendremos que diseñar consignas que tengan ese objetivo, es decir que debemos hacer un planteo para que el estudiante vuelva sobre lo trabajado, invitándolo a revisar las estrategias puestas en juego y analizar si fueron o no exitosas, si permitieron o no llegar a la resolución del problema, si pueden ser reutilizadas en nuevos contextos, etcétera.

El tipo de consignas que habilita una reflexión metacognitiva siempre debe proponerse en un segundo momento de trabajo. En primer lugar, los estudiantes deben haber transitado por la resolución de diversos y variados problemas. Esas resoluciones e intentos serán la fuente a partir de la cual reflexionar. Es importante que los problemas hayan necesitado el uso de contenidos matemáticos distintos y hayan aparecido las mismas heurísticas en varios de ellos. A modo de ejemplo, mencionamos una cita de Pochulu y Rodríguez (2012):

> ... el docente invita a los estudiantes a pensar en lo que han resuelto, lo que les costó más, lo que les fue más simple, lo que les gustó y lo que no. Puede hacerle preguntas como: "*cuando estabas trabado, sin poder empezar, ¿te acordás qué preguntas te hice?*". La idea con esto es que el estudiante advierta la pregunta que le disparó una idea, una posibilidad de cambio, etc., y piense que él mismo podría apelar a dichas preguntas en otro caso similar (p. 171).

Mostramos una grilla que puede utilizarse para recuperar el trabajo realizado en varias clases anteriores y sobre diversos problemas. En la primera fila se menciona el problema 1, como el primero de esa secuencia y se utilizaría una tabla similar por cada problema resuelto. Dicha grilla está basada en la utilizada por Chacón, Colombano, Formica, Isla, Marino, Real y Rodríguez (2012) en clases orientadas a la enseñanza de heurísticas (para ver detalles de su uso en clase se puede consultar el trabajo citado).

Tabla para recuperar lo trabajado

Una mirada sobre el trabajo realizado en el problema 1 **A modo de síntesis**	
Enunciado del problema trabajado en clase	
Describan el trabajo realizado en la búsqueda de la solución propuesta. La intención es recuperar aquí una síntesis de "lo que uno hizo" por si acaso nos tocara ver esta resolución dentro de unos meses	
Aquí indiquen qué estrategias de trabajo han identificado como **útiles** para encarar o resolver este problema.	
Aquí indiquen qué estrategias han realizado que no los condujeron a la resolución del problema	
Aquí dejen indicadas observaciones en general que consideren importantes	

Nos interesa acá ofrecer otro ejemplo, más allá de la identificación de heurísticas, para mostrar que este tipo de preguntas metacognitivas pueden estar ligadas al contenido de una forma más estrecha de lo que puede advertirse en el ejemplo anteriormente descripto.

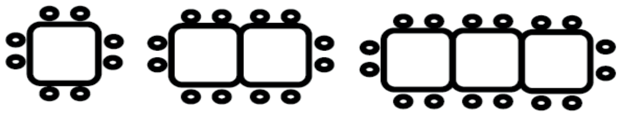
En la experiencia realizada por Marino e Isla Zuvialde (2018) podemos encontrar un trabajo sobre el uso de los símbolos en álgebra en el que se advierte una primera parte de consignas matemáticas y, hacia el final, una serie de preguntas de tipo metacognitivo que ponen foco en lo matemático puesto en juego.

Trabajo Nº 4

Dadas las siguientes situaciones problemáticas:

1) En el supermercado La Esquina, el sachet de 900 g de yogur bebible cuesta \$7 y el sachet de 1,3 kg cuesta \$9. ¿Puede decirse que las variables "cantidad de yogur" y "precio del yogur" son proporcionales?

2) En una importante reunión se ofrece una cena para todos los invitados. A medida que se van sumando comensales se agregan mesas como muestra el siguiente esquema:



   a) ¿Cuántas sillas se necesitan para armar 30 mesas? ¿Y para armar 97 mesas?

   b) ¿Es posible que se sienten 96 personas sin que sobren lugares? En caso afirmativo, ¿cuántas mesas serían necesarias?

3) Una compañía de luz eléctrica cobra a sus clientes un monto fijo de \$110,25 y el costo por kwh consumido es de \$5,2. La compañía de la competencia cobra \$150 de monto fijo y \$4 por kwh consumido. ¿Para qué consumos la primera compañía es más conveniente que su competidora?

Te pedimos que resuelvas los tres problemas, volcando en la hoja cada idea que pusiste en juego a la hora de tu resolución, es decir, debés escribir todo lo que pensaste para llegar a la respuesta. Si hubo intentos que no te condujeron a la resolución correcta, también deberán figurar aquí. Nos interesa cómo lo pensaste.

Una vez resueltos, contestá las siguientes preguntas:

1) Para resolver los problemas, ¿necesitaste usar letras? ¿Por qué? (Recordá que te estamos preguntando acerca de la resolución de cada uno de los tres problemas, si en algunos la respuesta es sí y en otros no, indicá cada caso y explicá).

2) En aquellos que utilizaste letras,

> a) ¿creés que podrías haberlo resuelto correctamente sin usarlas?
>
> b) ¿qué uso (o usos) le diste a la letra? Explicá cada uso.
>
> c) En alguno de los problemas, ¿le asignaste a la misma letra usos distintos? ¿cuáles? Explicá.
>
> Para finalizar: A partir de lo discutido en la puesta en común realizar una reflexión sobre lo aprendido en la resolución de este trabajo (p. 260).

En otro momento, posterior también, se les ofrecieron otros problemas a los estudiantes y se les solicitó que anticiparan, sin resolver, la pertinencia o no de apelar a letras para simbolizar variables. Luego de ello se les hicieron preguntas del tipo: ¿qué característica del enunciado tuviste en cuenta para responder?, ¿tendrías que verificar tu anticipación, o estás seguro de tu respuesta?, si no lograste anticipar y resolviste, ¿podrás capitalizar esta experiencia para otra actividad que te solicite anticipar?, etcétera. Este tipo de preguntas invita al estudiante a transitar procesos de reflexión metacognitiva poniendo énfasis en las cuestiones matemáticas que están en estudio.

Ante este tipo de preguntas, las discusiones que se generan entre los estudiantes pueden resultarles formativas. Esto se debe a que: no todos valorarán de la misma manera las estrategias utilizadas; tendrán que argumentar su posición; se suele poner de manifiesto que, lo que a algunos le resultó útil, fue un obstáculo para otros; se pondrá en juego lo que es correcto o no desde el punto de vista matemático, etcétera. Lo importante a destacar en este momento, es que no es lo mismo que *el docente explicite las conclusiones que le parecen importantes* a que *el docente promueva que sean los estudiantes quienes adviertan lo importante del trabajo realizado*. En el primero de los casos no estaría ayudando a fomentar la reflexión metacognitiva, ya que todo lo haría el propio docente.

Como síntesis presentamos algunos criterios para favorecer la reflexión metacognitiva en los estudiantes, que se desprenden del trabajo realizado por Barreiro y Leonian (2017).

1. *Contar con un instrumento que les permita a los estudiantes, en un momento posterior a la propia resolución, rever los procedimientos realizados al momento de abordar cada problema.*

   Una posible forma es la utilización de la tabla para recuperar lo trabajado, ya mencionada. Es clave el hecho de que este instrumento sea usado con posterioridad a la misma resolución, de modo de poder resolver otros problemas, poner en juego otras heurísticas y en el momento del uso del instrumento intentar que esto sea advertido por los alumnos.

2. *Planificar momentos de reflexión individual sobre las propias producciones.*

   Esto invita al docente a no dejar para una última instancia la reflexión sobre las tareas. Es decir, ir generando sostenidamente la práctica de la reflexión a lo largo de las distintas resoluciones. Al principio, algunas cuestiones comunes no podrán ser advertidas por los estudiantes (simplemente porque, por ejemplo, no ha ocurrido que una misma estrategia pueda ser usada en problemas con distintos contenidos matemáticos), pero ocurrirá con posterioridad.

3. *Generar momentos de debate en las clases donde el docente intervenga para que los estudiantes adviertan el uso de las mismas heurísticas en distintos problemas y con contenidos diferentes.*

   No es sencillo intervenir en clases, como venimos señalando desde el inicio de esta sección. Más complejo es esto cuando el docente se propone que sea *el estudiante* quien se dé cuenta de alguna cuestión, como lo que aludimos en este criterio. En esos casos, las intervenciones del docente deben estar planificadas y serán indirectas. Es decir, en lugar de expresar lo que quiere que el alumno *vea*, le hará unas preguntas apropiadas para que él se dé cuenta de ello.

Como hemos contado en el capítulo anterior, administrar la gama de problemas en clases de matemática es una parte de la gestión docente que resulta compleja. Por este motivo hemos establecido algunos criterios que entendemos que podrían ayudarnos en este sentido. Una exposición más detallada se encuentra en Barreiro y Leonian (2017).

> – Ofrecer, inicialmente, el PB a todos los estudiantes;
>
> – observar el trabajo de los alumnos ante la resolución del PB;
>
> – ante una resolución inmediata del PB, correcta o no, se le ofrece el problema de complejidad mayor;
>
> – si el estudiante no avanza en ningún tipo de producción, indagar si ha comprendido el problema. En caso de que el obstáculo haya sido solucionado, dejarlo avanzar sin cambiarle el problema. Si, en cambio, se detecta que no ha comprendido el problema (o que la consigna le haya resultado demasiado compleja), entregar el PCMe (p. 46).

Los criterios requieren que entablemos un diálogo con los estudiantes con el fin de que nos expliquen en qué situación se encuentran al intentar resolver el problema. Nuevamente, aquí es apropiado tener en mente, para intervenir, las preguntas que se asocian a cada etapa de la resolución de problemas ya mencionadas.

Finalmente, presentamos en forma breve, el procedimiento que pusimos en práctica para llevar adelante el diseño de las entrevistas mediante las cuales ahondamos en la identificación de heurísticas.

Lo dejamos para el final de esta sección por ser específicamente un aporte metodológico, aunque en la cronología del trabajo de investigación fue anterior a implementar clases, tal como describimos en el capítulo anterior.

3.2.6. Procedimiento para el diseño de entrevistas que permitan identificar heurísticas

A partir del trabajo de González (2009), pudimos clasificar tipos de entrevistas y describir técnicas con las que se las podía diseñar. La clasificación contemplaba: entrevistas con o sin vínculo con un problema y, transversalmente, concurrentes con la resolución o en forma retrospectiva. Cada una de estas alternativas, a su vez, contaba con tipos de entrevistas (pueden verse detalles en Casetta, González y Rodríguez, 2017).

Para seleccionar la técnica más apropiada con la que delinear la entrevista, consideramos los siguientes criterios:

- Si el sujeto tiene poca experiencia en: la resolución de problemas, en mantener una reflexión metacognitiva e identificar qué estrategias utiliza, restringir las técnicas a las que tengan vínculo con un problema.
- En caso contrario, cuando nuestro conocimiento sobre los sujetos nos permitiera saber que tienen experiencia en resolver problemas, más formación matemática, que evidencien haber recibido enseñanza de heurísticas, pasos en la resolución de problemas, etcétera, se habilita la elección de alguna de las técnicas sin vínculo con algún problema.

En nuestro caso, la población de estudiantes con la que trabajamos mostraba tener poca experiencia en la resolución de problemas y en la reflexión sobre el propio accionar cognitivo para identificar las estrategias utilizadas. Esto fue un indicador preciso para optar por la *entrevista con vínculo con un problema*.

Nuevamente debimos analizar las resoluciones escritas, pero ahora en términos de heurísticas utilizadas. Necesitábamos identificar si era claro para nosotros cuáles heurísticas habían sido usadas, y también si podíamos identificar porciones de lo escrito en las que no resultaba clara la forma de resolver del estudiante (tal vez infiriendo posibles vínculos entre el borrador y la hoja pasada en limpio). Entonces, decidimos:

- En los casos en los que el análisis de las resoluciones escritas pusiera de manifiesto un amplio repertorio de heurísticas, no utilizaríamos técnicas que apelaran al análisis retrospectivo. Les propondríamos un problema distinto al resuelto en el test, pero que, a priori, conservara la misma variedad de heurísticas que aquel. Allí, invitaríamos al estudiante a resolverlo “pensando en voz alta”.
- En los casos en que, a partir del análisis de las resoluciones escritas necesitáramos obtener información del proceso de pensamiento seguido en la resolución del test, le propondríamos una entrevista estimulando el recuerdo sobre lo realizado. Acordamos, en este caso, en utilizar las técnicas retrospectivas, puesto que nos posibilitarían dilucidar lo que el estudiante había plasmado en su escrito.

A modo de ejemplo, presentamos parte de una entrevista diseñada para poner al estudiante a pensar en voz alta. Su test no nos había generado dudas, de modo que le propusimos lo siguiente.

Inicio de la entrevista

> *Valoramos mucho que hayas aceptado encontrarte con nosotros este rato y será beneficioso para otros alumnos del curso de años siguientes, así que ¡muchísimas gracias!*
> *En esta entrevista, te vamos a dar un problema y te pedimos que intentes resolverlo. La particularidad que tiene esta entrevista es que vamos a necesitar saber qué es lo que estás pensando durante el tiempo que te ocupe su resolución. Para eso, esperamos que todo el tiempo nos vayas diciendo qué es lo que estás pensando. No nos importa tanto si lo que haces está bien o no… sino que la clave está en focalizar lo que estás pensando en cada uno de los pasos de tu razonamiento al resolver la actividad. Por esta razón, si en algún momento te notamos callado, te vamos a preguntar ¿en qué estás pensando? Te lo aclaramos antes porque no queremos que te moleste.*

1er. Problema propuesto

En una plaza se quieren poner canteros, rodeándolos con baldosas hexagonales, como se muestra en la figura

a) ¿Cuántas baldosas se necesitarán si se quieren colocar 100 canteros?

b) ¿Cuál es la máxima cantidad de canteros que se pueden armar si se dispone de 620 baldosas?

Transcribimos parte de la entrevista y señalamos heurísticas que pone en juego.

…

Estudiante: Como que interpreto que… cuáles son los canteros y cuáles son las baldosas que los rodean.

Entrevistador: Bárbaro.

Estudiante: Bueno… acá yo primero pensé en contar cuantas baldosas rodean cada cantero, pero me acabo de dar cuenta de que… comparten dos, así que ahora tendría que ver cómo arreglo eso.

Entrevistador: Ajá.

Estudiante: Y va a ser una fórmula… con una incógnita para sacarlo… a ver…

Entrevistador: Te vemos ahí marcando…

Estudiante: No, conté, empezando de acá, este cantero tendría 6 baldosas que lo rodean y los demás tendrían ya 4.

Entrevistador: Ajá

Estudiante: O sea, que el primero tiene 6 y los otros 4.

Entrevistador: ¿Cómo fue lo que marcaste con la birome? Porque yo te vi haciendo el gesto…

Estudiante: No, no marqué nada, iba contando así para no perderme.

Entrevistador: Bueno.

Estudiante: Bueno, entonces el cálculo que haría es… el número es de canteros.

Entrevistador: ¿A eso lo llamas “x”?

Estudiante: Si. Por (refiriéndose a la operación multiplicar) 4 baldosas más 2 igual… que sería el número final (Heurística: *reinterpreta en un lenguaje diferente: plantea una expresión sombólica*).

Entrevistador: ¿De?

Estudiante: De baldosas que pondría.

Entrevistador: ¿A eso lo llamas “y”?

Estudiante: Ajá.

Estudiante: Claro, se quieren colocar 100 canteros, reemplazaría…100 por 4 más 2. Eso sería 402. ¿No? Está bien. (Heurística: *trabajó hacia adelante*)

$$x \cdot 4 + 2 = y$$

$$100 \cdot 4 + 2 = 402$$

$$4 \quad 4 + 2 = 18$$

Entrevistador: Y, ¿cómo podrías quedarte tranquilo de que esa respuesta está bien?

Estudiante: Reemplazando en el del ejemplo y contándolos. Uno, dos, tres, cuatro, entonces usaría… (*resta 4 canteros, y chequea que le da 18*) (Heurística: *verifica la respuesta usando un caso particular*).

Entrevistador: Con eso te quedás tranquilo de que está bien.

Entrevistador: Y eso de escribir una fórmula, ¿cómo es que se te ocurre? ¿Qué pensaste que te llevó a decir que acá una fórmula va bien?

Estudiante: No, quizás fue algo que practiqué bastante este año. (Heurística: *razona por analogía,* recordó alguna situación resuelta, ninguna en particular).

Entrevistador: Ajá, ¿te resultó como algo conocido?

Estudiante: Sí.

Entrevistador: Bien. Y eso sería la respuesta de la consigna a), ¿no?

Estudiante: Claro, sí.

Entrevistador: ¿Encontrás algún beneficio al plantear escribir una fórmula?

Estudiante: ¿Una fórmula?

Entrevistador: Sí.

Estudiante: Y sí, que puedo, que puedo introducir cualquier número… o sea puedo preguntarme en 100 canteros, en 90 canteros, en 80 canteros, y lo que voy a hacer es reemplazar.

Entrevistador: En cualquier cantidad.

Entrevistador: O sea, es algo más general que sirve.

…

(Sigue y más adelante trabaja con la ecuación que planteó)

Estudiante: Bueno, ahora lo tengo que hacer.

Estudiante: Bueno, reemplazaría. Primero pienso que: reemplazando en la "y" 620 pero igual quizás no es así, y si no es así luego lo vuelvo a hacer.

Estudiante: Acá necesitaría una calculadora.

Entrevistador: Te podemos ayudar, te hacemos las cuentas.

Estudiante: Sí, mejor.

Entrevistador: Decime.

Estudiante: 618 dividido 4.

Entrevistador: 618 dividido 4 es 154,5

Estudiante: Ya está.

Entrevistador: ¿Qué es lo que está?

Estudiante: ¿154,5?

Entrevistador: Sí.

Estudiante: Y… que no es un número entero. Y que no puedo poner una baldosa a la mitad. Entonces tendría que ver aproximadamente qué número de baldosas es el anterior.

Estudiante: O sea, cuál es el que me quedaría incompleto y este directamente no va, lo elimino. (Heurística: *trabaja hacia adelante*).

Entrevistador: Dale, tendrías que ir pensando en voz alta.

Estudiante: Ahora estoy pensando en dividir este número por alguno.

Estudiante: Emmm… 624…

Estudiante: A ver, ¿cómo sería… 154 por 4, más 2?

Entrevistador: 154 primero por 4, da 616, más 2, 618.

Estudiante: Mmm, acá no sé.

Entrevistador: ¿Qué no sabés?

Estudiante: No, que estoy pensando… que se me confunden las incógnitas.

Entrevistador: Eso queremos que nos cuentes. Pensalo en voz alta, ¡por favor!

Estudiante: No, es que se me confundieron las incógnitas y viendo este número que me dio acá… ¿qué sería…? a ver …

Entrevistador: Dale, bárbaro, pensalo en voz alta.

Estudiante: Bueno, este era las baldosas, y este eran… No…

Estudiante: No, estas eran las baldosas. Si tenía 620 baldosas puedo armar 154 canteros y medio. Entonces no, serían 154. Sí, 154.

Entrevistador: ¿Y cuántas baldosas te sobran?

Estudiante: Y dos, porque si eran "y medio" y eran 4. O sea, 2.

Entrevistador: Muy bien.

Entrevistador: ¿Necesitas verificar algo?

Estudiante: No.

Entrevistador: Te quedás reconforme, seguro de lo que hiciste.

Estudiante: No, porque era el 154 reemplazarlo acá, pero me daba 618. Y aparte está el 2 ese que hay que sumar. Entonces también estaban las dos. (Heurística: *verifica utilizando un registro de representación distinto*: para verificar su respuesta –a la que llegó haciendo cuentas– utiliza la fórmula)

$$x \cdot 4 + 2 = 620$$
$$x \cdot 4 = 618$$
$$x = 618 : 4$$
$$x = 154{,}5$$

Entrevistador: Bien.

Este ejemplo deja de manifiesto la cantidad de heurísticas que podría poner en juego un sujeto que no quedarían a la vista en una resolución escrita.

Para ver un ejemplo analizado en detalle del diseño de una entrevista de tipo retrospectiva, sugerimos ver Casetta *et al.* (2017).

3.3. A modo de cierre

En este capítulo intentamos resaltar algunos resultados de la investigación, poniendo énfasis, por un lado, en los aportes teóricos como las definiciones de *problema para un sujeto*, *potenciales problemas*, *gama de problemas* y, por otro lado, en el establecimiento de criterios que permitirán al lector adaptar a su contexto los conceptos presentados.

Consideramos que esto sería más valioso para el lector que simplemente mostrar en detalle los resultados que obtuvimos específicamente en cada institución.

Recordamos también, a modo de cierre, que entendemos que la lectura de este capítulo puede capitalizarse tanto desde la perspectiva del investigador que busca precisiones teóricas o metodológicas, como desde la del docente que necesita algunas ideas operativas para llevar a sus clases de matemática.

Reflexiones finales

El libro habrá dejado entrever que el trabajo realizado fue intenso y que el camino recorrido estuvo lleno de desconciertos, ajustes y cambios de rumbo. En realidad, entendemos que la investigación tiene, en general, estas características. Suele no advertirse este hecho si únicamente accedemos a los productos finales de las investigaciones. Los artículos con referato o los libros que plasman los resultados de trabajos en proyectos, por lo general, no incluyen este tipo de rastro. El investigador que se inicia suele desconocer estas vivencias y mira su proceso considerando que está teniendo problemas, que es algo que le sucede a él… ¡y no es así! Con la intención de explicitar esos procesos, y para que el investigador que se inicia conozca las características del camino que va a recorrer, es que decidimos escribir este texto.

Creemos que parte importante de los resultados que obtuvimos, específicamente los de tipo metodológico, se originó a causa de la constitución del equipo. Trabajar en instituciones diferentes y que los cursos de matemática se dictaran en distintos momentos del año, favoreció que nuestra producción ofrezca no solo un modo de trabajo ajustado a una universidad, sino también criterios que pueden ser capitalizados por otros. Debíamos proponer un modo de diseño de distintos instrumentos que les permitiera a otros hacer sus diseños ajustados a las características propias de sus estudiantes y de sus cursos. Hoy en día, consideramos que esto es uno de los aportes más valiosos que logramos. Asimismo, hemos capitalizado los resultados para reflexionar sobre la tarea docente y sobre la formación docente.

Esperamos que el libro acerque a docentes, estudiantes, tesistas, becarios e investigadores principiantes, resultados de investigación en educación matemática que muchas veces circulan exclusivamente en el ámbito de quienes producen este tipo de saberes, que quedan distantes y no se aprovechan para mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

Bibliografía

Barreiro, P. y Leonian, P. (2017). "La Metacognición en las clases de Matemática: un aporte para la enseñanza". *Épsilon,* nº 97, pp. 43-56. Disponible en http://thales.cica.es/epsilon/?q=node/4707

Brousseau, G. (1994). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemática.* Serie "B". Trabajos de Matemática, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba.

Carnelli, G.; Falsetti, M.; Formica, A. y Rodríguez, M. (2007). *Matemática para el Aprestamiento Universitario*. Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza.* Barcelona: Martínez Roca.

Casetta, I.; González, V. y Rodríguez, M. (2017). "Un procedimiento para diseñar entrevistas personalizadas que permiten identificar heurísticas matemáticas". *Paradigma,* vol. XXXVIII, nº 1, pp. 235-258.

Chacón, M.; Farías, S.; González, V. y Poco, A. (2009). "Un procedimiento para establecer criterios para elaborar problemas". Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy: Universidad Nacional de Luján, Formato CD. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/326161223_Un_procedimiento_para_establecer_criterios_para_elaborar_problemas

Chacón, M.; Colombano, V.; Formica, A.; Isla Zuvialde, D.; Marino, T.; Real, M. y Rodríguez, M. (2012). "Identificación y enseñanza de heurísticas". Memorias del 12º Simposio de Educación Matemática, Chivilcoy, Universidad Nacional de Luján, Formato CD.

Charnay, R. (1994). "Aprender (por medio de) la resolución de problemas". En Parra, C. y Saiz, I. (comps.), *Didáctica de la*

Matemática. Aportes y reflexiones, pp. 51-64. Buenos Aires: Paidós.

Colombano, V.; Isla Zuvialde, D.; Marino, T. y Real, M. (2009). "El problema de diseñar problemas". Actas de la XXXII Reunión de Educación Matemática, Universidad Nacional de Mar del Plata, Mar del Plata. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/326161138_El_problema_de_disenar_problemas

Ferrer Vicente, M. (2000). *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana.* Tesis doctoral en Ciencias Sociales. Disponible en www.eumed.net/tesis/2010/mfv/. Fecha de consulta: 1/6/2011.

González, F. (1998). "Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos". *Zetetiké*, vol. 6, nº 9, pp. 59-87.

—— (2009). "Métodos, técnicas y procedimientos para el estudio de procesos de pensamiento". UPEL, Maracay, Venezuela. Documento interno de trabajo.

Koichu, B., Berman, A. y Moore, M. (2003). *Changing Teachers' Beliefs about Students' Heuristics in Problem Solving.* 3rd. Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Italia.

Marino, T. e Isla Zuvialde, D. (2018). "Usos de la variable, sentido simbólico y metacognición: una propuesta didáctica para el aprendizaje del álgebra elemental". *Paradigma*, vol. 39, nº 1, pp. 246-266. Disponible en http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/download/6788/3885.

Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). "Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel preuniversitario". *Paradigma*, vol. 30, nº 2, pp. 159-178. Disponible en http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/viewFile/2019/884

Nápoles Valdés, J. y Cruz Ramírez, M. (2000). "La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones". *Función Continua*, nº 8, pp. 21-42.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comps.) (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Buenos Aires: Universidad Nacional de General Sarmiento y EDUVIM, Universidad Nacional de Villa María.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. Nueva York: John Wiley.

—— (1989). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas. [Versión en español de la obra *How To Solve It?* publicada por Princeton University Press en 1945].

Rodríguez, M. (comp.) (2016). Barreiro, P.; Leonian, P.; Marino, T.; Pochulu, M. y Rodríguez, M., *Perspectivas metodológicas para la enseñanza y la investigación en educación matemática*. Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Schoenfeld, A. (1992). "Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics". En Grouws, D. (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* Nueva York: MacMillan.

Tall, D. (ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Dorderchet: Kluwer Academic Publishers.

Verschaffel, L. (1999). "Realistic Mathematical Modeling and Problem Solving". En Hamers, J.; Van Luit, J. E. H. y Csapó, B. (eds.), *Teaching and Learning Thinking Skills*, pp. 215-239. Lisse: Swets & Zeitlinger.