Interpretación y producción de textos matemáticos

Mabel Rodríguez

Interpretación y producción de textos matemáticos

EDICIONES UNGS
Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

Rodríguez, Mabel
Interpretación y producción de textos matemáticos / Mabel Rodríguez. - 1a ed . - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2019.
52 p. ; 20 x 14 cm. - (Educación. Educación en ciencias ; 1)

ISBN 978-987-630-439-9

1. Matemática. 2. Educación Científica. I. Título.
CDD 510.7

EDICIONES **UNGS**

J. M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)
Prov. de Buenos Aires, Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507
ediciones@campus.ungs.edu.ar
ediciones.ungs.edu.ar

Diseño gráfico de colección: Andrés Espinosa
Diseño de tapa: Daniel Vidable
Diagramación: Eleonora Silva
Corrección: Edit Marinozzi

Hecho el depósito que marca la Ley 11.723

Impreso en Ediciones América
Abraham J. Luppi 1451, CABA, Argentina,
en el mes de diciembre de 2019.
Tirada: 400 ejemplares.

L U A
Libro
Universitario
Argentino

Serie
Educación en ciencias

Coordinación:
Mabel Rodríguez

Equipo editorial:
Gustavo Carnelli, Patricia Barreiro,
Tamara Marino y Paula Leonian

Esta serie reúne aportes del campo de la enseñanza de distintas ciencias. Enfocada inicialmente en la educación matemática, contribuye a la comunidad académica con textos útiles, claros en su presentación y accesibles a un público de estudiantes de la formación de profesores, docentes de nivel medio y superior y formadores de formadores e investigadores.

La serie se articula en dos sub-series: *Ideas para la clase de matemática* e *Investigaciones en educación matemática*.

Ideas para la clase de matemática

Cada libro presenta una temática de enseñanza de la matemática de nivel secundario o superior.

Se presenta una discusión de cuestiones referidas a la enseñanza de algún contenido matemático que puede incluir consignas para trabajar en el aula, con anticipación de posibles resoluciones y errores esperables, modos de aplicación en el aula y su adecuación a distintos grupos de estudiantes, o también la consideración de aportes de la educación matemática para su diseño y análisis, entre otras.

Se pueden incluir distintas resoluciones de consignas con o sin uso de recursos tecnológicos –si es pertinente– y presentar una discusión acerca de qué contextos, con qué modalidad de trabajo y para qué objetivos podrían ser apropiadas.

La concepción de la tarea del profesor que subyace es la de un profesional que debe tomar decisiones sobre contenidos, objetivos, recursos, etcétera, por lo que no se publican secuencias ni planificaciones cerradas que marquen un camino a seguir.

Tomando cuestiones teóricas de educación matemática, pueden incluirse fundamentaciones de algunas de las propuestas o aportes para encarar ciertos temas.

Se espera que los libros de esta serie contribuyan a fortalecer el rol docente por medio de una discusión académica, en la que el lector se encontrará involucrado e invitado a sumar herramientas para su quehacer cotidiano.

Índice

Introducción

En este libro abordamos dos tareas que consideramos sumamente importantes para quien aprende y para quien enseña matemática: interpretar textos y producirlos.

Inicialmente, nos tomamos un momento para explicitar sus relaciones y diferencias. Luego, planteamos la importancia de enseñar a nuestros estudiantes tanto a interpretar como a producir textos, e incluimos ideas y pautas para tal fin.

¿Por qué es importante interpretar un texto matemático? En primer lugar, cuando decimos interpretar un texto matemático, nos estamos refiriendo a que es un texto que fue escrito por otro y que puede contener una definición, un enunciado de una propiedad, una demostración, la explicación de un procedimiento, la resolución de un ejemplo, etcétera. Es un texto que otra persona generó para comunicarnos algo, y es tarea de quien lee captar ese mensaje y comprenderlo. La importancia de interpretar textos radica en la autonomía de quien puede hacerlo. Alguien que toma un texto matemático y comprende lo que está expresado en él es alguien libre, autónomo, no requiere la explicación de otra persona. Habría más razones, pero esta es suficiente para que consideremos su importancia en la formación inicial de profesores de matemática. Un futuro docente capaz de aprender algo nuevo, un tema que le toca enseñar y que no fue parte de su plan de estudios, es un docente que podrá adaptarse a los cambios curriculares, a las necesidades de su contexto, a las instituciones y niveles educativos en los que les toque trabajar.

Entonces, ante esta perspectiva, nos ubicamos en el rol de formadores de profesores y advertimos cuán importante es que desde la formación inicial hagamos algo, desde nuestra propuesta de enseñanza, para que el futuro profesor aprenda a interpretar textos. En este libro, encontrarán ideas al respecto.

Dejamos expresada una preocupación referida a la interpretación de textos matemáticos. Es usual encontrarnos con que pareciera que *poder leer símbolos, pronunciarlos y conocer el significado de cada uno de ellos, fuera suficiente indicador de estar comprendiendo*. **¡Atención, porque esto no es así!** Ante un escrito como "$\forall c \in R, \exists n \in N / n > c$" podríamos leer "para todo *c* real, existe un número natural *n* tal que *n* es mayor que c" y no entender qué es lo que ese mensaje nos está tratando de comunicar. Ni más ni menos que el Principio de Arquímedes, que expresa que *el conjunto de los números naturales es no acotado*.

No nos quedemos, entonces, con la lectura superficial, de izquierda a derecha, tenemos que comprender el mensaje. Ahí vamos con la propuesta de este texto.

Ahora bien, ¿por qué encarar la producción de textos matemáticos? La tarea de producir un texto matemático es aún más compleja que la de interpretar uno hecho. Esto se debe a que no solo hay que tener en claro qué es lo que se va a comunicar, sino que se deben tomar decisiones de cómo hacerlo, en qué orden y luego lograr que el escrito simbólico plasme exactamente lo que queremos decir. Nuevamente, resaltamos la importancia de esta tarea en la formación de profesores, así como de otros profesionales que necesitan enseñar o comunicar ideas matemáticas.

Interpretar, escribir y explicar cuestiones matemáticas son tres tareas de alto nivel formativo, vinculadas entre sí aunque diferentes y extremadamente complejas de aprender. Por esa razón, no vamos a dejarlas libradas a que cada estudiante haga lo que pueda. Vamos a compartir un modo de trabajo alrededor de ellas que esperamos sea útil tanto para el docente que enseña matemática (y, por lo tanto, debería enseñar esto) como para el estudiante avanzado, que debe aprender a realizar estas tareas primero, para luego pensar cómo enseñarlas.

En el libro encontrarán algunas pautas para interpretar textos que esperamos sean útiles para estudiantes avanzados de matemática. También se encuentran pautas para producir textos a partir de lo leído o entendido.

Finalmente, nos dedicamos a considerar pautas para la clase y ejemplos que podrían ser útiles para un docente interesado en que sus estudiantes desarrollen este tipo de habilidades.

1
¿Cómo encarar la interpretación de un texto matemático?

1.1. Introducción

Interpretar un texto matemático significa comprender en profundidad qué es lo que contiene, cómo está organizado, cuáles son las ideas, conceptos, propiedades, demostraciones, etcétera, que están plasmadas en él. Es importante tener claro que esto conlleva ser capaz de *explicar* lo que está escrito. Tenemos que hacer ya mismo una aclaración importante. Cuando nos referimos a *explicar* lo hacemos desde una perspectiva de comunicar el contenido mostrando comprensión, pero como si le habláramos a un par, a alguien que sabe matemática. Es decir, *no* estamos pensando en explicarle el tema a alguien que lo desconoce, intentando enseñárselo. Para *enseñar* un tema hay muchas otras cosas que saber, no solo matemáticas, también didácticas. De todos modos, si este último fuera el caso, nosotros debemos comprenderlo primero y, para eso, necesitamos poder apelar a libros o materiales escritos y ser capaces de interpretarlos.

En este capítulo nos dedicamos a dar elementos que ayuden a un sujeto a interpretar un texto matemático en el sentido recién indicado. No interesa por ahora si el contenido es conocido o desconocido para el sujeto. El tipo de trabajo que habría que hacer en cualquiera de los dos casos es similar.

El trabajo que presentamos aquí transfiere, al campo de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, resultados de un trabajo de investigación previo (Rodríguez, 2013).

1.2. Pautas para encarar la interpretación de un texto matemático

Dado que los textos que tenemos que interpretar pueden ser desde una definición que tal vez se expresa en un renglón, hasta un capítulo de libro, o el mismo libro, que son claramente mucho más extensos, vamos a suponer que los *textos largos* contienen una diversidad de cuestiones matemáticas. Sin intención de dar una definición precisa al respecto pensemos que podría contener: una definición, ejemplos de ella, algunas propiedades y ejercicios. Del mismo modo, solo como para orientar a qué nos referimos con *texto corto*, nos imaginamos un escrito que contiene únicamente o una definición, o un ejemplo sencillo, el enunciado de una propiedad, por ejemplo. Si para desarrollar un ejemplo de un concepto, tuviéramos que utilizar varias hojas, aunque solo sea *un ejemplo*, lo consideraríamos un texto largo porque dentro de ese desarrollo podría haber una diversidad de cuestiones matemáticas utilizadas. Si acaso ese ejemplo le resultara conocido al lector, lo considerará un texto corto, lo leerá rápidamente y pasará a lo siguiente. Como verán en un momento, no interesa lograr mayor precisión por ahora…

Vamos a suponer que tenemos un texto de dos o tres carillas. Esto es para no pensar, por ahora, en el caso de tener un texto breve como podría ser una definición (de un renglón) o una definición seguida de un ejemplo (que ocupa unos pocos renglones), por ejemplo. Nos dedicaremos a este tipo de textos breves un poco más adelante.

Lo primero que tenemos que identificar es *de qué nos habla el texto y cómo está organizado,* para saber a qué nos enfrentamos. Esto nos obliga a reconocer *la estructura global* del texto. Para ello, vamos a identificar secciones o partes que consideremos, a grandes rasgos, que persiguen finalidades diferentes. Esto nos va a permitir decir muy brevemente qué contiene el escrito. Por ejemplo, podría darse alguno de los casos que siguen:

- Presenta una definición, da un ejemplo, enuncia una propiedad con ese concepto y la demuestra.

– Comienza presentando un ejercicio, lo resuelve, luego enuncia una definición, da un ejemplo de ella y propone otros ejercicios.
– Enuncia una propiedad, explica qué significa, da un ejemplo de su uso y esboza la idea de la demostración sin incluirla.
– Propone un problema, no lo resuelve, explica que no está a su alcance y que necesitaría conocer un cierto procedimiento para abordarlo, propone el procedimiento y lo utiliza para resolver el problema.
– Etcétera.

En este primer momento no interesa *todavía* entender qué es lo que dice la definición, o qué enuncia el teorema, o cuándo se puede aplicar, etcétera. Estamos queriendo lograr una *visión global* de lo que está escrito, y reconocer el recorrido por el que el autor nos invita a transitar. *Este paso es clave hacerlo al principio.* Cuando el texto tiene las secciones claramente señaladas, hacer esto resulta casi inmediato. Sin embargo, los textos actuales (de nivel medio, por ejemplo) no suelen tener esas indicaciones y no es tan evidente qué es lo que el autor decidió presentar y de qué modo lo hace. Con esto *no* estamos diciendo que los textos deban tener secciones identificadas con títulos que anuncien lo que sigue para ser más claros … ¡No necesariamente! Cada autor elige el modo en el que quiere escribir y, posiblemente, tenga sus fundamentos didácticos, lo que hace que haya absoluta diversidad en los tipos de textos.

¿Por qué decimos que esto debe ser realizado al inicio? Porque nos hace tener perspectiva, reconocer a dónde va el autor, ver su meta e identificar el recorrido propuesto. Si, por el contrario, nos dedicáramos a comprender renglón por renglón, tal vez lo logremos, pero eso no garantiza la comprensión de la totalidad del escrito. Metafóricamente hablando, pensemos en construir una cadena a partir de eslabones. Consideremos las dos posibilidades siguientes:

a) Podemos tomar un eslabón, encadenarlo con otro y armar una cadena más larga o más corta. Nunca pensamos qué conecta, no nos planteamos a qué punto debe llegar, pero tenemos la cadena.

b) Si identificamos una meta y luego articulamos cada eslabón con el siguiente, de modo que se conecten para llegar a ella, tendríamos una cadena que sabemos de dónde a dónde va y cómo son sus partes.

El segundo caso mencionado expresa, con una analogía, el planteo que queremos transmitir.

Volviendo a nuestro caso, habremos resuelto el problema de comprender la perspectiva *global* del texto: sabemos a dónde va el autor, qué nos quiere contar y de qué modo pensó hacerlo. Luego podremos reconstruir ese recorrido y nos quedará la tarea de ir hacia adentro, a comprender cada uno de esos pasos… ¡eso es lo que necesitamos lograr!

Piensen si no les ha pasado alguna vez esta situación: leen una demostración… trabajan duro para entender por qué vale lo que al autor puso cuando pasó de un renglón al siguiente y así con cada paso… Nos quedamos mucho tiempo detenidos tratando de entender por qué puso "es claro que…", "es trivial que vale…", "es obvio que…", y cuando termina la demostración nos preguntamos "¿listo…?" y nos quedamos pensando por qué ahí terminó la demostración. Esto nos dice que todavía *no entendimos*… Aunque podamos justificar cada paso, si no somos capaces de explicar por qué esa concatenación de ideas demuestra un enunciado –si fuera el caso– o resuelve un ejercicio –por dar otro ejemplo–, no hemos comprendido.

Asimismo, como veremos, llegar a una comprensión sumamente fina, local, es necesario, pero lo haremos en la última etapa.

Sigamos…

Si hemos logrado esa visión global que nos esclarece esas grandes partes que contiene el texto, independientemente de que estas estén señaladas en él como secciones, con título o algún tipo de rótulo, podemos empezar a entender cuál es la meta del autor, qué es lo que nos presenta y de qué modo lo hace.

El siguiente paso es tomar *cada una de esas partes* y considerarla como *un nuevo texto* y volver a empezar. Esto significa que estamos ante el mismo desafío de identificar qué es lo que contiene, cuál es la meta del autor, qué nos cuenta en esa parte. Imaginen que aisláramos esa parte del texto, extrayéndola del inicial y la tomáramos como un todo: un nuevo texto que tenemos que interpretar. Estaríamos comenzando de nuevo. Esa es la idea. De este modo, cuando estemos en una parte breve nos tocará comprender: cuál es la meta (de esa fracción de escrito), qué recorrido hace el autor, y tocará llegar, ahora sí, a comprender hasta el mínimo detalle que inicialmente habíamos dejado sin abordar.

Por supuesto que ante un mismo texto, lectores diferentes pueden proponer secciones o partes de distinto modo, ¡y todo vale! No hay una única manera de *ver* esas separaciones en un escrito.

Tal vez empiece a resultar claro que hay una especie de proceso recursivo que va desde una mirada global del texto hasta la mirada local, casi microscópica, que terminaremos dando para entender con total detalle cada uno de los pasos escritos, pero siempre teniendo claro qué está pretendiendo hacer el autor (de ahí la importancia de tener clara la perspectiva global, primero). Esto también obliga al lector a predisponerse a *dar más de una lectura del escrito*. Seguramente nos haya pasado alguna vez, que leyendo una novela ni se nos ocurriría tener que releer el texto para considerar que lo hemos entendido. Esto no ocurre del mismo modo leyendo textos matemáticos. Necesitamos hacer varias (muchas, me atrevería a decir…) lecturas, porque, en cada una de ellas, estamos poniendo el foco en cosas distintas. Incorporemos esto como algo natural, como cuando pintamos una pared y damos varias manos de pintura para que cubra. La primera fue general, empezó a mostrar cómo quedará, y la última tapa cada espacio faltante y cubre los detalles. Recién en ese momento, termina el trabajo de pintar. Salvando las diferencias, es un proceso similar.

El tipo de preguntas que nos acompaña en cada momento y que les van a resultar útiles como para que las incorporen y las usen, son:

Para la mirada global:

- ¿qué me está contando el autor en este texto?
- ¿de qué se trata el escrito?
- ¿en algún lado hay una definición, un teorema, una demostración…?
- ¿cómo está organizado el texto?
- ¿qué plan siguió el autor?
- ...

Para la mirada local:

- ¿qué significa esto? (refiriéndonos a "cada cosa" que esté escrita)
- ¿por qué vale…? (cada cosa escrita)
- ¿cómo organizó la resolución de…? (sea un ejercicio, una demostración, etc.)
- …

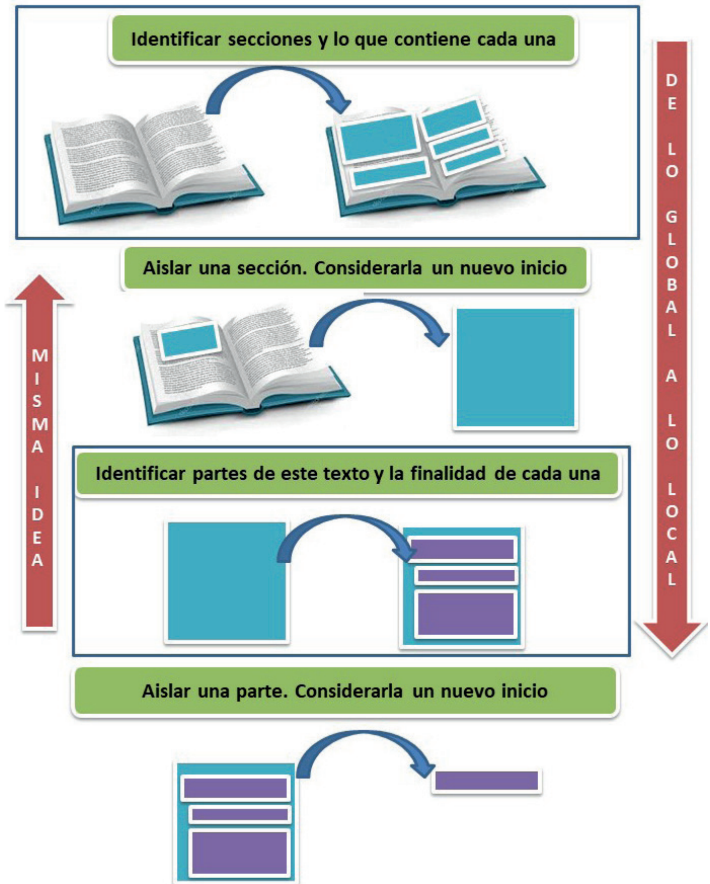
Para nuestro control:

Cuando nos hayamos respondido estas preguntas, veamos si pasamos esta prueba:

- ¿soy capaz de explicar globalmente qué dice el texto? (como si pasáramos un audio a un amigo diciéndole de qué se trata)
- ¿puedo decir de otro modo lo que está escrito o solo podría repetir el discurso del autor?
- ¿puedo justificar cada parte del escrito sin perder la perspectiva de por qué eso sirve para lograr lo que el autor se propuso?
- …

Esquemáticamente, el proceso cíclico que debemos recorrer desde la mirada global hasta la particular, es el siguiente.

Esquema 1. El proceso cíclico de interpretación: de lo global a lo particular



Veamos cómo se vería todo esto en un ejemplo.

1.3. Ejemplo 1. Interpretar un texto largo

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Problema 3

Dos familias salen simultáneamente en sus autos por una misma ruta rumbo a una ciudad balnearia. Una de las familias parte de la ciudad A, mientras que la otra lo hace desde una ciudad distante 50 km de A hacia adelante. La ciudad de destino se encuentra a 250 km de la ciudad A. Ambos autos van a velocidad constante, recorriendo 2 km por minuto.

En el mismo momento en que partieron los autos mencionados, un camión sale desde la ciudad balnearia por la misma ruta y en sentido contrario a los otros dos autos, a velocidad constante, recorriendo medio kilómetro por minuto.

Si se representan gráficamente la distancia (en km) a la que se encuentra cada uno de los tres vehículos de la ciudad A en función del tiempo (en minutos), ¿qué relaciones tienen estos gráficos?

Si se designa con x al tiempo desde la salida medido en minutos y con y a la distancia a la ciudad A medida en kilómetros:

Primer auto: Sale de A
$\Rightarrow$ el punto (0 ; 0) está en el gráfico.
La velocidad es de 2 km/min
$\Rightarrow$ la pendiente es 2

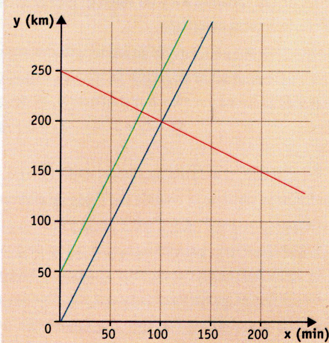
$$f(x) = 2x$$

Segundo auto: Sale a 50 km de A
$\Rightarrow$ el punto (0 ; 50) está en el gráfico.
La velocidad es de 2 km/min
$\Rightarrow$ la pendiente es 2

$$g(x) = 2x + 50$$

Camión: Sale a 250 km de A
$\Rightarrow$ el punto (0 ; 250) está en el gráfico.
La velocidad es de 0,5 km/min pero se acerca a A
$\Rightarrow$ la pendiente es – 0,5

$$h(x) = -0,5x + 250$$



En el gráfico se aprecia que las rectas correspondientes a los dos autos son paralelas. Esto se debe a que para cualquier intervalo de tiempo, ambos autos recorren la misma distancia. Por eso, en todo momento la distancia entre ellos es la misma: los 50 km que los separan al comienzo del movimiento. El hecho de tener ambas rectas la misma pendiente es lo que hace que sean paralelas.

Generalizando el caso anterior, se establece la siguiente condición: siempre que dos rectas tienen la misma pendiente, son *paralelas*. Si dos rectas que tienen la misma pendiente tienen, además, la misma ordenada al origen, entonces se dice que son *coincidentes*. Las rectas verticales, aunque no tienen pendiente, siempre son paralelas.

Dadas las rectas R_1 y R_2:
$R_1: y = m_1 x + b_1$
$R_2: y = m_2 x + b_2$
Entonces:
$m_1 = m_2 \Leftrightarrow R_1 // R_2$
$m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2 \Leftrightarrow R_1$ y R_2 son *coincidentes*.
Además, dos rectas verticales siempre son paralelas.

Por ejemplo, si las ecuaciones de las rectas R_1 y R_2 son las siguientes:

$$R_1: y = 3x + 1 \qquad R_2: y = 3x - 2$$

Sin representarlas en un gráfico, es posible anticipar que son paralelas, porque ambas tienen pendiente 3, es decir, sus pendientes son iguales.

También son paralelas las rectas verticales cuyas ecuaciones son $x = 4$ y $x = 2$.

Si se consideran ahora las rectas de ecuaciones $y = 2x$ e $y = -0{,}5x + 250$, más allá del problema.

En el gráfico se aprecia que estas rectas son perpendiculares, es decir, se intersecan formando ángulos rectos.

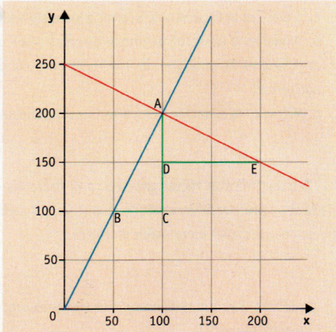
Los triángulos ABC y ADE son congruentes, pues tienen dos lados y el ángulo comprendido congruentes.

En efecto:

$\overline{ED} = \overline{AC} \quad \overline{BC} = \overline{AD} \quad \hat{D} = \hat{C} = 90°$

$y = 2x$

$y = -0{,}5 \cdot x + 250$



Uno de los criterios de congruencia de triángulos establece que si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes, entonces son congruentes.

Entonces, los triángulos ABC y ADE tienen todos sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes. Es decir:

$$\hat{E} = B\hat{A}C \text{ y } \hat{B} = E\hat{A}D$$

Además, como $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{ADE}$ son triángulos rectángulos, los ángulos agudos de cada triángulo suman 90°:

En el $\overset{\Delta}{\mathbf{ABC}}$: $\hat{A} + \hat{B} = 90°$

Pero como $\hat{B} = E\hat{A}D \Rightarrow B\hat{A}C + E\hat{A}D = 90°$

Como estos dos ángulos forman el ángulo entre las dos rectas, queda demostrado que las rectas son perpendiculares.

En la demostración anterior se usó que los segmentos ED y AD son respectivamente congruentes con los segmentos AC y BC, cuyas medidas son las que determinan las pendientes de ambas rectas.

Pendiente de la recta roja $= -\dfrac{\overline{AD}}{\overline{ED}} = -\dfrac{a}{b}$

Pendiente de la recta azul $= \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \dfrac{b}{a}$

La condición que debe cumplirse para que dos rectas sean perpendiculares es que, si la pendiente de una de ellas es $-\frac{a}{b}$, la de la otra sea $\frac{b}{a}$, es decir, una pendiente es el opuesto del inverso de la otra.

Por ejemplo, las rectas de ecuaciones $y = 3x + 1$ e $y = -\frac{1}{3}x + 4$ son perpendiculares.

También son perpendiculares la rectas cuyas ecuaciones son $x = 5$ e $y = 3$.

Dadas las rectas oblicuas R_1 y R_2:

$R_1: y = m_1\, x + b_1$

$R_2: y = m_2\, x + b_2$

Entonces:

$m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \Leftrightarrow R_1 \perp R_2$

Además, una recta vertical y una horizontal siempre son perpendiculares.

El texto seleccionado son las páginas 66 y 67 de Itzcovich y Novembre (2005).

En este ejemplo se ve que no hay secciones que el autor haya señalado, no se ven títulos de definiciones o propiedades pero, sin embargo, las hay. Aparece texto en los costados y sobre esto nos preguntamos: ¿leemos esas partes?, ¿cuándo?, ¿al principio, antes de leer lo demás?, ¿al final?, ¿creemos que es lo importante para el autor y por eso lo ubicó ahí?, ¿es algo que quiere recordarnos y por eso lo pone a un costado, como para tenerlo a mano?, ¿en qué orden habría que leerlo?, etcétera. No hay una respuesta única. Cada autor, si lo desea, ubica ahí algo por alguna razón, que podremos hipotetizar luego de haber interpretado el texto y, por lo tanto, no hay regla para lectores. Cada uno leerá esas partes cuando lo considere apropiado o necesario. Nosotros, al final de este ejemplo, propondremos alguna hipótesis sobre por qué o para qué están esos escritos de los costados en este texto en particular, sin pretensión de generalidad.

Dijimos que lo primero que debemos hacer es identificar de qué habla el texto y cuál es la organización o estructura que presenta. Encontramos de entrada que se trata de *rectas paralelas y perpendiculares*, tal como el título indica y como resultado de la mirada global, con una lectura completa, identificamos las siguientes partes que indicamos con letras para señalarlas en el texto, como se pueden ver en las siguientes figuras:

- Un problema/ejercicio que el autor resuelve (A).
- Propone una caracterización de rectas paralelas y coincidentes (B). Podría pensarse también que *define* rectas paralelas y coincidentes.
- Da un ejemplo de rectas paralelas (C).
- Retoma el problema, para señalar en él, rectas perpendiculares (D).
- Prueba que dos de las rectas se cortan a 90º (E).
- Muestra una relación entre las pendientes y caracteriza las rectas perpendiculares (F). Aquí también se podría pensar que está definiendo perpendicularidad.
- Da ejemplos de rectas perpendiculares (G).

Identificación de secciones

A

Problema 3

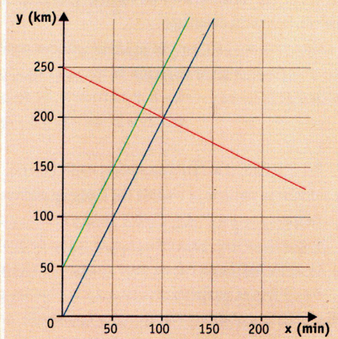
Dos familias salen simultáneamente en sus autos por una misma ruta rumbo a una ciudad balnearia. Una de las familias parte de la ciudad A, mientras que la otra lo hace desde una ciudad distante 50 km de A hacia adelante. La ciudad de destino se encuentra a 250 km de la ciudad A. Ambos autos van a velocidad constante, recorriendo 2 km por minuto.

En el mismo momento en que partieron los autos mencionados, un camión sale desde la ciudad balnearia por la misma ruta y en sentido contrario a los otros dos autos, a velocidad constante, recorriendo medio kilómetro por minuto.

Si se representan gráficamente la distancia (en km) a la que se encuentra cada uno de los tres vehículos de la ciudad A en función del tiempo (en minutos), ¿qué relaciones tienen estos gráficos?

Si se designa con x al tiempo desde la salida medido en minutos y con y a la distancia a la ciudad A medida en kilómetros:

Primer auto: Sale de A
$\Rightarrow$ el punto (0 ; 0) está en el gráfico.
La velocidad es de 2 km/min
$\Rightarrow$ la pendiente es 2
$$f(x) = 2x$$
Segundo auto: Sale a 50 km de A
$\Rightarrow$ el punto (0 ; 50) está en el gráfico.
La velocidad es de 2 km/min
$\Rightarrow$ la pendiente es 2
$$g(x) = 2x + 50$$
Camión: Sale a 250 km de A
$\Rightarrow$ el punto (0 ; 250) está en el gráfico.
La velocidad es de 0,5 km/min pero se acerca a A
$\Rightarrow$ la pendiente es – 0,5
$$h(x) = -0{,}5x + 250$$



B

Dadas las rectas R_1 y R_2:
$R_1: y = m_1 x + b_1$
$R_2: y = m_2 x + b_2$
Entonces:
$m_1 = m_2 \Leftrightarrow R_1 // R_2$
$m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2 \Leftrightarrow R_1$ y R_2 son *coincidentes*.
Además, dos rectas verticales siempre son paralelas.

B

En el gráfico se aprecia que las rectas correspondientes a los dos autos son paralelas. Esto se debe a que para cualquier intervalo de tiempo, ambos autos recorren la misma distancia. Por eso, en todo momento la distancia entre ellos es la misma: los 50 km que los separan al comienzo del movimiento. El hecho de tener ambas rectas la misma pendiente es lo que hace que sean paralelas.

Generalizando el caso anterior, se establece la siguiente condición: siempre que dos rectas tienen la misma pendiente, son *paralelas*. Si dos rectas que tienen la misma pendiente tienen, además, la misma ordenada al origen, entonces se dice que son *coincidentes*. Las rectas verticales, aunque no tienen pendiente, siempre son paralelas.

C

Por ejemplo, si las ecuaciones de las rectas R_1 y R_2 son las siguientes:

$$R_1: y = 3x + 1 \qquad R_2: y = 3x - 2$$

Sin representarlas en un gráfico, es posible anticipar que son paralelas, porque ambas tienen pendiente 3, es decir, sus pendientes son iguales.

También son paralelas las rectas verticales cuyas ecuaciones son $x = 4$ y $x = 2$.

Si se consideran ahora las rectas de ecuaciones $y = 2x$ e $y = -0{,}5x + 250$, más allá del problema.

D

En el gráfico se aprecia que estas rectas son perpendiculares, es decir, se intersecan formando ángulos rectos.

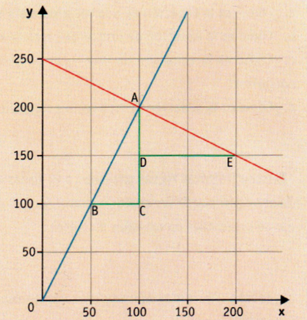
Los triángulos ABC y ADE son congruentes, pues tienen dos lados y el ángulo comprendido congruentes.

En efecto:

$\overline{ED} = \overline{AC} \qquad \overline{BC} = \overline{AD} \qquad \hat{D} = \hat{C} = 90°$

$y = 2x$

$y = -0{,}5 \cdot x + 250$



Uno de los criterios de congruencia de triángulos establece que si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes, entonces son congruentes.

E

Entonces, los triángulos ABC y ADE tienen todos sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes. Es decir:

$$\hat{E} = B\hat{A}C \text{ y } \hat{B} = E\hat{A}D$$

Además, como $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{ADE}$ son triángulos rectángulos, los ángulos agudos de cada triángulo suman 90°:

En el $\overset{\Delta}{\mathbf{ABC}}$: $\hat{A} + \hat{B} = 90°$

Pero como $\hat{B} = E\hat{A}D \Rightarrow B\hat{A}C + E\hat{A}D = 90°$

F

Como estos dos ángulos forman el ángulo entre las dos rectas, queda demostrado que las rectas son perpendiculares.

En la demostración anterior se usó que los segmentos ED y AD son respectivamente congruentes con los segmentos AC y BC, cuyas medidas son las que determinan las pendientes de ambas rectas.

Pendiente de la recta roja $= -\dfrac{\overline{AD}}{\overline{ED}} = -\dfrac{a}{b}$

Pendiente de la recta azul $= \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \dfrac{b}{a}$

F

Dadas las rectas oblicuas R_1 y R_2:

$R_1: y = m_1\, x + b_1$

$R_2: y = m_2\, x + b_2$

Entonces:

$m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \Leftrightarrow R_1 \perp R_2$

Además, una recta vertical y una horizontal siempre son perpendiculares.

G

La condición que debe cumplirse para que dos rectas sean perpendiculares es que, si la pendiente de una de ellas es $-\frac{a}{b}$, la de la otra sea $\frac{b}{a}$, es decir, una pendiente es el opuesto del inverso de la otra.

Por ejemplo, las rectas de ecuaciones $y = 3x + 1$ e $y = -\frac{1}{3}x + 4$ son perpendiculares.

También son perpendiculares la rectas cuyas ecuaciones son $x = 5$ e $y = 3$.

Vamos a continuar el ejercicio de interpretar este texto, a modo de ejemplo, eligiendo algunas partes de rectas paralelas y quedará para el lector completarlo siguiendo la misma idea.

Nos dedicaremos a la parte B, considerando tanto la parte central de la hoja como lo escrito en el margen.

En la mirada global, entendimos que en B se caracterizan las rectas paralelas y también podríamos haber supuesto que se define el concepto de paralelismo. Veamos qué es en realidad lo que se hace en esta parte del escrito. Si miramos lo que sigue a la resolución del problema 3, está mecionado: "En el gráfico se aprecia que las rectas correspondientes a los dos autos son paralelas". Esto ya nos dice que algún concepto de paralelismo se debe tener para poder comprender esa frase. Por lo que podemos suponer que no va a *definir* paralelismo. Sin embargo, como en el margen menciona una condición biunívoca sobre el paralelismo y las pendientes de rectas, entendemos que logra caracterizar el paralelismo para rectas que se obtienen a partir de expresiones lineales. Ahora bien, podemos aún no haber entendido cuál es la condición que garantiza el paralelismo. Ya llegaremos ahí. Empecemos observando un detalle delicado. Primeramente, se espera que el lector aprecie el paralelismo a partir de la lectura del gráfico. ¡Ojo porque eso puede ser delicado…! Podrían no ser paralelas pero parecerlo a simple vista. Tendremos que tener cuidado con este tipo de afirmación cuando usemos en clases el texto. Pero vamos por más… ¿Cuál es la noción intuitiva que se deduce que el lector debería tener sobre paralelismo? Claro que esta noción *no* debe involucrar a las funciones lineales ni sus pendientes, pues ese es el objetivo de esta parte del texto, llegar a la relación de igualdad entre las pendientes. Lo que está escrito dice: "Esto se debe a que para cualquier intervalo de tiempo, ambos autos recorren la misma distancia. Por eso la distancia entre ellos es la misma: los 50 km que los separan al comienzo del movimiento". Analicemos qué significa que *para cualquier intervalo de tiempo,* *ambos autos recorren la misma distancia* y cómo esto se vincula con algún tipo de noción intuitiva de paralelismo. Podemos notar que no se está apelando a lo que podría ser una concepción de paralelismo traída de la vida cotidiana, como podría ser no tener intersección, no tocarse (como las vías de un tren o como las calles paralelas). ¿Será que ambas cosas significan lo mismo, dicho de manera diferente? Un estudiante que tenga la idea informal de rectas paralelas como que "no se cortan", ¿entenderá de la frase marcada exactamente eso?, ¿y vale?... Veamos un poco todo esto.

Si suponemos que el estudiante de nivel medio tiene la idea intuitiva de paralelismo recién mencionada, él estará operando con la siguiente *definición* de paralelismo.

Definición 1. Dos rectas son paralelas si sus gráficas no tienen ningún punto en común.

Entonces tendríamos que ver por qué la frase sobre las distancias recorridas dice lo mismo que esto.

Empecemos escribiendo en lenguaje simbólico "*para cualquier intervalo de tiempo, ambos autos recorren la misma distancia*", para ver si podemos vincularlo con "no tener intersección". Tenemos presentadas del problema 3 las funciones $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ y $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x + 50$. Pensemos cómo podemos escribir la afirmación anterior .

Es decir, ¿cómo expresamos simbólicamente la frase "*para cualquier intervalo de tiempo, ambos autos recorren la misma distancia*"?

Un intervalo cualquiera de tiempo podemos expresarlo (t_1, t_2) con $t_1 < t_2$, siendo t_1 y t_2 números positivos. Por otra parte, la distancia que cada auto recorre se obtiene de la siguiente resta: $f(t_2) - f(t_1)$ en el primer caso y $g(t_2) - g(t_1)$ en el segundo.

Entonces, la frase anterior, para las f y g se escribe:

$\forall t_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\forall t_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ con $t_1 < t_2$, vale que
$f(t_2) - f(t_1) = g(t_2) - g(t_1)$ (condición 2)

Notemos que esta escritura pierde el rastro de los autos y del espacio recorrido. Se transforma en una condición que puede descontextualizarse y entenderse en contexto intramatemático.

No resultó tan simple expresar esa frase dada en lenguaje natural, simbólicamente, y creo que el lector concidirá que tampoco es inmediato pensar que esto es equivalente o se vincula con "rectas que no se cortan" que podría ser la noción que los estudiantes traigan del concepto de paralelismo.

Veamos si es así y tratemos de justificarlo más allá de este ejemplo. Es decir, veamos si esto que acabamos de escribir implica que las rectas que resultan de graficarlas tienen intersección vacía, pero para cualquier función lineal f y para cualquier función lineal g.

Entonces, nuestro planteo nos lleva a tratar de justificar el siguiente resultado, que a esta altura está en el plano de ser una conjetura.

Conjetura 1. Sean dos funciones lineales $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = cx + d$ tales que vale lo siguiente "$\forall\, t_1 \in \mathbb{R}\, y\, \forall\, t_2 \in \mathbb{R}$ con $t_1 < t_2$, vale que $f(t_2) - f(t_1) = g(t_2) - g(t_1)$". Entonces, las gráficas de f y g tienen intersección vacía.

En lo que sigue vamos a explorar la conjetura. Es decir, intentaremos ver si nos parece verdadera o falsa, porque dependiendo de lo que creamos, avanzaremos intentando demostrar o contraejemplificar, respectivamente.

Que las gráficas mencionadas tengan *intersección vacía* significa que la ecuación $ax + b = cx + d$ no tiene solución.

Encaremos la demostración por el absurdo.

> Comentario al margen: esto nos permite comenzar suponiendo que no se verifica lo que queremos demostrar.

O sea, suponemos que **sí** hay un punto en común entre las rectas. Llamamos t_0 a la abscisa del mismo. Tenemos, entonces, que t_0 es un valor real para el cual $f(t_0) = g(t_0)$.

Si fuera el único punto en común entre las rectas, quiere decir que si tomamos cualquier número real t_1 distinto de t_0, $f(t_1) \neq g(t_1)$.

Ahora bien, podemos suponer sin pérdida de generalidad que t_1 es menor que t_0.

> Comentario al margen: *Suponer sin pérdida de generalidad* significa que es una suposición que imprime una condición –es decir que plantea un caso– pero anticipa que el otro caso (o los otros casos, si fueran más), se realizan de manera análoga. Como es tan similar, no se desarrolla, pero la frase avisa de esa analogía.

Entonces al tener $t_1 < t_0$, podemos usar lo que está dicho en la hipótesis, aplicándolo a estos dos puntos.

Haciendo eso, tenemos que $f(t_0) - f(t_1) = g(t_0) - g(t_1)$.

Pero, como $f(t_0) = g(t_0)$, podemos simplificar y llegamos a

$$-f(t_1) = -g(t_1)$$

de donde resultaría que $f(t_1) = g(t_1)$

Esto es imposible si t_0 es el único punto en común entre las dos rectas.

Ahora bien, ¿qué nos dice esto?

Nos dice que: si en t_1 ambas funciones toman el mismo valor, habría **dos puntos distintos** de coincidencia, por lo que ambas rectas son idénticas.

Entonces, pasemos en limpio:

- En principio, que la conjetura, así como está expresada, es falsa porque podría ocurrir que las rectas sean idénticas.
- Si cambiamos el enunciado y generamos otra conjetura en la que evitemos ese caso, resultaría una propiedad y podríamos demostrarla siguiendo el hilo de lo hecho.

Modifiquemos, entonces, planteemos una propiedad y demostrémosla siguiendo lo recién realizado. Notarán que el único cambio en el enunciado nuevo es imponer que las funciones sean distintas.

Propiedad 1. Sean dos funciones lineales distintas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = cx + d$ tales que vale lo siguiente "$\forall\, t_1 \in \mathbb{R}\; y\; \forall\, t_2 \in \mathbb{R}$ con $t_1 < t_2$, vale que $f(t_2) - f(t_1) = g(t_2) - g(t_1)$". Entonces, las gráficas de f y g tienen intersección vacía.

Demostración. Razonando por el absurdo, supongamos que existe un punto de intersección de ambas rectas. Si t_0 es la abscisa de ese punto tenemos que $f(t_0) = g(t_0)$.

Dado que las rectas son distintas (por hipótesis), para cualquier número real $t_1 \neq t_0$, se tiene que:

$f(t_1) \neq g(t_1)$ (1)

Esto ocurre porque si no, al coincidir en dos puntos, coincidirían en todos ellos.

Suponemos sin pérdida de generalidad que $t_1 < t_0$.

Por hipótesis, $f(t_0) - f(t_1) = g(t_0) - g(t_1)$.

Pero como $f(t_0) = g(t_0)$, podemos simplificar y llegamos a

$-f(t_1) = -g(t_1)$ de donde resultar que $f(t_1) = g(t_1)$, lo que es absurdo por (1).

Hemos terminado esta parte, pero seguimos intentando dilucidar si hay una equivalencia entre *rectas que no se cortan* y la *condición 2* mencionada antes, por lo que nos plantemos analizar la recíproca.

Nuevamente, estamos en el plano de tener una conjetura.

Conjetura 2. Sean dos funciones lineales distintas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = cx + d$ cuyas gráficas tienen intersección vacía. Entonces "$\forall\, t_1 \in \mathbb{R}\ y\ \forall\, t_2 \in \mathbb{R}$ con $t_1 < t_2$, vale que $f(t_2) - f(t_1) = g(t_2) - g(t_1)$".

Exploremos para ver si nos convencemos de que es válido y/o que necesitamos ajustar.

Tendríamos que probar que si tomamos dos números reales cualesquiera $t_1\ y\ t_2$ con $t_1 < t_2$, vale que $f(t_2) - f(t_1) = g(t_2) - g(t_1)$.

Entonces empecemos tomando números $t_1\ y\ t_2$ con $t_1 < t_2$ y planteemos qué nos daría $f(t_2) - f(t_1)$ y qué resultaría al hacer $g(t_2) - g(t_1)$ para ver si obtenemos lo mismo.

$$\begin{aligned} f(t_2) - f(t_1) &= at_2 + b - (at_1 + b) \\ &= at_2 + b - at_1 - b \\ &= at_2 - at_1 \\ &= a(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Por otro lado, $g(t_2) - g(t_1) = ct_2 + d - (ct_1 + d)$

$$\begin{aligned} &= ct_2 + d - ct_1 - d \\ &= ct_2 - ct_1 \\ &= c(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que las rectas no tienen intersección. Esto, simbólicamente, significa que la ecuación $ax + b = cx + d$ no tiene solución. Es decir que: $ax - cx = d - b$ no tiene solución. Equivalentemente,

$$x(a - c) = d - b \text{ no tiene solución}$$

Para que esto ocurra, deben suceder dos cosas simultáneamente: $a - c = 0$ (2) $y\ d - b \neq 0$. Pensemos por qué es esto… Si $a - c$ fuera distinto de 0, cualquiera sea el valor que tome, podemos despejar x y habría una única solución. Por lo que esto no puede ocurrir. Entonces debe ser cero. Pero, si siendo $a - c = 0$ se diera que el segundo miembro también es cero, estaríamos ante una ecuación del tipo $0.x = 0$, que tiene infinitas soluciones. Por eso es que deben cumplirse en simultáneo ambas condiciones.

Volvamos entonces a lo que estamos tratando de ver, que es si es cierto que $f(t_2) - f(t_1)$ y $g(t_2) - g(t_1)$ valen lo mismo. Y tenemos expresado que:

$$f(t_2) - f(t_1) = a(t_2 - t_1) \text{ y } g(t_2) - g(t_1) = c(t_2 - t_1).$$

Miremos ambos segundos miembros. Usando (2), resulta que $a = c$ y como el otro factor es el mismo en ambas igualdades, resulta que $f(t_2) - f(t_1) = g(t_2) - g(t_1)$. De modo que podemos asegurar que la conjetura es cierta. Tendríamos entonces otra propiedad, a saber.

Propiedad 2. Sean dos funciones lineales distintas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = cx + d$ cuyas gráficas tienen intersección vacía. Entonces "$\forall\, t_1 \in \mathbb{R}\ y\ \forall\, t_2 \in \mathbb{R}$ con $t_1 < t_2$, vale que $f(t_2) - f(t_1) = g(t_2) - g(t_1)$".

Su demostración resulta de pasar en limpio lo que hicimos recién.

Demostración. Sean t_1 y t_2 con $t_1 < t_2$.

Calculamos por separado $f(t_2) - f(t_1)$ y $y\, g(t_2) - g(t_1)$ y mostraremos que coinciden.

$f(t_2) - f(t_1) = at_2 + b - (at_1 + b) = a(t_2 - t_1)(4)$

$g(t_2) - g(t_1) = ct_2 + d - (ct_1 + d) = c(t_2 - t_1)(5)$

Por otra parte, por hipótesis las rectas no tienen intersección, lo que es lo mismo que decir que la ecuación $ax + b = cx + d$ no tiene solución. Es decir

$x(a - c) = d - b$ no tiene solución

Para que esto ocurra, deben suceder que $a - c = 0\ (3) y\ d - b \neq 0$.

Volviendo a comparar $f(t_2) - f(t_1)$ con $g(t_2) - g(t_1)$, resulta que

$f(t_2) - f(t_1) = a(t_2 - t_1) =^{(3)}_{\text{pues } a=c} c(t_2 - t_1) =^{(5)} g(t_2) - g(t_1)$.

Sinteticemos lo que tenemos:

- La *definición* de paralelismo que hasta aquí se espera que use quien lee el texto es la intuitiva: dos rectas son paralelas si sus gráficas no tienen ningún punto en común.
- De ambas propiedades, obtendríamos un teorema que caracteriza el paralelismo, que es el siguiente.

Teorema 1 (caracterización del paralelismo). Sean dos funciones lineales distintas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = cx + d$. Las rectas que determinan estas funciones son paralelas si y solo si "$\forall\, t_1 \in \mathbb{R}\, y\, \forall\, t_2 \in \mathbb{R}$ con $t_1 < t_2$, vale que $f(t_2) - f(t_1) = g(t_2) - g(t_1)$".

- Aún no llegamos a la relación de las rectas paralelas con las pendientes.

Mucho tuvimos que hacer para entender la relación entre lo que está expresado en el texto y la idea intuitiva de paralelismo. A su vez, esta idea intuitiva excluye el caso de tener rectas coincidentes y eso habrá que abordarlo en algún momento.

Ahora bien, si volvemos al texto y continuamos leyendo, nos encontramos con la siguiente frase. Dice: "El hecho de tener ambas rectas la misma pendiente es lo que hace que sean paralelas". En este punto se relacionan las pendientes con la idea de paralelismo intuitiva (o con la noción refinada que el libro aporta y que sintetizamos en el teorema de caracterización anterior).

Entonces, tendríamos otro teorema que caracteriza el paralelismo, si logramos probar el siguiente resultado.

Teorema 2 (otra caracterización del paralelismo). Sean dos funciones lineales distintas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = cx + d$. Se tiene que $a = c$ si y solo si las rectas que surgen de graficar f y g son paralelas.

Siendo que es un teorema, debemos demostrarlo. Distinto hubiera sido que la definición de paralelismo hubiese sido esta.

Observación importante: las definiciones son abritrarias y no hay una única manera de definir un objeto matemático. Lo que tenemos que hacer es ser consistentes con esa elección. Si tomamos una definición, debemos mantenerla a lo largo de nuestro escrito. Podremos obtener teoremas que caractericen a ese objeto, es decir, que nos provean una forma equivalente de expresarlo. Si es el caso, primero tendremos que probar ese teorema. Una vez que eso esté hecho, tenemos libertad para utilizar la definición o la forma equivalente, según nos convenga.

Dado que tenemos una doble implicación, debemos demostrar dos enunciados que identificamos a continuación.

$\Rightarrow$) Sean dos funciones lineales distintas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = cx + d$.

Si $a = c$, las rectas que surgen de graficar f y g son paralelas.

$\Leftarrow$) Sean dos funciones lineales distintas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = cx + d$.

Si las rectas que surgen de graficar f y g son paralelas, entonces $a = c$.

Pasemos entonces a la demostración, dado que tenemos todo listo.

Demostración del teorema 2.

$\Rightarrow$) En este caso, tenemos las funciones y sabemos que $a = c$. Probaremos que las rectas que las funciones determinan son paralelas. Para ello usaremos la definición 1. Es decir, probaremos que no tienen puntos en común. Para corroborar esto, analicemos la ecuación $ax + b = cx + d$. Es equivalente a $x(a - c) = d - b$. Como por hipótesis $a = c$, tenemos $x.0 = d - b$, pero sabemos también por hipótesis que las rectas son distintas, de modo que si a y c coinciden, b y d no pueden coincidir, de modo que el segundo miembro de la ecuación anterior no es cero, mientras que el izquierdo sí lo es. Esa contradicción muestra que la ecuación no tiene solución, es decir, que las rectas no tienen ningún punto en común.

Vamos con la otra implicación.

$\Leftarrow$) En este caso, sabemos que las rectas son paralelas y debemos probar que $a = c$.

Saber que las rectas son paralelas, con la definición 1, significa que no tienen puntos en común, por lo que la ecuación $ax + b = cx + d$ no tiene solución. Como esta ecuación es equivalente a $x(a - c) = d - b$, el hecho de no tener solución, obliga a que $a - c = 0$ y $d - b \neq 0$. Por lo que obtenemos lo buscado que es que $a = c$.

Entonces, retomando la parte B del texto que estamos interpretando, ya tenemos una mirada finísima sobre lo que dice, lo que supone, lo que hace. Hemos entendido lo que está allí. Ahora podemos también reconocer que lo que quedó en el margen es el enunciado de un teorema de caracterización del paralelismo que usa en su formulación las pendientes de las funciones lineales.

¡Imaginen todo el trabajo que faltaría hacer para seguir interpretando el texto del ejemplo! ¡Solo tomamos los últimos renglones de una página!

Esperamos, también, que se empiece a vislumbrar la necesidad de enseñar a hacer este tipo de interpretación. No es inmediato hacerlo, no es sencillo y debemos asumir la tarea de enseñar a interpretar textos matemáticos.

Veamos ahora un ejemplo en el que el texto a interpretar es extremadamente corto.

1.4. Ejemplo 2. Interpretar un texto corto

El texto seleccionado es el siguiente.

Propiedad: $a, b \in \mathbb{R}, a = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$
Demostración:
$\Rightarrow$) inmediato
$\Leftarrow$) si $a \neq b$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a > b$. Sea $a - b > 0$. Por hipótesis $|a - b| < a - b$ lo que es absurdo.

Si quieren hacer un ejercicio, tómense un rato para leer el texto, pensar y dejar por escrito:

a. Qué dice este texto

b. Explicarlo (pensando en que le hablan a un profesor, alguien que sabe matemática)

c. Qué hicieron para interpretarlo

¿Listo? No fue tan sencillo, ¿cierto? Tal vez uno se empiece a convencer que la interpretación de textos es una cuestión compleja que amerita ser enseñada…

Avancemos. Aquí estamos ante un "texto breve", entonces seguimos las ideas generales de ir desde entender su perspectiva global hasta los más mínimos detalles de poner el foco en lo local.

Lo primero que notamos es que el texto incluye una propiedad y su demostración.

Veamos primeramente qué es lo que dice el enunciado. Para eso, lo leemos varias veces y tenemos que lograr entender su mensaje. Recordar que no basta "leer los símbolos". Es decir, que si ante la pregunta "¿qué es lo que dice la propiedad?" solo podemos respondernos "*a y b pertenecen a los reales, a es igual a b si y solo si para todo épsilon mayor que cero, módulo de a menos b es menor que épsilon*", sepamos que eso **no basta**. Estamos leyendo los símbolos, pero **no** interpretando el mensaje que nos quieren dar.

Cuando pensamos sobre este enunciado, vemos que hay una doble implicación, lo que significa que hay una equivalencia entre dos partes. La primera expresa que dos números reales a y b son iguales y la segunda que $\forall \varepsilon > 0$, $|a - b| < \varepsilon$. Pero ¿qué es lo que esto último nos está tratando de decir? Bien, esto significa que la distancia entre esos números a y b puede hacerse menor que cualquier número positivo que deseemos. Es decir, la distancia entre los números es arbitrariamente chica. Notemos que si *escuchamos* "la distancia entre dos números es arbitrariamente chica" no es inmediato pensar cómo escribir simbólicamente eso y, recíprocamente, tener escrito $\forall\varepsilon > 0$, $|a - b| < \varepsilon$, no nos sugiere inmediatamente (salvo, por supuesto, ¡para lectores con más experiencia en esto!) que estamos hablando de distancias entre dos números arbitrariamente chicas. En la oralidad, empezamos a hablar haciendo alusión a esta parte recuadrada que, como bien se ve, no es la primera que aparece si hiciéramos una lectura de izquierda a derecha $\forall\varepsilon > 0$, $\boxed{|}a\boxed{-}b\boxed{|}<\varepsilon$

Es decir,

Vemos $\forall\varepsilon > 0$, $\boxed{|}a\boxed{-}b\boxed{|}<\varepsilon$ y leemos "la distancia entre dos números a y b" es arbitrariamente chica (haciendo referencia a esta parte $\forall\varepsilon > 0$, $|a - b|\boxed{<\varepsilon}$ y que esto se da $\boxed{\forall\varepsilon > 0)}$.

O sea, que cuando mencionamos "es arbitrariamente chica" nos referimos a que estamos interpretando cosas que están escritas "lejos" y por separado: $\boxed{\forall\varepsilon > 0}$, $|a - b|\boxed{<\varepsilon}$.

Recién ahora podemos decir que hemos interpretado el enunciado de la propiedad: esta propiedad expresa **cuándo dos números reales son iguales**. Y nos dice que son iguales si y solo si (es decir *únicamente*) su distancia es arbitrariamente chica.

Estamos listos para comenzar a interpretar la demostración. No vamos a avanzar tratando de entender una demostración, si acaso no hemos entendido el enunciado.

Como hemos visto que la propiedad expresa una doble implicación, tendremos que ver las demostraciones de ambas implicaciones, es decir:

(1) $a, b \in \mathbb{R}$, si $a = b \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$
(2) $a, b \in \mathbb{R}$, $a = b \Leftarrow \forall\varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$ o lo que es lo mismo, reordenando como para que *las hipótesis se vean primero*:
$a, b \in \mathbb{R}$, si $\forall\varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon \Rightarrow a = b$

Veamos la demostración que hace el autor. Sobre (1), nada, simplemente indica "inmediato". Nos toca pensar ¿por qué es inmediato? En este caso, el autor nos mandó la tarea a nosotros. Solo nos avisa que será sencillo (sencillo ¿para quién?... A veces, no para nosotros… ¡Pero hay que intentar!).

En este caso, sabemos que a y b son números reales y sabemos que son iguales. Lo que tendríamos que probar es que $\forall \varepsilon > 0$, $|a - b| < \varepsilon$. Es decir, que si consideramos que hemos tomado un $\varepsilon > 0$ cualquiera (que consideramos "fijo", deberíamos poder mostrar que vale $|a - b| < \varepsilon$. En este caso sí resulta sencillo, porque dado que $a = b$, $|a - b| = 0$ y entonces lo que nos toca mostrar es que $0 < \varepsilon$ y eso sabemos que vale por la forma en la que el épsilon se tomó. Así que por esa razón fue inmediato y el autor nos dejó completar esa demostración a nosotros.

Veamos la que sigue.

La demostración dice:

$\Leftarrow$) si $a \neq b$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a > b$. Sea $a - b > 0$. Por hipótesis $|a - b| < a - b$ lo que es absurdo.

En este caso, recordemos que, tal como expresamos hace un momento, el enunciado que el autor está demostrando es:

$$\text{“}a, b \in \mathbb{R}, \text{ si } \forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon \Rightarrow a = b\text{”}$$

Eso significa que sabemos que a y b son números reales cualesquiera y que sabemos que si tomamos cualquier épsilon mayor que 0, va a valer (no debemos demostrarlo, ¡lo sabemos!) $|a - b| < \varepsilon$. Sabiendo todo esto, nuestro problema es probar que "$a = b$".

Cuando leemos la demostración que está en el recuadro reconocemos globalmente que:

– el autor empieza negando lo que debe probar, así que entendemos que encara por el absurdo.

- hace una suposición en el medio que dice que no le resta generalidad a su demostración
- utiliza la hipótesis
- llega a un absurdo. Miremos el absurdo a ver si nos damos cuenta qué es lo que lo constituye en absurdo. Llegó a que $|a - b| < a - b$. Esto es absurdo porque lo que le queda es un número "$a - b$" mayor que su módulo (estamos leyendo de derecha a izquierda). No hay ningún número real x que cumpla que $|x| < x$. O son iguales (si el número es positivo o cero), o al revés… el módulo es mayor que el número, si este es negativo.

¡Listo! Conocemos el plan del autor… Encara por el absurdo y entendimos a qué absurdo va a llegar.

Veamos ahora los detalles.

Cuando dice "si $a \neq b$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a > b$", entendemos que al ser a y b distintos, uno de ellos será mayor que el otro. ¿Cuál de los números es mayor?, ¿ a o b? Eso es indistinto, porque a y b representan cualquier número. Por eso es que elige uno para ser mayor, en este caso, el "a" y dice que, sin pérdida de generalidad, supone que $a > b$.

Cuando dice "Sea $a - b > 0$" lo que está haciendo es elegir un número positivo. Ese número es "$a - b$". ¿Para qué lo quiere? Para usarlo como **uno** de los valores que puede tomar épsilon. Como $a - b$ es positivo, el autor lo considera como un épsilon y para ese épsilon (en realidad para el que quiera tomar, positivo, solo que "le conviene" tomar $\varepsilon = a - b$) sabe que vale $|a - b| < \varepsilon$.

O sea $|a - b| < a - b$ y es ahí cuando advierte el absurdo que nosotros ya pensamos por qué lo es. Y de este modo, termina la demostración. ¿La entendimos? ¿Podemos explicársela a un par?

Referencias bibliográficas

Itzcovich, H. y Novembre, A. (coord.) (2005). Carnelli, G., Lamela, C. y Lindembaum, L. *M1.* Buenos Aires: Tinta Fresca.

Rodríguez, M. (2013). "La complejidad de interpretar demostraciones matemáticas a partir de textos". Conferencia presentada en el III Simposio de Matemáticas y Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/326092352_La_complejidad_de_interpretar_demostraciones_matematicas_a_partir_de_textos

2
Cómo encarar la producción de un texto matemático

2.1. Introducción

Una vez que hemos entendido un texto, luego de dedicar tiempo y esfuerzo a ello, muchas veces nos pasa que pensamos que nosotros podríamos haberlo escrito de manera más accesible al lector. Consideramos que podríamos ofrecer un nuevo texto que comunique las mismas ideas, pero escrito de modo que el lector podría comprenderlo sin tanto trabajo. Queremos dedicar esta parte del libro a ver qué hay detrás de la producción de un texto matemático, dar algunas pautas y proponer un ejemplo.

Nos interesa resaltar dos cuestiones importantes. Por un lado, que el proceso de producir un texto es complejo y espiralado. Se va retocando y puliendo sobre lo hecho. Esto significa que ¡hay que empezar!; de otro modo, no tenemos nada sobre lo cual mejorar. Por otra parte, como la tarea de escribir nos sigue desarrollando nuestra propia comprensión, nunca se alcanza un punto máximo y acabado. Entonces, cada vez que tomemos un escrito propio consideramos que es perfectible y mejorable. Sin embargo, en algún momento hay que poner un fin, considerarlo cerrado para que otros lo lean y accedan a él. Si no, entraremos en un proceso eterno, no veremos cuándo termina y esto nos va a agobiar o angustiar.

Decíamos, al inicio del libro, que escribir, producir un texto es aún más complejo que interpretar algo escrito por otro. ¡Sin dudas que lo es! Tenemos que tener en nuestra cabeza la globalidad de lo que vamos a comunicar y tomar decisiones sobre cómo hacerlo.

Vamos a adentrarnos en esto en el apartado siguiente.

2.2. Pautas para iniciar la redacción de un texto matemático

Aunque el proceso de escritura es personal y los estilos también lo son, consideramos que hay cuestiones comunes sobre las que vale la pena pensar y reflexionar.

Vamos a pensar en dos casos bien diferenciados:

a) Caso 1: escribimos sobre algo que tenemos claro y dominamos

b) Caso 2: escribimos tratando de resolver algo que nos plantearon o que nos planteamos

Si estamos en el primer caso, significa que el asunto sobre el cual vamos a producir un texto es sabido por nosotros, tenemos claras las ideas y vamos a compartirlas. Esto puede darse tanto porque uno es docente y quiere escribir algo para sus estudiantes, o bien como estudiante tiene que hacer un trabajo; estudió, leyó, interpretó textos y le toca producir un nuevo escrito de su puño y letra, con sus aclaraciones y con su impronta. En este último caso, antes de la escritura, el estudiante tuvo que pasar por todo lo que describimos en el capítulo anterior.

En cualquiera de los dos casos, nuevamente el primer paso es diagramar una estructura general del escrito. Decidir qué vamos a incluir y en qué orden. Tenemos que pensar a quién le estamos escribiendo. No es lo mismo pensar en un par, que sabe matemática, que en un estudiante a quien queremos que el texto le ayude a comprender una idea nueva. Nos toca decidir cuál es la estructura del escrito, en qué orden vamos a comunicar las ideas. Esto lo hacemos a modo de un punteo, establecemos cómo serán "las partes" de nuestro escrito y qué habrá en cada una. Si el lector hizo una tesis, o está en proceso de escritura de una tesis, tesina, monografía, trabajo final de carrera, etcétera, le pasará seguramente que su director lo invite a delinear una especie de índice. Un punteo breve con lo que el escrito contendrá, sus partes. Luego, uno comienza a redactar. Suele pasar que no se produce un escrito en el orden que nos llega cuando lo leemos. Basta imaginar que el título, el resumen o la introducción sintetizan el contenido del texto, por lo cual es altamente probable que quien escribe redacte esas partes al final de su escritura. Esto nos alerta a que, muchas veces podemos ir redactando partes en paralelo (otras veces no, porque todo queda concatenado) y luego ensamblar o articularlas para generar un único escrito coherente.

Suele ser de ayuda para el lector, que el autor anticipe qué es lo que sigue. Esto permite que quien lee esté a la espera de lo que el autor le anticipó. Esto suele hacerse con breves oraciones que dan pie a lo que sigue, anticipan. Del mismo modo, pequeños párrafos que den cierre, retomando lo principal de cada parte, suelen ser útiles para que el lector se quede con las ideas principales.

Una vez redactado un primer borrador, tenemos que tomar distancia y leerlo como si fuera un texto ajeno. Busquemos ver si se entiende qué es lo que va a comunicar, cómo decidió hacerlo, etcétera, hasta revisar con el más mínimo detalle todo lo matemático que formó parte del escrito.

Si tuviera que decir *una* recomendación personal, algo que desde mi mirada es valioso de considerarse, diría: *traten de ser claros*, esmérense por intentar que el otro comprenda lo que están escribiendo. Es lo mejor que nos podría pasar… Proponer un texto que los lectores comprendan.

Preguntas que nos son útiles antes de iniciar el proceso de escritura:

- ¿Tengo decidido qué voy a escribir? (el recorte del tema, o del contenido)
- ¿Identifiqué a quién le va dirigido el texto? ¿Tengo presente cómo intentaré llegar a ese público?
- ¿Tengo una organización general?, ¿decidí cómo empezar, qué partes tendrá el escrito, cómo cerrará?

Durante la escritura:

- Mantener el hilo de lo anticipado
- Ir de lo global hasta lo particular, en estructura
- Recordar que no se redacta linealmente, ni en el orden en el que luego se lee
- Revisar lo matemático
- Anticipar qué habrá en el escrito
- Dar un cierre a cada parte
- Revisar el discurso en lenguaje natural
- Chequear coherencia

Posterior a la escritura:

- Revisar el hilo conductor
- Mirar la estructura general, chequear que coincida con lo anunciado
- Revisar lo matemático
- Ponerse en lugar del lector e imaginar desde su mirada si es claro
- …

Si estamos en el segundo caso, es que estaremos escribiendo a propósito de intentar resolver algo que nos plantearon o algo que nos plantamos nosotros mismos y, por ejemplo, no sabemos si vale. Esto podría darse si nos dan un ejercicio, algún procedimiento para aplicar, una demostración para construir, etcétera, o bien si no sabemos si un resultado vale, por ejemplo.

En este caso, muy probablemente el proceso de escritura sea bien distinto. Primero haremos nuestros borradores, los intentos por resolver, idas y vueltas hasta que en algún momento tengamos en claro una idea que queremos compartir: la idea que entendemos que soluciona el planteo recibido. Sin ideas claras de cómo resolver, no debemos encarar el texto final. Inicialmente, en nuestro hacercamiento, vale todo… Probar, cambiar datos, condiciones, simplificar el enunciado, ver si nos resulta familiar o parecido a algo resuelto, etcétera. Pero el escrito que uno suele presentar, ya pulido, es posterior a esos borradores y solo lo encaramos cuando tenemos un plan. A partir de ese momento, procedemos igual que en el caso anterior. Comunico esa idea global, decido qué voy a escribir a grandes rasgos, recién luego uno va con los detalles. Esto también se hace en idas y vueltas y lo previo, “la búsqueda del plan”, ¡ni hablar! Ahí está “la cocina” de las ideas… Nuestros intentos y estrategias puestos al servicio de intentar dar solución a lo que tenemos que resolver.

2.3. Ejemplo del caso 1

Vamos a producir un nuevo texto referido a lo interpretado en el primer capítulo, sobre rectas paralelas. Situemos el trabajo pensando en discutir sobre el concepto de paralelismo con colegas, docentes de matemática. Nuestro interlocutor entonces es alguien que sabe matemática, a quien le queremos comunicar lo que hemos comprendido y analizado. **No** estaremos pensando en escribir para un estudiante de nivel medio.

Tomamos las decisiones iniciales y establecemos la estructura general.

Podría ser, por ejemplo:

1) **Introducción** (indicando que la intención del escrito es vincular el concepto de paralelismo que traen los estudiantes con la condición sobre las pendientes. Se indicará qué es lo que se incluye en el escrito).

2) **Nociones previas** (presentaremos la noción de paralelismo que entendemos que el estudiante trae).

3) **Un ejemplo y su resolución** (se presentará el ejemplo del libro).

4) **Discusión sobre el concepto de paralelismo** conocido y su relación con las pendientes en el caso en que las rectas se presentan a través de funciones lineales. Establecimiento de una caracterización del paralelismo y discusión sobre lo que esto significa.

5) **Ejemplos** de rectas paralelas desde la nueva relación.

A partir de allí comenzamos a escribir. Si el texto va dirigido *a un docente de matemática* se podrían encontrar con lo que presentamos en el primer capítulo. Todo el escrito del primer capítulo es justamente un ejemplo del punto 4. Lo presentado es la producción de un nuevo texto a partir de la lectura, interpretación y análisis del material. Solo que está destinado a docentes. ¿Curioso, no? Para explicar en este libro cómo encarar la interpretación de un texto, nos vimos obligados a producir un nuevo texto que, justamente, siguió estas pautas y sentido. Por otra parte, cabe resaltar que ese nuevo texto del capítulo 1 no tendría el menor sentido si pensáramos en generar un escrito para lectores que sean estudiantes de nivel medio.

2.4. Ejemplo del caso 2

Vamos a usar el trabajo hecho en el capítulo 1, nuevamente. Cuando intentamos interpretar el texto dado nos surgió la duda de si una proposición matemática era o no equivalente al paralelismo. Eso lo planteamos como una conjetura, la conjetura 1. Si vuelven a mirar esa parte, pero ahora desde la perspectiva de quien lo escribió, verán que la primera parte fue de búsqueda, informal… Intentamos ver si valía o no, encontramos que no, que tendríamos que reformular. Toda esa parte podría haber estado informal aún, con errores, intentos que no funcionan, etcétera. Noten que recién cuando tuvimos en claro algo respecto de la validez, empezamos el proceso de escritura.

Hemos hecho un esfuerzo por intentar separar, para mostrar sus propias particularidades, tipos de tareas que quienes trabajamos con matemática realizamos y que las vivimos entrelazadas. Solemos no darnos cuenta de las diferencias, o en qué momento estamos haciendo un tipo de tarea u otro. Aquí, en este libro, vale la pena el esfuerzo por identificar estas tareas y reconocer sus particularidades. Es el paso previo a hacerlo consciente, a poder reflexionar sobre nuestros procesos y esto, a su vez, es previo a pensar en lo que haremos cuando tengamos que enseñar esto a otros.

Reflexiones a modo de cierre

¿Qué nos llevamos de este libro para el momento en el que nos toque enseñar a otros a interpretar o a producir nuevos textos?

Lo que esperamos que ocurra es que el lector, en primera instancia, vivencie cada una de estas tareas aisladamente, reconozca lo que hace, si las pautas le han sido útiles, si agregaría otras, etcétera. Luego de eso, uno mismo habrá advertido la complejidad de cada una de ellas y las enormes diferencias que hay entre una y otra.

Posteriormente, cuando nos toque pensar qué haremos para lograr que otro aprenda a interpretar un texto matemático o qué haremos en clases para lograr que nuestros alumnos produzcan textos, *estaremos en mejores condiciones*. En primer lugar, porque tendremos clara una meta. Sabremos qué es lo que queremos que aprendan. Nos tocará plantear actividades para que sean los estudiantes quienes vivan estos procesos y luego reflexionen sobre ellos. Como docentes nos toca diseñar y proponer actividades, gestionar la clase y recabar datos de cómo se lleva adelante este aprendizaje. Los estudiantes tendrán que escribir y explicar. Ellos mismos serán los artífices de los escritos y de las explicaciones en las que muestren comprensión. No servirá que seamos modelo, que les mostremos cómo lo hacemos nosotros. Tenemos que darles el lugar en la clase, hacerles ver el valor para ellos de disponer de estas herramientas que les harán ganar autonomía, elemento fundamental para quien aprende matemática. La tarea no es sencilla, por supuesto. Hay que sostenerla en el tiempo y llevarla adelante para distintos contenidos matemáticos. Sin dudas, compartiremos que es necesaria y sumamente enriquecedora, tanto para nosotros como para nuestros estudiantes.