Matemática en contexto

Gustavo Carnelli, Eda Cesaratto,
Marcela Falsetti, Alberto Formica
y Tamara Marino

textos básicos

Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

Matemática en contexto

Matemática en contexto / Gustavo Carnelli ... [et al.]. - 1a ed. 7a reimp. - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2018.
272 p. ; 23 x 16 cm. - (Textos básicos ; 19)

ISBN 978-987-630-147-3

1. Matemática. 2. Educación Superior. I. Carnelli, Gustavo
CDD 510.711

J. M. Gutiérrez 1159 (B1613GSX) Los Polvorines, Bs. As. Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507 Fax: (54 11) 4469-7504
e-mail: ediciones@ungs.edu.ar
www.ungs.edu.ar/ediciones

Impreso en FP Compañía Impresora
Beruti 1560, Florida (1602) Buenos Aires, Argentina,
en el mes de marzo de 2018.
Tirada: 2000 ejemplares.

Matemática en contexto

Gustavo Carnelli, Eda Cesaratto, Marcela Falsetti, Alberto Formica y Tamara Marino

Colección Textos Básicos

Universidad Nacional de General Sarmiento

Índice

Prólogo

Matemática en contexto está diseñado para su uso como material de estudio en la asignatura Taller de Matemática del Curso de Aprestamiento Universitario (CAU), que es el curso de ingreso a la Universidad Nacional de General Sarmiento. En este libro, sus autores se proponen ofrecer un material para los estudiantes de Matemática que dan sus primeros pasos hacia los estudios de nivel superior en esta universidad.

Los temas que se desarrollan abarcan cuestiones vinculadas a los números reales (cálculos, aproximaciones, etc.), cálculos de áreas y perímetros de regiones planas, proporcionalidad, algunos elementos de geometría y álgebra elemental, y un trabajo muy detallado sobre Modelización con funciones, dedicando un capítulo a las funciones lineales y otro a las funciones cuadráticas. Si bien los temas abordados son, en su mayoría, temas correspondientes al nivel medio, el desarrollo que se hace de los mismos pone en juego no solo los conocimientos previos de los estudiantes del Taller de Matemática del CAU, sino también la elaboración de nuevas estrategias y recursos para la resolución de diversas situaciones que se plantean a lo largo del texto.

Se intenta no abundar en tecnicismos más allá de lo que resulte necesario para el desarrollo y comprensión de cada tema. En este sentido, *Matemática en contexto* plantea en todos sus capítulos un acercamiento a los distintos contenidos a partir de la presentación de una situación concreta que brinda el contexto en el cual se desarrollan los conceptos a estudiar. En cada capítulo podrán encontrarse actividades y/o problemas resueltos a partir de los cuales se despliega la teoría necesaria para la presentación del tema y, a continuación, un Trabajo práctico en el que se propone una variedad de actividades para ser resueltas por el lector. A lo largo de todo el texto se ha puesto un especial interés en que el lector se involucre en cuestiones vinculadas con la argumentación, con la lectura comprensiva y con el desarrollo de ciertas estrategias de estudio. Para ello, se proponen actividades que exigen justificación (de afirmaciones, procedimientos, etc) para lo cual se requiere de un involucramiento en la lectura de las explicaciones y desarrollos que se presentan en cada capítulo así como un trabajo de organización, relación y revisión con los distintos conceptos, nociones y procedimientos desarrollados.

El libro también puede ser de utilidad para cualquier lector interesado en las temáticas que aquí se tratan y que quiera encontrarse con una presentación de temas matemáticos a partir de variadas situaciones concretas. De este modo, es posible que algunos apartados resulten interesantes para su lectura en distintos niveles de la escuela secundaria o para quienes ya posean un nivel de escuela media, dado que pueden representar una lectura complementaria que aporte al afianzamiento y la comprensión de algunos temas de estudio propios de las matemáticas preuniversitarias.

A lo largo del texto se presentan algunos ejercicios que fueron extraídos del libro Matemática para el Aprestamiento Universitario, de la colección "Textos Básicos" que editó la Universidad Nacional de General Sarmiento, y cuyos autores son G. Carnelli, M. Falsetti, A. Formica, M. Rodríguez, quienes han autorizado su utilización para este nuevo material.

AGRADECIMIENTOS: Los autores quieren expresar su agradecimiento a Álvaro Corvalán por sus aportes en distintos apartados del primer capítulo y a Mariana Pérez por su colaboración en la edición. Por otro lado, agradecen también la lectura atenta y las sugerencias de todos los docentes que dictan clases en el Taller de Matemática del CAU.

Capítulo 1

Números y Cálculos

1 El uso de números enteros y racionales

1.1 Números enteros: una herramienta para contar y ordenar

Los *números naturales o enteros positivos* $1,\ 2,\ 3, \ldots$ son aquellos que, habitualmente, se usan para contar y ordenar. Los puntos suspensivos indican que esta sucesión de números nunca termina. El conjunto de tales números se denota con el símbolo $\mathbb{N}$.

El número cero se usa para indicar que no se tiene nada o para indicar el lugar donde se comienza a medir. Por ejemplo, en los ascensores de algunos edificios el botón "0" se usa para indicar la planta baja. La frase "la cuenta bancaria está en cero" indica que no hay dinero en la cuenta, pero que tampoco hay deudas.

En el ámbito de los negocios es necesario indicar en la consignación de un monto si el mismo corresponde a una deuda o a un crédito. Cuando un monto corresponde a una deuda se suele consignar con un signo menos adelante. Por ejemplo, si debo 34 pesos, debería escribir -34. Estos números se llaman números negativos. Otro ejemplo cotidiano del uso de números negativos se encuentra en los edificios con subsuelos. Estos números se usan para indicar las plantas por debajo de la planta baja.

Los números negativos, el cero y los números naturales o enteros positivos conforman el *conjunto de números enteros* que en símbolos se denota $\mathbb{Z}$.

Comparación. Los números enteros están ordenados. Volvamos al ejemplo del ascensor. Es claro que el segundo subsuelo está más bajo que el primer subsuelo y éste, a su vez, está más bajo que la planta baja. En símbolos, esto se anota como sigue

$$-2 \quad < \quad -1 \quad < \quad 0\ .$$

En la siguiente tabla se presentan los símbolos que se usan para comparar números y se explica el significado de cada uno de ellos.

En palabras	en símbolos
a es mayor que b	$a > b$
a es igual o mayor que b	$a \geq b$
a es menor que b	$a < b$
a es igual o menor que b	$a \leq b$
a es igual a b	$a = b$
a es distinto de b	$a \neq b$

Operatoria con números enteros. Todos sabemos cómo sumar, restar y multiplicar números naturales. En lo que sigue vamos a interpretar estas operaciones para todos los números enteros en el contexto de los movimientos de un ascensor.

Ejemplo 1. Un edificio tiene 5 pisos y 3 subsuelos. Se colocó un sensor que registra los números de los pisos donde el ascensor se detiene. Los registros obtenidos por el sensor se han volcado en la siguiente tabla:

Número de registro *	0	1	2	3	4
Piso	2	5	-1	-3	0

* El registro "0" indica el piso de partida.

A partir de estos registros se desea conocer la longitud del recorrido del ascensor entre dos paradas consecutivas y la longitud total del recorrido entre el registro 0 y 4.

Resolución. Como no contamos con el dato de la distancia entre pisos, vamos a medir esta longitud en cantidad de pisos. Además, la longitud del recorrido del ascensor es independiente de la dirección del movimiento (subida o bajada).

De acuerdo a los registros 0 y 1, el ascensor se movió desde el piso 2 hasta el piso 5, luego el ascensor recorrió 3 pisos y este número se obtiene de la resta

$$5 - 2 = 3 \ .$$

De acuerdo a los registros 1 y 2, el ascensor se movió desde el piso 5 al piso -1 (primer subsuelo), es decir, recorrió 6 pisos. Por convención, la resta cambia el signo por lo que la longitud del recorrido entre el piso 5 y el -1 es también el resultado de la resta entre los registros:

$$5 - (-1) = 5 + 1 = 6 \ .$$

Es importante notar que la longitud de un recorrido es siempre un número positivo o nulo, por lo que el valor mayor debe ser el primero. Los paréntesis se ponen para evitar dos signos consecutivos:

Notación correcta: $5 - (-1)$ Notación incorrecta: $5 - -1$.

En la tabla de abajo se calcula la longitud del recorrido entre paradas.

Registros	cantidad de pisos recorridos
0 y 1	$5-2=3$
1 y 2	$5-(-1)=5+1=6$
2 y 3	$-1-(-3)=-1+3=2$
3 y 4	$0-(-3)=-(-3)=3$

Para calcular la longitud total del recorrido del ascensor se suman los valores indicados en la segunda columna de la tabla de arriba:

$$\begin{aligned}\text{Longitud del recorrido} &= 5-2 \quad + \quad 5-(-1) \quad + \quad (-1)-(-3) \quad + \quad 0-(-3)\\ &= \quad 3 \quad + \quad 6 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3\\ &= \quad 14\end{aligned}$$

Respuesta. La longitud total del recorrido del ascensor es de 14 pisos.

De acuerdo a lo ejemplificado arriba, la suma y la resta de números enteros se efectúan del siguiente modo:

$a+(-b)=$	$a-b$
$-a+b=$	$b-a$
$a-(-b)=$	$a+b$
$a-(+b)$	$a-b$

La multiplicación y los signos. Para multiplicar cantidades donde aparecen signos negativos es conveniente recordar que $-a=(-1)\cdot a$. Esto se debe a que la multiplicación por el número -1 se interpreta como un cambio de sentido en el valor de la cantidad original. Por ejemplo, \$20 indica un crédito de veinte pesos, en cambio, la cantidad $(-1)\cdot \$20=-\$20$ indica una deuda de veinte pesos.

En resumen, vale la siguiente regla de los signos:

$1\cdot 1=$	1
$-1\cdot 1=$	-1
$1\cdot(-1)=$	-1
$-1\cdot(-1)=$	1

Ejercicio resuelto 1. Calcular el valor de a si

$$a=-(2-8)+(-7-(-4))-(-1)\cdot(4-7)+(-5)\cdot(-4)\ .$$

Resolución:

Explicación	Los paréntesis indican que los cálculos dentro de los mismos deben realizarse en primer lugar.	
Planteo	$a = -(2-8) + (-7-(-4))$ $-(-1)\cdot(4-7)+(-5)\cdot(-4)$	Cálculos auxiliares $2-8=-6$, $-7-(-4) = -7+4 = -3$, $4-7=-3$
Explicación	Reemplazo los valores obtenidos en los cálculos auxiliares en a.	
Planteo	$a = -(-6) + (-3) - (-1)\cdot(-3) + (-5)\cdot(-4)$	
Explicación	Ahora se calculan los productos teniendo en cuenta la regla de los signos, se retiran los paréntesis innecesarios y se reemplazan los resultados en a para completar la cuenta.	
Planteo	$a = 6-3-3+20 = 20.$	Cálculos auxiliares $(-1)\cdot(-3) = 3,\ -(-6) = 6$ $+(-3) = -3$ $(-5)\cdot(-4) = 20$
Explicitación de la respuesta	*Respuesta:* $a = 20$	

Trabajo práctico 1

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) Dar ejemplos del uso de números negativos en la vida cotidiana.

(b) ¿Qué piso está más alto, el piso indicado como -3 o el indicado como -1? Escribir su afirmación en lenguaje coloquial y en símbolos.

(c) ¿Cómo se expresa en símbolos que los números a y b son distintos?

(d) ¿Qué indican los paréntesis en un cálculo? ¿Es correcta la siguiente cuenta: $1-(2-1) = -2$?

Ejercicio 2. En un edificio de 7 pisos y 2 subsuelos, un sensor registra los números de los pisos donde el ascensor del edificio se detiene a lo largo del día y los mismos se han volcado en la tabla de abajo.

Número de registro	0	1	2	3	4	5	6	7
Posición	-1	3	4	-2	7	0	-2	1

(a) Indicar en cada fila de la siguiente tabla la operación realizada para calcular la cantidad de pisos recorridos por el ascensor entre dos registros.

Registros	cantidad de pisos recorridos
0 y 1	$3 - (-1) = 4$
1 y 2	
2 y 3	
3 y 4	
4 y 5	
5 y 6	
6 y 7	

(b) ¿Cuál de los siguientes cálculos da como resultado la longitud recorrida por el ascensor a lo largo del día?¿Por qué?

(a) $3 - (-1) + 4 - 3 + (-2) - 4 + 7 - (-2) + 0 - 7 + (-2) + 1 - (-2)$

(b) $3 + 1 + 4 - 3 + 4 + 2 + 7 + 2 + 7 + 2 + 1 + 2$

Ejercicio 3. Si un ascensor salió del tercer subsuelo y se detuvo en el cuarto piso, indicar por cuántas puertas de ascensor pasó sin detenerse.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes ítems, resolver el cálculo indicado sin usar la calculadora, explicando qué se hace y evidenciando los cálculos auxiliares.

(a) $(-1) \cdot (-1 + 4) + 5 - (-3 - 11) + 45 =$

(b) $(-3) \cdot (2 - 5) \cdot (10 - 13) + (-4 - 5) \cdot (-3) =$

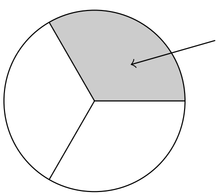
(c) $-(4 + (5 - 7)) + (9 - 2) \cdot (-1) \cdot (-4) =$

(d) $(-2 + 5) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2 - 4) + (-3) =$

(e) $-2 - (6 - (-2 + 5) \cdot (2 - 5)) - (-3) =$

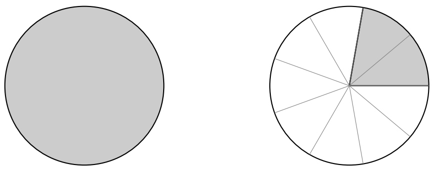
1.2 Fracciones. Números racionales

Fracciones como parte de un entero. Una forma habitual de interpretar a los números racionales o fracciones es como parte de un entero. El gráfico muestra un círculo dividido en tres partes iguales de las cuales se sombreó una. El círculo representa al entero y la región sombreada es un tercio de ese entero. En símbolos, la expresión "un tercio" se anota $\frac{1}{3}$. El número 1 se llama numerador y el número 3, denominador.



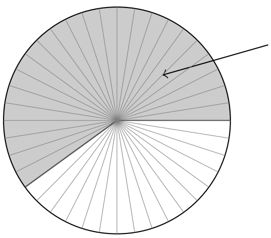
La región sombreada representa la fracción $\frac{1}{3}$. Notar que $\frac{1}{3} < 1$.

Ejemplo 2. Representación de la fracción $\frac{11}{9}$.
Si dividimos un círculo en nueve partes iguales, cada parte representa un noveno de dicho círculo. Como queremos representar $\frac{11}{9}$ debemos considerar un círculo entero y un segundo círculo, del cual tomaremos dos novenas partes. La representación será un círculo completo y $\frac{2}{9}$ del otro.



La región sombreada representa la fracción $\frac{11}{9} = 1 + \frac{2}{9}$, $\frac{11}{9} > 1$.

Fracciones como proporciones o razones. Los números racionales se suelen utilizar para expresar una parte de una cantidad que se considera como un todo o unidad. Eso se llama proporción o razón de esa cantidad. Por ejemplo, en un curso hay 40 estudiantes de los cuales 24 aprobaron un examen, la proporción o razón de estudiantes que aprobó el examen es $\frac{24}{40}$. En este caso, el numerador es 24 y el denominador es 40. Esta información se suele representar en forma gráfica usando "diagramas de tortas" (ver figura).



La región sombreada representa la fracción $\frac{24}{40}$.

Fracciones y números racionales. La fracción $\frac{a}{b}$ expresa la idea de que se repartió una cierta población u objeto en b partes iguales y que de esas b partes se tomaron a. El número a deber ser entero y b debe ser natural. El número a se llama numerador y el número b se llama denominador.

Hasta ahora hemos dado ejemplos de fracciones cuyos numeradores y denominadores eran números naturales. También puede ser necesario trabajar con fracciones cuyo numerador o denominador es un entero negativo. Para estos casos, mostramos con un ejemplo, cómo funciona la convención de signos:

$$-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} \quad \text{y} \quad \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}\ .$$

Además, los números enteros se pueden pensar como fracciones con denominador igual a 1. Por ejemplo,

$$1 = \frac{1}{1}, \quad -2 = \frac{-2}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}\ .$$

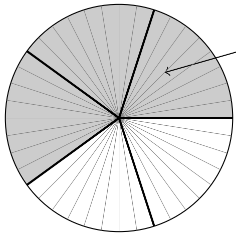
Todos los números que se pueden escribir como una fracción forman el conjunto de los números racionales y se lo denota con el símbolo $\mathbb{Q}$.

Fracciones equivalentes

Retomamos un ejemplo anterior. En un curso hay 40 estudiantes, de los cuales 24 aprobaron un examen. La proporción de aprobados es de $\frac{24}{40}$. Como $40 = 8 \cdot 5$ y $24 = 8 \cdot 3$ se pueden agrupar los estudiantes de a 8 y expresar la fracción $\frac{24}{40}$ con una fracción "equivalente":

$$\frac{24}{40} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{5}.$$

Esta igualdad se puede ver gráficamente:



La región sombreada representa la fracción $\frac{24}{40} = \frac{3}{5}$.

Ejemplo 3. En un curso que tiene 60 estudiantes aprobaron las tres quintas partes ¿Cuántos estudiantes aprobaron?

Resolución. Empezamos dándole un nombre a la cantidad que queremos calcular, digamos que A es un buen nombre para denotar la cantidad de aprobados. Para calcular A se puede proceder de varias formas equivalentes que enumeramos a continuación:

1. Repartir 60 en 5 partes iguales y de las 5 partes quedarse con 3
2. Multiplicar 60 por 3 y luego dividir por 5.
3. Multiplicar $\frac{3}{5}$ por 60.

Esta lista pone en evidencia que

$$A = \frac{60}{5} \cdot 3 = \frac{3 \cdot 60}{5} = \frac{3}{5} \cdot 60 = 36\ .$$

Respuesta: Aprobaron 36 estudiantes.

En los ejemplos anteriores se observa que los cursos tienen la misma proporción de aprobados a pesar de que la cantidad de estudiantes es diferente. Esto lo vemos pues

$$\frac{36}{60} = \frac{12 \cdot 3}{12 \cdot 5} = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \frac{24}{40} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{5}\ .$$

Lo anterior nos lleva a la igualdad

$$\frac{36}{60} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}\ .$$

Las fracciones $\frac{36}{60}$, $\frac{24}{40}$ y $\frac{3}{5}$ se llaman *equivalentes* pues representan la misma proporción.

También se puede ver que las fracciones $\frac{36}{60}$ y $\frac{24}{40}$ son equivalentes observando que

$$\frac{36}{60} = \frac{24}{40} \quad \text{si y sólo si} \quad 36 \cdot 40 = 24 \cdot 60\ .$$

Efectivamente, resulta que $36 \cdot 40 = 24 \cdot 60 = 1440$.

Criterio para decidir si dos fracciones son equivalentes. Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se llaman equivalentes si y sólo si se cumple la igualdad $a \cdot d = c \cdot b$. Es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En particular, la fracción $\frac{k \cdot c}{k \cdot d}$ es equivalente a la fracción $\frac{c}{d}$ para cualquier k entero no nulo.

Fracción irreducible. Simplificación de fracciones. Se dice que la fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible si a y b no tienen divisores comunes distintos de 1 y -1. Por cuestiones de practicidad, en general, conviene trabajar con fracciones irreducibles.

El procedimiento de llevar una fracción a su forma irreducible se suele llamar simplificación. Veamos cómo funciona en un ejemplo.

Ejemplo 4. Simplificar la fracción $\frac{-72}{-15}$

$$\frac{-72}{-15} = \frac{-3 \cdot 24}{-3 \cdot 5} = \frac{\cancel{-3} \cdot 24}{\cancel{-3} \cdot 5} = \frac{24}{5} \ .$$

Comparación de fracciones

Ejemplo 5. Decidir si la fracción $\frac{8}{13}$ es igual, mayor o menor que la fracción $\frac{21}{34}$.

Una forma de decidir esta cuestión es buscar fracciones equivalentes con el mismo denominador:

$$\frac{8}{13} = \frac{8 \cdot 34}{13 \cdot 34} = \frac{272}{442} \qquad \text{y} \qquad \frac{21}{34} = \frac{21 \cdot 13}{34 \cdot 13} = \frac{273}{442} \ .$$

Ahora la respuesta es evidente pues 272 es menor que 273, la escribimos en símbolos.

Respuesta: $\frac{8}{13} < \frac{21}{34}$.

Ejemplo 6. Comparación de números racionales negativos. Decidir si la fracción $-\frac{8}{13}$ es igual, mayor, menor que la fracción $-\frac{21}{34}$.

Para responder a la cuestión planteada es conveniente recordar que el signo $-$ se interpreta como una "deuda" y, por lo tanto, hay que invertir el sentido de la desigualdad respecto al valor positivo. Por ejemplo,

$$2 > 1 \quad \text{pero} \quad -2 < -1.$$

En nuestro ejemplo, ya sabemos que $\frac{8}{13} < \frac{21}{34}$ por lo que $-\frac{8}{13} > -\frac{21}{34}$.

Ejercicio resuelto 2. Se informa que las tres quintas partes de los estudiantes de un curso aprobaron la materia "M" durante 2010. Si en 2011 se inscribieron a esa materia 3500 estudiantes ¿Cuántos de ellos deberían aprobar para conservar la proporción de aprobados?

Resolución. Si A es la cantidad de aprobados en 2011, entonces $\frac{A}{3500}$ y $\frac{3}{5}$ deben ser fracciones equivalentes. Por el criterio correspondiente se tiene que cumplir que

$$5 \cdot A = 3 \cdot 3500 \quad \text{es decir} \quad A = \frac{3}{5} \cdot 3500 = 2100 \ .$$

Respuesta. La cantidad de aprobados debería ser 2100.

Ejercicio resuelto 3. Carlos jugó dos billetes de lotería: uno con 7 amigos más y otro en un grupo de 7 compañeros del curso. El premio de ambos billetes coincide.

(a) Escribir las dos fracciones correspondientes al monto de dinero que recibiría en cada una de las jugadas y compararlas usando los signos $<, =, >$ según corresponda.

(b) ¿Con cuál de los dos grupos Carlos recibiría más plata?

Resolución.

(a) Con el primer grupo, Carlos recibiría $\frac{1}{8}$ del premio. En cambio, con el segundo grupo, recibiría $\frac{1}{7}$ del premio. Claramente, $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$.

(b) Este inciso se deduce inmediatamente del inciso anterior porque el premio de ambos billetes coincide: Carlos recibiría más plata con el segundo grupo.

Trabajo práctico 2

Ejercicio 1. Acerca de la lectura

(a) ¿Qué es una fracción? ¿Qué símbolo se usa para designar al conjunto que reúne a todas las fracciones?

(b) Según este texto, ¿cómo se hace para decidir si dos fracciones son equivalentes?

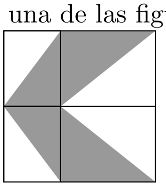
(c) ¿Qué es una fracción irreducible? ¿Qué es simplificar una fracción?

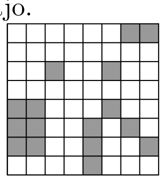
(d) Explicar el procedimiento que se describe en este texto para comparar dos fracciones. ¿Conoce otro procedimiento?

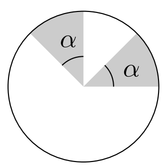
Ejercicio 2. Representar en "diagramas de tortas" las fracciones $\frac{3}{8}$, $\frac{12}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{10}{15}$ y $\frac{14}{24}$.
Indicar, si corresponde, los pares de fracciones equivalentes y las fracciones irreducibles.

Ejercicio 3. En cada caso, simplificar la fracción dada y encontrar una irreducible equivalente.
i) $\frac{70}{25}$ ii) $-\frac{-18}{27}$ iii) $\frac{9\cdot 3}{21}$ iv) $3 \cdot \frac{7}{3}$ v) $\frac{8\cdot 3}{5\cdot 4\cdot(-1)}$.

Ejercicio 4. Determinar qué porción del área total representa la parte sombreada en cada una de las figuras de abajo.

(a) 

(b) 

(c) 

$\alpha = 45°$

Ejercicio 5. En una ciudad de 35.600 votantes, un candidato obtuvo las dos quintas partes de los votos ¿Cuántos votos obtuvo?

Ejercicio 6. En la ciudad A votaron 1.200.000 habitantes y el candidato opositor obtuvo 300.000 votos. Esta proporción de votos se mantuvo en la ciudad B en donde votaron 900.000 personas. ¿Cuántos votos obtuvo el candidato opositor en la ciudad B?

Ejercicio 7. Del total de una caja con 3900 tornillos se espera que las $\frac{2}{75}$ partes sean defectuosas. ¿Cuántos tornillos defectuosos se esperan?¿Qué parte del total se espera que sean buenos?

Ejercicio 8. Para pintar las paredes de una sala hacen falta 3500cm^3 de pintura. Las dos novenas partes se pintarán de color verde y el resto de color blanco. Indicar cuántos cm^3 de pintura serán necesarios de cada color de pintura.

Ejercicio 9. En su casa, Juan comió cuatro porciones de una pizza que estaba divida en 9 porciones. Después fue a visitar a unos amigos y comió tres porciones de una pizza que estaba dividida en 8 porciones.

(a) Escribir las dos fracciones correspondientes a la proporción de pizza que Juan comió en su casa y en la de sus amigos. Compararlas usando los signos $>$, $=$ o $<$ según corresponda.

(b) ¿En dónde comió Juan una proporción mayor de pizza?

Ejercicio 10. Ordenar de menor a mayor los números $\frac{3}{7}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{8}{17}$, $-\frac{15}{24}$, $\frac{5}{4}$, 1.

Ejercicio 11. Abajo se dan las indicaciones para la preparación de 4 porciones de puré instantáneo (paquete de 125 gr).

(a) Hervir 1/2 litro de agua y retirar del fuego, agregar una cucharada de manteca y sal a gusto.

(b) Agregar 1/4 litro de leche fría y mezclar.

(c) Agregar el contenido del paquete sin batir, esperar un minuto y revolver suavemente.

Calcular la cantidad de puré, agua y leche necesarios para preparar 7 porciones.

Suma de fracciones

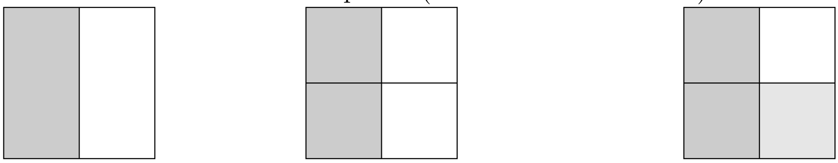
Sumar cantidades dadas en forma de fracción es una actividad habitual en la vida cotidiana. Para ilustrar este tema comenzaremos con un ejemplo.

Ejemplo 7. En una panadería se venden dos tipos de pan que cuestan lo mismo. Si se desea comprar medio kilogramo del tipo 1 y un cuarto del tipo 2 ¿Cuánto pan se compró?

La expresión coloquial “medio kilogramo más un cuarto de kilogramo” se expresa como

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,.$$

Representemos esta cuenta en un esquema (esta vez con cuadrados):



Dibujamos un cuadrado y lo dividimos en 2 partes iguales. La parte sombreada representa la fracción $\frac{1}{2}$.

Luego, dividimos las mitades nuevamente en 2. Cada uno de los nuevos cuadrados representa un cuarto $\frac{1}{4}$ del cuadrado original y se ve que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Sombreamos uno más de los cuartos. La parte sombreada ocupa $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

En resumen, la suma se realiza según el siguiente procedimiento

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} \ .$$

Respuesta: La cantidad total de pan comprada es $\frac{3}{4}$ kg.

Procedimiento para sumar o restar fracciones. Para sumar (restar) las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, en primer lugar hay que buscar un denominador común para ambas fracciones. Lo más conveniente es que éste sea el mínimo múltiplo común de b y d. Sino, se puede usar como denominador cualquier múltiplo común de los números b y d; en particular, el producto entre ambos.

Luego se obtienen las fracciones equivalentes a $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con el nuevo denominador.

Finalmente, para obtener el resultado se suman las fracciones equivalentes. Si es posible y se desea trabajar con números más pequeños se puede simplificar el resultado.

Ejemplo 8. Calcular $\frac{8}{9} + \frac{7}{75}$.

Buscamos un denominador común factorizando los denominadores

$$9 = 3 \cdot 3 \quad \text{y} \quad 75 = 3 \cdot 25,$$

el mínimo común múltiplo entre 9 y 75 es $9 \cdot 25 = 225$. Por lo tanto,

$$\frac{8}{9} + \frac{7}{75} = \frac{8 \cdot 25}{225} + \frac{3 \cdot 7}{225} = \frac{8 \cdot 25 + 3 \cdot 7}{225} = \frac{221}{225}.$$

Ejemplo 9. Un profesor anota en su lista que las $\frac{4}{21}$ partes de su curso obtuvo una nota igual o mayor que cuatro y menor que siete y que las $\frac{8}{15}$ partes obtuvo una nota igual o mayor que 7. Un estudiante le pregunta qué proporción de su curso obtuvo una nota igual o mayor que cuatro y qué proporción obtuvo una nota menor que cuatro ¿Cómo debe proceder el profesor para responder la pregunta del estudiante?

Resolución. La observación interesante de este problema es que no se cuenta con el dato de la cantidad total de estudiantes del curso. Llamemos A a la proporción de estudiantes que obtuvieron una nota mayor o igual a 4. Es claro que la misma se calcula sumando las proporciones $\frac{4}{21}$ y $\frac{8}{15}$. Por lo tanto, la cuenta que resuelve el problema es

$$A = \frac{4}{21} + \frac{8}{15}.$$

Para sumar $\frac{4}{21}$ y $\frac{8}{15}$ buscamos el mínimo común múltiplo de ambos denominadores. Como,

$$21 = 3 \cdot 7 \quad \text{y} \quad 15 = 3 \cdot 5,$$

el mínimo común múltiplo entre 21 y 15 es $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Por lo tanto,

$$A = \frac{4}{21} + \frac{8}{15} = \frac{4 \cdot 5}{105} + \frac{8 \cdot 7}{105} = \frac{4 \cdot 5 + 8 \cdot 7}{105} = \frac{76}{105}.$$

Por lo que la proporción de aprobados es $\frac{76}{105}$.

Para calcular la proporción de desaprobados es necesario calcular

$$1 - A = 1 - \frac{76}{105} = \frac{105 - 76}{105} = \frac{29}{105}.$$

Respuesta: La proporción de estudiantes que obtuvieron una nota mayor o igual a 4 es $\frac{76}{105}$ y los que obtuvieron una nota menor que 4 es de $\frac{29}{105}$.

Producto de fracciones

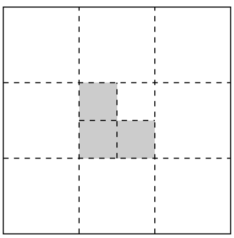
En general, el producto entre las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se realiza multiplicando los numeradores y denominadores de ambas fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}\ .$$

Coloquialmente, la multiplicación de una fracción por una cantidad se lee como “la fracción **de** esa cantidad”. Por ejemplo, $\dfrac{2}{3} \cdot 8$ se lee “las dos terceras partes **de** ocho”. Para entender el significado del producto de fracciones usaremos un diagrama.

Ejemplo 10. En la figura, el cuadrado grande está partido en 9 cuadrados, y el cuadrado central en 4 cuadrados. Los tres cuadraditos sombreados representan las tres cuartas parte de un noveno del cuadrado grande, es decir, la parte sombreada representa la fracción

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad \text{del total.}$$



Ejemplo 11. Las tres quintas partes de un curso obtuvo una nota mayor que 4 en un examen y de esos estudiantes una cuarta parte obtuvo una nota mayor que 7. Dar la proporción de estudiantes que obtuvieron una nota mayor que 7.

Resolución. Notar que no se sabe la cantidad de estudiantes del curso, pero este dato no es necesario para calcular la proporción pedida.

Llamemos E a la cantidad de estudiantes del curso y A a la cantidad de estudiantes que obtuvieron una nota mayor que 7,

$$A = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot E = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} \cdot E = \frac{3}{20} \cdot E.$$

Respuesta: La proporción de estudiantes que obtuvieron una nota mayor que 7 es $\frac{3}{20}$.

Cociente de fracciones

Nuevamente, apelamos a un problema para explicar cómo se dividen dos números fracciones. En lo que sigue usaremos también la notación a/b para denotar la fracción $\frac{a}{b}$ por cuestiones tipográficas.

Retomemos el ejemplo 11 y resolvámoslo de otra forma.

Las letras A y E representan las mismas cantidades que en dicho ejemplo. Con esta notación, la frase coloquial "la cuarta parte de los estudiantes que obtuvieron una nota igual o mayor que 4" se puede expresar simbólicamente como

$$A = \frac{\frac{3}{5}E}{4}\ .$$

Como el valor de A debe ser el mismo que el calculado anteriormente se concluye que

$$A = \frac{\frac{3}{5}E}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot E = \frac{3}{20} \cdot E\ .$$

De este ejemplo, parece sensato tomar la siguiente regla para efectuar el cociente: multiplicar la fracción que está en el lugar del numerador, en este ejemplo $\frac{3}{5}$, por la inversa de la fracción que está en el denominador, en este ejemplo $\frac{4}{1}$.

En general, el cociente entre las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

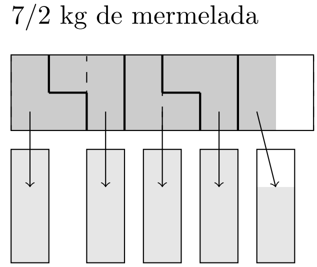
Ejemplo 12. Calcular el siguiente cociente de fracciones $\frac{18/7}{45/32}$.

De acuerdo a la regla,

$$\frac{18/7}{45/32} = \frac{18}{7} \cdot \frac{32}{45} = \frac{18 \cdot 32}{7 \cdot 45} = \frac{2 \cdot \cancel{9} \cdot 32}{7 \cdot 5 \cdot \cancel{9}} = \frac{2 \cdot 32}{7 \cdot 5} = \frac{64}{35}\ .$$

Ejemplo 13. Hay que envasar 7/2 kg de mermelada en frascos que tienen una capacidad de 3/4 kg cada uno. La cantidad de frascos necesarios para envasar la mermelada es el resultado de la cuenta

$$\frac{7/2}{3/4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}\ .$$



$4 + \frac{2}{3}$ frascos de $\frac{3}{4}$ kg cada uno

1.3 Porcentajes

En la vida diaria y en los periódicos se suelen dar las proporciones en términos de porcentajes. Analicemos un titular típico de los diarios.

JUAN PEREZ OBTUVO EL 20% DE LOS VOTOS

Este titular significa que Juan Pérez obtuvo una fracción de $\frac{20}{100}$ de los votos.

Si hubo, digamos, 130.000 votos, entonces la cantidad de votos que obtuvo Pérez se calcula como sigue

$$\text{Cantidad de votos} = \frac{20}{100} \cdot 130.000 = \frac{1}{5} \cdot 130.000 = 26.000\ .$$

Luego, Pérez obtuvo 26.000 votos.

Porcentajes: El $a\%$ de una cantidad se entiende como la fracción $\frac{a}{100}$ de esa cantidad.

En los siguientes ejemplos se muestra cómo resolver problemas que involucran porcentajes.

Ejemplo 14. Calcular el porcentaje de votos que obtuvo Pérez si él obtuvo 15.000 votos en una ciudad en la que votaron 300.000 personas.

El porcentaje que se pide calcular es la proporción de votos favorables a Pérez sobre el total de votantes:

$$\text{Proporción de votos} = \frac{15.000}{300.000} = \frac{5}{100}.$$

Luego, el porcentaje de votos que obtuvo Pérez es del 5%.

Ejemplo 15. Se sabe que la leche aumentará un 15%. Si el precio actual es de \$4 por litro, calcular el precio del litro de este alimento luego del aumento.

Al precio actual hay que sumarle el porcentaje de aumento previsto:

$$\text{Precio nuevo} = 4 + \frac{15}{100} \cdot 4 = \frac{400 + 60}{100} = \frac{460}{100} = 4,6.$$

El precio luego del aumento será de $\$4,6$.

Ejemplo 16. Si un producto costaba $4 y ahora cuesta $5, indicar el porcentaje de aumento.

El porcentaje de aumento es igual al porcentaje que representa el aumento sobre el precio original. En este caso, el aumento es de $1, luego el porcentaje de aumento es

$$\frac{5-4}{4} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\% \ .$$

Ejemplo 17. Un diario informa que la variación del precio internacional de la soja fue de -2% entre mayo y junio de cierto año. Si el precio de la soja era de $432 en mayo, calcular dicho precio en junio.

El signo $-$ nos indica que el precio bajó. El nuevo precio se calcula restando el 2% de 432 a 432, es decir

$$432 - \frac{2}{100} \cdot 432 = 423,36 \ .$$

El precio de la soja en junio fue de $\$423,36$.

Ejemplo 18. Se informa que, en una elección, González obtuvo la dos quintas partes de los votos. Expresar esta proporción como un porcentaje.

Para expresar la fracción dos quintos como un porcentaje hay que encontrar la fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ cuyo denominador es 100:

$$\frac{2}{5} = \frac{a}{100} \quad \text{o, lo que es lo mismo} \quad a = 40 \ .$$

Es decir, González obtuvo el 40% de los votos.

Luego del repaso sobre desarrollo decimal se reverá este tema y este mismo problema se podrá resolver de otra manera.

Ejercicio resuelto 4. Tres hermanos, Juan, Pedro y Luis, reciben una herencia de $100.000. En el testamento queda establecido que Pedro debe recibir el 30% de la herencia, Juan las dos quintas partes de lo que queda, y el resto es para Luis.

(a) ¿Cuál de los tres hermanos recibe la mayor parte de la herencia?

(b) Si no se conociera el monto de la herencia,¿Se podría decidir quién recibe la mayor parte de la misma? Justificar la respuesta.

Resolución.

(a) Pedro recibe el 30%, es decir $\frac{30}{100} \cdot \$100.000 = \$30.000$.

Juan recibe las $\frac{2}{5}$ de lo que queda, es decir $\frac{2}{5} \cdot \$70.000 = \$28.000$.

Luis recibe el resto, es decir

$$100.000 - \frac{30}{100} \cdot \$100.000 - \frac{2}{5} \cdot \$70.000 = \$100.000 - 30.000 - 28.000 = \$42.000.$$

Respuesta: Pedro recibe $30.000, Juan recibe $28.000 y Luis recibe $42.000.

(b) Es posible decidir quién recibe la mayor parte de la herencia pues para hacerlo no es necesario conocer el monto sino que alcanza con comparar la fracciones correspondientes. Las fracciones de la herencia que reciben Pedro y Juan son datos.

- Pedro recibe 30% o lo que es lo mismo la fracción $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$,
- Juan recibe $\frac{2}{5}$ de lo que queda, es decir, $\frac{2}{5}$ de $\frac{7}{10}$, lo que es igual a $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{25}$,
- Luis recibe el resto:

$$1 - \frac{3}{10} - \frac{7}{25} = \frac{50 - 15 - 14}{50} = \frac{21}{50}.$$

Respuesta: Como $\frac{3}{10} = \frac{15}{50}$, $\frac{7}{25} = \frac{14}{50}$ y todas son calculadas sobre el mismo monto, resulta que $\frac{21}{50} > \frac{3}{10} > \frac{7}{25}$. Así, el que recibe la mayor parte de la herencia es Luis.

Trabajo práctico 3

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Cuáles operaciones entre fracciones se describieron en esta sección? Explicar cómo se realizan.

(b) Ejemplificar el uso de estas operaciones en un contexto cotidiano o aplicado distinto a los mencionados en este texto.

Nota: los siguientes ejercicios deberían resolverse sin la ayuda de la calculadora. Ésta se puede utilizar para verificar los resultados obtenidos.
Ejercicio 2.

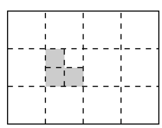
(a) Explicar un procedimiento para sumar varias fracciones. Aplicar dicho procedimiento para realizar los siguientes cálculos:

$$\frac{2}{9} + \frac{15}{27} - (-\frac{125}{84}) = \qquad\qquad \frac{-1}{31} + \frac{15}{125} + (-\frac{43}{45}) + 3 =$$

(b) Escribir las siguientes cantidades en forma de fracción irreducible.

i) $\frac{2}{9} \cdot \frac{45}{4}$ ii) $3 \cdot \frac{9}{-49} \cdot \frac{-7}{81}$ iii) $\frac{2/9}{45/4}$ iv) $\frac{-2/8}{16/32} \cdot \frac{-3}{2}$.

Ejercicio 3. En la figura, el rectángulo grande está partido en 12 cuadraditos iguales, y uno de esos cuadraditos está partido a su vez en 4 cuadraditos iguales. Indicar qué fracción del rectángulo grande representa la parte sombreada.



Ejercicio 4. Una pareja tiene 4 hijos y todos sus bienes son gananciales. Según la ley vigente, si uno de los cónyuges fallece, el otro recibe la mitad de los bienes y la

otra mitad se reparte en partes iguales entre los 4 hijos. ¿Qué parte de los bienes totales le corresponde a cada hijo?

Ejercicio 5. Se distribuye mermelada en frascos. Para la cantidad de mermelada y la capacidad de cada frasco especificada en cada caso, calcular la cantidad de frascos ocupados al envasar la mermelada.

(a) 10 kg de mermelada y frascos de 2 kg cada uno.

(b) 7 kg de mermelada y frascos de 2 kg cada uno.

(c) $\frac{7}{2}$ kg de mermelada y frascos de 2 kg cada uno.

(d) $\frac{7}{2}$ kg de mermelada y frascos de medio kg cada uno.

(e) Siete kilos y un cuarto de mermelada y los frascos tienen una capacidad de 5/8 kg cada uno.

Ejercicio 6. Acerca de los cálculos de porcentajes.

(a) ¿Qué significa el $a\%$ de una cantidad?

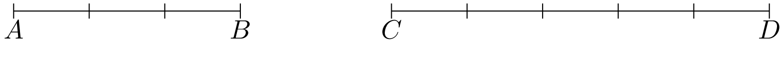
(b) Un candidato obtuvo 150.000 votos en una ciudad donde votaron 450.000 personas. ¿Qué porcentaje de votos obtuvo el candidato?

(c) Si la inflación del mes de marzo fuera del 3% y un asalariado cobrara \$5.000 en ese mes ¿cuál debería ser el salario del mes de abril para compensar la inflación?

(d) Se hace un descuento del 14% en el precio de un producto que vale 420 pesos.¿Cuál es el precio luego del descuento?

(e) Un diario informa que la variación del precio internacional del trigo fue de -4% entre mayo y junio de cierto año. Si el precio del trigo era de \$325 en mayo, calcular dicho precio en junio.

Ejercicio 7. El segmento AB está dividido en tres unidades y el CD en cinco unidades,



se pide decidir

(a) cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas justificando adecuadamente.

(i) $AB = \frac{3}{5}CD$

(ii) $CD = \frac{5}{3}AB$

(iii) $6\,CD = 10\,AB$

(iv) La longitud de AB es 60% de la longitud de CD

(v) El 20% de CD coincide con el 30% de AB.

(b) si $\frac{4}{5}AB$ es mayor, menor o igual que $\frac{4}{5}CD$.

Ejercicio 8. Una lámina que tiene un área de 4600cm^2 será pintada en tres franjas: dos de color amarillo y una de color verde. Se comienza pintando con color amarillo la primera franja, que representa un 45% del total de la lámina. Luego se pinta de verde la próxima franja, ocupando las dos quintas partes de la superficie que aún quedó sin pintar y, finalmente, se pinta el resto nuevamente con color amarillo.

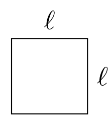
(a) ¿Qué porcentaje de la superficie total de la lámina quedó pintada de verde?

(b) ¿Qué área quedó pintada de amarillo?

Ejercicio 9. En el mes de abril, un trabajador extrajo las $\frac{3}{5}$ partes de su sueldo del cajero automático, el 60% de lo que quedaba lo usó para pagar la tarjeta de crédito y el resto lo dejó en su cuenta bancaria a modo de ahorro. En cambio, en el mes de junio, el trabajador extrajo las $\frac{2}{5}$ partes de su sueldo del cajero, el 90% de lo que quedaba lo usó para pagar la tarjeta y dejó el resto en su cuenta bancaria a modo de ahorro.

Suponiendo que el salario de ambos meses es el mismo, ¿en qué mes ahorró más el trabajador?

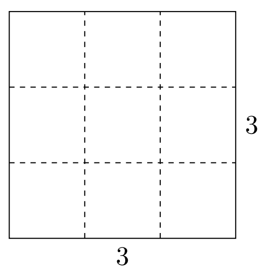
1.4 Potencias y unidades de medida



Como sabemos, el área de un cuadrado cuyos lados miden ℓ es

$$A = \ell \cdot \ell \ .$$

Para abreviar se anota, $\ell \cdot \ell = \ell^2$ y se lee "ℓ al cuadrado".



El área A de un cuadrado cuyos lados miden tres se calcula como sigue

$$A = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9 \ .$$

El cálculo de áreas es un ejemplo típico del uso de multiplicaciones repetidas de un mismo número o cantidad. Este tipo de operación se llama potenciación. El número que se multiplica repetidas veces se llama base y la cantidad de veces que se repite se llama exponente. En este caso, la base es 3 y el exponente es 2.

Ejemplo 19.

(a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, la base es 4 el exponente es 3.

(b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$, la base es -3 y el exponenete es 2.

(c) $(\frac{2}{3})^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$, la base es $\frac{2}{3}$ y el exponente es 4.

Potencias. Sean a un número cualquiera llamado base, y n un número natural, llamado exponente, a^n se calcula multiplicando n veces a, es decir,

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \ (n \text{ veces}).$$

La expresión a^n se lee "a elevado a la n". Además,

$$a^0 = 1 \quad \text{si} \quad a \neq 0 \quad \text{y} \quad a^1 = a \ .$$

En el caso en que $a \neq 0$, se define

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad n > 0 \ .$$

Ejemplo 20.

(a) $4^{-1} = \frac{1}{4}$

(b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

(c) $(-3)^{-2} = (-\frac{1}{3})^2 = (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$

(d) $(\frac{4}{5})^{-2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$

Algunas propiedades de la potenciación Para a, b números distintos de cero y m, n números enteros valen las siguientes propiedades:

- Distributiva de la potencia respecto del producto y del cociente

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ .$$

- Producto y cociente de potencias de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{y} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \ .$$

- Potencia de potencia $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Ejemplo 21. El sistema de medidas de nuestro país, conocido como SIMELA *, estipula que, en nuestro país, la unidad de base para medir longitudes es el metro "m". Longitudes más pequeñas se miden usando submúltiplos del metro como el decímetro (dm), el centímetro (cm) y el milímetro (mm). Para medir longitudes más largas se usan múltiplos del metro como el decámetro (dam), el hectómetro (hm) y el kilómetro (km). Abajo se detallan las relaciones entre estas medidas con el metro.

*SIMELA significa sistema métrico legal argentino. Las unidades de pesos y medidas de nuestro país están establecidas en la ley nacional 19.511 que se puede ver en la página web inti.gov.ar/metrologia/pdf/19511.pdf

$1\text{mm} = 10^{-3}\text{m} = \frac{1}{1000}\text{m}$	$1\text{cm} = 10^{-2}\text{m} = \frac{1}{100}\text{m}$	$1\text{dm} = 10^{-1}\text{m} = \frac{1}{10}\text{m}$	$1\text{m} = 10^{0}\text{m}$
$1\text{dam} = 10^{1}\text{m} = 10\text{m}$	$1\text{hm} = 10^{2}\text{m} = 100\text{m}$	$1\text{km} = 10^{3}\text{m} = 1000\text{m}$	

A partir de la tabla de arriba y expresando las relaciones como potencias de 10, completar las líneas de puntos.

a) $1\text{m} = \ldots\ldots\text{km}$ b) $1\text{cm} = \ldots\ldots\text{m}$ c) $1\text{km} = \ldots\ldots\text{dm}$

Resolución.

a) De acuerdo a la tabla: $1\text{km} = 10^3\text{m}$, despejando y usando la definición de potencia con exponente negativo, se obtiene
$$1 \text{ m} = \frac{1}{10^3}\text{km} = 10^{-3}\text{km}\ .$$
Respuesta: $1\text{m} = 10^{-3}\text{km}$.

b) De acuerdo a la tabla, $1 \text{ cm} = 10^{-2}\text{m}$. Despejando y usando la definición de potencia con exponente negativo y la fórmula para dividir fracciones se deduce que $1 \text{ m} = \frac{1}{10^{-2}}\text{cm} = \frac{1}{1/10^2}\text{cm} = 10^2\text{cm} = 100\text{cm}$

Respuesta: $1\text{m} = 10^2\text{cm}$.

c) De acuerdo a la tabla y despejando se obtiene que
$$1\text{km} = 10^3\text{m y } 1\text{m} = 10^1\text{dm},$$
por lo tanto,
$$1\text{km} = 10^3\text{m} = 10^3 \cdot 10\text{dm} \cdot \underbrace{=}_{\text{prod. de potencias de igual base}} 10^{3+1}\text{dm} = 10^4\text{dm}$$

Respuesta: $1\text{km} = 10^4\text{dm}$

Ejemplo 22. Escribir el número $a = -(\frac{3}{4})^7 \cdot 2^8 \cdot 9^2$ como un producto de potencias de 2 y 3.

Explicación	Uso la propiedad distributiva de la potencia respecto de un cociente.
Planteo	$-(\frac{3}{4})^7 \cdot 2^8 \cdot 9^2 = -\frac{3^7}{4^7} \cdot 2^8 \cdot 9^2$
Explicación	Nos damos cuenta que $4 = 2^2$ y que $9 = 3^2$ y usamos la propiedad de potencia de potencia.
Planteo	$-\frac{3^7}{2^{2\cdot 7}} \cdot 2^8 \cdot 3^{2\cdot 2} = -\frac{3^7}{2^{14}} \cdot 2^8 \cdot 3^4$
Explicación	Agrupo las bases de acuerdo a la propiedad sobre las potencias de una misma base.
planteo	$-3^{7+4} \cdot 2^{8-14} = -3^{11} \cdot 2^{-6}$
Explicitación de la respuesta	*Respuesta:* $a = -3^{11} \cdot 2^{-6}$

Trabajo Práctico 4

Ejercicio 1. El sistema de medidas de nuestro país, conocido como SIMELA, estipula que la unidad de base para medir masas es el kilogramo kg. Sin embargo, los nombres de los múltiplos y submúltiplos de la unidad de masa se forman con los prefijos y la palabra gramo. Por ejemplo, una centésima parte de un gramo es un centigramo. Las masas más pequeñas que un gramo se miden usando submúltiplos del gramo como el decigramo (dg), el centigramo (cg) y el miligramo (mg). Para medir masas más grandes se usan múltiplos del gramo como el decagramo (dag), el hectogramo (hg) y el kilogramo (kg). Completar las relaciones entre estas medidas con el gramo en la tabla de abajo.

$1\text{mg} = 10^{-3}\text{g} = \frac{1}{1000}\text{g}$	$1\text{cg} =$	$1\text{dg} =$
$1\text{dag} =$	$1\text{hg} =$	$1\text{kg} =$

A partir de la tabla de arriba y expresando las relaciones como potencias de 10, completar las líneas de puntos.

a) $1\text{hg} = \ldots\ldots\text{dg}$ b) $100\text{mg} = \ldots\ldots\text{g}$ c) $1\text{kg} = \ldots\ldots\text{hg}$

Ejercicio 2. Escribir los siguientes números como un producto de potencias de 2 y de 3 indicando en cada paso las propiedades utilizadas y los cálculos auxiliares.

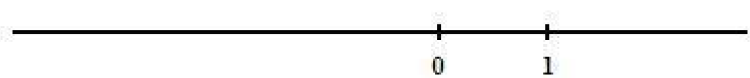
(a) $(-3)^2 \cdot (\frac{8}{3})^4 \cdot 4^{-5}$ (b) $(\frac{1}{9})^{-4} \cdot (-2)^3 \cdot 27^{-2}$

Ejercicio 3. Transformar la expresión $\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} : 4}{-125/1000}$ en la expresión $4^2 \cdot \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\right)^{-1}$ indicando en cada paso las propiedades utilizadas y los cálculos auxiliares.

Ejercicio 4. Una de las unidades para medir la capacidad de almacenar información de los dispositivos informáticos es el byte. Un kilobyte (Kb) es igual a 1024 bytes $= 2^{10}$ bytes y el megabyte (Mb), igual a 1024Kb. Si la memoria RAM de una computadora tiene 512Mb, se pide expresar la capacidad de la memoria RAM en Kb y en bytes usando potencias de 2. Observar que $512 = 2^9$.

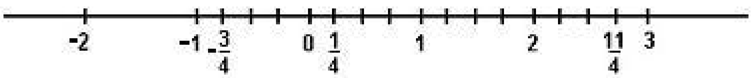
2 Representación gráfica de números

Representamos los números por puntos en una recta donde hayamos fijado dos puntos de referencia, uno de ellos correspondiente al 0 y otro a su derecha correspondiente al 1 (la unidad de escala).



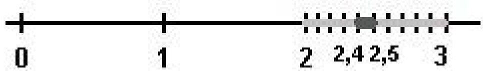
Luego vamos agregando los enteros marcando puntos que disten cantidades exactas de unidades a izquierda y derecha del 0:

Dividiendo en partes idénticas los segmentos entre los puntos enteros quedan determinados nuevos puntos: los racionales. Por ejemplo:

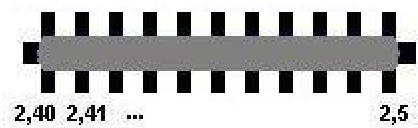


Un caso particular es el de aquellos cuyos denominadores son 10 ó 100 ó 1000, etc. Por ejemplo $2,41 = \frac{241}{100}$ que puede marcarse en tres etapas de la siguiente manera: $2 < 2,41 < 3$ que corresponde a un intervalo entero:

Luego, se agregan marcas separadas por un décimo de unidad en el intervalo $[2,3]$; y allí $2,4 < 2,41 < 2,5$:



Con lupa:



Es decir:

Trabajo Práctico 5

Ejercicio 1. Describa coloquialmente cómo marcaría el punto de la recta que corresponde al número $-\frac{4}{7}$.

Ejercicio 2. Describa coloquialmente cómo marcaría el punto de la recta que corresponde al número $2,414213$.

Ejercicio 3. Nótese que $2,4$ ocupa una posición bastante próxima a $2,41$.

¿Puede precisar cuál es la distancia que hay de una posición a la otra?

Ejercicio 4. Ubicar en la recta numérica los siguientes pares de números y calcular la distancia entre ellos.

i) $-0,0001$ y $-0,00001$ ii) $1,32456$ y $1,32$ iii) $-10,54$ y $10,54$

Ejercicio 5. Ordenar de menor a mayor y ubicar en la recta numérica los siguientes números

$-\frac{6}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{-1}{3}$; $\frac{-5}{3}$; -1; $-0,75$; $0,4$; $-1,2$

Ejercicio 6. Decir qué valor numérico le corresponde a x y a y sabiendo que su posición en la recta real es la siguiente:

3 Representación decimal de números racionales

En la vida cotidiana y en la académica nos referimos a las cantidades y a las medidas usando fracciones o desarrollos decimales (números con coma). Por ejemplo, hablamos de un kilogramo y medio ($1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$) o bien de $1,5$ kilogramos. Estas son dos formas distintas de expresar el mismo peso. La cuestión que nos ocupa ahora es por qué el desarrollo decimal $1,5$ y la fracción $\frac{3}{2}$ representan el mismo número, es decir, $\frac{3}{2} = 1,5$. Para este ejemplo en particular la igualdad es evidente. Simplemente hay que recordar que $1,5$ significa un entero más cinco décimos,

$$1,5 = 1 + \frac{5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{3}{2}\ .$$

Para el proceso inverso, pasar de fracción al desarrollo decimal, hay que aplicar el procedimiento conocido por división con decimales que ejemplificamos a continuación.

$$\begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

porque 3 dividido 2 es 1 y el resto es 1.

$$\begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ \hline 10 & 1{,}5 \\ \ \ 0 & \end{array}$$

porque 10 dividido 2 es 5 y el resto es 0.

En este ejemplo, al llegar al cero la división se termina y se obtiene en el cociente el desarrollo decimal de la fracción $\frac{3}{2}$.

Con este simple ejemplo, se ve como se puede pasar de una representación a otra. En las próximas secciones, veremos cómo se generalizan estos procedimientos.

3.1 De la fracción al desarrollo decimal

El desarrollo decimal de una fracción $\frac{a}{b}$ es el cociente de la división (con decimales) entre a y b. Hay dos posibilidades: en algún momento el resto es cero y el proceso termina, o bien, nunca se pasa por el resto cero y el proceso no termina. Veamos un ejemplo de cada caso.

Ejemplo 23. Calcular el desarrollo decimal de $\frac{11}{8}$ y de $\frac{7}{22}$.
(a) $\frac{11}{8}$

$$\begin{array}{r|l} 11 & \ \ 8 \\ \cline{2-2} 3 & \ \ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & \ \ 8 \\ \cline{2-2} 30 & 1{,}3 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & \ \ 8 \\ \cline{2-2} 30 & 1{,}37 \\ 60 & \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & \ \ 8 \\ \cline{2-2} 30 & 1{,}375 \\ 60 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Se llega a un resto cero y no tiene sentido continuar. Se deduce que $\frac{11}{8} = 1,375$.
(b) $\frac{7}{22}$

$$\begin{array}{r|l} 7 & \ \ 22 \\ \cline{2-2} & \ \ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & \ \ 22 \\ \cline{2-2} 4 & 0{,}3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & \ \ 22 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}31 \\ 18 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & \ \ 22 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}318 \\ 180 & \\ 4 & \end{array}$$

El resto 4 volvió a aparecer, si bajamos el cero nos queda 40 y al dividirlo por 22 de nuevo el cociente será 1 y el resto 18. La misma situación se repite indefinidamente.

$$\begin{array}{r|l} 70 & \ \ 22 \\ \cline{2-2} 40 & 0,318181\ldots \\ 180 & \\ 40 & \\ 180 & \\ 40 & \\ \vdots & \end{array}$$

En este ejemplo, los restos 4 y 18 se repiten dando lugar a un desarrollo decimal "periódico". A la parte del número que se repite se lo llama *período*. En este ejemplo, el período es 18. Para que quede más claro cuál es la parte que se repite se suele escribir

$$\frac{7}{22} = 0,3\,\overset{\frown}{18}\ .$$

3.2 Del desarrollo decimal a la fracción

En general, un número cuyo desarrollo decimal termina es igual a la fracción que tiene por numerador el número sin la coma y por denominador un 1 seguido por tantos ceros como cifras hay después de la coma.

Ejemplo 24.

$$0,032 = \frac{32}{1000} = \frac{4}{125}\ , \qquad 12,5 = \frac{125}{10} = \frac{25}{2}\ , \qquad -0,3 = -\frac{3}{10}\ .$$

Ahora, se muestra el procedimiento que permite pasar de un desarrollo decimal periódico a una fracción. Como se verá, no es tan fácil deducir cuál es la fracción a partir de un desarrollo decimal periódico.

Ejemplo 25. Escribir en forma de fracción los siguientes números
(a) $x = 0,\overset{\frown}{51}$ (b) $x = 10,12\,\overset{\frown}{51}$

Nota: El número $0,\overset{\frown}{51}$ es igual a $0,51515151\cdots$ donde los puntos suspensivos indican que el 51 se repite indefinidamente. Al "51" se lo llama "período". Para el caso de $10,12\,\overset{\frown}{51}= 10,12515151\ldots$, el arco indica que solo el 51 se repite indefinidamente y que el "12" no forma parte del período.
Resolución:
(a) El periodo de $0,\overset{\frown}{51}$ tiene dos cifras que son el 5 y el 1, por lo que multiplicamos al número por 100, para correr la coma tantos lugares como cifras periódicas haya.

$$100 \cdot 0,\overset{\frown}{51}= 51,\overset{\frown}{51}$$

Luego restamos el nuevo número con el dado

$$51,\overset{\frown}{51} - 0,\overset{\frown}{51}= 51,$$

Si escribimos $x = 0,\overset{\frown}{51}$, resumimos la cuenta anterior como:

$$100 \cdot x - x = 51.$$

Luego podemos escribir,

$$100 \cdot x - x = 51 \quad \Leftrightarrow \quad 99 \cdot x = 51 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$$

Respuesta: El número en fracción es $x = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$.

(b) En este caso x es $10,12\,\overset{\frown}{51}= 10,12515151\ldots$. Al multiplicar x por $10\,000$ se obtiene $10\,000x = 10\,1251,\overset{\frown}{51}$ y al multiplicarlo por 100 se obtiene $100x = 1012,\overset{\frown}{51}$. Restamos ambas cantidades,

$$10\,000x - 100x = 10\,1251,\overset{\frown}{51} - 1012,\overset{\frown}{51}$$

y resolvemos la ecuación,

$$10\,000x - 100x = 100239 \Leftrightarrow 9900x = 100239 \Leftrightarrow x = \frac{100239}{9900}\ .$$

Respuesta: $10,12\,\overset{\frown}{51}= \frac{100239}{9900}$

Breve análisis lógico. En este parágrafo se estudian dos formas de representar o escribir los números:

(a) en forma de fracción,

(b) como un desarrollo decimal

y nos preguntamos si es posible pasar de una a la otra. Vimos que esto es posible en los ejemplos que hemos trabajado. Esto ocurre en todos los casos y lo podemos resumir en la propiedad que enunciamos a continuación.

Propiedad. *Todo número que se puede representar con una fracción se puede representar como un desarrollo decimal finito o infinito periódico. A su vez, todo número que tenga un desarrollo decimal finito o infinito periódico se puede escribir como fracción.*

Esta propiedad es un enunciado conformado por las dos oraciones siguientes:

1. "Si un número se puede representar con una fracción entonces puede representarse como un desarrollo decimal finito o infinito periódico",

2. "Si un número tiene desarrollo decimal finito o infinito periódico entonces se puede escribirse como una fracción"

Ambas oraciones tienen una estructura de implicación: si ocurren unas ciertas condiciones o hipótesis (antecedente) entonces ocurre una cierta conclusión o tesis (consecuente). En otros términos, unas ciertas condiciones implican una conclusión. (consecuente)

Condiciones, hipótesis o antecedente	$\Rightarrow$	conclusión, tesis o consecuente.

En nuestras oraciones se tiene que

	Condición, *Hipótesis* o antecedente	Conclusión, *Tesis* o consecuente
Oración 1	todo número que se puede representar con una fracción	se puede representar como un desarrollo decimal finito o infinito periódico
Oración 2	todo número que se puede representar como un desarrollo decimal finito o infinito periódico	se puede escribir con una fracción

Notar que las hipótesis y la tesis de las oraciones 1 y 2 se revierten. Se dice que las oraciones 1 y 2 son enunciados recíprocos.

La propiedad enunciada vale para cualquier número que cumpla con la condición o hipótesis. En las secciones 3.1 y 3.2 se mostraron procedimientos sólo sobre algunos ejemplos. En realidad, para asegurar que la propiedad enunciada es verdadera, deberíamos exhibir cómo aplicar los procedimientos antes ejemplificados a todas las fracciones y a cualquier desarrollo decimal finito o infinito periódico. Esto es posible de hacer, pero esta argumentación general o prueba excede los objetivos de este curso.

Desarrollos decimales infinitos no periódicos. Los números con desarrollo decimal infinito no periódicos no fueron contemplados en esta sección. A partir de la propiedad enunciada anteriormente sabemos que éstos no pueden ser racionales y por ello los llamamos irracionales. Nos ocuparemos de este asunto en la sección 5.

Trabajo Práctico 6

Ejercicio 1.

(a) Veamos cómo se obtiene el desarrollo decimal de $\frac{18}{7}$:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 2, \end{array}$$

porque 18 dividido 7 es 2 y el resto es 4.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} 40 & 2{,}5 \\ 5 & \end{array}$$

porque 40 dividido 7 es 5 y el resto es 5.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} 40 & 2{,}57\ldots \\ 50 & \\ 1 & \end{array}$$

porque 50 dividido 7 es 7 y el resto es 1.

Termine de obtener el desarrollo. ¿Cuántos restos posibles pueden aparecer al dividir por 7? ¿El desarrollo decimal es finito o infinito periódico?

(b) Realice el mismo procedimiento para los racionales $\frac{17}{11}$ y $\frac{29}{8}$. ¿Qué sucede cuando un resto, distinto de cero, se repite? ¿Qué sucede cuando el resto es 0?

Ejercicio 2.

1. Exhiba racionales con diferentes tipos de desarrollo decimal.

2. ¿Puede un racional tener un desarrollo decimal con infinitas cifras que no sea períodico? ¿Por qué?

Ejercicio 3. Estudiar la validez de las siguientes afirmaciones:

- $10 \cdot 1,44444\ldots = 14,44444\ldots$
- $14,44444\ldots - 1,44444\ldots = 13$
- $10 \cdot 1,44444\ldots - 1,44444\ldots = 13$
- Si la letra x denota un valor, reemplazando la x por $1,44444\ldots$ en $10 \cdot x - x = 13$ se satisface la igualdad.
- Si la letra x denota un valor, reemplazando la x por $\frac{13}{9}$ en $10 \cdot x - x = 13$ se satisface la igualdad.
- $1,44444\ldots = \frac{13}{9}$

Ejercicio 4. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.

(a) $3 \times 0,3333333333 = 1$

(b) $0,3333333333 = \frac{1}{3}$

(c) $0,3333333333\ldots = \frac{1}{3}$

(d) $3 \times 0,3333333333\ldots = 3 \times \frac{1}{3}$

(e) $0,999999999\ldots = 1$

(f) $0,0999999999\ldots = 0,1$

(g) $4,2999999999\ldots = 4,3$

Ejercicio 5. Escribir en forma de fracción los siguientes números:

$$2,12; \qquad 1,\overset{\frown}{3}; \qquad 1,0\,\overset{\frown}{2}; \qquad 0,2\,\overset{\frown}{9}$$

Ejercicio 6. Escribir los siguientes números como una fracción irreducible, dar su desarrollo decimal y representarlos sobre la recta numérica:

$$\frac{1,23}{3}; \qquad 3 \cdot \frac{4}{2,5}; \qquad \frac{1}{0,33} \cdot \frac{1}{3}; \qquad \frac{32}{4}; \qquad \frac{1,\overset{\frown}{9}}{2}$$

Ejercicio 7. Reescribir las siguientes oraciones reemplazando las fracciones mencionadas por su desarrollo decimal y respetando las unidades.

El viaje duró dos horas y media.	El viaje duró 2,5 horas.
Queda un litro y medio de leche.	
Juan vendrá dentro de dos horas y cuarto.	
Hacen falta tres cuartos kilos de pan.	
Necesitamos tornillos de 3/16 y de 3/8 de pulgada.	

3.3 Porcentaje y desarrollo decimal

Cómo se explicó en el parágrafo 1.3, el $a\%$ de una cantidad se entiende como la proporción $\frac{a}{100}$ de esa cantidad. Por ejemplo, el $12,53\%$ de 34 se calcula como sigue

$$\frac{12,53}{100} \cdot 34 = 4,2602 \ .$$

Ejemplo 26. Se informa que González obtuvo la dos quintas partes de los votos en una elección. Expresar esta proporción como un porcentaje. Simplemente, el porcentaje $a\%$ se calcula como sigue

$$a = \frac{2}{5} \cdot 100 = 0,4 \cdot 100 = 40 \ .$$

Luego, González obtuvo el 40% de los votos.

Trabajo Práctico 7

En todos los ejercicios, dar la respuesta con una precisión mayor a un centésimo (dos cifras exactas después de la coma).

Ejercicio 1. En una elección, 2.123.432 personas votaron al candidato Pérez. ¿Qué de los votos porcentaje obtuvo Pérez si en total votaron 3.578.257 personas?

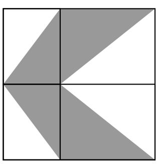
Ejercicio 2. Se sabe que el litro de leche aumentará un $4,5\%$. Si, actualmente, el litro cuesta $\$4,80$, calcular el costo del litro de este alimento luego del aumento.

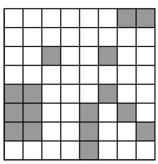
Ejercicio 3. Si un producto costaba $\$43,5$ en enero de 2011 y ahora cuesta $\$51,4$, indicar el porcentaje de aumento.

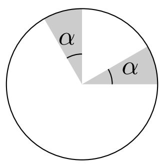
Ejercicio 4. Un diario informa que la variación del precio internacional de la soja fue de $-7,23\%$ entre mayo y junio de un cierto año. Si el precio de la soja era de 331 dólares estadounidenses en mayo, calcular dicho precio en junio.

Ejercicio 5. Se informa que un sexto de la población de una ciudad no tiene agua potable. Expresar esta proporción como un porcentaje.

Ejercicio 6. Indicar el porcentaje del área de cada figura que está sombreada.

(a) 

(b) 

(c) 

$\alpha = 30°$

Ejercicio 7. Un supermercado propone como oferta "Comprando tres unidades del mismo producto pague dos". ¿Cuál es el porcentaje de descuento que realiza el supermercado sobre el precio de cada unidad?

Ejercicio 8. Otro supermercado propone un 70% de descuento en el precio de la segunda unidad si se compran dos unidades del mismo producto. Calcular el porcentaje de descuento que se realiza sobre el precio de cada unidad y comparar esta oferta con la del supermercado del ejercicio anterior.

4 Cálculos combinados

En esta sección abordaremos situaciones cuyas resoluciones involucran el trabajo con expresiones numéricas en las que se combinan distintas operaciones. Al operar con este tipo de expresiones es necesario ser cuidadoso con el orden en el que se resuelven las operaciones involucradas pues, si no lo somos, podemos obtener resultados incorrectos. En la próxima sección veremos ejemplos en los que puede darse esta dificultad.

4.1 Los paréntesis y la propiedad distributiva

Los próximos ejemplos serán la base para entender el funcionamiento de los paréntesis y de la propiedad distributiva.

Ejemplo 27. ¿Cuánto dinero abona una persona que viaja 9 minutos en taxi sabiendo que se cobra \$5 la "bajada de bandera" y \$3 por minuto de viaje?

Juan y Pedro plantean que para responder a lo pedido hay que multiplicar el tiempo de viaje, 9 minutos, por el precio de cada minuto, \$3, y al resultado sumarle el monto por la bajada de bandera, \$5. En sus cuadernos escriben la siguiente cuenta:

$$5 + 9 \cdot 3 ,$$

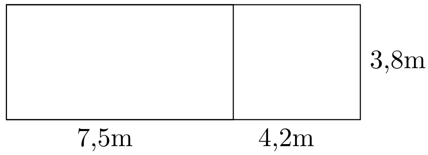
y para resolverla utilizan calculadora. Juan, que utiliza una calculadora científica, obtiene que el resultado es 32; pero Pedro, que utiliza una calculadora que no es científica, obtiene 42. ¿Por qué obtuvieron resultados distintos si ambos ingresaron la misma cuenta en la calculadora, y en el mismo orden en el que está escrita? Observemos que para obtener como resultado 32 la calculadora de Juan primero resolvió la multiplicación, $9 \cdot 3 = 27$, y luego efectuó la suma, $5 + 27 = 32$. En cambio, la calculadora (no científica) de Pedro organizó el cálculo de otra manera; primero resolvió la suma $5 + 9 = 14$ y luego al resultado lo multiplicó por 3 obteniendo el resultado $14 \cdot 3 = 42$. El orden seguido, en cada caso, es distinto y esto explica la discrepancia en los resultados.

La calculadora científica organiza los cálculos siguiendo la convención tradicional sobre la jerarquía de las operaciones (las multiplicaciones preceden a las sumas y restas) y obtuvo el resultado correcto. La calculadora no científica proporcionó un resultado incorrecto debido a que organizó el cálculo operando con los datos a medida que se los ingresa calculando de hecho el resultado de

$$(5 + 9) \cdot 3 .$$

En general, las calculadoras científicas resuelven las operaciones combinadas siguiendo un orden establecido de manera convencional. En lo que sigue trabajaremos sobre esta convención, discutiremos también sobre el uso de paréntesis y cómo afectan al orden de las operaciones.

Ejemplo 28. Un chacarero dispone de un terreno rectangular de 3,8 metros de largo que está dividido, a su vez, en dos parcelas rectangulares menores que comparten el largo de 3,8 m. Una de las parcelas tiene un ancho de 7,5 metros y tiene sembrado berenjenas. En la otra, de 4,2 metros de ancho, ha sembrado lechugas.



¿Cuál es el área total del terreno? ¿Cómo calcula dicha área involucrando las áreas de las parcelas?
Resolución: Para poder resolver este problema debemos recordar, antes que nada, cuál es la "fórmula" que nos permite calcular el área de un rectángulo de "base" b y "altura" h (donde b y h indican las longitudes de cada uno de esos lados).

El área de dicho rectángulo se calcula haciendo el producto de la medida de la base por la de la altura, es decir, el área A del rectángulo resulta ser

$$A = b \cdot h.$$

Utilizando esta regla para calcular áreas de rectángulos, ya puede resolverse fácilmente el problema del chacarero. Para calcular el área total, tenemos en cuenta que ambos rectángulos, correspondientes a las parcelas, comparten la altura y que la base del terreno es la suma de las bases de las parcelas

$$A = 3,8 \cdot (7,5 + 4,2)\text{m}^2 = 3,8 \cdot 11,7\text{m}^2 = 44,46\text{m}^2,$$

es decir, $A = 44,46\text{m}^2$.

Para calcular el área del total involucrando las áreas de las parcelas, calculamos cada una de ellas y luego las sumamos

$$\text{Área destinada a berenjenas es } A = 3,8 \cdot 7,5\text{m}^2 = 28,5\text{m}^2$$

la unidad en la que se mide esta área es el "metro cuadrado", que es una unidad de superficie, dado que cada una de las medidas que se multiplican para calcularla tiene al metro como unidad. De este modo, el área de dicha parcela es $A = 28,5\ \text{m}^2$. Por otro lado, y haciendo el mismo tipo de cuenta, se observa que el área de la parcela destinada a la lechuga es $A = 3,8 \cdot 4,2\text{m}^2 = 15,96\text{m}^2$, es decir, $A = 15,96\ \text{m}^2$. Por último, el área total del terreno puede obtenerse haciendo

$$A = 3,8 \cdot 7,5\text{m}^2 + 3,8 \cdot 4,2\text{m}^2 = 28,5\text{m}^2 + 15,96\text{m}^2 = 44,46\text{m}^2\ .$$

Observar que si a las tres áreas las llamamos A, cuando hablemos del área A no sabremos si nos estamos refiriendo a una u otra de las áreas. Para evitar ese inconveniente, llamamos a cada una con un nombre distinto, por ejemplo, el área de la parcela destinada a las berenjenas, en vez de llamarla A, podemos llamarla A_B, entonces al área del sector de las lechugas podemos llamarla A_L y al área total del terreno A_T. De este modo, utilizando esta notación tenemos:

$$A_B = 28,5\ \text{m}^2, \quad A_L = 15,96\ \text{m}^2 \quad \text{y} \quad A_T = 44,46\ \text{m}^2\ .$$

Es decir $A_T = A_B + A_L$. Esto que puede resultar sencillo y "obvio", no es un detalle menor...involucra algunos conceptos que son muy utilizados en matemática. Observemos que para calcular A_T hemos hecho el siguiente cálculo:

$$A_T = 3,8 \cdot (7,5 + 4,2)\mathrm{m}^2$$

y que, por otro lado, hemos hecho

$$A_B = 3,8 \cdot 7,5\mathrm{m}^2 \text{ y } A_L = 3,8 \cdot 4,2\mathrm{m}^2 \ .$$

Al decir que $A_T = A_B + A_L$ estamos diciendo que da lo mismo hacer

$$3,8 \cdot (7,5 + 4,2)\mathrm{m}^2 \text{ que hacer } 3,8 \cdot 7,5\mathrm{m}^2 + 3,8 \cdot 4,2\mathrm{m}^2$$

(que es la suma de A_B y A_L), es decir, que vale la igualdad:

$$3,8 \cdot (7,5 + 4,2)\mathrm{m}^2 = 3,8 \cdot 7,5\mathrm{m}^2 + 3,8 \cdot 4,2\mathrm{m}^2 \ .$$

Esta igualdad es un ejemplo de la conocida "propiedad distributiva" del producto respecto de la suma de números.

Propiedad distributiva. Dados tres números cualesquiera, a, b y c, se verifica que

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ . \tag{4.1}$$

Por otro lado, sabemos que las igualdades pueden leerse "en dos direcciones", de derecha a izquierda y de izquierda a derecha, dicho en símbolos, $x = y$ es lo mismo que decir $y = x$. En el caso de la igualdad planteada en la propiedad distributiva, se tiene que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ es lo mismo que decir que $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$. En este caso, estamos mencionando la misma igualdad que se propone en la propiedad distributiva pero escrita en el otro sentido adquiriendo, de esa forma, "el formato" de otra propiedad conocida: la de sacar factor común.

En resumen, las propiedad distributiva y el factor común son dos lecturas de la igualdad (4.1). En el caso del problema que hemos planteado al comienzo de esta sección, una u otra lectura de la misma propiedad nos da la posibilidad de hacer el mismo cálculo (el del área total del terreno) de dos maneras "diferentes": en un caso, sumar dos áreas (segundo miembro de la igualdad planteada en la propiedad distributiva) y en el otro, calcular una única área en donde uno de los lados del rectángulo (terreno) se obtiene como suma de los otros dos lados (primer miembro en la propiedad distributiva).

4.2 Uso de paréntesis y jerarquía de las operaciones

Se discutirá acerca de estos temas sobre la base de los siguientes ejercicios resueltos.

Ejercicio resuelto 5. En cada caso, relacionar con $=$ o $\neq$ las expresiones propuestas y justificar:

(a) $-4^2 \ldots\ldots (-4)^2$

(b) $1 - 2 \cdot \frac{5}{4} \ldots\ldots (1 - 2) \cdot \frac{5}{4}$

(c) $\dfrac{2^3}{4 - \frac{1}{2}} \ldots\ldots 2^3 : \left(4 - \dfrac{1}{2}\right)$

Resolución: Para decidir si las expresiones propuestas en cada inciso son iguales o distintas efectuemos los cálculos involucrados en cada una y comparemos los resultados obtenidos. En el inciso a) para operar con -4^2 debemos reflexionar sobre dos cuestiones: cómo interpretar el signo menos delante de la potencia 4^2 y en qué orden operar. El signo menos delante de la potencia 4^2 se interpreta como un -1 multiplicando a dicha expresión, de manera que se piensa de la siguiente forma $-4^2 = (-1) \cdot 4^2$. Esta forma de escribir el cálculo destaca que la base de la potencia es 4 y no -4. En cuanto al segundo aspecto debemos tener presente la *regla de jerarquía* para las operaciones, que establece el orden en el que se realizan las operaciones involucradas en un cálculo combinado:

- En primer lugar se resuelven las potencias.
- Luego, las operaciones de multiplicación y división.
- Finalmente, las operaciones de suma y resta

Resolvamos el cálculo partiendo de la igualdad $-4^2 = (-1) \cdot 4^2$ y tomando en cuenta la regla de jerarquía mencionada. El orden a seguir es primero resolver la potencia y luego la multiplicación. De manera que el desarrollo es

$$-4^2 = (-1) \cdot 4^2 = (-1) \cdot 4 \cdot 4 = -16 \ .$$

Consideremos ahora el segundo cálculo $(-4)^2$. En éste, los paréntesis indican que la base de la potencia es -4. Además, estarían estableciendo un orden en las operaciones distinto del referido en la regla enunciada anteriormente. Si bien en este caso no hay operaciones por resolver dentro de los paréntesis, debe tenerse en cuenta que, en caso de haberlas, el orden impuesto sería primero resolver dichas operaciones y luego elevar al cuadrado.
Resolvamos el cálculo: $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$.

Los resultados obtenidos en cada caso son distintos. Ahora podemos dar una respuesta:

Respuesta: Las expresiones son distintas puesto que $-4^2 = -16$, $(-4)^2 = 16$ y $16 \neq -16$. Por ello completamos $-4^2 \neq (-4)^2$.

En el inciso b) para resolver $1 - 2 \cdot \frac{5}{4}$ debemos tener en cuenta la regla de jerarquía. De esta manera, primero resolvemos el producto y luego realizamos la resta:

$$1 - 2 \cdot \frac{5}{4} = 1 - \frac{5}{2} = \frac{2-5}{2} = \frac{-3}{2} \ .$$

La segunda expresión, $(1-2) \cdot \frac{5}{4}$, presenta paréntesis, los cuales indican una jerarquía de las operaciones distinta a la anterior; podríamos resolver de distintas formas pero en cualquiera de ellas debemos primero trabajar con los paréntesis. En este caso, resolvemos de la siguiente manera: primero realizamos la resta dentro los paréntesis y luego efectuamos la multiplicación:

$$(1-2) \cdot \frac{5}{4} = (-1) \cdot \frac{5}{4} = \frac{-5}{4} \ .$$

Los resultados obtenidos son distintos, por lo tanto las expresiones también.

Respuesta: Las expresiones son distintas puesto que $1-2\cdot\frac{5}{4}=\frac{-3}{2}$, $(1-2)\cdot\frac{5}{4}=\frac{-5}{4}$ y $\frac{-3}{2}\neq\frac{-5}{4}$. Por ello completamos $1-2\cdot\frac{5}{4}\neq(1-2)\cdot\frac{5}{4}$.

En el inciso c) para simplificar la expresión $\dfrac{2^3}{4-\frac{1}{2}}$ el orden a seguir es primero resolver las operaciones involucradas en el numerador y en el denominador y luego realizar la división. Observemos que contrariamente a lo que establece la *regla de jerarquía*, se realiza la resta del denominador antes del cociente; esto es así puesto que el formato de fracción presentado es equivalente a $2^3:(4-\frac{1}{2})$, en donde se utiliza el signo ":" en lugar de la línea de fracción para denotar la división. Es importante destacar que en este último formato sí es necesario introducir paréntesis pues no es lo mismo escribir $2^3:(4-\frac{1}{2})$ que $2^3:4-\frac{1}{2}$.

A partir de lo dicho anteriormente vemos que no es necesario resolver el cálculo de la segunda expresión pues es evidente que es igual a la primera.

Respuesta: las expresiones propuestas son iguales y por ello completamos

$$\frac{2^3}{4-\frac{1}{2}}=2^3:\left(4-\frac{1}{2}\right).$$

A modo de práctica simplifiquemos esta expresión:

$$\frac{2^3}{4-\frac{1}{2}}=\frac{8}{\frac{8-1}{2}}=\frac{8}{7/2}=8\cdot\frac{2}{7}=\frac{16}{7}.$$

Observación: En los distintos casos vimos que los paréntesis cumplen la función de precisar la jerarquía de las operaciones, ya sea para

- determinar cuál es la base de una potencia,
- determinar un factor de un producto,
- determinar un divisor en un cociente.

Ejercicio resuelto 6. ¿Al cálculo $-\dfrac{2-\frac{1}{4}}{3}$ lo reescribiría como $-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1/4}{3}$ o como $-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1/4}{3}$?

Resolución: En este ítem nos preguntan cuál de las dos expresiones propuestas podría ser una manera válida de reescribir el cálculo $-\dfrac{2-\frac{1}{4}}{3}$. Para responder deberíamos establecer si es posible transformar la expresión dada en alguna de las dos expresiones propuestas aplicando propiedades y procedimientos válidos. En primer lugar observamos que en la expresión dada hay una fracción con denominador 3 y en las expresiones propuestas aparecen dos fracciones con ese denominador. Esto sugiere la utilización de un procedimiento que comúnmente llamamos "distribuir el denominador" para transformar la primera expresión. Analicemos qué significa dicho procedimiento: la expresión $-\dfrac{2-\frac{1}{4}}{3}$ es igual a $-(2-\dfrac{1}{4})\dfrac{1}{3}$ puesto que dividir por 3 es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{3}$. Aún más, podríamos escribirla de la siguiente manera $-\dfrac{1}{3}(2-\dfrac{1}{4})$. Observemos que al plantearlo de esta manera, resulta evidente que $-\frac{1}{3}$ multiplica a la resta $(2-\frac{1}{4})$. De manera que resulta válido usar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma

$$-(2-\frac{1}{4})\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}(2-\frac{1}{4})=-\frac{2}{3}+\frac{1/4}{3}\ .$$

De esta manera vemos que una forma válida de reescribir el cálculo dado es con la segunda de las expresiones propuestas.
Respuesta: Al cálculo $-(2-\frac{1}{4})\frac{1}{3}$ lo reescribiría como $-\frac{2}{3}+\frac{1/4}{3}$.

Orden de las operaciones en la resolución de cálculos combinados. A partir de los ejemplos resueltos repasamos la regla que establece el orden para resolver las operaciones involucradas en un cálculo combinado. También, recordamos que dicho orden se altera con la presencia de paréntesis, y en ese nuevo orden, la prioridad está en la resolución de los mismos. Como conclusión podemos enunciar la siguiente regla de jerarquía, que contempla la presencia de paréntesis.

Regla de jerarquía. En primer lugar se resuelven las operaciones encerradas entre paréntesis; en segundo lugar las potencias; en tercer lugar, las multiplicaciones y divisiones, y por último, se efectúan las sumas y restas.

Resolución y planteo de cálculos combinados.

Ejercicio resuelto 7. Un granjero cultiva tomate, lechuga y berenjena en un terreno rectangular que tiene un área de 350m^2. Para el cultivo de tomate destina la quinta parte del terreno, para cultivar lechuga utiliza tres cuartos del terreno restante y en la porción que queda planta berenjena, ¿cuál es el área de la porción destinada al cultivo de berenjena?

Resolución: Para calcular la superficie de la porción de terreno en la que cultiva berenjena debemos realizar el siguiente cálculo: al área total restarle la suma de las áreas de las porciones en las que planta tomate y lechuga. Para calcular el área de la parte del terreno en la que planta tomate debemos obtener la quinta parte del área total, o sea, $\frac{1}{5}\cdot 350$.

Para determinar el área de la porción destinada al cultivo de lechuga debemos calcular las tres cuartas partes del área del terreno restante que, teniendo en cuenta que ya hemos quitado una quinta parte, representa cuatro quintos del total

$$350-\frac{1}{5}\cdot 350=\frac{4}{5}\cdot 350\ .$$

De esta manera, para obtener el área de la parte en la que cultiva lechuga debemos calcular "tres cuartos de cuatro quintos de 350", es decir: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350$. De este modo, el área de la porción de terreno utilizada con la siembra de tomate y lechuga es $\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350$.

Teniendo en cuenta el desarrollo anterior planteamos la siguiente expresión, que permite calcular el área de la porción de terreno en la que cultiva berenjena

$$350 - \left(\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350\right) .$$

Existen diversas formas de resolver el cálculo planteado, aquí presentaremos solo dos de ellas. A continuación desarrollamos cada una en un formato de tabla en la que distinguimos entre lo que pensamos al momento de encarar la resolución y lo que planteamos por escrito.

Resolución (forma 1):

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Primero observamos que la expresión está formada por dos términos relacionados por una resta. Siguiendo la regla de jerarquía, ésta será la última operación a resolver. Manteniendo esta estructura, la estrategia de resolución será, en primer lugar, resolver cada término, y, por último, realizar la resta entre ellos.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td colspan="2">$350 - \left(\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350\right)$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">En el primer término no hay operaciones para resolver. El segundo término, delimitado por paréntesis, consta de una suma de dos términos. Para resolverlo comenzamos obteniendo, en cálculos auxiliares, el resultado de cada uno de los términos y luego efectúo la suma entre los resultados obtenidos. Finalmente, realizamos la resta obteniendo así el resultado final.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$= 350 - \left(\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350\right) =$
$= 350 - (70 + 210) =$
$= 350 - 280 = 70$</td><td>Cálculos auxiliares
$\frac{1}{5} \cdot 350 = 70$
$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350 = 210$</td></tr>
<tr><td>Explicitación de la respuesta</td><td colspan="2">Respuesta: El granjero planta berenjena en una porción de terreno de 70m^2</td></tr>
</table>

Resolución (forma 2):

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Primero observamos que la expresión está formada por dos términos relacionados por una resta. Siguiendo la regla de jerarquía, ésta será la última operación a resolver. Dado que el segundo término está delimitado por paréntesis, la estrategia de resolución será, en primer lugar, eliminar los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma; luego, resolver cada término (ahora serán tres términos en lugar de dos) y, finalmente, realizar las sumas o restas, según corresponda, entre los resultados de cada término.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td colspan="2">$350 - \left(\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350\right)$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Para eliminar los paréntesis recurrimos a la mencionada propiedad distributiva. Al aplicarla consideramos que el número que multiplica a cada término de la suma es -1. En cálculos auxiliares planteamos el uso de dicha propiedad y obtenemos los resultados de cada término. Para obtener el resultado final realizamos las sumas y restas entre los resultados de los tres términos.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$350 - \frac{1}{5} \cdot 350 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350 =$
$= 350 - 70 - 210 =$
$= 70$</td><td>Cálculos auxiliares
$* - \left(\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350\right) =$
$= -\frac{1}{5} \cdot 350 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350$
$* \ \frac{1}{5} \cdot 350 = \frac{350}{5} = 70$
$* \ \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350 = 3 \cdot \frac{350}{5} = 210$</td></tr>
</table>

Observemos que en ambas resoluciones seguimos lo establecido en la regla de jerarquía de las operaciones pues trabajamos en primer lugar con los paréntesis. La diferencia es que en el primer caso los mantuvimos y en el segundo, los eliminamos utilizando una propiedad.

Ejercicio resuelto 8. Resolver el siguiente cálculo combinado

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \left(\frac{1}{2}\right)^{5} - \frac{(2 + \frac{1}{2})^2}{(1 - \frac{1}{5})^{-1}} \; .$$

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">La expresión está formada por tres términos relacionados por sumas y restas. Siguiendo la regla de jerarquía, la estrategia será obtener el resultado de cada uno de los términos y, luego, sumarlos y restarlos para obtener el resultado final.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td colspan="2">$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}-\frac{(2+\frac{1}{2})^2}{(1-\frac{1}{5})^{-1}}\ .$$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">En el primer término hay una potencia con exponente negativo. Utilizamos la definición: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ y la propiedad distributiva de la potencia respecto del cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$\frac{9}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}-\frac{(2+\frac{1}{2})^2}{(1-\frac{1}{5})^{-1}}\ .$</td><td>cálculos auxiliares
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">En el segundo término observamos que hay una multiplicación de potencias de igual base. Aplicamos la propiedad $a^{m+n}=a^m a^n$ y la propiedad distributiva de la potencia respecto del cociente. Resolvemos en cálculos auxiliares aplicando ambas propiedades y obtenemos el resultado del segundo término.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$$\frac{9}{4}+\frac{1}{4}-\frac{(2+\frac{1}{2})^2}{(1-\frac{1}{5})^{-1}}\ .$$</td><td>Cálculos auxiliares
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1^2}{2^2}=\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">En el tercer término hay un cociente de potencias. La resolución la realizaré en varios pasos y la estrategia será: resolver el numerador, el denominador por separado, y luego, realizar el cociente entre ambos resultados. En el numerador, primero resuelvo la suma y, luego, al resultado lo elevamos al cuadrado, usando la propiedad distributiva de la potencia respecto del cociente. Desarrollamos este planteo en cálculos auxiliares y obtenemos el resultado del numerador. En el denominador, primero resuelvo la resta y, luego, al resultado lo elevo a la -1, aplicando la definición de potencia con exponente negativo. Desarrollamos este planteo en cálculos auxiliares y obtenemos el resultado del denominador. Reemplazamos los resultados parciales.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$\frac{9}{4}+\frac{1}{4}-\frac{25/4}{5/4}$</td><td>Cálculos auxiliares
$(2+\frac{1}{2})^2=\left(\frac{4+1}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5^2}{2^2}=\frac{25}{4}$
$(1-\frac{1}{5})^{-1}=\left(\frac{5-1}{5}\right)^{-1}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{4}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Queda un cociente de dos fracciones y para resolverlo aplicamos la regla que establece que hay que multiplicar la fracción del numerador por la inversa de la fracción del denominador: $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. En este caso, la fracción del denominador es $\frac{5}{4}$, por lo tanto su inversa es $\frac{4}{5}$. El resultado obtenido es el correspondiente al tercer término.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$\frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{25/4}{5/4} =$
$\frac{10}{4} - 5 = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$</td><td>$\frac{25/4}{5/4} = \frac{25}{4} \cdot \frac{4}{5} = 5$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Respuesta: El resultado del cálculo planteado es $-\frac{5}{2}$.</td></tr>
</table>

Trabajo práctico 8

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Qué dice la propiedad distributiva? Usarla para calcular (sin calculadora) $(2 - 3) \cdot 4$. Responder, sin calcular, si es cierto que $5 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 5 \cdot (4 - 3)$.

(b) Dar una explicación a alguien que no sabe mucho de matemática de cómo resolver correctamente un cálculo combinado en el que aparecen las operaciones de resta, potenciación y división. ¿Qué recomendaciones y sugerencias le darías?.

(c) ¿Qué se usa para cambiar el orden en las operaciones en un cálculo?

(d) ¿Qué dice la “regla de jerarquía”?

Ejercicio 2. María y Juana toman un taxi y realizan un viaje de 8 minutos. El taxista les informa que la bajada de bandera es de $\$7,5$ y que cada minuto de viaje cuesta $\$2,5$. Tanto Juana como María ingresan en sus calculadoras la siguiente cuenta:

$$7,5 \; \boxed{+} \; 2,5 \; \boxed{\times} \; 8 \; \boxed{=}$$

María tiene una calculadora científica y obtiene como resultado $27,5$, en cambio, Juana, que tiene un calculadora común, obtiene como resultado 80.
¿Cuál de las dos respuestas es la correcta?¿Cómo organizó la cuenta cada calculadora?

Ejercicio 3. Al cálculo $-\dfrac{3-\frac{1}{5}}{4}$, lo reescribiría como $-\dfrac{3}{4} - \dfrac{\frac{1}{5}}{4}$ o como $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{\frac{1}{5}}{4}$.

Ejercicio 4. Una pareja compra un terreno de 20 metros de ancho y 40 metros de largo. Deciden destinar la cuarta parte del terreno a la construcción de una casa y el 20% del terreno restante para el quincho y la pileta. Finalmente, lo que resta del terreno es destinado a jardín y huerta.

(a) Proponer una expresión que permita obtener el área de la porción de terreno destinada a jardín y huerta. (Aclaración: se espera que planteen *un único* cálculo que explicite *todas* las operaciones necesarias para obtener la superficie pedida).

(b) Si para la huerta se utiliza la tercera parte de la superficie destinada a jardín y huerta, ¿qué porcentaje del terreno total representa dicha porción?

Ejercicio 5. En cada caso relacionar con $=$ o $\neq$ las expresiones propuestas y justificar

(a) $-5^2 \ldots (-5)^2$ (b) $\dfrac{1-\frac{1}{3}}{2^3} \ldots 1 - \dfrac{1}{3} : 2^3$

Ejercicio 6. Dada la expresión numérica $-\frac{2+5^2}{3}$,

(a) Realizar las operaciones indicadas en la expresión explicitando el orden seguido al operar.

(b) ¿Cómo reescribiría la expresión usando el símbolo ":" (de división) para indicar el cociente en lugar de la línea de fracción?

(c) Modificar la jerarquía de las operaciones indicadas para que el resultado sea, en un caso, igual $\frac{49}{9}$ y en otro igual a $-\frac{49}{3}$. Justificar la respuesta en cada caso.

Ejercicio 7. Expresar en forma de cálculo combinado las siguientes frases y resolver

(a) "La doceava parte del cuadrado de la suma entre un tercio y un cuarto"

(b) "El doble del anterior de 7 sumado al cuadrado de 8".

Ejercicio 8. Debido a problemas financieros, el granjero del ejercicio resuelto decide alquilar a un vecino las porciones de terreno en las que planta tomate y lechuga. Considerando que alquila a un precio de \$16 el m^2 y que gasta \$800 en concepto de impuestos, determinar cuál o cuáles de los siguientes cálculos permiten obtener la ganancia del granjero:

(a) $16\dfrac{1}{5} \cdot 350 + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot 350 - 800$.

(b) $16\left(\dfrac{1}{5} \cdot 350 + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot 350\right) - 800$.

(c) $16 \cdot \dfrac{1}{5} \cdot 350 + 16 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot 350 - 800$.

Resolver cada uno de los cálculos.

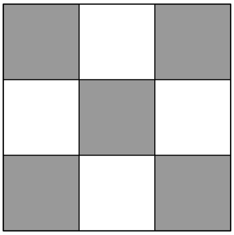
Ejercicio 9. Resolver los siguientes cálculos combinados y expresar la respuesta como una fracción irreducible.

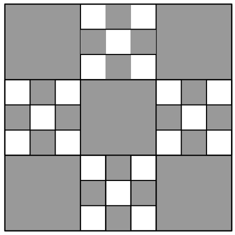
(a) $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2 - (-2)^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)$. (b) $\dfrac{7 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)}{\frac{1}{4} - 2}$

(c) $\dfrac{\left(-\frac{1}{8} - 1\right) \cdot \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}}{\frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{5}\right)} \div \left(2 - \dfrac{2}{11}\right)$ (d) $\dfrac{(1,\overset{\frown}{5} - 1,\overset{\frown}{2})^2}{1 - \frac{1}{3}} + 0,\overset{\frown}{18} \cdot 1,1 - \dfrac{0,0\overset{\frown}{3}}{0,5}$

(e) $\dfrac{(-3) \cdot (-3+1) + \frac{4}{5}}{(4 - \frac{2}{3})(4 + \frac{2}{3})}$

Ejercicio 10. Proponer un único cálculo que indique qué proporción del área del cuadrado está sombreada en las siguientes figuras. Resolverlo.

(a) 

(b) 

5 Aproximación y aritmética exacta

5.1 Desarrollo decimal, raíces y números irracionales.

Si bien el desarrollo decimal ofrece la ventaja de simplificar los cálculos en muchas ocasiones, tiene el incoveniente de introducir errores de aproximación cuando se trabaja con números con desarrollo decimal infinito o con muchas cifras. La operatoria que se realiza evitando usar los desarrollos decimales tiene como objetivo obtener resultados exactos. Ya vimos que en el caso de los números racionales, se puede obtener resultados exactos usando fracciones.

Cuando todos los números tienen un desarrollo decimal finito y corto (pocas cifras decimales), operar con el desarrollo decimal también nos da un resultado exacto. Por ejemplo, si deseamos calcular un medio más tres cuartos, podemos usar fracciones y estamos seguros de que el resultado será exacto. En efecto,

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Con el desarrollo decimal se obtiene

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0,5 + 0,75 = 1,25.$$

Y sabemos que $\frac{5}{4} = 1,25$.

Cuando los números tienen desarrollos muy largos o infinitos, ya sea que trabajemos con lápiz y papel o con la calculadora, vamos a tender a cortar el desarrollo en algún dígito. De acuerdo con el manual, una de las calculadoras más comunes trabaja internamente con 12 dígitos exactos y muestra en la pantalla 9 dígitos exactos. Esta precisión suele ser más que suficiente para la mayoría de los cálculos que se deben hacer a lo largo de este curso, y muy probablemente a lo largo de los estudios y la vida profesional salvo para aquéllos que sigan carreras técnicas o exactas.

La costumbre de cortar todos los resultados intermedios en el segundo decimal puede producir errores grandes en los resultados finales aún en cálculos simples. A continuación se ejemplifica esto.

Ejemplo 29. Como resultado de una herencia, tres hermanos deben repartir \$500.000 en partes iguales. Es decir, a cada uno de los hermanos le corresponde un tercio de los \$500.000, por lo que, el valor exacto que le corresponde a cada hermano es el resultado de la cuenta

$$\frac{1}{3} \cdot \$500.000.$$

Vamos a mostrar diferentes tipos de operatorias.

(a) Usando fracciones tenemos un valor exacto pero que no es práctico:
$$\tfrac{1}{3} \cdot \$500.000 = \$\tfrac{500.000}{3}.$$

(b) Aproximando $\frac{1}{3}$ por $0,33$ obtenemos como valor aproximado
$$0,33 \cdot \$500.000 = \$165.000.$$

Esto nos da un poco más de información, pero, observemos que si cada hermano toma esta última suma de dinero hay una diferencia de \$5.000 entre lo que tienen los tres hermanos, $3 \cdot \$165.000 = \$495.000$, y el monto original de \$500.000. Alguien se está quedando \$5.000 extra ¿será el abogado?

Aquí, se introdujo un error al aproximar $\frac{1}{3}$ por $0,33$ al principio del cálculo. Como no tenemos control sobre ese error, este se propaga en los cálculos que siguen y la diferencia entre el resultado exacto y el que obtuvimos como respuesta no es fácil de deducir.

(c) Tomamos el valor exacto $\$\frac{500.000}{3}$ y calculamos su desarrollo decimal
$$\$\tfrac{500.000}{3} = \$166.666,6666\ldots.$$

Ahora podemos afirmar que a cada hermano le corresponde \$166.666 y la diferencia con el valor exacto no será mayor que \$1.

Esta es la respuesta más satisfactoria. Se mantuvieron los cálculos exactos todo lo que se pudo y se pasó al desarrollo decimal al final.

Raíces y números irracionales

Como sabemos (ver sección 3.2), un número racional tiene desarrollo *decimal finito o infinito periódico*, pero es fácil “crear” desarrollos decimales infinitos y no periódicos. Por ejemplo,

$$x = 23,45678910111213141516171 8\ldots$$

(los puntos suspensivos indican que se continúa la pauta de ir agregando sucesivamente números naturales consecutivos).

Este número NO es racional (ver el teorema sobre números racionales y desarrollo decimal). A este tipo de números se los llama *irracionales*.

Números irracionales y números reales.

Definición: *Se llaman irracionales a todos los números cuyo desarrollo decimal es infinito y no periódico.*

Los números racionales junto con los irracionales conforman el conjunto de los números reales que se simboliza $\mathbb{R}$ y son los números representables en la recta.

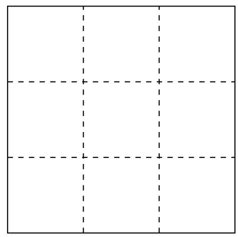
Un número como el de arriba es una construcción artificial y operar con él de forma exacta es muy complicado. Hay otros números irracionales que surgen de forma natural e inevitable en numerosas construcciones geométricas como veremos más adelante.

Raíces cuadradas. Si un cuadrado tiene área 9 ¿Cuál es la longitud de sus lados? El área de un cuadrado de lado ℓ es ℓ^2. Para responder a la pregunta hay que encontrar un número positivo ℓ tal que

$$\ell^2 = 9\ .$$

La solución es $\ell = 3$ y se dice que 3 es la raíz cuadrada de 9. En símbolos se escribe

$$\sqrt{9} = 3\ .$$



ℓ

En este ejemplo tuvimos suerte, 3 es un número entero. Notar que también $(-3)^2 = 9$, pero descartamos esta posibilidad pues -3 no puede ser la longitud del lado de un cuadrado.

El número $\sqrt{2}$. Si queremos construir un cuadrado cuya área sea 2, debemos encontrar un número positivo ℓ tal que

$$\ell^2 = 2\ .$$

Por analogía a lo anterior, a ese número lo llamamos la raíz cuadrada de 2 y se escribe $\ell = \sqrt{2}$.

¿Qué cantidad es $\sqrt{2}$?, ¿entre qué números puedo ubicarlo en la recta? Para responder esto podemos recurrir al desarrollo decimal del mismo.

Desarrollo decimal de $\sqrt{2}$. Por un momento, supongamos que no tenemos la calculadora e intentemos descubrir el desarrollo decimal. Como $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$ entonces tiene que pasar que el lado del cuadrado que estamos buscando quede comprendido entre 1 y 2, es decir,

$$1 < \sqrt{2} < 2\ .$$

Probando elevar al cuadrado los números $1,1,\ 1,2,\ \ldots 1,9$ nos encontramos con que $1,4^2 = 1,96$ y $1,5^2 = 2,25$, podemos deducir que

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5\ .$$

Volvamos al siglo XXI. Una calculadora con una precisión de dos dígitos nos daría como valor aproximado de $\sqrt{2}$ el número $1,41$, pero este valor no es exacto pues

$$1,41^2 = 1,9881\,.$$

Una calculadora con una precisión de cuatro dígitos nos daría como valor aproximado de $\sqrt{2}$ el número $1,4142$, pero este valor no es exacto pues

$$1,4142^2 = 1,99996164\,.$$

Muchas calculadoras al efectuar la raíz cuadrada de 2 dan el valor $1,414213562$. Si elevamos el número $1,414213562$ al cuadrado haciendo la multiplicación a mano nos damos cuenta que el último dígito del producto debe ser 4.

$$\begin{array}{r} 1,414213562 \\ \times \qquad\qquad\quad \\ 1,414213562 \\ \hline 4 \\ \hdashline \end{array}$$

Lo que sucede es que $1,414213562$ es un *valor aproximado* de $\sqrt{2}$ y no es el *valor exacto*. Si usáramos una computadora podríamos calcular más dígitos de $\sqrt{2}$ y obtendríamos $1,4142\ldots d$ siendo d el último dígito no nulo de la derecha, pero usando el mismo razonamiento de recién d no puede valer ni 1, ni 2, ni 3 etc. De lo que se concluye que el desarrollo decimal de $\sqrt{2}$ no puede terminar.

Lo discutido anteriormente nos demuestra que el desarrollo decimal de $\sqrt{2}$ **no** puede ser finito, luego es infinito; pero no sabemos con lo hecho si es periódico o no.

Con un poco de ingenio, se puede demostrar que el número $\sqrt{2}$ es irracional y esto implica que su desarrollo decimal es infinito y no periódico, y que $\sqrt{2}$ no se puede escribir como una fracción. La argumentación que justifica la validez de esta afirmación excede los objetivos del curso.

Otros números irracionales son los siguientes:

(a) El número π que es la longitud de la circunferencia de diámetro 1. Un valor aproximado de π es $3,1416$.

(b) El único número que elevado al cubo da 2 se designa por $\sqrt[3]{2}$. Además este número es la longitud de la arista de un cubo de volumen 2. Un valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$ es $1,2599$.

(c) Las siguientes raíces cuadradas $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, etc.

5.2 Cálculos con raíces. Propiedades

En esta sección estudiamos como realizar cálculos cuando intervienen raíces. Por supuesto, todas las reglas sobre la prioridad de las operaciones y el uso de paréntesis siguen vigentes.

Raíces en general

- Para un número a positivo o cero, se llama raíz cuadrada de a y se escribe $b = \sqrt{a}$ al único número real no negativo cuyo cuadrado es a.

- Para un número natural $n \geq 2$, la *raíz enésima* de un número a se denota $\sqrt[n]{a}$ y se define de la siguiente manera:

  Si n es impar,
  $$b = \sqrt[n]{a} \quad \text{si} \quad b^n = a \tag{5.2}$$

  Si n es par y $a \geq 0$,
  $$b = \sqrt[n]{a} \quad \text{si} \quad b^n = a \quad \text{y} \quad b \geq 0 \tag{5.3}$$

  El número a se llama radicando y n, índice de la raíz.

Comentarios y ejemplos

- Notemos que $\sqrt[4]{-16}$ no tiene sentido pues cualquier número real elevado a una potencia par da un resultado positivo. Esto explica por qué si n es par, a debe ser positivo o cero.

- La longitud b de la arista de un cubo cuyo volumen es 8 debe cumplir con la ecuación
  $$b^3 = 8 \ .$$
  Se deduce que $b = \sqrt[3]{8} = 2$ pues $2^3 = 8$. Cuando el índice de la raíz es igual a 3, a la cantidad $\sqrt[3]{a}$ se la llama raíz cúbica de a.

- Si n es impar, el radicando puede ser cualquier número. Por ejemplo,
  $$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ pues } (-2)^3 = -8 \ .$$

Observación: La raíz enésima de un número puede expresarse como potencia con exponente fraccionario en el caso de que a sea un número positivo:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \ .$$

Ejemplo 30. $\sqrt[3]{5}^8 = 5^{\frac{8}{3}}$ $\qquad$ $\sqrt[2]{9}^3 = 9^{\frac{3}{2}}$

Son válidas todas las propiedades de la potenciación explicadas en la sección 1.4.

Ejercicio resuelto 9.

(a) ¿Es correcto afirmar que el resultado de $\sqrt{4}$ es ± 2 ?

No es correcto. De acuerdo a la definición, $\sqrt{4}$ es el número no negativo que elevado al cuadrado da 4, que en este caso es 2.

(b) ¿Es cierto que para cualquier valor de a es válida la igualdad $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$?

No es cierto. Como estamos negando una afirmación de carácter general, para justificar nuestra respuesta debemos dar un contraejemplo. Es decir, encontrar un valor de a para el cual la igualdad no es válida.

Contraejemplo: si $a = -2$, el segundo miembro de la igualdad queda $\sqrt{a}^{\,2} = \sqrt{-2}^{\,2}$. Esta expresión no tiene sentido pues cualquier número no nulo elevado a una potencia par es positivo. En cambio, $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

En general, recordemos que las raíces de índice par con radicando negativo no tienen sentido. Sin embargo, la igualdad $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$ es válida si a es positivo o cero.

Ejercicio resuelto 10. Simplificar, usando las propiedades, las siguientes expresiones.

(a) $(2+\sqrt{3})^2 + \sqrt{27}$ (b) $(\sqrt[3]{7})^5$

Resolución:

(a) Resolvemos la cuenta $(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{27}$. Es decir operamos sobre la expresión para obtener otra más simplificada, con menos términos y menos operaciones indicadas.

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Operamos en la expresión, teniendo en cuenta que:
• el cuadrado de un binomio se desarrolla haciendo uso de la propiedad distributiva
• por definición de raíz cuadrada, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$
• Los términos que tienen la misma raíz pueden sumarse o restarse entre sí</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{27}$
$= (2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})+\sqrt{27}$</td><td>Cálculos auxiliares
$(2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})$
$= 2\cdot 2 + 2\cdot\sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot 2 + \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$
$= 4 + 2\times 2\cdot\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\cdot\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td colspan="2">Reemplazo en la expresión el resultado obtenido al desarrollar el cuadrado del binomio.
$$(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{27} = 7 + 4\cdot\sqrt{3} + \sqrt{27}.$$</td></tr>
</table>

Explicación	Para poder seguir operando con términos que tienen raíces irracionales, debemos ver si la misma raíz irracional puede extraerse como factor común. No es el caso por ahora... en un término tenemos $\sqrt{3}$ y en el otro $\sqrt{27}$. Pero si notamos que $27 = 3^3$, entonces se puede continuar operando.	
Planteo	$(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{27}$ $= 7+4\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3^3}$	Cálculos auxiliares $\sqrt{3^3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3\cdot\sqrt{3}$
Planteo y respuesta	Ahora extraemos factor común entre el segundo y tercer término: $(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{27} = 7+4\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3} = 7+(4+3)\sqrt{3} = 7+7\sqrt{3} = 7(1+\sqrt{3})$	

(b) Se quiere usar que $(\sqrt[3]{7})^3 = 7$, para ello escribimos el 5 como $3+2$ usamos la propiedad sobre el producto de potencias de igual base, nos queda

$$(\sqrt[3]{7})^5 = (\sqrt[3]{7})^{3+2} = (\sqrt[3]{7})^3\cdot(\sqrt[3]{7})^2 = 7\cdot(\sqrt[3]{7})^2 = 7\sqrt[3]{49}\ .$$

Esta última expresión no se puede simplificar, nuevamente, la justificación de esta afirmación excede los objetivos del curso.

Trabajo Práctico 9

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de trabajar con fracciones y raíces en lugar de trabajar con desarrollos decimales?

(b) ¿Con qué precisión se suelen dar los montos de dinero?

(c) Indicar si las siguientes cantidades están dadas de forma exacta o aproximada.

(i) $(\frac{1}{2}-4\sqrt{2})^2$

(ii) La suma de las cantidades $0,1324$ y $2,5431$ es $2,6755$

(iii) El área de un círculo de radio 3 es 28,27

(iv) El área de un círculo de radio 3 es 28,27433388

(v) La arista de un cubo de volumen 5 mide 1,7099.

(d) ¿Se puede escribir al número $\frac{1,23}{5,9}$ en forma de fracción? ¿Es racional?

(e) Exhiba ejemplos de números que no se pueden expresar como una fracción.

(f) ¿Cómo se definen las cantidades $\sqrt[n]{a}$ y $a^{\frac{m}{n}}$? ¿Bajo cuáles condiciones se puede calcular la raíz enésima de un número negativo?

(g) Reescribir las propiedades de la potenciación para el caso de exponentes fraccionarios (ver subsección 1.4).

Ejercicio 2. Explicar por qué las siguientes afirmaciones son incorrectas y corregirlas.

(a) $\sqrt{9} = \pm 3$.

(b) Para todo valor de a resulta $\sqrt{a^2} = a$.

Ejercicio 3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) $\sqrt{21}$ es el único número que elevado al cuadrado da 21.

(b) $\sqrt{21}$ es el único número positivo que elevado al cuadrado da 21.

(c) $\sqrt{21} = 4,58$.

Ejercicio 4. El objetivo de este ejercicio es calcular 4 cifras decimales del número $\sqrt{21}$ suponiendo que se dispone de una calculadora que solo suma, resta y multiplica.

(a) Elevando al cuadrado los números 1, 2, ... comprobar que $4^2 < 21 < 5^2$. ¿Qué puede concluir sobre $\sqrt{21}$?

(b) Elevando al cuadrado los números $4,1$; $4,2$; etc. Comprobar que

$$(4,5)^2 < 21 < (4,6)^2.$$

¿Qué puede concluir sobre $\sqrt{21}$?

(c) Reproducir este procedimiento para obtener una aproximación de 4 cifras decimales de $\sqrt{21}$. ¿Es el número obtenido igual a $\sqrt{21}$?¿Por qué?

(d) Muchas calculadoras al efectuar la raíz cuadrada de 21 dan el valor $4,582575695$. Decidir si este valor es igual o distinto de $\sqrt{21}$ elevándolo al cuadrado a mano como se muestra en la figura.

$$\begin{array}{rr} & 4,582575695 \\ \times & \\ & 4,582575695 \\ \hline & \\ & \text{- - - - - - - - - -} \end{array}$$

(e) Generalizar el argumento del inciso anterior y concluir que el desarrollo decimal de $\sqrt{21}$ es infinito. ¿Alcanza este argumento para afirmar que $\sqrt{21}$ es irracional?

Ejercicio 5. Multiplique en su calculadora: $10,00001 \times 9.99999$ (hay solo 5 dígitos decimales en cada factor).

- ¿El resultado es 100?
- ¿Obtendríamos el mismo resultado multiplicando a mano?

$$\begin{array}{r} 10,00001 \\ \times \quad \\ 9,99999 \\ \hline \text{- - - - - - - -} \end{array}$$

Ejercicio 6. Decidir si los números $\frac{312689}{99532}$ y $\frac{833719}{265381}$ son iguales usando la calculadora y usando el criterio de fracciones equivalentes explicado en la subsección 1.2. Representarlos en la recta numérica.

Ejercicio 7. Escribir en forma de fracción las siguientes cantidades.
(a) $\sqrt[3]{\frac{-125}{8}}$ (b) $\sqrt[4]{16}$ (c) $\frac{1}{\sqrt[2]{(-2)^2}}$ (d) $4^{-\frac{1}{2}}$ (e) $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{7}{3}}$

Ejercicio 8.

(a) Efectuar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre los números $\sqrt{(-7)^2}$ y -3^2 (en ese orden y sin calculadora).

(b) ¿Cuál de esas operaciones dieron como resultado 16?

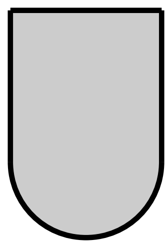
Ejercicio 9. (Este ejercicio integra el trabajo con raíces y la sección de cálculos combinados.) Simplificar la escritura de los siguientes números explicando cada paso realizado:
(a) $\left(\left(2-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-3-\frac{3}{4}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (b) $3\cdot\sqrt[4]{16^3}-\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}}{27^{-\frac{1}{3}}}$ (c) $(\frac{1}{2}-\sqrt{5})^2\cdot\sqrt[3]{125}$

Capítulo 2

Área y Perímetro

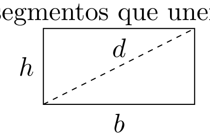
1 Medición de áreas y perímetros

Esta sección se ocupa del cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Recordemos que el perímetro es el contorno de una figura, aunque también designa la medida de ese contorno. La palabra área designa tanto la superficie comprendida dentro de un contorno como a la extensión de dicha superficie expresada en una determinada unidad de medida. En la figura, se ha demarcado el perímetro con una línea gruesa y el área está sombreada.



Algunas fórmulas que conviene recordar. Es conveniente tener presente las fórmulas que permiten calcular el área y el perímetro de las figuras más simples.

Rectángulo. Es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos. Los lados consecutivos se suelen llamar base y altura y designar con las letras b y h. Los segmentos que unen los vértices opuestos se llaman diagonales.

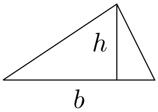


Area $= b \cdot h$ Perímetro $= 2 \cdot b + 2 \cdot h$

Recordar que un cuadrado es un rectángulo de lados iguales.

Triángulo. El triángulo es una figura plana limitada por tres segmentos que se cortan mutuamente formando tres ángulos. Se llama *triángulo equilátero* a los triángulos que tienen tres lados iguales, *triángulo isósceles* es el que tiene dos lados iguales y *triángulo escaleno* es aquel cuyos lados son desiguales. Un triángulo se llama *rectángulo* si uno de sus ángulos es recto.

Para calcular el área se elige uno de los lados como base y la altura correspondiente a ese lado es un segmento perpendicular al mismo y que contiene al el vértice opuesto.

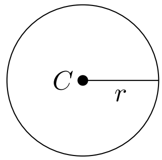


$$\text{Area} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Perímetro = suma de las longitudes de los lados

Círculo y circunferencia. Un círculo de centro C y radio r es el conjunto de todos los puntos que están a distancia a lo sumo r del centro C. Una circunferencia es el perímetro de un círculo. Todos los puntos de la circunferencia están a distancia exactamente r del centro.

El radio designa a cualquier segmento que una el centro con uno de los puntos de la circunferencia aunque también designa la medida de dicho segmento. Un diámetro es cualquiera de los segmentos que unen dos puntos de la circunferencia y pasan por el centro. También se llama diámetro a la longitud de uno de esos segmentos.



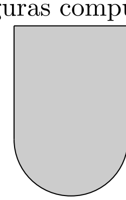
Area= $\pi \cdot r^2$

Perímetro= $2 \cdot \pi \cdot r$

Unas palabras sobre π. El número π es la longitud de una circunferencia de diámetro 1 y es un número es irracional, es decir, su desarrollo decimal es infinito y no periódico. Las calculadoras habituales muestran hasta la octava cifra de este número aunque lo largo de la historia, ha sido un desafío para los matemáticos calcular más y más cifras de π. Actualmente, se conocen varios miles de millones de sus cifras. En los cálculos exactos o simbólicos se utiliza el símbolo π y para los cálculos aproximados, al menos para este curso, $\pi \cong 3,1416$.

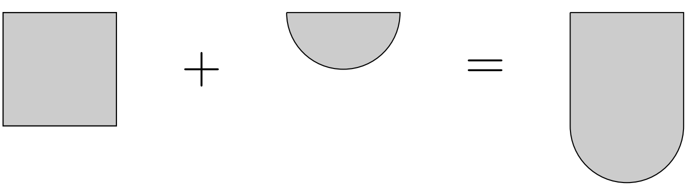
Cálculo de áreas y perímetros de figuras compuestas. En lo que sigue se ejemplifica cómo trabajar para calcular el área y el perímetro de figuras compuestas.

Ejercicio resuelto 1. La figura representada al costado está compuesta por un semicírculo y un cuadrado. Sabiendo que los lados del cuadrado miden 20cm, calcular el área y el perímetro de la figura en forma exacta y aproximada.



Resolución:

Cálculo del área. Antes de intentar calcular, se estudia cómo se descompone la figura en otras más simples. En este ejercicio las figuras que intervienen son un cuadrado y un semicírculo.



De la descomposición de arriba se deduce que

$$\text{área de la figura} = \text{área del cuadrado} + \text{área del semicírculo} \ . \tag{1.1}$$

En el enunciado del problema nos dan como dato la longitud de los lados del cuadrado a la que designamos ℓ y $\ell = 20\text{cm}$. Usando la fórmula para el área tenemos que

$$\text{área del cuadrado} = \ell^2 = (20)^2\text{cm}^2 = 400\text{cm}^2 \ .$$

El área del semicírculo es la mitad del área del círculo y para calcular el área del círculo necesitamos conocer el radio. La información que tenemos es que el diámetro del círculo es igual al lado del cuadrado y el diámetro de un círculo duplica a su radio, es decir, $\ell = 2 \cdot r$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{área del semicírculo} &= \tfrac{1}{2} \cdot \text{área del círculo} = \tfrac{1}{2}\pi \cdot r^2 \underbrace{=}_{r=\frac{\ell}{2}} \tfrac{1}{2}\pi \cdot \left(\tfrac{\ell}{2}\right)^2 \\ &\underbrace{=}_{\ell=20\text{cm}} \tfrac{1}{2}\pi \cdot \left(\tfrac{20}{2}\right)^2 \text{cm}^2 = 50 \cdot \pi \text{ cm}^2 \ . \end{aligned}$$

Finalmente, retomamos la igualdad (1.1) y, reemplazando, se obtiene el valor exacto:

$$\text{área de la figura} = \text{área del cuadrado} + \text{área del semicírculo} = 400 + 50 \cdot \pi \text{ cm}^2 \ .$$

Para conseguir el valor aproximado ingresamos el valor exacto en la calculadora* y se obtiene la siguiente aproximación $400 + 50 \cdot \pi \text{ cm}^2 \cong 557,07 \text{ cm}^2$.

Cálculo del perímetro. Para calcular el perímetro necesitamos pensar cómo se recorre el contorno de la figura:

Del recorrido propuesto se ve que el perímetro es igual a tres veces la longitud de los lados del cuadrado, a la que llamamos ℓ, más la longitud de la semicircunferencia:

$$\text{perímetro de la figura} = 3 \cdot \ell + \text{long. semicircunferencia} \ .$$

La semicircunferencia mide la mitad de lo que mide una circunferencia entera y el radio de la semicircunferencia es igual a la mitad de la longitud del lado del cuadrado

$$\text{long. semicircunferencia} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \underbrace{=}_{r=\frac{\ell}{2}} \pi \cdot \frac{\ell}{2} \ .$$

Finalmente, recordando que $\ell = 20\text{cm}$ se obtiene el valor exacto del perímetro

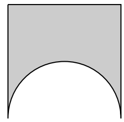
$$\text{Perímetro de la figura} = 3 \cdot 20 + 10 \cdot \pi \text{ cm} = 60 + 10 \cdot \pi \text{ cm}.$$

*Las calculadoras habituales tienen una precisión de 8 dígitos o cifras decimales.

El valor aproximado es $60 + 10 \cdot \pi$ cm $\cong 91,41$ cm.

Respuesta: El valor exacto del área es $400 + 50 \cdot \pi$ cm^2 y su valor aproximado es $557,07$ cm^2. El valor exacto del perímetro es $60 + 10 \cdot \pi$ cm y su valor aproximado es $91,41$ cm.

Trabajo Práctico 10



Ejercicio 1. En la figura representada a la derecha intervienen un semicírculo y un cuadrado.

(a) Explicar cómo fue construida la figura.

(b) Si ℓ designa la longitud del lado del cuadrado, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Justificar.

(i) El área total se calcula sumando las áreas del cuadrado y del semicírculo.

(ii) El área de la figura se calcula restando el área del semicírculo a la del cuadrado.

(iii) El área del semicírculo es igual a la $\pi \cdot \ell^2$.

(iv) El área del semicírculo es igual a la $\frac{1}{8} \cdot \pi \cdot \ell^2$.

(c) Calcular el área de la figura si los lados del cuadrado miden 15cm.

(d) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Justificar.

(i) El perímetro de la figura se calcula sumando el perímetro del cuadrado y el del semicírculo.

(ii) El perímetro del semicírculo es igual a $\ell + \frac{\pi \cdot \ell}{2}$.

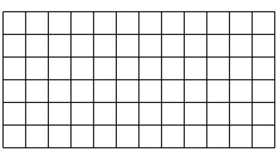
(iii) El perímetro de la figura se calcula restando el perímetro de la semicircunferencia al perímetro del cuadrado.

(e) Calcular el perímetro de la figura si los lados del cuadrado miden 15cm.

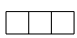
Ejercicio 2. (a) Proponer estrategias para obtener el área de figuras obtenidas al adosar una figura a otra y al recortar una figura de otra.

(b) Explicar por qué en el caso de los perímetros lo más conveniente es recorrerlos y no sumar o restar.

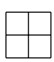
Ejercicio 3. Se quiere embaldosar el siguiente patio rectangular.



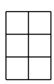
PATIO



BALDOSA A



BALDOSA B



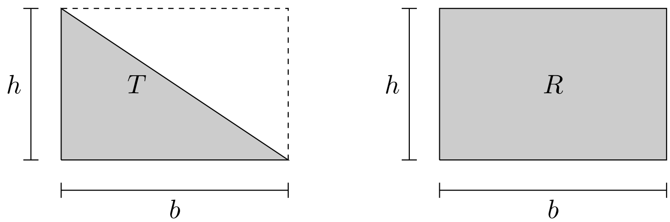
BALDOSA C

(a) Calcular cuántas baldosas de cada tipo se requieren.

(b) ¿Cuál es la relación que hay entre la cantidad de baldosas necesarias para embaldosar el patio y el área del rectángulo?

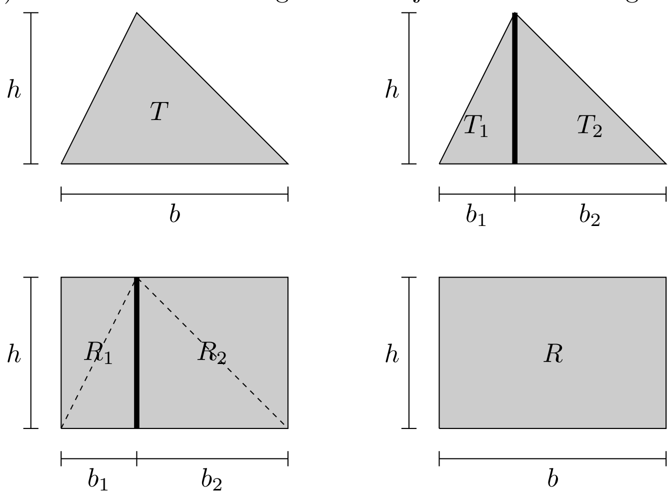
(c) Explicar por qué el área del rectángulo se calcula haciendo el producto de la longitud de la base por la longitud de la altura.

Ejercicio 4. (a) Considerar un triángulo rectángulo T de base b y altura h, como vemos en la figura, y comparar con el correspondiente rectángulo R de base b y altura h.



¿Qué fracción del área del rectángulo representa el triángulo?¿Es correcto decir que AREA R = 2.AREA T?

(b) Considerar ahora la figura de abajo relativa al triángulo (no rectángulo) T:



Analizar la validez de las afirmaciones que siguen:

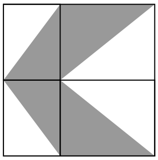
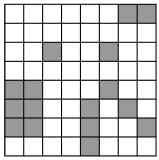
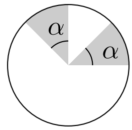
(i) AREA T_1 + AREA T_2 = AREA T

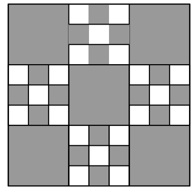
(ii) 2·AREA T_1 + 2.AREA T_2 = AREA R_1 + AREA R_2

(iii) 2·AREA T = AREA R

(iv) AREA T = $\dfrac{b \cdot h}{2}$

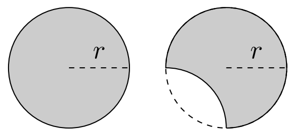
Ejercicio 5. Calcular el área de la parte sombreada de las figuras de abajo.

(i)  (ii)  (iii) 

(iv) 

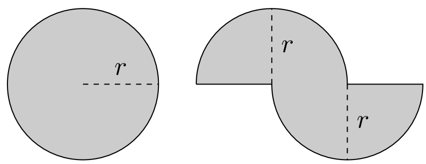
i) La longitud del lado del cuadrado grande es 2cm.
ii) La longitud del lado del cuadrado grande es 7,5cm.
iii) El radio de la circunferencia mide 0,67cm y $\alpha = 45°$.
iv) La longitud del lado del cuadrado grande es 8cm.

Ejercicio 6. (a) Considerar las siguientes figuras.
(i) ¿Cuál tiene mayor área?
(ii) Comparar los perímetros de ambas y decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:



"Dos figuras con el mismo perímetro tienen la misma área".

(b) Considerar las siguientes figuras.
(i) ¿Cuál tiene mayor perímetro?
(ii) Comparar las áreas de ambas y decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Dos figuras con la misma área tienen el mismo perímetro".



Ejercicio 7.

(a) Comparar las áreas y los perímetros de las siguientes figuras.

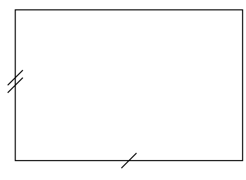


Figura A

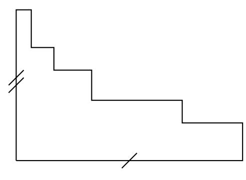
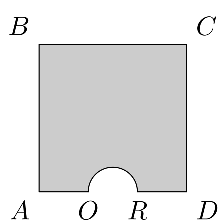


Figura B

(b) A partir de la figura A generar, recortando alguna porción de ella, una nueva figura que tenga menor área que A y mayor perímetro y otra que tenga menor área y menor perímetro.

Ejercicio 8. Calcular el área y el perímetro de la siguiente figura sombreada sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado, $AB = 5$ y $AO = OR = RD$. La semicircunferencia tiene diámetro OR.



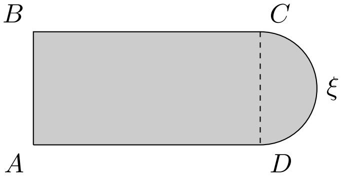
Ejercicio 9. De un rectángulo se sabe que uno de sus lados mide 10 cm y que su perímetro es de 80 cm. Se pide:

(a) Hallar el área.

(b) Construir otro rectángulo que tenga el mismo perímetro pero otra área. ¿El área del nuevo rectángulo resultó mayor o menor que el dado?

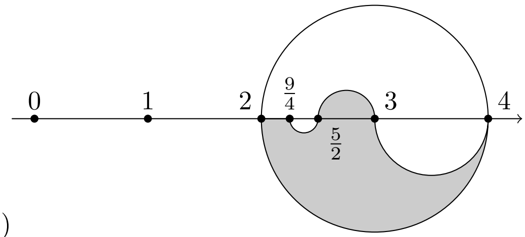
(c) Construir otro rectángulo que tenga la misma área pero distinto perímetro. ¿El perímetro es mayor o menor que el del rectángulo inicial?

Ejercicio 10. Calcular el área y el perímetro de las siguientes figuras sombreadas usando los datos indicados en cada una de ellas.

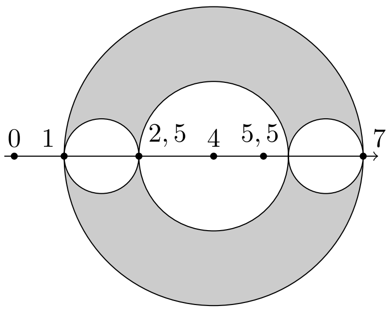


$ABCD$ rectángulo
$AD = 2AB$, $AB = 3\,\text{cm}$
ξ es una semicircunferencia de diámetro CD

(a)

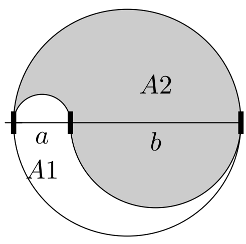


(b)

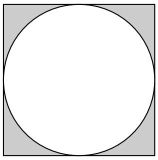
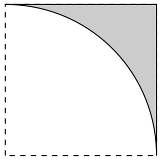
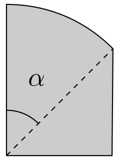


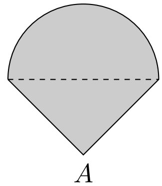
(c)

Ejercicio 11. Calcular las áreas $A1$ y $A2$ del círculo (ver figura) si $b = 4$ y $a = 2$.



Ejercicio 12. Calcular de forma exacta y aproximada el área y el perímetro de las siguientes figuras sombreadas usando los datos consignados abajo.

(i)  (ii)  (iii) 

(iv) 

(i) La figura está formada por un círculo inscripto en un cuadrado de 7cm de lado.

(ii) La figura está formada por un cuadrado al cual se le recortó un cuarto de círculo. El lado del cuadrado es igual al radio del círculo y mide 3,25cm.

(iii) La figura está formada por un triángulo rectángulo y un sector circular que tiene por radio a la hipotenusa del triángulo. Los dos catetos miden 2cm cada uno y la hipotenusa mide $\sqrt{8}$cm. El ángulo α mide 45°.

(iv) La figura está formada por un triángulo rectángulo y un semicírculo cuyo diámetro es la hipotenusa del triángulo. Los dos catetos del triángulo miden 2cm cada uno y su hipotenusa mide $\sqrt{8}$cm.

2 Áreas y Rompecabezas.

Para esta sección necesitamos recordar que:

- Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo interior recto (de 90^o).
- En todo triángulo rectángulo, los lados que determinan al ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto a dicho ángulo se llama hipotenusa.

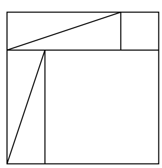
Considerar dos rompecabezas conformados con las siguientes piezas:

Primer rompecabezas: 4 triángulos rectángulos iguales y dos cuadrados. El lado de uno de los cuadrados es igual a uno de los catetos de un triángulo y el lado del otro cuadrado es igual al otro cateto del mismo triángulo.

Segundo rompecabezas: 4 triángulos rectángulos iguales (e iguales a los del rompecabezas anterior) y 1 cuadrado cuyo lado es igual a la hipotenusa de uno de los triángulos.

Ejercicio 1 Justificar que se pueden armar dos cuadrados iguales, uno con cada juego de piezas. Deducir que la suma de las áreas de los cuadrados que son piezas del ítem 1) es igual al área del cuadrado que es pieza del ítem 2)

Esperamos que el armado del primer rompecabezas haya quedado así:



En cada triángulo, llamamos a la medida de uno de los catetos, b a la del otro cateto y c a la de la hipotenusa. En primer lugar notemos que al enfrentar dos triángulos rectángulos haciendo coincidir sus hipotenusas se obtienen rectángulos cuyos lados miden a y b. Obtenemos dos de estos rectángulos. Luego el lado de medida a se ajusta con el cuadrado de igual lado y lo mismo se hace con el lado de medida b. La figura completa tiene ángulos rectos en cada una de sus esquinas y además sus lados miden todos la suma de los catetos $a + b$. Por eso es que la figura se trata de un cuadrado.

El área A del cuadrado resultante se puede calcular de dos maneras: a) mediante la medida de su lado, b) mediante la suma de las áreas de las figuras que lo componen. Analicemos lo necesario para estos cálculos:

- medida del lado del cuadrado resultante $L = a + b$,
- área de cada triángulo $= \frac{a \cdot b}{2}$,
- área de cuadrado de lado a $= a^2$,
- área de cuadrado de lado b $= b^2$.

Área del cuadrado mediante su lado:

$$A = (a + b)^2$$

Área del cuadrado por figuras que lo componen:

$A = 4\cdot$área de cada triángulo+área de cuadrado de lado a +área de cuadrado de lado b.

$$A = 4 \cdot \frac{ab}{2} + a^2 + b^2.$$

Por lo que resulta

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + a^2 + b^2.$$

Ejercicio 2. Hacer para el segundo rompecabezas un análisis similar al realizado para el primero. Llegar a que el área del cuadrado resultante puede calcularse con la expresión $4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$.

Dado que el área de los cuadrados de ambos rompecabezas es el mismo, porque la medida del lado en ambos casos es $a + b$, podemos igualar las áreas que resultan de sumar las figuras que los componen respectivamente obteniendo:

$$4 \cdot \frac{ab}{2} + a^2 + b^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2.$$

Cancelando los términos iguales en ambos miembros obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Este último renglón nos está mostrando una propiedad que se cumple para todo triángulo rectángulo. Esta propiedad puede enunciarse de dos modos diferentes.

Formulación mediante áreas: *En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa del triángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son, respectivamente, las longitudes de los catetos.*

Formulación mediante longitudes de lados del triángulo: *Dado un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de cada uno de los catetos.*

Ambas formulaciones corresponden al *Teorema de Pitágoras*, aunque la última es más conocida y nos permite hacer cálculos de longitudes de lados.

Teorema de Pitágoras: *Para todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Nota: Los cálculos de esta sección son de medidas, las cuales son positivas. De modo que expresiones del tipo $u^2 = v$, donde u es una medida y $v \geq 0$, se calculan $u = \sqrt{v}$.

Ejemplo 1. Si en un triángulo rectángulo, un cateto mide $a = 3$ cm y el otro cateto mide $b = 5$ cm, ¿cuánto mide su hipotenusa?

Considerando que ambas longitudes están expresadas en la misma unidad de medida (centímetros) podemos operar sólo con los números

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 3^2 + 5^2 \Longrightarrow c^2 = 9 + 25 = 34 \Longrightarrow c = \sqrt{34} \approx 5,83.$$

La hipotenusa mide entonces $c \approx 5,83$ cm.

Ejemplo 2. Si en un triángulo rectángulo, un cateto mide 3 cm y la hipotenusa mide 5 cm, ¿cuánto mide el otro cateto?

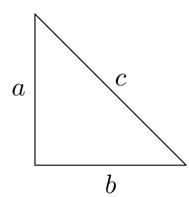
En este caso, llamando b al cateto que debemos averiguar resulta:

$$5^2 = 3^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow b = \sqrt{16} = 4.$$

El cateto mide $b = 4$ cm.

Ejemplo 3. Si en un triángulo rectángulo, los catetos miden 1 ¿Cuánto mide la hipotenusa? ¿Qué puede decir de los ángulos?

Este es un triángulo isósceles pues tiene dos lados iguales. Llamamos c a la medida de la hipotenusa, a a la medida de uno de los catetos y b a la medida del otro.



Usamos el Teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 1^2 + 1^2 \\ c^2 &= 2\ . \end{aligned}$$

Luego, $c = \sqrt{2}$.
De aquí podemos inferir una posible construcción geométrica de $\sqrt{2}$.

Ejemplo 4. Si en un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide el doble del otro y la hipotenusa mide 5 cm, calcule la medida de cada cateto.

Pongamos al cateto a como el doble de b, eso se escribe $a = 2b$ (podríamos haber supuesto que $b = 2a$ y los resultados finales darían lo mismo). La relación entre los lados del triángulo rectángulo según el Teorema de Pitágoras es:

$$5^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 5^2 = (2b)^2 + b^2 \Longrightarrow 5^2 = 4b^2 + b^2 = 5b^2.$$

Luego,

$$5^2 = 5b^2 \Longrightarrow \frac{5^2}{5} = b^2 \Longrightarrow 5 = b^2 \Longrightarrow b = \sqrt{5} \approx 2,236.$$

La longitud de la hipotenusa es aproximadamente $2,236$ cm.

Ejemplo 5. Se apoya una escalera de 3 metros de largo en una pared (la pared es perpendicular al piso) ¿A qué distancia de la pared habría que apoyar la base de la escalera si se quiere alcanzar una altura de $2,30$ m?

Se quiere saber a qué distancia de la pared hay que apoyar la escalera, para ello medimos a partir del canto de la pared (hacer un esquema). Como vemos, queda formado un triángulo rectángulo del que se conocen la hipotenusa, que es la medida de la escalera, y uno de los catetos, que es la altura que se desea alcanzar. Luego,

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ 3^2 &= 2,30^2 + a^2 \\ a^2 &= 3^2 - 2,30^2 \\ a^2 &= 3,71 \\ a &= \sqrt{3,71}, \\ a &\approx 1,92 \end{aligned}$$

Respuesta: La escalera debe colocarse a aproximadamente $1,92$ m de la pared para alcanzar la altura deseada.

Método para comprobar si una pared está a escuadra

En las construcciones edilicias es importante construir las paredes "a escuadra". Esto significa que cuando dos paredes se encuentran, el ángulo formado por ellas debe ser 90^o. Para verificar esto los constructores miden sobre las paredes apoyándose en el suelo. Desde el punto de encuentro de ambas paredes, donde ubican una marca, hacen otra marca a los 40 cm sobre una de ellas y otra a los 30 cm sobre la otra, todas al ras del suelo. Luego, con un hilo comprueban si entre las dos marcas sobre ambas paredes hay una distancia de 50cm.

¿Por qué este es un buen método de comprobación? ¡La razón la revela el Teorema de Pitágoras! pero... ¡usado al revés!

Observemos que si unimos las marcas podríamos imaginar segmentos que forman un triángulo tal que las medidas de sus lados verifican la siguiente igualdad numérica:

$$50^2 = 40^2 + 30^2$$

Dado que se cumple la igualdad de arriba entre las medidas de los lados del triángulo, podemos asegurar que el ángulo formado por los segmentos es recto y entonces las paredes están a escuadra.

La propiedad que usamos para asegurar esto es el recíproco del Teorema de Pitágoras (por eso dijimos "al revés"), el cual se enuncia en forma general del siguiente modo.

Teorema recíproco del Teorema de Pitágoras: *Si un triángulo es tal que la suma de los cuadrados de la longitud de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del tercero, entonces el ángulo comprendido por los dos primeros lados es recto.*

Breve análisis lógico de una propiedad con estructura de implicación.

En Matemática, llamamos *proposición* a la oración con sentido completo de la cual se puede decir, sin ambigüedades, que es verdadera o que es falsa. Es muy habitual en esta disciplina que una proposición tenga estructura de implicación: *Antecedente* $\Longrightarrow$ *Consecuente*. En el antecedente se expresan las condiciones y en el consecuente las conclusiones. Lo expresado en la implicación es verdadero siempre que si las condiciones del antecedente se cumplan o sean verdaderas, se concluye aquello que está dicho en el consecuente el cual resulta también verdadero.

El Teorema de Pitágoras es un ejemplo de proposición con esta estructura:

	Condición o *Hipótesis* (Antecedente)	Conclusión o *Tesis* (Consecuente)
Teorema de Pitágoras	Si el triángulo ABC es rectángulo en B (es decir tiene un ángulo recto con vértice B)	entonces se cumple la siguiente relación entre las longitudes de sus lados: $BC^2 + AB^2 = AC^2$

¿Qué es lo que asegura en este caso que la implicación es verdadera? ¡El armado de los rompecabezas! Para cualquier triángulo rectángulo que tengamos, podemos armar los rompecabezas como los del principio de la sección con medidas de las piezas que se obtengan del triángulo dado. El trayecto realizado (construcción de los rompecabezas + análisis y cálculos de las áreas + igualación de las áreas de los cuadrados resultantes

+ cancelación de términos iguales en ambos miembros) nos asegura que de la condición de ser triángulo rectángulo siempre podemos concluir la conocida relación entre las medidas de la hipotenusa y las de los catetos. Este proceso se lo llama *demostración matemática*. Una vez que sabemos que hay una demostración matemática (puede haber más de una) usamos la propiedad enunciada por esa implicación con validez garantizada. Como ya dijimos en el capítulo de Números y Cálculos, los enunciados importantes (por su utilidad y alcance) garantizados por una demostración se llaman usualmente *teoremas*.

Casi todos las propiedades que están en este libro tienen una demostración matemática aunque no las mostremos en la mayoría de los casos pues no son objeto de este curso.

A partir de un enunciado con estructura de implicación, se puede enunciar otra proposición llamada *recíproca* que se obtiene intercambiando los roles del antecedente y del consecuente, como en el caso del Teorema Recíproco del Teorema de Pitágoras.

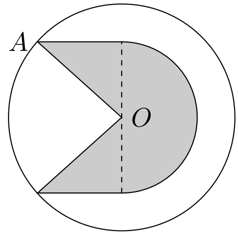
	Condición o *Hipótesis* (Antecedente)	Conclusión o *Tesis* (Consecuente)
Teorema de Pitágoras	Si el triángulo ABC <u>es rectángulo</u> en B (es decir tiene un ángulo recto con vértice B)	entonces se cumple la siguiente relación entre las longitudes de sus lados: $$BC^2 + AB^2 = AC^2$$
Teorema recíproco del Teorema de Pitágoras	Si en un triángulo ABC se cumple la siguiente relación entre las longitudes de sus lados: $$BC^2 + AB^2 = AC^2$$	entonces el triángulo <u>es rectángulo</u> con ángulo recto con vértice B.

En el caso visto, tanto la implicación del Teorema de Pitágoras como la de su recíproco son verdaderas (en el Trabajo Práctico se orienta una demostración del recíproco), sin embargo es importante notar que dada una implicación verdadera su recíproca <u>no necesariamente</u> es verdadera, como lo vemos en el siguiente ejemplo:

	Condición o *Hipótesis* (Antecedente)	Conclusión o *Tesis* (Consecuente)	Validez
Proposición	Si un cuadrilátero $ABCD$ es cuadrado	entonces es rombo	La proposición es siempre verdadera pues el cuadrado cumple la definición de rombo ya que tiene todos sus lados iguales.
Proposición recíproca	Si un cuadrilátero $ABCD$ es rombo	entonces es cuadrado	La proposición NO es verdadera en todas las figuras que cumplan la condición ya que el hecho de tener todos los lados iguales no asegura que los ángulos sean rectos.

Ejercicios resueltos.

Ejercicio resuelto 2. (Engarce de la joya) Sobre una placa circular de plata un orfebre quiere engarzar un motivo en oro con el diseño de la parte sombreada de la figura. Se sabe que la circunferencia y semicircunferencia son concéntricas en O. Además, el diámetro de la circunferencia mayor es 3,6 cm, el diámetro de la semicircunferencia interior es 2,4 cm. Los triángulos que componen la figura sombreada son rectángulos e iguales y el segmento AO es lado de uno de ellos. ¿Cuál es el área de la superficie a engarzar? ¿Cuál es su perímetro?



Resolución: Antes de comenzar a ver cuáles son las medidas, debemos entender cómo está formada la figura de la cual se quiere obtener el área. Se trata de un semicírculo de diámetro $2,4$cm al cual se le adosan dos triángulos rectángulos iguales, por lo que los catetos sobre el diámetro del semicírculo también son iguales y miden $\frac{2{,}4\,\mathrm{cm}}{2} = 1,2$ cm cada uno. También observamos que la hipotenusa de dichos triángulos son radios de la circunferencia mayor y por lo tanto miden lo mismo que la mitad del diámetro, es decir, $1,8$cm.

El área de la figura a engarzar es:

$$\text{Área a engarzar} = \text{Área de semicírculo menor} + 2\text{Área de triángulo rectángulo}.$$

Tenemos los datos necesarios para obtener el área del semicírculo que resulta:

$$\text{Área de semicírculo menor} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \approx \frac{3,1416 \cdot 1,2^2\,\mathrm{cm}^2}{2} \approx 2,262\,\mathrm{cm}^2.$$

Para obtener el área de un triángulo nos conviene usar los catetos del mismo, uno como base y otro como altura. De los catetos, c_1 y c_2, sólo conocemos la medida de uno de ellos, el otro se averigua usando el Teorema de Pitágoras:

$$c_2 = \sqrt{\text{long. de hipotenusa}^2 - c_1^2} = \sqrt{1,8^2 - 1,2^2} \approx 1,341.$$

Ahora estamos en condiciones de averiguar el área del triángulo:

$$\text{Área de triángulo rectángulo} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} \approx \frac{1,341\ \cdot 1,2\,\text{cm}^2}{2} \approx 0,8046\,\text{cm}^2.$$

Luego, volviendo a la figura inicial, se tiene:

$$\text{Área de la figura a engarzar } \approx 2,262\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 0,8046\,\text{cm}^2 \approx 3,8711\,\text{cm}^2$$

En cuanto al perímetro, se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Perímetro de figura} &= \text{long. de semicircunferencia} \\ &+ 2\cdot(\text{long. de hipotenusa AO} + \text{long. de cateto } c_2). \end{aligned}$$

Analicemos cada término:

$$\begin{aligned} \text{Long. de semicircunferencia} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot\ r}{2} = \pi \cdot r \\ &\approx 3,1416 \cdot 1,2 \\ &\approx 3,77 \end{aligned}$$

Longitud de hipotenusa $AO = 1,8$

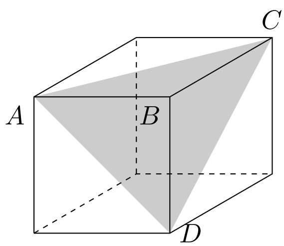
Longitud de cateto $c_2 \approx 1,341$.

Luego

$$\text{Perímetro de figura} \approx 3,77 + 2 \cdot (1,8 + 1,341) = 10,052.$$

Respuesta: El área de figura a engarzar es, aproximadamente, de $3,8711$ y su perímetro de $10,052$ cm.

Ejercicio resuelto 3. (Imaginando figuras en el espacio.) Se tiene un cubo de arista $AB = 3$. Se consideran tres caras que coinciden en un mismo vértice al que llamamos B. Consideremos las aristas del cubo que concurren en B. A los otros extremos de dichas aristas llamémoslos A, C y D. Se quiere conocer el área del triángulo ACD. Repetir el problema, calculando el área en función del lado $AB = \ell$.



Antes de leer lo que sigue, indicar las características que tiene el triángulo formado.

Explicación	Los lados del triángulo AC, AD y CD son diagonales de caras del cubo. Como las caras del cubo son todos cuadrados iguales, sus diagonales son iguales también, con lo cual el triángulo formado es equilátero. Para calcular el área, necesitaríamos conocer uno de los lados del triángulo y la altura correspondiente a dicho lado. Cada lado del triángulo equilátero es diagonal de una cara del cubo. Observando una de las caras, su diagonal la divide en dos triángulos rectángulos iguales; en ellos los catetos son los lados de las caras (aristas) del cubo y la hipotenusa es dicha diagonal. De este modo, para calcular la diagonal podemos usar el teorema de Pitágoras
Planteo y Cálculos	$$AD^2 = AB^2 + BD^2 \Longrightarrow AD = \sqrt{AB^2 + BD^2}$$ $$AD = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot 3.$$
Explicación	Luego, cada lado del triángulo equilátero mide $\sqrt{2} \cdot 3$. Para calcular el área necesitamos calcular la altura correspondiente a uno de los lados. Al trazar la altura, queda formado un triángulo rectángulo del cual conocemos uno de los lados y el otro es la mitad Esto se debe a una propiedad de los triángulos isósceles que dice: *la altura que tiene por extremo el vértice donde concurren los lados iguales es mediana del lado opuesto.*. Como un triángulo equilátero lo consideramos isósceles, entonces podemos hacer uso de esta propiedad. Volvemos a usar el teorema de Pitágoras
Planteo y Cálculos	$$\begin{aligned} (\text{long. de altura})^2 &= (\sqrt{2} \cdot 3)^2 - (\frac{\sqrt{2} \cdot 3}{2})^2 \\ &= 2 \cdot 9 - \frac{2 \cdot 9}{4} \\ &= \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 9 = \frac{3}{2} \cdot 9 \end{aligned}$$ Luego, long. de altura $= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 3$.

Explicación	Ahora podemos calcular el área,
Planteo y Cálculos	$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \text{long. de base} \cdot \text{long. de altura.}$$ $$\begin{aligned} \text{Área del triángulo} &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 3 \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}) \cdot 9 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9 \\ &\approx 7,794 \end{aligned}$$
Explicación	Si en lugar de usar la medida $AB = 3$ usamos una medida genérica, $AB = \ell$, los planteos son los mismos y en cada lugar donde reemplazamos por la medida 3 deberíamos reemplazar por la medida ℓ.
Planteo y Cálculos	$$AD = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{2 \cdot \ell^2} = \sqrt{2} \cdot \ell.$$ $$\text{long. de altura} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \ell.$$ $$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \ell \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \ell = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell^2$$
Respuesta	El área del triángulo cuyo lado es la diagonal de un cubo de arista de medida 3 es aproximadamente $7,794$ mientras que si la medida es ℓ, su área se calcula mediante la expresión $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell^2$.

Trabajo Práctico 11. Argumentar en Matemática

Los ejercicios sobre los rompecabezas corresponden a los ejercicios 1 y 2 de este trabajo práctico.

Ejercicio 3.

(a) Enunciar el Teorema recíproco del Teorema de Pitágoras. Reconocer en él condiciones (antecedente) y conclusiones (consecuente).

(b) Mostrar aplicaciones del Teorema de Pitágoras y de su recíproco.

(c) Sugerencias para la demostración del Recíproco del Teorema de Pitágoras (RTP) (para valientes o interesados):

   (i) Se tiene un triángulo, genérico, que cumple la hipótesis del RTP. Todavía no se puede afirmar que sea rectángulo.

   (ii) Se puede afirmar que uno de los lados es más largo que cada uno de los otros dos. Por qué?

   (iii) Describa la construcción de un triángulo auxiliar que sea rectángulo cuyos catetos midan lo mismo que cada uno de los lados menores del triángulo genérico dado.

   (iv) En este triángulo construido, justifique que se puede calcular el tercer lado. Muestre cómo se calcula.

   (v) ¿Cómo son los lados del triángulo construido en relación con los del dado?

   (vi) ¿Qué puede decir como conclusión del ítem anterior sobre los dos triángulos? ¿Por qué?

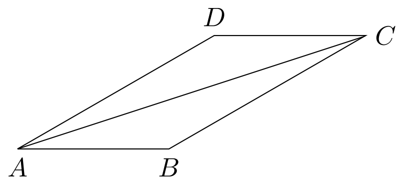
   (vii) Escriba, a modo de explicación y siguiendo lo obtenido en los ítems anteriores, la demostración del teorema recíproco del de Pitágoras.

Ejercicio 13.

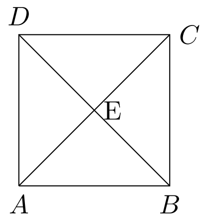
(a) ¿Cuál es la condición o hipótesis del Teorema de Pitágoras? ¿y la conclusión o tesis?

(b) Determinar en cuál de las siguientes situaciones es lícito aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular las longitudes indicadas en cada caso. Explicar por qué y consignar si utilizó alguna propiedad geométrica para argumentar.

El cuadrilátero es un paralelogramo de lados de longitud 2 y 3 cm y se desea calcular AC.



El cuadrilátero es un cuadrado de lados de longitud 2 cm y se desea calcular la longitud de los segmentos AE y EB.



(c) ¿Cuál es su conclusión si sabe que un triángulo dado NO cumple la condición identificada en el item a)? ¿Por qué?

Ejercicio 14.

(a) Reconocer el antecedente y el consecuente de la siguiente propiedad matemática: *En todo cuadrado, las diagonales son iguales.*

(b) ¿Qué sucede cuando una figura cumple la condición del antecedente? ¿Por qué?

(c) ¿Cuál es su conclusión si sabe que una figura NO cumple la condición identificada en el item anterior?

(d) Enunciar la recíproca de la propiedad anterior. Explicar si la recíproca es verdadera o no.

Ejercicio 15. Para las propiedades matemticas (de cualquier tema) en forma de implicación, que se enuncian a continuación se pide enunciar su recíproca e indicar si es verdadera o falsa.

(a) Si un número es múltiplo de dos entonces es múltiplo de 4.

(b) Si un número tiene desarrollo decimal finito entonces es un número racional.

(c) En un triángulo isósceles la altura que corresponde a la base es también mediana.

Trabajo Práctico 12

Ejercicio 1. En cada caso, calcular de forma exacta y aproximada el tercer lado del triángulo ABC sabiendo que el ángulo $\widehat{ABC}$ es recto.

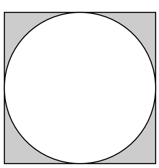
(a) $AC = \sqrt{5}$, $AB = 1$

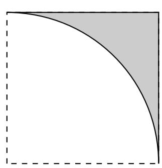
(b) $AB = 3$, $BC = 2$

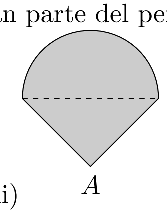
(c) $AB = \sqrt{5} - 1$, $BC = \sqrt{6}$

(d) $AC = 2AB$, $AB = 2\sqrt{3}$

Ejercicio 2. Calcular de forma exacta y aproximada el área y el perímetro de las siguientes figuras sombreadas usando los datos consignados abajo, para cada una de ellas. Recordar que las líneas interiores no forman parte del perímetro.

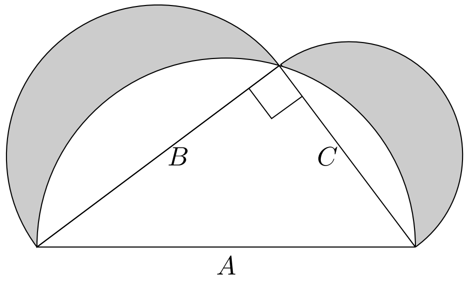
i) 

ii) 

iii) 

i) La diagonal del cuadrado mide 7 cm.
ii) La figura está formada por un cuadrado al cual se le recortó un cuarto de círculo. La diagonal del cuadrado mide 3,25cm.
iii) La figura está formada por un triángulo rectángulo isósceles y un semicírculo. El diámetro del semicírculo coincide con la hipotenusa del triángulo que mide 4cm.

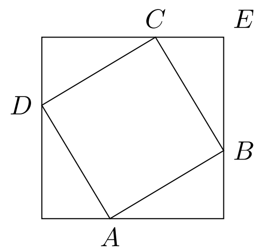
Ejercicio 3. Las regiones sombreadas de la siguiente figura se llaman "Lúnulas de Hipócrates". Las líneas curvas son semicircunferencias.



(a) Describir detalladamente cómo se determinan las lúnulas.

(b) Calcular su área sabiendo que $B = 8$ y $C = 6$.

Ejercicio 4. Calcule el área del cuadrado interno sabiendo que el cuadrado exterior tiene área 12 cm^2, que los segmentos más cortos que unen los vértices del cuadrado externo con los vértices del cuadrado interno tienen todos la misma longitud y que la longitud del segmento que une a C con E es $CE = 1,5$ cm

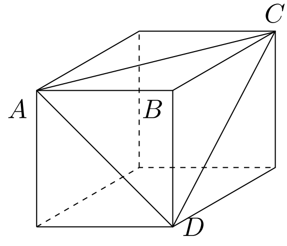


Ejercicio 5. Una puerta tiene $0,70$ m de ancho y 2 m de alto. ¿Puede una tabla de $3,5$ m por $2,15$ m pasar por esa puerta? Explique.

Ejercicio 6. ¿Hay otras medidas posibles para trazar las marcas sobre las paredes en el método del constructor para comprobar si las mismas están a escuadra (ver la sección sobre el teorema de Pitágoras)? ¿Puede indicar algunas?.

Ejercicio 7. Se atraviesa un cubo macizo, de $0,5$m de arista, con una placa plana, perpendicular a una de las caras del cubo, de modo que la placa contenga dos artistas opuestas. Por la intersección del cubo macizo con la placa queda formado un rectángulo. Calcular el área de dicho rectángulo y la longitud de su diagonal.

Ejercicio 8. Del ejemplo resuelto en (3), calcular el área total de la pirámide de vértice B y base el triángulo ACD (suma de las áreas de todas las caras planas).



Capítulo 3

Proporcionalidad y Geometría

1 Proporcionalidad entre variables

En varias situaciones cotidianas se usan proporciones numéricas, por ejemplo en comparación de formas involucrando medidas, en concentraciones de sustancias, en dosis de medicamentos, en escalas, en porcentajes, etc. Para familiarizarnos con estas situaciones, en esta sección explicaremos los siguientes temas:

1. La definición de proporción.
2. Algunas propiedades de la proporción.
3. Su uso en la resolución de situaciones.
4. Algunas cuestiones relacionadas con proporcionalidad.

Comenzaremos mostrando algunas situaciones en las que se usan las proporciones y su resolución para entender luego la definición y sus posteriores usos.

1.1 Algunas situaciones en las que se usan proporciones.

Cantidad de materia grasa en leche

Ejemplo 1. (Cantidad de materia grasa en leche) Supongamos que de 200 ml se puede extraer 6 g de materia grasa para manteca. ¿Cuántos mililitros serán necesarios para obtener 240 g de materia grasa?

*R*esolución: La resolución más común, que posiblemente el lector intente, es mediante la "regla de tres simple directa":

$$\begin{array}{cccccc} 6g & \longrightarrow & 200 \text{ ml} & & \\ 240g & \longrightarrow & x & \Longrightarrow & x = \frac{240 \text{ g} \times 200 \text{ ml}}{6 \text{ g}} = 8000 \text{ ml} \end{array}$$

Respuesta: Serán necesarios 8000 ml de leche.

Veamos cuáles son las condiciones del problema que permiten hallar de este modo la solución. Supongamos que siempre que tomemos una muestra de 200 ml de leche la cantidad de grasa es siempre la misma pues se trata de la misma partida del producto (leche), no se alteran las condiciones físico - químicas, la cantidad de grasa no depende del lugar de donde se tome la muestra (si arriba del recipiente o abajo) y es constante por por unidad de medida (1 ml).

Esta relación constante entre la cantidad de grasa y la cantidad de leche prefijada es lo que llamamos "concentración de grasa en leche" y se calcula: $\frac{6}{200}$g/ml.
La concentración entre sustancias aparece como información en varias situaciones de nuestra vida cotidiana. Para hablar de concentración de una sustancia, llamémosla A, es necesario contar con otra sustancia, llamémosla B, que contiene la sustancia A en su composición.

Concentración: la concentración de la sustancia A en B es la cantidad de sustancia A que se encuentra siempre que se tome una cantidad prefijada de sustancia B. En nuestros ejemplos, consideraremos que la concentración es constante.

En este ejemplo, la sustancia A es la grasa y la sustancia B es la leche.

Hay otras maneras de pensar la respuesta a la pregunta formulada en el ejemplo 1:

- En forma multiplicativa, pensando en cuántas veces habría que multiplicar los 6 g para obtener el pan de manteca y ese mismo número multiplicarlo por la cantidad de mililitros. En este caso el número a multiplicar es 40 ya que $40 \times 6g = 240g$, luego se necesitarían 40 medidas de 200 ml y la cantidad de leche es 8000 ml o sea 8 litros.

- En cómo se obtiene la concentración, pensando que el valor de dicha concentración, con las unidades de medida correspondientes, se obtiene dividiendo $\frac{6}{200}$. Si las cantidades consideradas son el peso de la grasa del pan de manteca y la medida del volumen de leche necesaria para obtener el pan, el cociente debe dar el mismo resultado pues suponemos que la concentración se mantiene constante.

$$\text{Concentración de grasa en leche} = \frac{6}{200} = \frac{240}{\text{cantidad de leche para 240 g de grasa}}$$

Puede leerse, *seis es a doscientos como doscientos cuarenta es a la cantidad de leche necesaria para obtener doscientos cuarenta gramos de grasa.* Para no escribir tantas palabras, solemos reemplazar la cantidad que queremos averiguar y que satisface la igualdad planteada con una letra, luego denotamos

$$x = \text{cantidad de leche para 240 g de grasa} .$$

de la cual se sabe de antemano que no es 0. La igualdad de arriba se escribe entonces

$$\frac{6}{200} = \frac{240}{x}$$

Multiplicando miembro a miembro por el valor x se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{6}{200} \cdot x &= \frac{240}{x} \cdot x \\
\frac{6}{200} \cdot x &= 240 \\
x &= 240 \cdot \frac{200}{6} \\
x &= 8000
\end{aligned}$$

Respuesta: La cantidad de leche para 240 g de grasa es de 8000ml. Lo que equivale a 8 litros.

- En la reducción a la unidad, esto es pensar cuántos mililitros se necesitan para obtener un gramo de materia grasa y luego multiplicar por la cantidad de gramos que se desean obtener.

  Luego, por gramo se necesitan $\frac{200}{6}$ ml, la cantidad de gramos deseada es 240 entonces, la cantidad de mililitros se calcula: $\frac{200}{6} \cdot 240 = 8000$.

Dosis de medicamento.

En este ejemplo usaremos nuevamente el dato de la concentración de una sustancia en otra.

Ejemplo 2. Un medicamento pediátrico en jarabe tiene diferentes presentaciones. Un médico prescribe a un bebé una presentación tal que la concentración de su componente activo (amoxicilina) es de setecientos cincuenta miligramos por cada cinco mililitros (en la caja aparece 750 mg/5 ml) y le indica tomar 3 ml cada doce horas. La mamá del bebé le dice al médico que en la casa tienen ese mismo medicamento en otra presentación con concentración de 500 mg por cada 5 ml. ¿Cuál debería ser la dosis considerada en este caso? Dar la respuesta teniendo en cuenta que el dosificador está dividido en ml.

Resolución:

Resolveremos esta situación en forma de tabla, mostrando una forma de pensar el problema (¡no es la única!) cuál es el planteo que responde a lo que se piensa y cómo se resuelven las cuentas de lo planteado.

Explicación	El cociente, o razón, $\frac{750\text{mg}}{5\text{ml}}$ es la concentración del componente activo en jarabe. En este caso, la sustancia A es la amoxicilina y la B el jarabe. El médico le prescribió 3 ml porque pretende que el bebé consuma una cierta cantidad de activo (amoxicilina) en cada toma. Obtenemos esta cantidad teniendo presente que la concentración es constante y que es el cociente entre la cantidad de amoxicilina y la cantidad de jarabe que la contiene, o sea:	
Planteo	$\frac{750}{5} = \frac{\text{cant. amox. en 3 ml}}{3}$	Multiplico ambos miembros por 3, $$\begin{aligned}\text{Cant. amox. en 3 ml} &= \frac{750}{5} \times 3 \\ &= 150 \times 3 \\ &= 450.\end{aligned}$$
	Debería entonces consumir 450 mg del componente activo en cada toma.	
Explicación	En la segunda presentación, la concentración es $\frac{500\text{ mg}}{5\text{ ml}}$. La cantidad de amoxicilina que el bebé debe consumir es la misma que con la concentración anterior: 450 mg. Para no usar tantas palabras denotamos la *cantidad de jarabe correspondiente a* 450 *mg en la nueva concentración* con la letra x (¡por supuesto podría haber elegido cualquier letra o símbolo!, lo importante es no confundir los significados de los mismos). Dado que la concentración es constante igualamos los respectivos cocientes por los cuales obtenemos la misma.	
Planteo	$$\frac{500}{5} = \frac{450}{x}$$	despejamos: $$\frac{500}{5} \times x = 450$$ $$x = 450 \times \frac{5}{500}$$ $$x = 4,5$$
Respuesta al problema	*Respuesta:* La cantidad de jarabe en cada toma que se le debe administrar al bebé con la nueva concentración es $4,5$ ml.	

1.2 Definiciones y algunas propiedades

Como vimos, en todas estas situaciones aparecen relacionadas dos cantidades que van variando y que corresponden a medidas de magnitudes prefijadas cuyo cociente se mantiene constante. El siguiente cuadro resume esto.

<table>
<tr><td colspan="2">“Concentración de grasa”</td><td colspan="2">“Dosis de medicamentos”</td></tr>
<tr><td>Cantidad de leche (ml)</td><td>Cantidad de grasa (g)</td><td>Cantidad de jarabe (ml)</td><td>Cant. de amoxicilina (mg)</td></tr>
<tr><td>200</td><td>6</td><td>5</td><td>750</td></tr>
<tr><td>8000</td><td>240</td><td>3</td><td>450</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{6}{200} = \frac{240}{8000}$</td><td colspan="2">$\frac{750}{5} = \frac{450}{3}$</td></tr>
</table>

Cantidades en cada situación planteada y relación entre ellas.

En cada situación resumida en el cuadro anterior, se observa que los cocientes de las cantidades puestas en fila dan el mismo resultado. Esto está expresado en las igualdades de la última fila.

Escribimos simbólicamente,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}, \quad \text{con} \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0. \tag{1.1}$$

Esta igualdad puede leerse y_1 *es a* x_1 *como* y_2 *es a* x_2. Tradicionalmente los valores y_1 y x_2 son llamados *extremos* y los valores x_1 y y_2 son llamados *medios*.

Proporciones. Una proporción es la igualdad de dos cocientes, o razones, entre cantidades numéricas variables. La expresión simbólica escrita en (1.1), es la forma en que escribimos una *proporción*.

Nota: Observemos (¡Pongamos atención!) que,

- Las variables que intervienen en una proporción son números reales cualesquiera con la condición que los denominadores sean no nulos.

- En la situación de la concentración de grasa, designamos

  - y_1 = cantidad grasa en 200 ml de leche,
  - y_2 = cantidad de grasa en 8000 ml,
  - x_1 =200 ml,
  - x_2 = 8000 ml.

Es decir que con la letra "x" designamos cualquiera de las medidas del volumen de la leche (en ml) y con la letra "y" cualquiera de las medidas del peso de grasa (en gramos); estas letras designan cualquiera de las *cantidades variables* o simplemente *variables.*

- En la situación de la dosis de medicamento, la letra "x" designa cualquiera de las medidas del volumen de jarabe (en ml) y la "y" el peso del componente activo (en mg) correspondiente a esa dosis de jarabe.

- En las situaciones del cuadro anterior tenemos ejemplos de que el cociente $\frac{y}{x}$ es constante.

En las situaciones vistas, los valores numéricos variables corresponden a medidas de magnitudes que resultan *directamente proporcionales*, ellas son:

Magnitud 1	Magnitud 2
Volumen de leche	Peso de grasa
Volumen de jarabe	Peso de componente activo de antibiótico

Magnitudes directamente proporcionales en las situaciones planteadas.

Propiedades

A partir de la definición de proporción simbolizada por

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}, \quad \text{con} \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0,$$

se obtienen las siguientes igualdades:

- $y_1 \cdot x_2 = y_2 \cdot x_1$.

  A esta igualdad se llega multiplicando miembro a miembro por $x_1 \cdot x_2$. Esta igualdad suele recitarse *El producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

- $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$, si $y_2 \neq 0$.

  A esta igualdad se llega por la expresión obtenida en el item anterior multiplicándola miembro a miembro por $\frac{1}{x_2 y_2}$.

- $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$, si $y_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$.

  Dado que las razones en la proporción (1.1) son no nulas, se usa el hecho que si dos números son iguales, sus inversos multiplicativos también lo son. También se llega multiplicando miembro a miembro la expresión $y_1 \cdot x_2 = y_2 \cdot x_1$ por $\frac{1}{y_1 y_2}$.

- Para todo r número real $r \neq 0$ se cumple $\frac{y_1}{x_1} = \frac{r \cdot y_1}{r \cdot x_1}$.

  Basta observar que la constante r puede ser simplificada.

1.3 Cuestiones importantes en relación con la proporcionalidad directa.

La constante o razón de proporcionalidad.

Como vimos, para armar una proporción usamos cuatro datos numéricos. Cumplen que el cociente entre pares de esos valores es constante. El valor o resultado del cociente se llama *constante o razón de proporcionalidad.* Denotaremos dicha constante con la letra m. Veamos esto en algunos de los casos vistos:

Situación	Constante de proporcionalidad	Significado en contexto.
"Grasa en leche"	$m = \frac{6}{200} = 0,03$	Se tiene 0,03 gramos de grasa por cada mililitro de leche.
"Dosis de medicamento"		
Presentación 1	$m = \frac{750}{5} = 150$	Se tiene 150 miligramos de amoxicilina por cada mililitro de jarabe.
Presentación 2	$m = \frac{500}{5} = 100$	Se tiene 100 miligramos de amoxicilina por cada mililitro de jarabe.

Constante de proporcionalidad en situaciones planteadas.

Como vemos, en cada caso la constante de proporcionalidad significa "cuánto de la variable del numerador se tiene por unidad de medida de la variable del denominador".

Si se tiene como dato la constante m, se aligera el cálculo de cada cantidad variable que se quiere averiguar, por ejemplo:

¿Cuánta grasa se obtiene de 8000 ml de leche?	Cant. de grasa (en g) $= 0,03 \times 8000 = 240$.
¿Cuánta amoxicilina consume un bebé que toma 7 ml del jarabe de la presentación 1?	Cant. de amoxicilina (en mg) $= 150 \times 7 = 1050$.

Cálculo del valor de una variable conociendo la constante de proporcionalidad

Ejemplo 3. Para una circunferencia cualquiera, su longitud es $L = \pi\, d$, donde d es la longitud del diámetro de la misma. Vemos entonces que

$$\frac{\text{Longitud de circunferencia}}{\text{Longitud de diámetro de circunferencia}} = \frac{L}{d} = \pi.$$

Este valor es constante para todas las circunferencias, lo que muestra que las variables: "longitud de la circunferencia" y "longitud del diámetro de la misma" son directamente proporcionales. La constante de proporcionalidad entre las variables consideradas es $m = \pi$.

Ejemplo 4. En una casa de cambio por $375,80$ pesos (moneda argentina) me dieron 86 dólares estadounidenses. ¿Cuál es la tasa de conversión de una moneda a la otra?.

Una vez fijada la cotización, ésta se mantiene constante (al menos por un rato...)

es decir que siempre que se compre una cierta cantidad de dólares para averiguar cuántos pesos tengo que dar a cambio, necesito multiplicar esa cantidad por un valor fijo (tasa de conversión) que es la constante de proporcionalidad la cual es la cantidad de pesos que se paga por un dólar. Entonces la tasa de conversión es:

$$\text{tasa de conversión} = \frac{375,80}{86} \approx 4,37.$$

Notar que:

- Si se tienen cantidades variables $x \neq 0$ e y proporcionales, existe una constante de proporcionalidad m que se obtiene $m = \frac{y}{x}$ y entonces $y = m \cdot x$.

- Recíprocamente, si una variable se obtiene multiplicando otra por una constante $m \neq 0$, ambas variables son proporcionales, es decir:

$$\text{Si} \quad y_1 = m \cdot x_1 \text{ y } y_2 = m \cdot x_2 \;\Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = m \text{ (constante)}.$$

Consideraciones erradas sobre la proporcionalidad directa

- Muchas veces, se dice que las variables son directamente proporcionales: “porque si una aumenta la otra también” o bien “porque si una disminuye la otra también”. En general estas **no** son razones correctas para asegurar que las variables son directamente proporcionales. Puede ser que las cantidades que se relacionen aumenten (o disminuyan) ambas y sin embargo las magnitudes no son directamente proporcionales. Por ejemplo, si consideramos el área del cuadrado y la longitud de su lado, vemos que si aumenta el lado aumenta el área, sin embargo estas magnitudes no son proporcionales, basta ver algunos ejemplos en donde no se cumple la proporcionalidad:

Lado del cuadrado	Área del cuadrado
5	25
10	100

  En este caso se da la situación de que cuando aumenta el lado del cuadrado aumenta su área. Sin embargo, $\frac{5}{25} \neq \frac{10}{100}$, es decir que las variables no son directamente proporcionales.

- También es común pensar que si las variables no aumentan ambas o no disminuyen ambas no pueden ser proporcionales. Esto no es cierto cuando trabajamos con números reales en general, ya que si las variables no son todas positivas, las cantidades pueden ser directamente proporcionales y no verificarse que ambas aumentan o disminuyen a la par. Por ejemplo, las siguientes cantidades

Variable$_1$	Variable$_2$
10	-5
-20	10

  son directamente proporcionales ya que $\frac{-5}{10} = \frac{10}{-20}$. Sin embargo en la fila 1, $10 > -5$ y en la fila 2, $-20 < 10$.

Proporcionalidad directa y regla de tres.

La regla de tres directa es simplemente una manera útil de disponer los datos de un problema para realizar la cuenta que nos conducirá al resultado buscado *siempre y cuando sepamos que las variables del problema son directamente proporcionales.*

En la situación de la dosis de medicamento, en la presentación 1, las variables x, medida de volumen de jarabe, e y, medida de peso de amoxicilina, son directamente proporcionales. Dados los datos (sin unidades de medida) $x_1 = 5$, $y_1 = 750$, $x_2 = 3$

se desea obtener la cantidad y_2. Usando la primera de las propiedades enunciadas podemos calcularla:

$$\frac{750}{5} = \frac{y_2}{3} \Rightarrow 750 \cdot 3 = y_2 \cdot 5 \Longrightarrow y_2 = \frac{750 \cdot 3}{5}.$$

La disposición en la regla de tres resulta:

$$\begin{array}{ccccc} 5 & \longrightarrow & 750 & & \\ 3 & \longrightarrow & y_2 & \Longrightarrow & y_2 = \frac{750\cdot 3}{5} \end{array}$$

Nota: Insistimos en que para que sea válido el uso de la regla de tres simple directa, antes de utilizarla es necesario comprobar, o asegurarse mediante lo expuesto en la situacin del problema, que las variables son directamente proporcionales.

La razón como un modo de comparación.

Cuando se plantea el cociente o razón entre dos cantidades, por ejemplo entre las cantidades $25,6$ y $9,3$, la razón es $\frac{25,6}{9,3} \approx 2,75$. Podemos interpretar este resultado notando que $25,6$ es mayor que el doble de $9,3$ y esto es una forma de establecer un modo de comparación entre esas dos cantidades. Nos preguntamos ahora si las cantidades $27,8$ y $8,5$ son proporcionales a las anteriores. Una manera rápida de decidir, mentalmente casi sin hacer cuentas, es viendo que $27,8$ es más que el triple de $8,5$ y por lo tanto los cocientes entre los pares propuestos de cantidades no son iguales, más precisamente:

$$\frac{25,6}{9,3} \approx 2,75; \quad \frac{27,8}{8,5} \approx 3,27 \Longrightarrow \frac{25,6}{9,3} \neq \frac{25,6}{9,3}.$$

y entonces no son proporcionales.

Cuando hablamos de los aumentos de precios y queremos saber sobre nuestro poder adquisitivo en relación con algunos productos, también hacemos este tipo de comparaciones. Por ejemplo, en el 2009 una persona inició la construcción de su casa y el valor de una bolsa de cemento era de 17 pesos; en el 2011 valía 34, es decir que aumentó *al doble*. Sin embargo, el sueldo de la persona desde el 2009 al 2011 no aumentó *al doble*, por lo que su poder adquisitivo para la construcción de su vivienda disminuyó. En este caso las variables son el precio de la bolsa de cemento y el sueldo; vemos que la razón entre los precios del cemento es mayor que la razón entre los sueldos por lo que concluimos que poder adquisitivo disminuyó.

1.4 Porcentaje y proporcionalidad

Vimos en la sección 1.3 del capítulo **??**, que el porcentaje puede representarse como una fracción y viceversa. Por ejemplo el 20% de una cantidad es $\frac{1}{5}$ de esa cantidad ya que $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. La equivalencia de números racionales puede ser vista también como una proporción. En el caso del porcentaje las cantidades intervinientes las consideramos positivas.

Ejemplo 5.

- 3 es el 25% de 12 ya que $\frac{3}{12} = \frac{25}{100}$. Aquí la razón inicial es $\frac{3}{12}$ y como vemos el numerador de la razón de denominador 100 con la cual forma la proporción es 25.
- El $12,5\%$ de 72 es 9 ya que $\frac{12,5}{100} = \frac{9}{72}$. Como vemos, en las razones que forman la proporción no sólo intervienen números enteros.

Porcentaje como razón. Dada una razón o cociente de cantidades positivas, el porcentaje es el numerador de aquella razón cuyo denominador es 100 que resulta proporcional a la razón dada.
El porcentaje responde a la siguiente proporción:

$$\frac{\text{porcentaje}}{100} = \frac{\text{parte de la cantidad total}}{\text{cantidad total}}.$$

Profundicemos la relación entre porcentaje y proporciones mediante los siguientes problemas.

Ejemplo 6. Ignacio y Clara juntaron \$255 para hacer un regalo a su amigo Claudio. Si Clara aportó \$150, ¿qué porcentaje del monto total aportó? ¿qué porcentaje aportó Ignacio?

Resolución: La parte aportada por Clara puede ser expresada mediante la razón: $\frac{150}{255}$. Al expresarlo en porcentaje (en tanto por ciento) buscamos la razón, con denominador 100, que también represente esa parte, planteamos entonces la siguiente proporción:

$$\frac{x}{100} = \frac{150}{255},$$

obteniendo, $x = \frac{150}{255} \times 100 \approx 58,82$. Este valor de x está aproximado con dos decimales. Clara aportó el $58,82\%$. Ignacio aportó la parte restante, es decir si consideramos el total representado en la cantidad 100, lo restante será $100-58,82 = 41,18$. También puede obtenerse pensando que Ignacio aportó $255 - 150 = 105$ y entonces el valor del porcentaje se calcula planteadno la siguiente proporción: $\frac{x}{100} = \frac{105}{255} \approx 41,17$. En rigor los dos procedimientos deberían conducirnos al mismo resultado, la diferencia en los centésimos es por la aproximación realizada.

Respuesta: Aproximadamente, Clara aportó el $58,82\%$ e Ignacio aportó el $41,17\%$.

Ejemplo 7. (Distinguir la conveniencia de la oferta.) Antes de programar sus respectivos aumentos, el almacén "Don Cholo" y el almacén "Carlitos", que venden mercadería al peso, vendían sus productos al mismo precio. Luego el almacén "Don Cholo" decidió vender el kilogramo un 15% más caro, mientras que en "Carlitos", decidieron vender un 15% menos del producto al mismo precio que vendían el kilo. ¿Dónde compraría un cliente ahorrativo?

Resolución: Resolveremos este problema distinguiendo los pasos.

Como vemos, no sabemos el precio inicial de cada producto. Lo usual es pensar en un producto en particular, por ejemplo las lentejas, y se piensa un precio inicial, por ejemplo, 4 pesos.

Explicación	Si "Don Cholo decide vender un 15% más caro, al precio del kilogramo de lentejas, que es \$4, hay que sumarle el 15% de ese precio.	
Planteo	$4 + \dfrac{15}{100} \cdot 4$	$4 + 0,6 = 4,6$
Explicación	En el caso de "Carlitos", el precio \$4 es para un 15% menos de un kilo, el cual debe averiguarse.	
Planteo	$1 - \dfrac{15}{100} \cdot 1$	$1 - \dfrac{15}{100} \cdot 1 = \dfrac{85}{100}$, lo que equivale a 850 gramos.
Explicación	Entonces \$4 es el precio de 850 gramos. Para poder comparar los precios entre sí debemos referirlos a un mismo peso, por ejemplo ambos a un kilogramo. Luego hay que calcular el precio de un kilo del almacén "Carlitos al que denotamos con la letra x. Para ello hay que tener en cuenta que una vez fijado el aumento, las variables: "peso de las lentejas" y "precio de lo pesado" son proporcionales y entonces podemos obtener el precio por kilo usando proporciones o regla de tres simple directa	
Planteo	$\dfrac{4}{0,85} = \dfrac{x}{1}$	Luego $x = \frac{4}{0,85} \approx 4,70$. Esta aproximación es realizada por truncamiento, entonces $4,70 \leq \frac{4}{0,85}$.
Explicación	Ahora hay que comparar los dos valores. El más conveniente es el menor. Por las cálculos realizados, $4,6 < 4,7 < \frac{4}{0,85}$.	
Respuesta parcial	Queda claro que en el caso de las lentejas conviene comprar en el almacén "Don Cholo".	

Explicación	¿Qué sucede con el resto de los productos? Deberíamos repetir lo pensado y planteado pero ahora refieriéndonos a un precio p, que es variable según el producto que se venda.	
Planteo	$$p + \frac{15}{100} \cdot p$$	Al desconocer p, no tendremos un resultado numérico, por factor común: $(1 + \frac{15}{100}) \cdot p = (\frac{115}{100}) \cdot p = 1,15 \cdot p$. El resultado depende de p.
Explicación	En el caso de “Carlitos”, el precio p es para un 15% menos de un kilo, el cual se averigua del mismo modo que antes resultando entonces $0,85$kg. Entonces, para el almacén “Carlitos” p es el precio de 850 gramos. Para poder comparar los precios entre sí debemos referirlos a un mismo peso, por ejemplo ambos a un kilogramo. Luego hay que calcular el precio de un kilo del almacén “Carlitos”, al que llamamos p'. Dado que las variables: “peso de las lentejas y “precio de lo pesado son proporcionales, podemos obtener el precio por kilo usando proporciones o regla de tres simple directa.	
Planteo	$$\frac{p}{0,85} = \frac{p'}{1}$$	Luego $p' = \frac{p}{0,85}$.
Explicación	Ahora hay que comparar los dos valores, que dependen de p para saber cuál es el mayor. ¿$1,15 \cdot p$ es mayor que $\frac{p}{0,85}$?. Notar que $\frac{p}{0,85} = \frac{1}{0,85} \cdot p$. Como p es un número positivo, ya que representa el precio inicial del kilo de lentejas, podríamos sólo comparar los números multiplicados por p. *	
Planteo	¿$1,15$ es mayor que $\frac{1}{0,85}$?	Realizando la cuenta en la calculadora, vemos que $\frac{1}{0,85} \approx 1,1764$, luego comparando los números decimales $$1,15 < 1,1764 < \frac{1}{0,85}.$$
Respuesta del problema	*Respuesta:* Conviene comprarle a “Don Cholo” que aumenta el precio un 15%.	

Ejemplo 8. (Cómo discriminar el IVA) El IVA es el Impuesto al Valor Agregado. Es un impuesto que paga el consumidor final de un artículo, que se compra en un comercio o supermercado, y el monto resultante de aplicar ese impuesto es rendido al

Estado por los comerciantes que participan en la cadena de comercialización de dicho artículo.

El precio a consumidor final de un artículo, es decir lo que se paga cuando se compra el mismo, resulta del valor que el comerciante final determina más el IVA, que en nuestro país es del 21%. Si un comerciante cobra 100 pesos por la venta de un producto, el precio a consumidor final de ese producto debe ser de 121 pesos pues 21 pesos serán retenidos por el Estado en concepto de IVA. Es por eso que muchos comerciantes tienen una doble lista de precios, el precio al cual cobran el producto, el que muchos llaman *precio de lista o precio neto al público*, y el monto que resulta de sumar a dicho precio el IVA, el *precio a consumidor final.* De acuerdo a lo descripto tenemos las siguientes cuestiones a resolver.

(a) ¿Cuál es el precio a consumidor final que debería estipular un comerciante que tiene un precio de lista de 210 pesos?

(b) ¿Cuál es el precio a consumidor final que debería estipular un comerciante si quiere obtener una ganancia del 20% sobre el precio de un producto por el cuál pagó $14,50$?

(c) Calcular el precio de lista, determinado por un comerciante, por la venta de un artículo cuyo precio a consumidor final es de \$150.

(d) Si el precio a consumidor final de un par de zapatos es 350, ¿cuál es el monto por el cuál el comerciante pagará un cierto impuesto al Estado en concepto de IVA por ese par de zapatos? (Esto se llama discriminar el IVA).

Resolución:

(a) Para resolver el primer item, basta obtener el porcentaje por IVA y sumarlo al precio dado, es decir:

$$21\% \text{ de } 210 \text{ es } \frac{21}{100}\cdot 210 = 44,10 \Longrightarrow \text{Precio final} = \$210 + \$44,10 = \$254,10.$$

(b) Para resolver este item podríamos obtener primero el valor de precio de lista. Este precio es lo que el comerciante quiere cobrar por el artículo. Si quiere ganar un 20% sobre el valor $14,50$ el precio de lista es: $14,50 + 20\% de 14,50$, es decir: $14,50 + \frac{20}{100}14,50$ sacando factor común $14,50$ esta cuenta se escribe también $1,20 \cdot 14,50 = 17,40$. A este precio de lista hay que agregarle el IVA, resultando entonces: $17,40 + \frac{21}{100}17,40 = 1,21 \cdot 17,40 = 21,054$.

Nota: Repitiendo el último procedimiento, podemos ver para un caso general, si p_ℓ es el precio de lista, el precio a consumidor final es $p_\ell + \frac{21}{100}p_\ell = (1 + \frac{21}{100})p_\ell = 1,21 \cdot p_\ell$. Luego, el precio a consumidor final se obtiene en forma abreviada por el siguiente cálculo:

$$\text{Precio consumidor final} = 1,21 \cdot \text{Precio de lista}$$

(c) En este item, se quiere ir "al revés" pues se tiene el precio al consumidor final el cual, según lo dicho anteriormente, se obtuvo a partir de un precio de lista p_ℓ por el siguiente cáculo $1,21 \cdot p_\ell = 150$. Luego el precio de lista es $p_\ell = \frac{150}{1,21} \approx 123,96$.

(d) Por último, para discriminar el monto del IVA, primero habría que calcular el precio de lista y de eso obtener el 21%. Al igual que en item anterior, obtenemos el precio de lista que es $p_\ell = \frac{350}{1,21} \approx 289,26$ y el monto que debe discriminarse para el impuesto al Estado es 21% de $289,26 \approx 60,75$.

Trabajo práctico 13

Ejercicio 1. Una de las presentaciones de la droga fluticasona es en forma de spray acuoso nasal. Según la información presentada en el frasco, la concentración es 6 ml/6,18 g, el frasco contiene 60 dosis y cada dosis de suspensión contiene 0,050 mg del producto. Indicar la cantidad de ml de suspensión que contiene el frasco.

Ejercicio 2. En el supermercado La Esquina, el sachet de 900 g de yogur bebible cuesta \$7 y el sachet de $1,3$ kg cuesta \$9. ¿Puede decirse que las variables "cantidad de yogur" y "precio del yogur" son proporcionales?

Ejercicio 3. Tres profesores, Marcela, Cristina y Manuel han dictado conjuntamente un curso de ingreso intensivo de seis semanas por lo que han percibido 2000 pesos. Marcela y Cristina dictaron el curso durante 1 semana cada una, mientras que Manuel lo dictó durante 4 semanas. ¿Cuánto dinero corresponde a cada uno?

Ejercicio 4. Un vendedor ambulante dice que tiene una ganancia de 15% de la venta. Cada producto lo vende a \$5. ¿Cuántos productos debe vender para tener una ganancia neta de por lo menos \$80?

Ejercicio 5. Según la información nutricional indicada en el envase de flan en polvo de una cierta marca, 7,5 g del producto contienen 51 mg de sodio y estos aportan el 2% del valor diario recomendado para la dieta de un adulto. ¿Cuánto sodio contienen 60 g del polvo? ¿Qué porcentaje del valor diario recomendado representa?¿Cuál es la constante de proporcionalidad que relaciona las variables cantidad de sodio y cantidad de polvo para preparar flan?

Ejercicio 6. Planeamos hacer un viaje desde Argentina a Brasil. No sabemos si llevar dólares y cambiar allá o llevar directamente reales. La cotización del dólar en Brasil es tal que por 1 dólar se paga $1,7121$ reales. En Argentina la cotización del dólar es la dada en el ejemplo de la sección 1.3 (donde se habla sobre la constante de proporcionalidad) y 80 reales valen $211,20$ pesos. ¿Con qué moneda conviene viajar?

Ejercicio 7. Un medicamento pediátrico en jarabe tiene una concentración de 15 mg/5ml de componente activo. La dosificación recomendada está en el rango de

$$1,2 \text{ a } 1,6\text{mg/kg/día},$$

(1,2 a 1,6 mg de componente activo por cada kilogramo del niño, en el día). Un médico determina una dosis de $2,5$ ml de jarabe tres veces al día para un niño de 25 kg. ¿Es una prescripción adecuada?. ¿Cuál sería la prescripción adecuada para un niño de 35 kg si el jarabe tiene el doble de concentración?.

Ejercicio 8. Uno de los países de mayor porcentaje de IVA del mundo es Suecia, con 25% (aunque hay algunos productos con procentaje reducido). Un consumidor final paga por un lavarropas $3892,80$ coronas suecas (alrededor de 569 dólares).

(a) ¿Cuál es el monto que hay que discriminar por IVA?

(b) Alicia dice que el monto discriminado es el 25% del precio pagado por el consumidor final y Hugo dice que cree que no es así pero no lo puede explicar. ¿Podrías dar un argumento que avale la posición correcta?

Ejercicio 9. Uno de los elementos del control de la rendición de IVA que tienen en Argentina los "sabuesos" (inspectores de la DGI) es la facturación por tickets fiscales que realiza un comercio. En esos tickets figura sólo el precio a consumidor final. Dar un procedimiento, corto y eficiente, para calcular qué porcentaje del precio a consumidor final representa el monto discriminado por IVA.

Ejercicio 10.

(a) Mostrar, mediante un ejemplo distinto al dado en la explicación, variables relacionadas que aumenten ambas pero no sean directamente proporcionales.

(b) Averiguar en otras disciplinas (Economía, Física, etc.) cuáles magnitudes son directamente proporcionales y mostrar por qué lo son. Si es posible dar una intepretación de la constante de proporcionalidad según el contexto.

(c) Si dos variables son directamente proporcionales y una de ellas se duplica, ¿qué sucede con la otra? Justifique su respuesta.

(d) En el ejemplo de la sección 1.4, donde se estudia la conveniencia de la compra en almacenes, si en lugar de considerar la cantidad 15% en ambos almacenes, se considerara cualquier otro porcentaje. ¿Cambiaría la conveniencia? Justifique su respuesta.

Ejercicio 11. Responder y explicar. Responder y justificar la respuesta: Si te informan que dos variables con valores no negativos dependen entre sí de modo tal que si una aumenta la otra también, puedes afirmar que ambas son directamente proporcionales?

2 Proporciones en triángulos rectángulos.

La altura de la torre eléctrica.

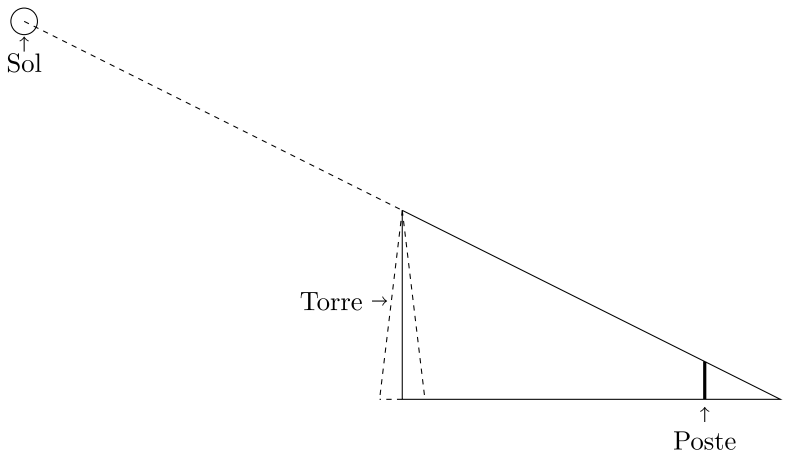
Ejemplo 9. Andando por las rutas argentinas habrán visto las torres gigantes que sostienen los cables de alta tensión que trasladan la energía eléctrica a nuestros hogares. Esas moles metálicas se ven tan tan altas...¿cuánto medirán?...A continuación mostraremos un método que nos permite estimar su altura.

En un día soleado, en un momento determinado del día, es fácil ver la sombra de una torre sobre el terreno. Ésta se forma por un rayo de sol que incide en forma oblicua desde la punta de la torre hasta el terreno (hacer un dibujo de lo descripto). Pensemos la sombra de la torre como si fuera un segmento con origen en el punto A, en la base de la torre, y extremo B, en el final del rayo. Tomamos un poste cuya altura conocemos y lo ubicamos verticalmente en algún punto del segmento $\overline{AB}$ de modo que la nueva sombra del poste tenga el mismo extremo B.

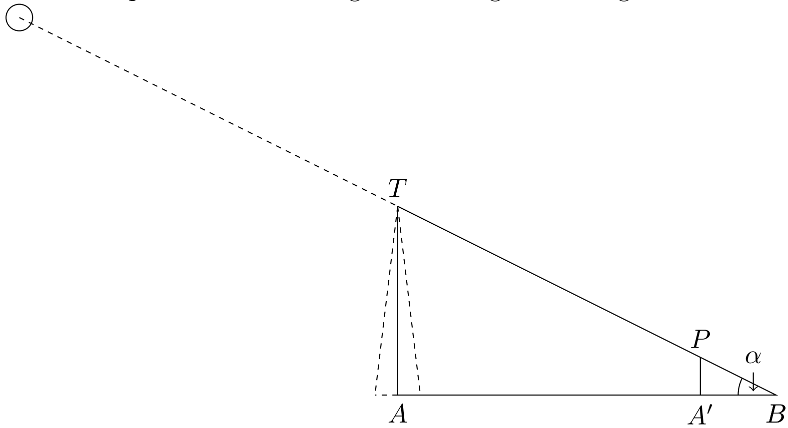
El método para calcular la altura de la torre se basa en que dicha medida y la longitud de su sombra son valores *proporcionales* a la altura del poste y la longitud de su correspondiente sombra

$$\frac{\text{Altura de torre}}{\text{long. de sombra de torre}} = \frac{\text{Altura de poste}}{\text{long. de sombra de poste}}.$$

Las sombras, de la torre y del poste, imaginándolas como segmentos, y la altura del poste son relativamente fáciles de medir. A partir de la proporción de arriba se puede calcular la altura de la torre.
¿Qué condiciones son necesarias para poder aplicar este método? Para responder esta pregunta pensemos en qué se mantiene fijo y qué puede variar. (Mirar el dibujo y pensar antes de seguir leyendo...)



Fijado un cierto momento del día, la sombra de la torre y el ángulo de incidencia del rayo del sol en el punto B también están fijos. Llamamos α al ángulo. La altura del poste puede variar (dado que al poste lo elegimos nosotros) y al pedir que la sombra del poste termine en B estamos imponiendo la condición que el ángulo de incidencia del rayo solar que pasa por la cima del poste también sea α. Planteando la situación geométrica quedarían dos triángulos rectángulos del siguiente modo:



Notar que:

- Los triángulos rectángulos determinados, TAB y $PA'B$, tienen sus ángulos agudos iguales. Basta recordar que por propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, el ángulo agudo restante se calcula:

  $$180^o - (90^o + \alpha) = 90^o - \alpha.$$

  El ángulo restante es el complemento de α. Esto puede ser generalizado para cualquier par de triángulos rectángulos, basta con que tengan un ángulo agudo igual para que los restantes sean iguales entre sí .

- Tomando como referencia el ángulo α en ambos triángulos, en el triángulo TAB el lado TA es opuesto α; en el triángulo $PA'B$ el lado PA' es el opuesto. Los lados AB y $A'B$ son lados adyacentes a α respectivamente y TB y PB son las hipotenusas de los respectivos triángulos considerados.

En los triàngulos rectángulos TAB y $PA'B$ estamos en condiciones de usar la siguiente propiedad que relaciona los lados de triángulos rectángulos.

Proporcionalidad entre lados de triángulos rectángulos: Si dos triángulos rectángulos cualesquiera tienen un ángulo agudo igual (miden lo mismo) entonces los pares de lados de ambos triángulos que guardan la misma posición respecto a dicho ángulo, son proporcionales.

Importante: La propiedad enunciada es la que corresponde a triángulos rectángulos *semejantes*. Esta propiedad vale en general para cualquier par de triángulos, sean o no rectángulos, cuando los mismos tienen sus ángulos respectivamente iguales. En este caso los llamamos triángulos semejantes. Podemos ver que éstos conservan la misma forma. Vale en general que en triángulos semejantes cualesquiera, los lados que guardan la misma posición respecto a ángulos iguales, son proporcionales.

La propiedad enunciada, aplicada a los triángulos considerados, nos permite armar la siguiente proporción:

$$\frac{TA}{AB} = \frac{PA'}{A'B} \tag{2.2}$$

de la cual podemos obtener la altura de la torre: $TA = \frac{PA'}{A'B} \cdot AB$ a partir de longitudes que podemos efectivamente medir.

La constante de proporcionalidad que resulta de lo planteado en (2.2) depende del ángulo de incidencia de los rayos solares, es decir de α. En otro momento del día podremos armar la proporción con las medidas de los segmentos determinados y el planteo de la proporción es análogo, pero la constante de proporcionalidad tendrá otro valor.

Ejemplo 10. Si el método anterior se aplica con un poste de 2m de alto el cual proyecta una sombra de $2,86$m y sabiendo que la sombra de la torre es de $78,54$m entonces:

$$\frac{\text{altura de torre}}{78,54} = \frac{2}{2,86} \Longrightarrow \text{altura de torre} = \frac{2}{2,86} \cdot 78,54. \Longrightarrow a_t = 54,92 \approx 55$$

En este ejemplo, la constante de proporcionalidad se obtiene del siguiente modo

$$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{2}{2,86} \approx 0,699.$$

2.1 Las relaciones trigonométricas.

Resolvimos la situación anterior gracias a la *proporcionalidad de lados de triángulos semejantes*. Esto nos permite obtener además otras constantes de proporcionalidad haciendo intervenir los distintos lados. Determinamos tres constantes de proporcionalidad entre lados de triángulos rectángulos semejantes. Éstas son tres de las principales *relaciones trigonométricas correspondientes a un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo*. Ellas son:

$$\text{coseno de } \alpha: \quad \cos\alpha = \frac{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa } \alpha}.$$

$$\text{seno de } \alpha: \quad \sin\alpha = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa } \alpha}.$$

$$\text{tangente de } \alpha : \quad \tan \alpha = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha}.$$

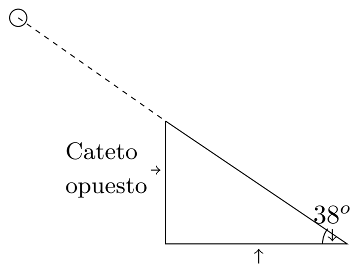
Estos valores están tabulados para distintos ángulos agudos y pueden calcularse por calculadora.

Cabe aclarar que los valores resultantes de los cocientes planteados no tienen unidades de medidas (se dice que son *adimensionales*) pues las medidas que se consideran en dichas razones se obtienen cuando las cantidades están expresadas en la misma unidad de medición.

Ejemplo 11. (Cálculo de uno de los lados conociendo el ángulo o el valor de alguna relación trigonométrica):

- Si el ángulo de incidencia del rayo solar es de 38^o. ¿Cuál es la sombra que proyecta la torre de 55 m de alto?

  Hagamos un esquema de un triángulo rectángulo, observemos los datos y lo que queremos calcular.
  Vemos que los lados involucrados son el cateto opuesto (la altura de la torre) y el cateto adyacente (la longitud de la sombra), la relación que se usa es la tangente del ángulo. El planteo es:

  $$\tan 38^o = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } 38^o}{\text{longitud de cateto adyacente a } 38^o} = \frac{55}{s_t}.$$

  Para obtener el valor de $\tan 38^o$, usamos la calculadora científica. En primer lugar verificamos que el modo de la calculadora sea DEG, que corresponde a los grados sexagesimales con los que mediremos los ángulos. Al apretar la tecla de tangente (dependiendo de la calculadora puede ser tg o tan) y luego ingresar el número "38" se obtiene un número que aproximamos con cuatro cifras decimales:

  $$\tan 38^o \approx 0,7812.$$

  Se calcula sombra de torre $= \frac{55}{\tan 38^o}$. Este cociente se realiza en la calculadora ingresando el "55" dividido por "tan" "38"y vale sombra de torre $\approx 70,396$.

- ¿Cuál será la longitud del rayo incidente desde la cima de la torre anterior al suelo correspondiente a la inclinación 38^o?

  En este caso, la relación que debemos usar es seno ya que conviene siempre usar los datos iniciales.

  $$\sin 38^o = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } 38^o}{\text{longitud de hipotenusa}} = \frac{55}{\text{hip}} \Longrightarrow \text{hip} = \frac{55}{\sin 38^o}$$

  Luego, la longitud del rayo incidente es hipotenusa $\approx 89,33$.

Ejemplo 12. (Cálculo del ángulo conociendo el valor de alguna de las relaciones trigonométricas) ¿Cuál es el ángulo de incidencia del rayo solar si para la torre de 55m se ha medido una sombra de 75m.?

En este caso conocemos las longitudes de los catetos con los que puede obtenerse la tangente del ángulo. Llamamos α al ángulo de incidencia, desconocido en este caso.

$$\tan\alpha = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha} = \frac{\text{altura de torre}}{\text{sombra de torre}} = \frac{55}{75}.$$

En este caso, para averiguar el ángulo agudo, usamos la calculadora: activamos la tecla de "inversa",luego la tecla "tan" de la tangente e ingresamos entre paréntesis el valor ($\frac{55}{75}$), (¡ojo!, dependiendo de la calculadora, los pasos pueden estar dados en otro orden) obteniendo el valor aproximado $36,25$. Este valor es la medida, en grados sexagesimales, del ángulo cuya tangente ingresamos. Para verlo en "grados, minutos y segundos sexagesimales", apretamos la tecla de conversión (explorar en la calculadora personal) que nos dará el siguente resultado: $\alpha \approx 36^o 15'$

Relación entre la tangente de un ángulo, el seno y el coseno.

Las definiciones introducidas en 2.1 y la simplificación de razones, nos permiten deducir que:

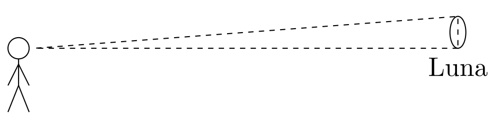
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa}}}{\frac{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa}}} = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha} = \tan\alpha$$

Quiere decir que el valor de la tangente de un ángulo está relacionado con el del seno y el coseno del mismo.

2.2 Problemas resueltos y orientados.

Ejercicio resuelto 1. (Distancia de la Tierra a la Luna) El radio de la Luna es de 1738 km y si observamos la Luna desde la Tierra contemplamos su radio bajo un ángulo de elevación de $0,25^o$. ¿Cuál es la distancia entre la Luna y la Tierra?

Resolución:
Cuando observamos su radio bajo un ángulo de elevación, imaginamos que podemos ubicar el centro del círculo visible de la luna y que el segmento que une el observador con dicho centro, forma con el radio de dicha esfera un ángulo recto.



Queda así determinado un triángulo rectángulo con los dos segmentos que forman el ángulo de elevación y el radio. Calculemos la longitud del segmento que une el ojo del observador con el centro, que es cateto adyacente al ángulo dado

$$\tan 0,25^o = \frac{r}{\text{cateto adyacente}}$$

entonces,

$$\text{cateto adyacente} = \frac{1738 \text{ km}}{\tan 0,25^o} \approx \frac{1738 \text{ km}}{0,00436} \approx 398623\text{km}.$$

Como imaginamos la Luna esférica, deberíamos restarle la longitud del radio para obtener una aproximación de la distancia de la Tierra a la superficie lunar:

Respuesta: La distancia de la Tierra a la superficie de la Luna es, aproximadamente, de 396885 km.

En la actualidad se sabe, por medición de la velocidad de ida y retorno de un rayo laser, que el valor que mejor aproxima la distancia de la Tierra a la superficie de la Luna es de 384403 km.

Ejercicio resuelto 2. Dado un triángulo, se sabe que la medida de un lado es $10cm$, de otro lado es $6cm$ y el ángulo agudo,γ, comprendido por ellos, tiene tangente $\tan\gamma = \frac{4}{3}$. ¿Puede calcular las medidas de todos los ángulos del triángulo y del lado restante?

Para resolver este ejercicio conviene hacer una construcción auxiliar de un triángulo rectángulo que comparta un lado y el ángulo dato con el triángulo cuyos datos conocemos. Esta construcción del triángulo rectángulo la hacemos porque sobre este tipo de triángulos sabemos calcular ángulos y lados y queremos saber si estos cálculos pueden ayudarnos (a esta altura de la resolución no sabemos cuánto nos ayudarán).

Recomendamos que el lector haga su propia figura a partir de la siguiente explicación.

Denotando al triángulo por sus vértices, ABC, consideremos que $AB = 10$ cm, $AC = 6$ cm y del ángulo $\widehat{BAC} = \gamma$ conocemos su tangente. Una posible construcción sería trazar una perpendicular al lado $\overline{AC}$ por el vértice C. Esa perpendicular cortará a la semirrecta que contiene al lado AB en un punto B'.
Por construcción, el triángulo rectángulo $B'CA$ (auxiliar) comparte con BCA el ángulo agudo γ y el lado $AC = 6cm$. Con los datos dados podemos calcular el cateto opuesto a γ, que es el lado $B'C$.

$$\tan\gamma = \frac{B'C}{AC} \Longrightarrow B'C = \tan\gamma \cdot AC \Longrightarrow B'C = \frac{4}{3} \cdot 6\text{cm} = 8\text{cm}.$$

Luego, aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $B'CA$, tenemos que

$$AB' = \sqrt{B'C^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

Es decir que ambos segmentos, AB y AB' miden 10 cm. Además estos segmentos tienen a A extremo común y, por cómo fue construido el triángulo auxiliar $B'CA$, el punto B' pertenece a la semirrecta $\overrightarrow{AB}$. Luego ¡son el mismo segmento!. Los triángulos ABC y $CB'A$ comparten el ángulo γ, con vértice en A, el lado $\overline{AC}$ y el lado $\overline{AB}$. Cuando dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido que miden lo mismo, el resto de los lados y ángulos miden los mismo (por el primer criterio de congruencia de triángulos).

Entonces el triángulo ABC es rectángulo y podemos, con los datos dados, calcular lo pedido.

$$AB = 10 \text{ cm} \ ; \quad BC = 8 \text{ cm} \ : \quad AC = 6 \text{ cm} \ .$$

Para calcular los ángulos, usamos la inversa de la relación tangente

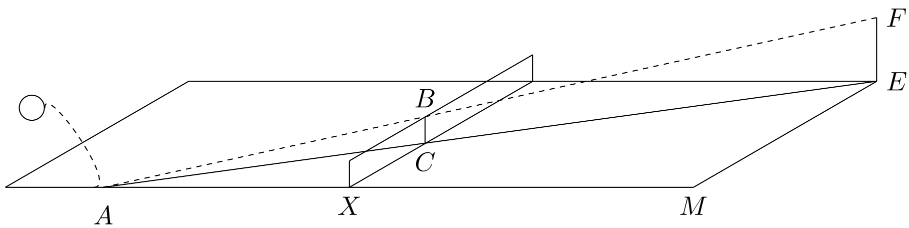
$$\widehat{BAC} \approx 53^o 7' 48''.$$

El ángulo $\widehat{BCA} = 90^o$ y el $\widehat{CBA} \approx 90^o - 53^o 7' 48'' \approx 36^o 52' 12''$.

Ejercicio resuelto 3. (Saque del tenista) Un tenista realiza un saque golpeando la pelota con su raqueta a una cierta altura. La bola se sirve desde una esquina de la cancha, pasa justo sobre la red y pica, en diagonal, sobre el borde interno a una distancia de $5,94$m de la red. ¿A qué altura el tenista hizo el saque?

Resolución:

En primer lugar, un esquema nos ayuda a comprender la situación.



Es útil conocer las dimensiones de una cancha de tenis. Largo: 23,77 m, Ancho interno: 8,23 m. Altura de la red, 1 m (promedio) (estas medidas corresponden a la conversión en metros ya que en realidad las dimensiones de la cancha se miden en "pies").

Antes de resolver el problema, pensamos en una estrategia de resolución:

Aprendiendo una estrategia de resolución: "Enlace"

1. Según el esquema se quiere calcular la longitud de un segmento. Pensamos en qué figura o figuras incluimos el segmento, para relacionarlo con medidas de otros segmentos de la figura.

2. Vemos qué datos tenemos de la/s figura/s identificada/s y cuáles necesitaríamos.

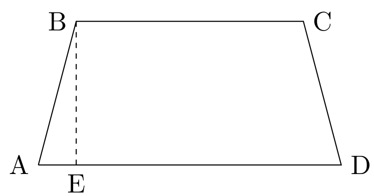
3. Identificamos qué resultados teóricos (por ejemplo: propiedades, definiciones y teoremas) necesitamos para relacionar los datos, o los posibles datos, con aquello que quiere obtenerse. Debemos comprobar si se cumplen las condiciones que se necesitan para utilizar dichos resultados teóricos.
4. Si los datos directos no son suficientes para aplicar el esquema analizado en los ítems anteriores. Probablemente necesitemos una figura auxiliar que nos permita obtener otros datos u otras relaciones.
5. En la figura auxiliar volvemos a revisar los pasos explicados en los ítems anteriores (1), (2), (3), (4) para obtener datos o relaciones intermedios.
6. Obtenidos los elementos intermedios que servirán de nexo o enlace entre los datos, se empiezan a calcular lo necesario para aplicar los resultados teóricos y obtener lo pedido.

Resolvemos el problema en tabla.

Explicación	En el esquema, vemos que se pide obtener el segmento EF. El segmento es cateto del triángulo rectángulo AEF. En dicho triángulo, para usar el Teorema de Pitágoras necesitaríamos las medidas de AF y AE que no tenemos. Si en cambio queremos usar proporcionalidad entre segmentos, podríamos considerar el triángulo ACB el cual comparte con AEF el ángulo con vértice en A y además de él poseemos el dato de longitud de CB, alto de la red. CB y EF son lados opuestos respecto del ángulo en común de ambos triángulos. Necesitaríamos otro par de lados, uno en cada triángulo, que compartan una posición respecto del ángulo en A. Evidentemente necesitamos tener en cuenta otra figura que nos permita obtener más datos. Consideramos entonces el triángulo AME del suelo de la cancha, que también es rectángulo. De él conocemos ME, ancho de la cancha, y podemos calcular fácilmente $AM = AX + XM$, pues $XM = 11,885$ ya que la red está en la mitad de la cancha. Volviendo a lo dicho sobre proporcionalidad entre lados de los triángulos AEF y ACB, notamos que los lados AC y AE, son adyacentes al ángulo $B\hat{A}C$. Luego es posible determinar la proporción:
Planteo y Cálculos	$$\frac{EF}{AE} = \frac{CB}{AC}$$ Usando propiedad de las proporciones (ver sección de proporcionalidad), podemos variar la proporción y obtener una nueva: $$\frac{EF}{AE} = \frac{CB}{AC} \Longrightarrow EF \cdot AC = CB \cdot AE \Longrightarrow \frac{EF}{CB} = \frac{AE}{AC} \qquad (2.3)$$

Explicación	Los triángulos rectángulos AXC y AME comparten el ángulo $C\hat{A}X$. Podemos entonces plantear proporcionalidad entre sus lados de modo tal que en dicha proporción intervengan los lados AE y AC, que en este caso son hipotenusas. Esta proporción será el nexo con la proporción planteada arriba.
Planteo y Cálculos	$$\frac{AM}{AE} = \frac{AX}{AC}$$ Por propiedad de proporciones, aplicada de modo análogo al paso de arriba, podemos obtener una nueva proporción: $$\frac{AM}{AX} = \frac{AE}{AC} \qquad (2.4)$$
Explicación	Como vemos, la razón $\frac{AE}{AC}$ se repite en las proporciones (2.3) y (2.4). Es el nexo que nos permite igualar los primeros miembros. Resulta:
Planteo y Cálculos	$$\frac{AM}{AX} = \frac{EF}{CB},$$ Dado que $AM = 5,94 + 11,885 = 17,825$, entonces $$\frac{17,825}{5,94} = \frac{EF}{1} \Longrightarrow EF \approx 3,0008 \approx 3$$
Respuesta	El saque fue realizado aproximadamente desde los $3m$ de altura.

Ejercicio resuelto 4. Un cantero de un parque tiene forma de trapecio isósceles de 110 m de perímetro. Las bases del trapecio miden $40m$ y $30m$ respectivamente. ¿Cuál es su área?



Guía para la resolución:

1. ¡Trate de hacerlo sin usar esta guía! Si acaso necesita ayuda, tal vez las indicaciones siguientes le sirvan, trate de usar la menor cantidad de ellas sin saltearlas

y utilice un dibujo de la figura.

2. Realice un dibujo de la figura y coloque las medidas de todos los lados de la misma. Mostrar cuáles son datos directos, cuáles infirió y cómo lo hizo.

3. Pensar cómo se calcula el área de esa figura. Puede tratar de descomponerla en figuras menores cuyas áreas sepa calcular fácilmente. Piense en sumar áreas. Describir el tipo de figuras y mostrar cómo calcularía sus áreas.

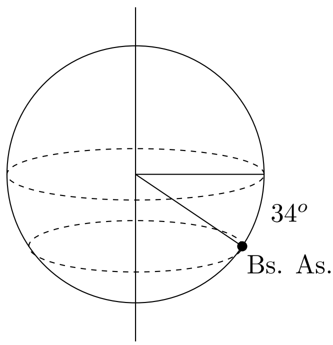
4. ¿Necesita la altura del trapecio? ¿Cómo puede calcularla? ¿Qué datos necesita para ello?

5. Una forma de calcular la altura: Use el valor que se obtiene de hacer la diferencia entre la base mayor y la base menor y la medida de alguno de los lados no paralelos.

6. Los valores del item anterior le sirven para calcular la altura utilizando el Teorema de Pitágoras o también Trigonometría. ¿Cuál es el triángulo sobre el que hay que trabajar? ¿Con cuáles medidas de ese triángulo cuenta? ¿Utiliza Teorema de Pitágoras o Trigonometría?

7. Ojalá estos pasos le hayan servido para obtener la respuesta.

Ejercicio resuelto 5. Sabemos que la Tierra tiene un diámetro de 13.000 km considerándola esférica y además conocemos que Buenos Aires está a 34 grados de latitud sur (se mide desde el Ecuador). Debido al giro sobre el eje, nos movemos describiendo una circunferencia en torno a éste como lo indica la línea punteada. ¿Cuál es el perímetro de dicha circunferencia?



Resolución:

Para visualizar el ángulo de latitud de 34^o, hay que imaginar un plano γ perpendicular al plano del ecuador y que contiene al meridiano que pasa por la ciudad de Buenos Aires. Dicho meridiano con el ecuador determina un punto P de intersección. Si O es el centro de la Tierra, consideramos el radio de la esfera OP. Si B es el punto de la Tierra donde se sitúa Buenos Aires, consideramos el radio de la esfera OB.

Ambos radios OP y OB son segmentos en el plano auxiliar trazado y dichos segmentos determinan el ángulo de latitud $\alpha = 34^o$.

Averiguar el radio de la circunferencia descripta por la rotación alrededor del eje de Buenos Aires, nos serviría para calcular su perímetro. Para ello, observemos que si llamamos A al punto de intersección del eje de la Tierra con el plano perpendicular a él que pasa por la ciudad, entonces OAB es un triángulo rectángulo del cual conocemos:

- Su hipotenusa, OB que es el radio de la esfera y mide $\frac{13000}{2} = 6500km$.

- El ángulo agudo $\widehat{AOB}$ que es el complementario del ángulo de latitud. Su medida es $\widehat{AOB} = 90^o - 34^o = 56^o$.

El radio que hay que averiguar es el segmento AB que es opuesto al ángulo $\widehat{AOB}$, en este caso conviene usar la relación trigonométrica seno.

$$\sin \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} \Longrightarrow AB = \sin 56^o \cdot 6500 \approx 0.829 \cdot 6500 \approx 5388,5.$$

Luego, la longitud de la circunferencia resultante de la trayectoria de Buenos Aires por la rotación es

$$\text{long. de circ. de Bs. As.} \approx 2 \cdot \pi \cdot 5388,5 \approx 33839,78$$

Trabajo Práctico 14

Ejercicio 1 Acerca de la lectura. Las siguientes preguntas invitan a revisar y reflexionar sobre lo leído para ayudar a estudiar.

(a) Describir el método usado para medir la torre.

(b) ¿Cuáles son los datos y qu es lo que se quiere averiguar?

(c) ¿Cuáles son las magnitudes proporcionales en este problema?

(d) En este método, ¿ Qué se mantiene fijo y qué puede variar?

(e) Dados dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo que mide lo mismo ¿qué se puede decir del otro ángulo? Por qué?

(f) ¿A qué se llama cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa? Estas definiciones ¿tienen sentido en un triángulo no rectángulo?

(g) Dado un ángulo agudo, ¿El valor de cada relación trigonométrica depende del triángulo rectángulo que lo tenga por ángulo interior?

Problemas y ejercicios.

Ejercicio 2. El triángulo rectángulo ABC es tal que α es ángulo opuesto a AB y β es ángulo opuesto a CB. Hacer una figura y calcular lo pedido en cada caso de acuerdo a los datos:

(a) Calcular AB, sabiendo que $\alpha = 70^o$ y $AC = 5$.

(b) Calcular AC, sabiendo que $\alpha = 30^o$ y $BC = 2$.

(c) Calcular AC, sabiendo que $\beta = 75^o$ y $AB = 3,5$.

(d) Calcular AB, sabiendo que $\beta = 40^o 25'$ y $BC = 6$.

(e) Calcular α y β, sabiendo que $AC = 8$ y $BC = 4$.

(f) Calcular α y β, sabiendo que $AB = 5$ y $BC = 3$.

(g) Calcular AC, sabiendo que $AB = \sqrt{5}$ y $BC = \frac{1}{2}$.

(h) Calcular AB, sabiendo que $AC = 8$ y $BC = 6$.

Ejercicio 3. Si se dan como dato $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$, siendo α un ángulo agudo, explicar y escribir cómo encontrar las tres relaciones trigonométricas de β, el ángulo complementario de α, sin usar la calculadora.

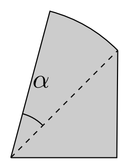
Ejercicio 4. Determine las otras constantes de proporcionalidad entre lados de triángulos y averig´ue cómo se las denominan.

Ejercicio 5. Leer atentamente la propiedad de proporcionalidad entre lados de triángulos rectángulos, enunciada en (2).

(a) Enunciar la propiedad recíproca.

(b) Para el lector interesado: Piense si la recíproca es válida o no y por qué.

Ejercicio 6. Calcular de forma exacta y aproximada el área y el perímetro de la siguiente figura sabiendo que la misma está formada por un triángulo rectángulo isósceles y un sector circular de amplitud α. Además se sabe que un cateto mide $\sqrt{8}$cm y que el seno de α es $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Recordar que las líneas interiores no forman parte del perímetro.



Ejercicio 7. Para el siguiente problema tener en cuenta el problema resuelto sobre la distancia de la Tierra a la superficie lunar.

(a) Aristarco (s. III a. J.), astrónomo de Alejandría, observó que cuando la Luna estaba en cuarto creciente, las líneas Tierra-Luna y Luna-Sol formaban un ángulo de 90^o. Aristarco midió en ese momento el ángulo que formaba la línea que une la Tierra con la Luna y la línea que formaba la Tierra con el Sol, estimando su valor en 87^o ¿Cuál es la distancia entre el Sol y la Tierra estimada por Aristarco?

(b) Actualmente se sabe que Aristarco cometió un error de $2^o 50'$ por defecto. ¿'Se traduce esto en una diferencia considerable en la distancia de la Tierra al Sol?

Ejercicio 8. La orientación hacia la que parece caerse la Torre de Pisa, en Italia, es sur. La medida del largo del lado sur de la torre es aproximadamente de 53m. El ángulo de inclinación es de 13^o respecto de la vertical. ¿Cual es el deslizamiento horizontal de la torre?

Ejercicio 9. Se sabe que la medida de un lado de un triángulo es 5 cm, la mitad de otro lado mide 3 cm y el ángulo,α, comprendido por ellos, tiene coseno $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. ¿El triángulo es isósceles? Explique su razonamiento y justifique su respuesta.

Ejercicio 10. Para el problema del tenista, averiguar cómo se realizó el saque cuyo pique, del lado contrario, es a 4 m de la red. Tener en cuenta las mismas condiciones del problema 3.

Ejercicio 11. La Tierra tiene un diámetro de 13.000 km considerándola esférica y además conocemos que Nueva York está a 40 grados de latitud norte (se mide desde el Ecuador). Debido al giro sobre el eje, nos movemos describiendo una circunferencia en torno a éste. ¿Cuál es el perímetro de dicha circunferencia?

Ejercicio 12. (Relación entre la proporcionalidad entre lados y el Teorema de Pitágoras. Usando proporcionalidad vamos a mostrar por qué vale el famoso Teorema de Pitágoras que es válido para todo triángulo rectángulo. Recordemos el enunciado.

Teorema de Pitágoras: *En todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*

En la columna izquierda del siguiente cuadro se explica la validez de este resultado y en la derecha guiamos al lector para que complete la justificación. Toda la información necesaria para hacerlo se encuentra en esta sección.

Explicación	Completamiento de la justificación
Dibujamos un triángulo rectángulo cualquiera ABC, con ángulo recto en el vértice B. Trazamos la altura del triángulo correspondiente a la hipotenusa AC *. Llamemos BM a dicha altura. Esta construcción auxiliar nos permite armar proporciones en donde intervienen la hipotenusa y los catetos del triángulo ABC los cuales son también lados de los triángulos rectángulos que se forman pero tienen otra posición respecto de los ángulos que son iguales.	Dibujar la figura descripta y nombrar a todos los triángulos rectángulos de la figura
Miramos el triángulo inicial ABC y el auxiliar AMB y observamos que tienen ángulos agudos iguales	Mostrar los ángulos agudos iguales y explicar por qué lo son.

<table>
<tr><td>Usando el Resultado importante puede determinarse la siguiente proporción:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AM}$$

Por lo tanto, usando propiedades de las proporciones,

$$AB^2 = AC \cdot AM \tag{2.5}$$</td><td>Indicar cuáles son los ángulos iguales considerados para el armado de la proporción y la posición de los lados con respecto a los mismos.</td></tr>
<tr><td>Análogamente, considerando los triángulos ABC y BMC se puede determinar la siguiente proporción:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC},$$

Luego,

$$BC^2 = AC \cdot MC. \tag{2.6}$$</td><td>Mostrar cuáles son los ángulos iguales y la posición de los lados que intervienen en la proporción, respecto a ellos.</td></tr>
<tr><td>Por las expresiones de (2.5) y 2.6, obtenemos

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot (AM + MC).$$</td><td>Explicar qué operaciones se realizaron para obtener esta expresión. ¿A qué es igual $AM + MC$ en el triángulo ABC?</td></tr>
<tr><td>Finalmente, obtenemos que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$</td><td>Verificar que la expresión simbólica de la izquierda concuerda con el enunciado del Teorema de Pitágoras.</td></tr>
</table>

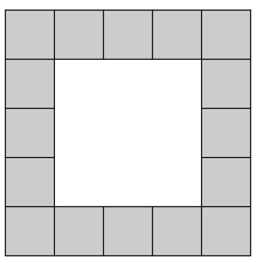
Capítulo 4

Álgebra

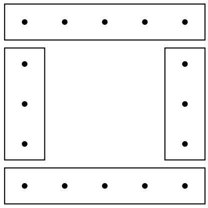
1 Expresiones algebraicas y ecuaciones

1.1 Producción de expresiones algebraicas

Ejemplo 1. Un hipermercado de artículos para el hogar ofrece un diseño de canteros con forma de cuadrado cuyo contorno está hecho con cerámicas. La figura de la derecha muestra el caso en que el diseño contiene 5 cerámicas por lado. La zona central está reservada para una planta o un árbol. ¿Cuántas cerámicas se necesitan para construir un cantero con el mismo diseño si en cada lado hay 24 cerámicas?

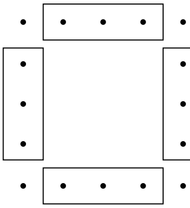


Una forma de encarar este problema es contar una por una las cerámicas a partir de una figura como la dada, aplicada al caso de 24 cerámicas. Pero es bastante evidente que este método no es práctico y que hay formas más económicas de contar las cerámicas. De hecho, ni siquiera para el caso del ejemplo dado en el enunciado contaríamos las cerámicas una por una sino que buscaríamos una forma mejor. ¿Cuáles pueden ser esas formas más económicas? Veamos unas cuantas, aplicadas al caso de cinco cerámicas por lado.



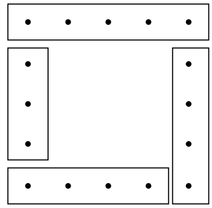
$5 + 5 + 3 + 3$ ó
$2.5 + 3 + 3$ ó
$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3$

FIGURA 1



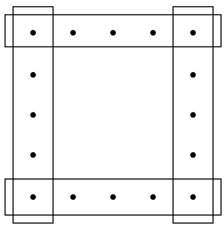
$3 + 3 + 3 + 3 + 4$ ó
$4 \cdot 3 + 4 \cdot 1$ ó
$2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 + 1 + 1 + 1$

FIGURA 2



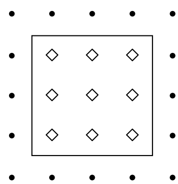
$5 + 4 + 4 + 3$ ó
$5 + 2 \cdot 4 + 3$

FIGURA 3



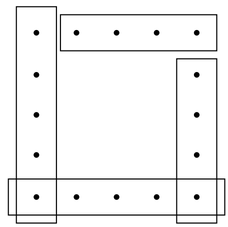
$5 + 5 + 5 + 5 - 1 - 1 - 1 - 1$
ó
$4 \cdot 5 - 4 \cdot 1$

FIGURA 4



$5.5 - (5 - 2).(5 - 2)$
ó
$5^2 - 3^2$

FIGURA 5



$5 + 5 - 1 + 4 + 4 - 1$
ó
$2 \cdot 5 - 1 + 2 \cdot 4 - 1$

FIGURA 6

Todas las formas de contar que hemos mostrado en las figuras de arriba son correctas y con cada una de ellas llegamos a la misma conclusión: se necesitan 16 cerámicas en total. Claro que quien solo pretende resolver el problema bien puede haber contado de una sola manera y esto es suficiente para responder a la pregunta.

En el problema original se pregunta por la cantidad total de cerámicas cuando la cantidad sobre cada lado es 24. Para resolver, podríamos realizar el dibujo, aunque empezaríamos a verle alguna debilidad al método, ya que dibujar será engorroso. Esto puede suplirse, quizás, imaginando la figura de referencia y pensando como cuando había cinco cerámicas por lado. En cualquier caso, ya sabemos cómo resolver el problema. Solo resta realizar el cálculo: contando con el criterio del primer gráfico hay $24 + 24 + 22 + 22$, es decir, 92 cerámicas.

Pese a que el problema está resuelto, la situación es propicia para desarrollar algunos aspectos típicos del trabajo matemático, como son la búsqueda de generalidades y la formulación de nuevas preguntas a partir de los problemas que se resuelven.

El tipo de razonamiento que hicimos para saber la cantidad total de cerámicas teniendo como dato la cantidad de cerámicas que uno desea ubicar en cada lado del cantero no depende de esta última cantidad. Esta observación es válida para cualquiera de las formas de contar que se mostraron más arriba. Esta particularidad es un indicador de que en la forma de conteo utilizada está presente una suerte de generalidad.

Ejemplo 2. ¿Cuántas cerámicas por lado hay que colocar para que el total sea de 240?

Lo que disponemos hasta ahora no parece muy útil. Deberíamos ir probando con distintas cantidades de cerámicas por lado, intentando llegar al valor dado.

En primer lugar, necesitamos establecer una forma general de contar la cantidad total de cerámicas. Según la primera forma de contar, el número total de cerámicas se obtiene sumando las cantidades de cerámicas de dos lados paralelos horizontales y agregándoles las cantidades que quedan en cada uno de los otros lados. En estos últimos, la cantidad que queda es 2 menos de los que hay en total en esos lados (descontamos los dos extremos de cada lado, que ya han sido contados):

la cantidad de cerámicas por lado (desconocida) más
la (misma) cantidad de cerámicas por lado más
la (misma) cantidad de cerámicas por lado menos 2 más
la (misma) cantidad de cerámicas por lado menos 2.

¿Cómo podemos simbolizar esto? A esa cantidad desconocida de cerámicas que ubicamos por cada lado, podríamos asignarle un nombre, un símbolo, por ejemplo n ó x, o algún nombre cualquiera. De esta forma, logramos pensar en un número natural cualquiera y no en un número particular, como sí lo hicimos en cada uno de los ejemplos que señalamos antes. Para hacer nuestros cálculos, usemos la letra n para referirnos al número de cerámicas necesarias para cubrir un lado del terreno. Vamos a reproducir, entonces, los cálculos hechos anteriormente, refiriéndonos ahora a la cantidad n. Entonces, lo que estamos diciendo se expresa en el siguiente cálculo, que nos da la cantidad total de cerámicas para armar el diseño:

$$n + n + (n - 2) + (n - 2), \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad 2n + 2(n - 2),$$

en donde queda explicitada la forma en que hemos pensado el conteo. No obstante, la expresión puede darse en forma más simplificada, operando sobre ella:

$$2n + 2(n - 2) = 2n + 2n - 4 = 4n - 4$$

Es decir, si por cada lado usamos n cerámicas, para cercar todo el terreno tendremos un total de $4n - 4$ cerámicas.

Nota: se aplicó la propiedad distributiva trabajada en la sección sobre cálculos combinados.

Expresiones algebraicas. Llamamos así a expresiones que contienen variables y, eventualmente, números, combinados mediante operaciones matemáticas (suma, multiplicación, etc.). Por ejemplo, cualquiera de las expresiones obtenidas anteriormente, $2n+2(n-2)$, $2n+2n-4$ ó $4n-4$, son expresiones algebraicas con una sola variable, en este caso n, y las operaciones que combinan a los números y a las variables son sumas y productos entre números y la variable.

Veamos dos ventajas de introducir el uso de expresiones algebraicas en la resolución del problema. La primera es que siendo n la cantidad de cerámicas por lado, la cantidad total que emplearemos para el diseño es $4n - 4$ (tomamos la expresión más simplificada por economía en el trabajo). Podemos conocer cuántas cerámicas hay en total para cualquier cantidad de cerámicas por lado, con solo asignar a n ese valor y realizar el cálculo numérico sin volver a pensar en cómo contarlas. Comprobemos que los resultados obtenidos mediante la expresión algebraica $4n - 4$ coinciden con los que hemos hecho en los casos particulares anteriores:

- Con 5 cerámicas por lado ($n = 5$) necesitamos 16 cerámicas, lo que se corresponde con utilizar $n = 5$ en nuestro cálculo general, $4n-4$, que en este caso da: $4 \cdot 5 - 4 = 20 - 4 = 16$.

- Con 24 cerámicas por lado ($n = 24$), habíamos obtenido 92 cerámicas. Ahora también:
$$4n - 4 = 4 \cdot 24 - 4 = 96 - 4 = 92.$$

La segunda ventaja de haber obtenido una expresión algebraica es que podemos responder con cierta facilidad a la pregunta que originó estos avances: ¿cuántas cerámicas por lado se necesitan para que el total sea de 240? Veremos cómo se resuelve en el siguiente apartado.

1.2 Ecuaciones

Retomando lo anterior, cuando nos informan que disponemos de 240 cerámicas en total, suponemos que habrá una cierta cantidad n por cada lado de manera que el total de cerámicas requeridas $4n - 4$ será 240. En estas condiciones desconocemos el valor de n y queda planteado encontrar un n tal que se verifique la igualdad
$$4n - 4 = 240.$$

Esto es lo que llamamos una ecuación cuya incógnita es n. Apelando a los conocimientos básicos de resolución de ecuaciones podemos resolverla:
$$4n - 4 = 240 \Leftrightarrow 4n = 244 \Leftrightarrow n = 61\ .$$

Esto quiere decir que hay que disponer 61 cerámicas por lado para cubrir el perímetro del cantero con 240 cerámicas. En términos algebraicos, hemos obtenido la solución de la ecuación $4n-4 = 240$. Ahora: ¿qué es una solución de la ecuación $4n-4 = 240$? Es un valor numérico de la variable n que hace que se verifique la igualdad planteada en esa ecuación.

Los pasos que hicimos para llegar de la primera expresión $4n - 4$ hasta la última $n = 61$ son pasos que nos van transformando la ecuación original en otras que tienen exactamente las mismas soluciones. Eso es lo que hacemos cada vez que resolvemos una ecuación. Entonces, los valores de n que son solución de la primera ecuación del proceso, son los mismos valores que son solución de la última ecuación y de todos los intermedios.

Solución de una ecuación. Se llama solución de la ecuación a cada uno de los valores numéricos de la variable que hacen que se verifique la igualdad planteada en esa ecuación.

Por ejemplo, $n = 58$ ¿es solución de esta ecuación? Para saberlo, deberíamos ver si cuando a n le asignamos el valor 58, se satisface la igualdad. Como $4 \cdot 58 - 4 = 232 - 4 = 228$ y $228 \neq 240$, concluimos que $n = 58$ no es una solución de la ecuación.

Sabemos que $n = 61$ es solución de la ecuación. ¿No hay otra forma de distribuir las 240 cerámicas (en cantidades iguales en cada lado del terreno) que no sea 61 por lado? Dicho en otros términos: ¿No habrá otro valor de n que sea solución de la ecuación $4n - 4 = 240$? Si al valor $n = 61$ hubiéramos llegado mediante una exploración numérica, es decir, probando con distintos valores hasta llegar a ese valor, no podríamos garantizar que no exista otro valor que lo cumpla. Es cierto que las características del problema nos convencen de que no habrá otro valor debido a que se aprecia que la cantidad total de cerámicas siempre aumenta a medida que aumenta la cantidad de cerámicas por lado. No obstante, no toda situación tiene esta particularidad y la incertidumbre acerca de la cantidad de soluciones de una ecuación, es legítima en general. La aplicación sucesiva de propiedades * en el proceso de resolución de la ecuación es una garantía de que lo hallado es la totalidad de los valores de la incógnita que la verifican.

Conjunto solución de una ecuación. Se llama de esta forma al conjunto que reúne todas las soluciones de una ecuación. "Resolver" una ecuación es un sinónimo de encontrar su conjunto solución.

En nuestro caso, sabemos no solo que $n = 61$ es una solución de la ecuación $4 \cdot n - 4$ sino que es la única, esto es, que el conjunto solución de la ecuación es $S = \{61\}$.

Ejemplo 3. Si se dispone de 347 cerámicas y se usar solamente cerámicas enteras , ¿cuántas debemos poner en cada lado?

Por lo discutido arriba, podemos calcular la cantidad de cerámicas por lado resolviendo la ecuación

$$4n - 4 = 347 \ .$$

Comenzamos resolviendo sin pensar en el contexto del problema,

$$4n - 4 = 347 \Leftrightarrow 4n = 351 \Leftrightarrow n = \frac{351}{4} \ .$$

Esta ecuación tiene como conjunto solución $S = \{\frac{351}{4}\}$.

*Propiedad uniforme de la suma y el producto.

Al volver al contexto del problema nos damos cuenta que $\frac{351}{4} = 87 + \frac{3}{4}$ no es un número entero. Por lo que, si bien la ecuación fuera de contexto tiene solución, la respuesta al problema es la siguiente:

Respuesta. No hay una cantidad entera de cerámicas por lado que permita usar las 347 cerámicas y a la vez conservar el diseño de cantero propuesto.

El contexto. Si estamos ante una situación contextualizada por un problema, consideramos que las variables que intervienen en las expresiones algebraicas toman todos los valores posibles que la situación permite. Por ejemplo, en este problema, n recorre todos los valores naturales. Las ecuaciones se pueden plantear fuera del contexto de un problema. En tal caso y en este curso, por convención se consideran como posibles valores para las variables o incógnitas todos los números reales para los cuales tiene sentido la formulación de la ecuación.

1.3 Expresiones algebraicas equivalentes

Volvamos a las distintas formas de conteo que hemos utilizado a lo largo del problema, en particular a la de la segunda figura. Lo que hicimos fue quitar, en cada lado, las cerámicas que ocupan las cuatro esquinas (los vértices del cuadrado) y quedarnos entonces con dos cerámicas menos por lado, sumar estas cuatro cantidades y luego agregarles los 4 cerámicas que corresponden a los vértices. De esta forma, si tenemos n cerámicas por lado, en total necesitaremos

$$(n-2)+(n-2)+(n-2)+(n-2)+4, \qquad \text{o también} \qquad 4\cdot(n-2)+4,$$

cuya expresión simplificada es

$$4(n-2)+4 = 4n-4\cdot 2+4 = 4n-8+4 = 4n-4\ .$$

Contando de esta otra manera, también llegamos a la misma expresión algebraica simplificada. Cuando contamos de dos formas diferentes la cantidad total de cerámicas llegamos en un caso (el primero) a que la cantidad total de cerámicas necesarias era $2n+2(n-2)$ y en el otro caso (el segundo) $4(n-2)+4$. Concretamente, lo que hemos hecho es agrupar las cerámicas de maneras diferentes, para llegar a determinar el número total de ellas. Son formas “equivalentes” de contar porque la cantidad a la que arribamos con un esquema o con otro es la misma. Por eso, a las expresiones que resultan de una u otra forma de contar, las llamamos expresiones algebraicas equivalentes. Es decir, la expresión algebraica $2n+2(n-2)$ es equivalente a la expresión $4(n-2)+4$.

Expresiones algebraicas equivalentes (una manera de verlas). Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se puede pasar de una a la otra mediante transformaciones algebraicas (operatoria) o bien pueden llevarse ambas a una misma expresión algebraica.

Al operar sobre la expresión $2n + 2(n - 2)$ obtuvimos la expresión $4n - 4$ y, por lo tanto son equivalentes. Más aún, $2n + 2(n - 2)$ y $4(n - 2) + 4$ son equivalentes, porque hemos comprobado que, luego de desarrollar cierta operatoria algebraica, ambas se reducen a una misma expresión $4n - 4$.

Expresiones algebraicas equivalentes (otra manera de verlas). Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando ambas dan el mismo resultado para cada uno de los valores posibles de las variables.

En nuestro caso, $2n + 2(n - 2)$ y $4(n - 2) + 4$ son equivalentes porque el resultado que obtenemos, para cada valor de n, con una expresión es igual al resultado que obtenemos, con el mismo valor de n, con la otra expresión. En otros términos, se verifica la igualdad

$$2n + 2(n - 2) = 4(n - 2) + 4$$

para cualquier valor de n.

Para ver en un ejemplo la utilidad de esta forma, supongamos que una persona realiza el conteo de las cerámicas y concluye que hay en total $2 \cdot (n - 1) + n + 3$. Si queremos determinar si esta propuesta es correcta, la comparamos con la expresión $4n - 4$ de la que ya sabemos que es una de las formas correctas de contar. Sabemos que cuando se colocan 5 cerámicas por lado se necesita un total de 16 cerámicas pues $4 \cdot 5 - 4$. Veamos qué se obtiene con la nueva expresión: si $n = 5$ se obtiene $2 \cdot (5 - 1) + 5 + 3 = 16$. Ambas expresiones generan el mismo valor, hecho que no es suficiente para decir que las expresiones son equivalentes ya que de esto no se infiere que las dos expresiones produzcan resultados iguales para todos los valores de n. Veamos algún valor más. Si $n = 61$, sabemos que el total de cerámicas es 240 (lo hemos obtenido antes usando la expresión $4n - 4$). En la nueva expresión, si $n = 61$ se obtiene $2 \cdot (n - 1) + n + 3 = 184$. Como para $n = 61$, las expresiones $4n - 4$ y $2 \cdot (n - 1) + n + 3$ dan valores diferentes (240 y 184), estamos en condiciones de afirmar que la expresión propuesta no sirve para el conteo de las cerámicas del cantero, así como también que las dos expresiones no son equivalentes.

Expresiones algebraicas equivalentes (una tercera forma de verlas). Dos expresiones algebraicas son equivalentes, si al igualarlas se genera una ecuación que tiene como conjunto solución a todos los valores para los cuales tienen sentido las expresiones planteadas.

En el caso que estamos estudiando, sabíamos que las dos expresiones surgieron de contar lo mismo de dos modos distintos. Pero, ante un caso en que nos planteen dos expresiones para decidir si son o no equivalentes sin datos adicionales ¿cómo nos damos cuenta de que el conjunto solución es o no el de todos los valores de n?

Cada vez que necesitamos conocer el conjunto solución de una ecuación, lo que debemos hacer es resolverla. Veamos entonces cómo hacerlo:

$$
\begin{aligned}
&2n + 2(n-2) = 4(n-2) + 4 && \text{(aplicando propiedad distributiva)}\\
&2n + 2n - 4 = 4n - 8 + 4 && \text{(agrupando los términos que contienen } n\text{)}\\
&2n + 2n - 4n = -8 + 4 + 4 && \text{(operando)}\\
&0n = 0 &&\\
&0 = 0 &&
\end{aligned}
$$

¿Cómo encontramos el conjunto solución, si en el último paso no aparece la variable? Este es un caso muy particular, en el que el proceso de resolución nos llevó a una igualdad numérica como es

$$0 = 0,$$

que resulta independiente del valor de n, a diferencia de la ecuación anterior $4n - 4 = 240$ en la que nos quedó perfectamente determinado (unívocamente determinado, suele decirse en matemática) el valor de la incógnita $n = 61$.

Ante una igualdad numérica como la que obtuvimos "$0 = 0$", nos preguntamos qué valores de n la verifican. Para poder responder a esta pregunta retomamos "el despeje" en el tercer paso en donde calculamos $2 \cdot n + 2 \cdot n - 4 \cdot n$ quedando en el penúltimo paso la "ecuación"

$$0.n = 0 \ .$$

¿Qué valores de n verifican esta última ecuación? Es claro que cualquiera, puesto que el resultado de multiplicar cualquier número n por 0 es 0, y por lo tanto, todo n satisface la ecuación $0 \cdot n = 0$. Como las soluciones de la última ecuación son las mismas que las de la primera, deducimos finalmente que cualquier valor de n también satisface la ecuación $2n + 2(n-2) = 4(n-2) + 4$.

De esta forma, concluimos que ambas expresiones algebraicas (las de cada miembro de la igualdad) son equivalentes, dado que el conjunto solución de esa ecuación es el conjunto de todos los valores posibles de n.

Cabe señalar que, en el proceso de resolución, no necesitamos en ningún momento suponer que n fuera un número natural. Los cálculos que hemos hecho se aplican a cualquier número real. Por lo tanto, a partir de pensar en un problema concreto, como es el de las cerámicas, hemos llegado a la conclusión de que la expresión $2n+2(n-2)$ es equivalente a la expresión $4(n-2)+4$ independientemente de que las consideremos planteadas en contexto de números naturales o de números reales.

En resumen, al analizar la equivalencia de dos expresiones a partir de plantear una ecuación, vimos un tipo de situación en que la conclusión es que todos los números (reales) son solución de la ecuación. A estas ecuaciones las llamamos identidades.

Identidad. Llamamos así a una ecuación que es verificada por todos los valores posibles de las variables que aparecen en ella.

En general, cuando el proceso de resolución de una ecuación nos conduce a una igualdad numérica (por ejemplo $0 = 0$; $7 = 7$; $15 = 15$, etc.) es porque la verifican todos los valores de la variable involucrada en la ecuación.

Ejercicio resuelto 1. Volver al problema inicial de conteo de cerámicas (Ejemplo 1).

1. Escribir las expresiones algebraicas que corresponden a las formas de contar que se representan en las figuras 3, 4, 5 y 6.

2. Demostrar que las expresiones algebraicas correspondientes a las figuras 3 y 4 son equivalentes mostrando que ambas pueden simplificarse a una expresión algebraica común.

3. Demostrar que las expresiones algebraicas correspondientes a las figuras 4 y 5 son equivalentes resolviendo la ecuación que corresponda.

Resolución:

1. En la figura 3 tenemos que para 5 cerámicas por lado, el total de cerámicas es $5 + 2 \cdot 4 + 3$. En general, para una cantidad cualquiera n de cerámicas por lado la cantidad de cerámicas necesarias para construir el cantero es

$$n + 2 \cdot (n-1) + (n-2) \ .$$

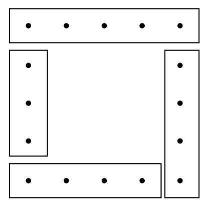


FIGURA 3

En el caso de la figura 4, el total de cerámicas se piensa como la suma de las cerámicas que van en cada lado, multiplicada por 4, menos las 4 cerámicas de las esquinas, ya que a éstas las estamos contando dos veces, de esta forma de contar se obtiene que el total de cerámicas es $4 \cdot n - 4$.

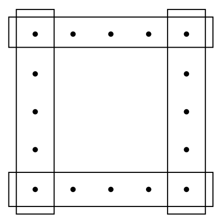


FIGURA 4

Para la figura 5, contamos todas las cerámicas que llenan el cuadrado (tanto el contorno como el interior) menos las que llenan el cuadrado interior. La cantidad de cerámicas que llena un cuadrado es la cantidad por lado multiplicada por sí misma (si son 5 por lado, el total es $5 \cdot 5 = 25$ cerámicas). Así, la cantidad que llena el cuadrado es $n \cdot n = n^2$ y la cantidad que llena el cuadrado interior $(n-2) \cdot (n-2) = (n-2)^2$. La cantidad total de cerámicas es

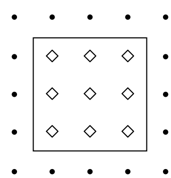


FIGURA 5

$$n^2 - (n-2)^2 \ .$$

En el conteo de la figura 6 se consideraron dos lados completos y dos lados sin la cerámica de una de las esquinas; a esto hay que restarle la cerámica de dos de las esquinas que se está contando dos veces. En total hay que la cantidad total de cerámicas es $2n + 2 \cdot (n-1) - 2$.

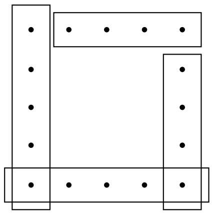


FIGURA 6

2. Tenemos que la cantidad total de cerámicas en la Figura 3 es $n+2\cdot(n-1)+(n-2)$ y en la Figura 4 es $4 \cdot n - 4$. Veamos que estas expresiones son equivalentes porque partiendo de una de ellas se puede obtener la otra mediante operatoria. Partiendo de la expresión de la Figura 3 y operando $n + 2 \cdot (n-1) + (n-2) = n + 2n - 2 + n - 2 = 4n - 4$. Luego de un par de pasos, hemos llegado a la expresión de la Figura 4. Luego, ambas son equivalentes.

3. La cantidad de cerámicas en la Figura 4 es $4n - 4$ y la cantidad de cerámicas en la Figura 5 es $n^2 - (n-2)^2$. Veamos que estas expresiones son equivalentes porque la ecuación que resulta de igualarlas tiene por solución a todos los valores posibles de la variable (en este caso, todos los números naturales). La ecuación por resolver es $4n - 4 = n^2 - (n-2)^2$. Operando:

$$4n - 4 = n^2 - (n-2)^2$$

$$4n - 4 = n^2 - (n-2).(n-2) \qquad \text{(por el significado de elevar al cuadrado)}$$

$$4n - 4 = n^2 - (n^2 - 2n - 2n + 4) \qquad \text{(usando la propiedad distributiva)}$$

$$4n - 4 = n^2 - n^2 + 4n - 4 \qquad \text{(operando)}$$

$$4n - 4 = 4n - 4$$

$$0 = 0$$

Hemos llegado a una igualdad numérica, lo que indica que la ecuación inicial tiene por solución a todos los valores de la variable y por lo tanto las ecuaciones son equivalentes.

Trabajo práctico 15

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Qué es una expresión algebraica? Dar ejemplos de expresiones algebraicas que se encuentren en el texto incluyendo algunas de las secciones posteriores.

(b) Dar ejemplos de ecuaciones que se encuentren en el texto.

(c) ¿Cuándo un número es solución de una ecuación? Dar un ejemplo.

(d) Si se verifica que un número es solución de una ecuación, ¿se puede decir que encontré su conjunto solución?

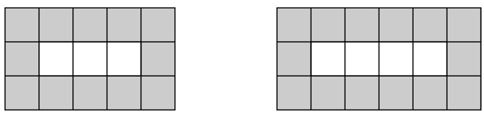
(e) ¿Qué significa "resolver una ecuación"?

(f) Dada la ecuación $5 - 2x = 4$, ¿es cierto que $x = 0$ es una solución? Justificar la respuesta de dos maneras diferentes.

(g) ¿Cuándo dos expresiones algebraicas son equivalentes? (ver las distintas formas).

(h) Con el mismo diseño de cantero propuesto en el problema planteado en el ejemplo 1, si disponemos de 1528 cerámicas, ¿cuántas debemos poner en cada lado? ¿Y si disponemos de 235?

Ejercicio 2. En la figura se muestra un cierto diseño de baldosas blancas y grises que se forma con una fila de una cierta cantidad de baldosas blancas rodeada de baldosas grises. En el ejemplo, se muestra el diseño para tres baldosas blancas rodeadas por baldosas grises y para cuatro baldosas blancas rodeadas por baldosas grises.



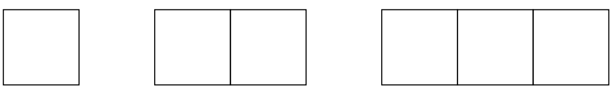
(a) ¿Cuántas baldosas grises se necesitan para el diseño cuando se colocan dos baldosas blancas? ¿Y cuando son 5 baldosas blancas? ¿Y cuando son 20 las baldosas blancas?¿Y cuando son 97 las baldosas blancas?

(b) ¿Es posible que la cantidad de baldosas grises sea 65? ¿Y 1400?

(c) Dar dos expresiones equivalentes para contar las baldosas grises necesarias cuando se coloca una cantidad arbitraria n de baldosas blancas.

(d) La expresión $5(n-1) - 3n + 11$, ¿sirve para contar la cantidad de baldosas grises si se colocaron n baldosas blancas? ¿Y la expresión $7n - (n-3)^2$?

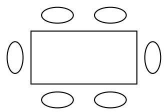
Ejercicio 3. Se construye con fósforos la siguiente sucesión de figuras:



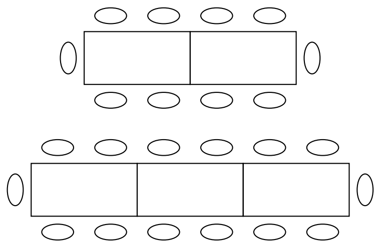
(a) Siguiendo la tendencia sugerida, ¿cuántos fósforos se requieren para armar la figura número 100?

(b) ¿Es posible que haya alguna figura que requiera de exactamente
i) 151 fósforos? ii) 222 fósforos?

Ejercicio 4. En un pueblo se realiza, cada año, una gran celebración a la que asisten todos los habitantes. Para la cena se disponen mesas en las que se puedan sentar 6 personas.



A medida que van llegando más personas se agregan mesas, una a continuación de la otra, disponiendo las sillas como se muestra a continuación.



(a) ¿Cuántas personas se pueden sentar si hay 5 mesas? ¿y si hay 20?

(b) ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten 102 personas?¿y para 300 personas? Indicar, en cada caso, si se utiliza la totalidad de sillas o si quedan lugares vacíos.

1.4 Cálculos con las expresiones algebraicas

Es habitual que haya que operar sobre una expresión algebraica dada para, por ejemplo, resolver una ecuación. Se entiende por operar o manipular una expresión algebraica el hecho de utilizar una propiedad o igualdad que vale para todos los valores de las variables involucradas para transformar dicha expresión en otra equivalente. Por ejemplo, al aplicar la propiedad distributiva se pudo pasar de la expresión $4 \cdot (n-2)+4$ a la expresión equivalente $4 \cdot n - 4$.

Las propiedades más habituales y las reglas para operar con ellas ya se discutieron en el capítulo **??**, en particular en la sección 4 sobre cálculos combinados. Para tenerlas más a mano, en la subsección que sigue haremos un listado de las mismas y un breve repaso de su uso, esta vez sobre la expresiones algebraicas en lugar de sobre expresiones numéricas. En la subsección 1.6 nos ocuparemos del cuadrado de un binomio.

1.5 Algunas operaciones usuales

Propiedades de las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias. Es usual tener que operar con expresiones fraccionarias del tipo $\frac{x}{y}$. Estas operaciones fueron introducidas en la sección 1 del capítulo **??** para el caso en que x e y son

números enteros, pero aquíla expresión $\frac{x}{y}$ no es una fracción en ese sentido pues x e y son variables y pueden tomar cualquier valor real con la salvedad de que $y \neq 0$.
La suma, la resta, el producto y el cociente de las expresiones $\frac{x}{y}$ e $\frac{z}{w}$ se definen a continuación. Aquí las letras representan variables que pueden tomar cualquier valor real con la salvedad $y \neq 0$ y $w \neq 0$.

Suma: $$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{x \cdot w + z \cdot y}{y \cdot w}$$

Resta: $$\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{x \cdot w - z \cdot y}{y \cdot w}$$

Producto: $$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{x \cdot z}{y \cdot w}$$

Cociente: $$\frac{x/y}{z/w} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} = \frac{x \cdot w}{y \cdot z}$$

$y \neq 0$, $w \neq 0$ y $z \neq 0$

Otra operación con expresiones fraccionarias que suele ser muy útil es la "simplificación":

Simplificación de z: $$\frac{x \cdot z}{y \cdot z} = \frac{x}{y} \quad \text{pues} \quad x \cdot z \cdot y = x \cdot y \cdot z$$

para cualquier valor de $y \neq 0$ y $z \neq 0$.

Recordemos la propiedad distributiva discutida en la sección 4.

Propiedad distributiva: Para cualquier valor de x, y y z vale que

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \text{y} \quad \frac{x + y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \quad z \neq 0$$

Propiedades de la potenciación: Para a, b números positivos y m, n números cualesquiera valen las siguientes propiedades:

- Distributiva de la potencia respecto del producto y del cociente

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ .$$

- Inverso multiplicativo $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

- Producto y cociente de potencias de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{y} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}\ .$$

- Potencia de potencia $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Sobre la prioridad de las operaciones. Cuando se desean aplicar varias operaciones sobre una expresión algebraica, la prioridad o jerarquía de su aplicación es la misma que la trabajada en la sección 4 sobre cálculos combinados.

Ejercicios resueltos

Vamos a realizar algunos cálulos algebraicos. Para indicar la propiedad utilizada en cada paso, abajo de cada igualdad pondremos un número y luego listamos las propiedades usando como referencia dicha numeración.

Ejercicio resuelto 2. Realizar las operaciones indicadas y simplificar si es posible

(a) $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x}=\qquad (x+1\neq 0,\ x\neq 0)$ (b) $\frac{x^2}{4}\cdot\frac{2}{x}=\qquad (x\neq 0)$

Resolución:

(a) $$\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x}\underbrace{=}_{(1)}\frac{x\cdot x+2\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot x}\underbrace{=}_{(2)}\frac{x^2+2x+2}{(x+1)\cdot x}\,.$$

(1) Fórmula para la suma de expresiones fraccionarias.

(2) Definición de potencia $x\cdot x=x^2$ y propiedad distributiva $2\cdot(x+1)=2x+2$.

(b) $$\frac{x^2}{4}\cdot\frac{2}{x}\underbrace{=}_{(1)}\frac{x^2}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{2}}{x}\underbrace{=}_{(2)}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\underbrace{=}_{(3)}\frac{x}{2}$$

(1) y (2) Simplificación entre las cantidades 2 y 4.

(3) Cociente de potencias de igual base ($x^2\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x}=x^{2-1}=x$).

Ejercicio resuelto 3. Utilizar la propiedad distributiva para escribir en forma de suma y simplificar si es posible.

(a) $(-3x^2-3)(x+2)=$ (b) $(x+\frac{1}{x})\cdot x=\qquad x\neq 0$

Resolución:

(a) $(-3x^2-3)(x+2)\underbrace{=}_{(1)}(-3x^2-3)\cdot x+(-3x^2-3)\cdot 2\underbrace{=}_{(2)}-3x^2\cdot x-3x-3x^2\cdot 2-$
$3\cdot 2\underbrace{=}_{(3)}-3x^3-6x^2-3x-6$

(1) Distributiva.

(2) Nuevamente uso de la propiedad distributiva en cada uno de los sumandos y uso regla de los signos.

(3) Potencias de igual base ($x^2\cdot x=x^3$), multiplicaciones y reordenamiento en potencias decrecientes de x.

(b) $$(x+\tfrac{1}{x})\cdot x\underbrace{=}_{(1)}x^2+\tfrac{1}{x}\cdot x\underbrace{=}_{(2)}=x^2+1$$

(1) Distributiva.

(2) Simplificación de x

Ejercicio resuelto 4. Escribir la expresión $x^2 + 2x$ como un producto sacando factor común x.

Resolución: Como se enfatizó en la sección de cálculos combinados, la propiedad distributiva leída de derecha a izquierda se la suele llamar factor común, en este caso es obvio que
$x^2 + 2x = x(x + 2)$.

A veces no estamos seguros si dos expresiones algebraicas son equivalentes. Una estrategia muy eficaz para comprobar que no lo son es utilizar la “segunda manera de ver si dos expresiones son equivalentes” descripta anteriormente.

Ejercicio resuelto 5. Indicar si las expresiones $\frac{10+x}{5}$ y $2 + x$ son equivalentes.

Resolución: Si se aplica la propiedad distributiva a la primera expresión se obtiene que $\frac{10+x}{5} = 2 + \frac{x}{5}$ para todo valor de x. Esto nos hace sospechar que las expresiones dadas en el enunciado no son equivalentes.

Recordemos que dos expresiones algebraicas son equivalentes si ambas dan el mismo resultado para *todos* los valores posibles de las variables, entonces para probar que efectivamente las expresiones $\frac{10+x}{5}$ y $2 + x$ no son equivalentes alcanza con encontrar *un* valor que no cumpla la igualdad. Por ejemplo, si $x = 2$, resulta que evaluando en $\frac{10+x}{5}$ queda $\frac{10+2}{5} = \frac{12}{5}$; en cambio, evaluando en $x + 2$ queda $2 + 2 = 4$.
Respuesta: Al evaluar en $x = 2$ en ambas expresiones se obtienen valores distintos pues $\frac{12}{5} \neq 2$ entonces las expresiones no son equivalentes.

Observación: Es muy común “caer en la tentación” de simplificar y escribir

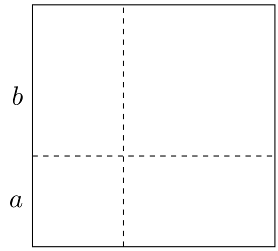
$$\frac{10+x}{5} \text{ “=” } \frac{\cancel{1}0+x}{\cancel{5}} \text{ “=” } 2 + x.$$

Sin embargo esta simplificación no es correcta; el denominador 5 afecta a toda la expresión $10+x$ no sólo al 10. De hecho, el ejercicio anterior muestra que las expresiones resultantes de esta simplificación errónea no son equivalentes.

1.6 Cuadrado de un binomio

En este apartado nos ocupamos de uno de los temas del álgebra escolar más conocido: el cuadrado de un binomio. Se designa así a las expresiones algebraicas que son el cuadrado de una suma de dos términos y que podemos simbolizar, en una forma general, como $(a + b)^2$. El objetivo de este parágrafo es dar argumentos que nos permitan concluir que las expresiones $(a + b)^2$ y $a^2 + 2ab + b^2$ son equivalentes.

Para comenzar analizaremos la figura de la derecha que es un cuadrado de lado $a + b$. Al trazar las líneas internas quedan determinados otros cuatro cuadriláteros: dos cuadrados (de lado a y de lado b) y dos rectángulos (ambos de lados a y b). Se quiere encontrar dos expresiones algebraicas equivalentes para calcular el área de la figura.



Para calcular el área del cuadrado de lado $a + b$ podemos proceder de dos maneras distintas:

1) Como una única figura. En este caso, como el área de un cuadrado se calcula como el cuadrado de su lado, $A = (a + b)^2$.

2) Como suma de áreas de figuras. Podemos pensar al área del cuadrado de lado $a+b$ como la suma de las áreas de cada de las cuatro figuras que quedaron determinadas al trazar las líneas internas. Resulta así: $A = a^2 + b^2 + a \cdot b + a \cdot b$ y simplificando la expresión obtenida

$$A = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \ .$$

Hemos calculado el área de una figura de dos formas distintas, por lo que los resultados obtenidos son iguales, se concluye que

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \ .$$

Es importante observar que lo realizado vale para cualquier figura de ese tipo, no para una en particular, debido a que usamos literales para designar a los lados de las figuras. Esta es una potencialidad del álgebra. La única limitación en los alcances de la igualdad obtenida es que a y b deben ser positivos ya que son lados de figuras. Esto no quiere decir que la igualdad no valga para negativos y el cero sino que la argumentación exhibida se limita a los números positivos.

Sobre la validez para los números negativos y el cero nada podemos decir con lo realizado. Para ver esto, debemos independizarnos de las figuras geométricas. Una forma es pensar la situación en un marco estrictamente algebraico. Sabemos que elevar al cuadrado un número es multiplicarlo por sí mismo. Luego, $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$. La expresión obtenida puede ser expandida utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

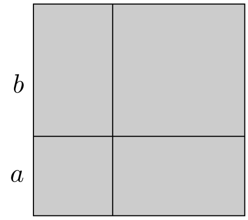
$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 \ .$$

Al simplificar se obtiene la conocida fórmula del binomio

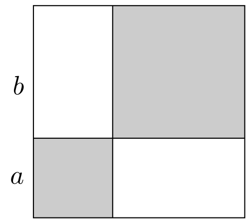
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \ .$$

Lo realizado tiene carácter general, porque los números fueron representados con literales. Además, como no ha aparecido ninguna restricción a lo largo del proceso, la igualdad vale cualesquiera sean los números reales a y b y, por lo tanto, concluimos que las expresiones $(a + b)^2$ y $a^2 + 2ab + b^2$ son equivalentes.

En ocasiones, pese a conocer la expresión que desarrolla el cuadrado de un binomio, se comete el error de distribuir el cuadrado respecto de la suma. Esto no es válido en general puesto que $(a+b)^2$ y a^2+b^2 no son expresiones equivalentes como lo demuestra la siguiente construcción geométrica. El área sombreada en el dibujo de la izquierda es $(a+b)^2$, mientras que el área sombreada en la figura de la derecha es a^2+b^2. Vemos que no son iguales y que la "diferencia" entre ambas es el área de los dos rectángulos de lados a y b, es decir, $2ab$. Justamente, la expresión $2ab$ debe ser 0 para que las expresiones $(a+b)^2$ y a^2+b^2 sean iguales.



Área pintada: $(a+b)^2$



Área pintada: a^2+b^2

Como vimos en el apartado anterior, otra forma de probar que las dos expresiones no son equivalentes es encontrar un par de valores a y b que produzcan valores distintos al ser reemplazados en cada expresión. Efectivamente, si por ejemplo $a=3$ y $b=2$ resulta $(a+b)^2=25$, mientras que $a^2+b^2=13$.

Trabajo Práctico 16

Ejercicio 1. En el siguiente cuadro se resumen las distintas formas de ver si dos expresiones algebraicas son equivalentes (de acuerdo con este texto). Clasificar los ejercicios y ejemplos que tienen como objeto decidir si dos expresiones algebraicas son equivalentes de acuerdo a la forma elegida para hacerlo.

Forma	Utilidad	Ejemplos o ejercicios
Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se puede pasar de una a la otra mediante transformaciones algebraicas (operatoria) o bien pueden llevarse ambas a una misma expresión algebraica.	Permite producir nuevas expresiones algebraicas más simples o que se adaptan mejor a la resolución de un problema	
	Permite decidir la equivalencia entre dos expresiones llevándolas mediante transformaciones a una tercera más simple.	

Ambas expresiones producen el mismo valor numérico para cada uno de los valores posibles de las variables	Permite probar que dos expresiones algebraicas NO son equivalentes. Para ello, hay que encontrar valores de las variables que al ser reemplazados en las expresiones algebraicas produzcan valores numéricos distintos	
La ecuación que se obtiene al igualar las dos expresiones tiene por solución a todos los valores posibles de las variables	Permite decidir si dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se duda sobre su equivalencia o bien cuando no nos damos cuenta como transformar una en la otra.	

Ejercicio 2.

(a) Realizar las operaciones indicadas y reescribir simplificando si es posible.

(a) $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x} =$ $\quad (x+1 \neq 0,\ x \neq 0)$ (b) $\frac{x^3}{5} \cdot \frac{25}{x} =$ $\quad (x \neq 0)$

(c) $\frac{x/7}{-3/49} \cdot \frac{9}{x^2} =$ $\quad (x \neq 0)$ (d) $\frac{x^2/3}{3/4} \cdot \frac{2}{x} =$ $\quad (x \neq 0)$

(b) Utilizar la propiedad distributiva para escribir en forma de suma y simplificar si es posible.

(a) $(x^3 - 2)(x+1) =$ (b) $\frac{-2x-1}{-2} =$ (c) $(x - \frac{1}{x}) \cdot (x^2 - 1) =$ $\quad (x \neq 0)$

(c) Escribir la expresión $x^3 - 2x^2$ como un producto sacando factor común x.

(d) Escribir las expresiones $(a^2)^{-1} \left(\frac{b}{a}\right)^3 a^5$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} (a^{-2})^{-1} b$ como producto de potencias de a y b. Considerar a y b no nulos.

(e) Decidir si las expresiones $\frac{x}{2} - \frac{-3}{x}$ y $\frac{x^2-6}{2x}$ son equivalentes. No considerar el valor $x = 0$.

Ejercicio 3. Entre el siguiente listado de ecuaciones, ¿hay identidades? Justificar e indicar su conjunto solución en el caso que lo sea. Sugerencia: analizar la relación entre expresiones algebraicas equivalentes e identidad.

(a) $1 - \frac{2x-4}{2} = 3 - x$ (b) $p.(1-p) = -p^2 + p$ (c) $t^2 - 1 = -t(1-t)$

(d) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (e) $\frac{1}{x} = x^{-1}$

Ejercicio 4. Acerca de la lectura.

(a) ¿Cómo es la expresión algebraica que desarrolla al cuadrado de un binomio?

(b) Relacionar el desarrollo del cuadrado de un binomio con expresiones algebraicas equivalentes.

(c) Explicar (de diferentes modos) por qué la potenciación no es distributiva respecto de la suma.

Ejercicio 5. Justificar por qué no son equivalentes las expresiones algebraicas $(x-y)^2$ y x^2-y^2.

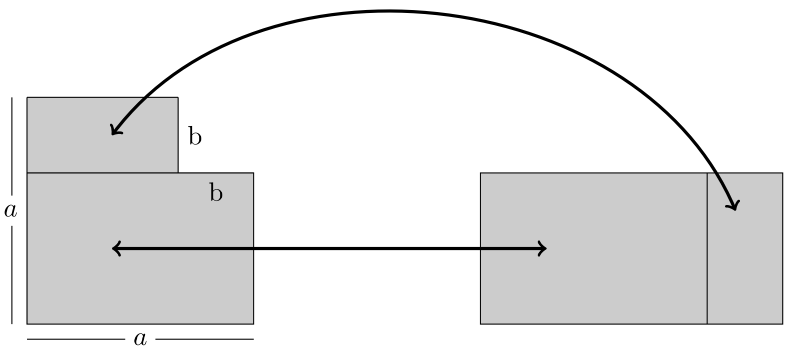
Ejercicio 6. Justificar por qué las expresiones algebraicas $(p-q)^2$ y p^2+q^2-2pq son equivalentes.

Ejercicio 7. Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $(-a-b)^2+(a-b)^2$

(b) $(2x-3y)^2+12xy$

Ejercicio 8. Dadas las siguientes figuras:



(a) Calcular el área de la primera figura utilizando solamente cuadrados.

(b) Calcular el área de la segunda figura.

(c) ¿Cuáles son los valores de a y b para los cuales tienen sentido las expresiones algebraicas propuestas en a) y b)?

(d) Comparar el área de ambas figuras y dar una justificación de la conclusión.

(e) Pensar ahora en la igualdad planteada sin las restricciones del problema. ¿Es cierto que ambas expresiones son equivalentes en el conjunto de los números reales? Justificar.

(f) ¿Con qué nombre se conoce a esta identidad?

(g) Utilizar esta identidad para reescribir como un producto las expresiones i) $25-x^2$ ii) $4x^2-3$.

2 Resolución de ecuaciones

2.1 Ecuaciones lineales

El objetivo de esta sección es repasar las técnicas que permiten resolver ecuaciones donde las únicas operaciones que afectan a la variable o incógnita son el producto o el cociente por números y la suma o la resta. Este tipo de ecuaciones suele llamarse lineal y en lo que sigue, se muestra con varios ejemplos sencillos como funcionan las propiedades que permiten resolverlas.

Comencemos resolviendo la ecuación $x+2=5$. Es fácil darse cuenta que al restar 2 en ambos lados de la igualdad se deduce que $x=3$:

$$\begin{aligned} x+2&=5\\ x+2-2&=5-2\\ x&=3 \end{aligned}$$

De manera coloquial se suele decir que "se ha pasado el 2 restando". Más rigurosamente, lo que se ha usado es la propiedad uniforme de la suma.

Ahora consideremos la ecuación $\frac{1}{3}\cdot x=4$. Al multiplicar por 3 en ambos miembros de la igualdad se deduce que $x=12$ puesto que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\cdot x&=4\\ 3\cdot\tfrac{1}{3}\cdot x&=3\cdot 4\\ x&=12 \end{aligned}$$

De manera coloquial se suele decir que se ha "pasado el 3 multiplicando". Más rigurosamente, lo que se ha usado es la propiedad uniforme del producto.

Veamos como se usan estas propiedades de manera combinada para resolver ecuaciones.

Ejemplo 4. Resolver las ecuaciones
(a) $2x-3=5$ (b) $2(x-3)=5$

(a) Al resolver esta ecuación se nos plantea nuevamente la cuestión de la prioridad de las operaciones estudiadas en la sección 4 que trata sobre cálculos combinados.

El uso reflexivo de las propiedades de acabamos de explicar nos permite ver que si sumamos 3 a ambos lados de la ecuación se obtiene una ecuación más simple:

$$\begin{aligned} 2x-3&=5\\ 2x-3+3&=5+3\\ 2x&=8 \end{aligned}$$

Ahora, ya sabemos que hay que hacer, se divide por 2 a ambos lados de la igualdad y se obtiene la solución $x = 4$:

$$\begin{aligned} 2x &= 8 \\ \tfrac{1}{2} \cdot 2x &= \tfrac{1}{2} \cdot 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Respuesta: El conjunto solución de la ecuación planteada en a) es $S = \{4\}$.

Comentario. Observar que si se intentara primero dividir por 2 en ambos miembros la ecuación $2x - 3 = 5$ se obtendría una nueva ecuación más complicada, a saber $\frac{2x-3}{2} = \frac{5}{2}$, aunque este procedimiento no sería erróneo.

(b) La diferencia entre esta ecuación y la ecuación a) es la presencia de los paréntesis que indica que el 2 multiplica a $(x - 3)$ y no solo a x. En este caso conviene comenzar dividiendo por dos a ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} 2(x - 3) &= 5 \\ \tfrac{1}{2} \cdot 2(x - 3) &= \tfrac{1}{2} \cdot 5 \\ x - 3 &= \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Ahora sumamos 3 a ambos lados

$$\begin{aligned} x - 3 + 3 &= \tfrac{5}{2} + 3 \\ x &= \tfrac{11}{2} \end{aligned}$$

Respuesta: El conjunto solución de la ecuación planteada en b) es $S = \{\frac{11}{2}\}$.

Comentario. La ecuación $2(x - 3) = 5$ también se puede resolver usando la propiedad distributiva.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $\frac{1}{3}(x - 2) - \frac{2x-1}{4} = 2 - \frac{2}{3}x$.

Esta ecuación presenta nuevas dificultades pues la incógnita aparece en ambos lados de la igualdad y en términos diferentes. Hay muchas maneras de proceder, mostramos una y dejamos al lector la inquietud de pensar en otras posibilidades.

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Usamos la propiedad distributiva para deshacernos de los paréntesis. Hay que tener en cuenta que la barra de fracción también funciona como un paréntesis y que en el término $-\frac{2x-1}{4}$ hay que distribuir el denominador 4 y el -1 que está multiplicando.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td colspan="2">$\frac{1}{3}(x-2)-\frac{2x-1}{4}=2-\frac{2}{3}x$
$\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\cdot 2-\frac{2x}{4}+\frac{1}{4}=2-\frac{2}{3}x$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Sacamos factor común x y operamos con los términos donde no interviene la variable</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\cdot 2-\frac{2x}{4}+\frac{1}{4}=2-\frac{2}{3}x$
$-\frac{1}{6}x-\frac{5}{12}=2-\frac{2}{3}x$</td><td>Cálculos auxiliares
$\frac{1}{3}x-\frac{2x}{4}=\frac{1}{3}x-\frac{x}{2}=(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})x=-\frac{1}{6}x$
$-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{4}=\frac{-8+3}{12}=\frac{-5}{12}$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Ahora aplicamos las propiedades uniformes sumando y multiplicando a ambos lados de la igualdad las cantidades convenientes. En un primer paso se suma $\frac{5}{12}$ y $\frac{2}{3}x$ para tener la variable de un solo lado de la ecuación y se opera para simplificar las expresiones</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$-\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}x=2+\frac{5}{12}$
$\frac{1}{2}x=\frac{29}{12}$
$x=2\cdot\frac{29}{12}=\frac{29}{6}$</td><td>Cálculos auxiliares
$-\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}x=(-\frac{1}{6}+\frac{2}{3})x=\frac{3}{6}x=\frac{1}{2}x$
$2+\frac{5}{12}=\frac{29}{12}$</td></tr>
<tr><td>Explicitación de la respuesta</td><td colspan="2">Respuesta: el conjunto solución es $S=\{\frac{29}{6}\}$.</td></tr>
</table>

Comentario. Recordar que si, en la ecuación, reemplazamos la incógnita x por una solución se debe cumplir la igualdad, es decir ambos lados de la ecuación deben dar lo mismo. Una medida sensata de verificar que la respuesta es correcta. Para ello, se reemplaza x por la solución y se realizan los cálculos indicados. Si obtenemos una igualdad podemos sentirnos tranquilos que la solución propuesta es correcta.

Ejemplo 6. (A veces no hay solución) Consideremos la ecuación

$$0\cdot x=1\ .$$

Es evidente que esta ecuación no tiene solución dado que el resultado de multiplicar cualquier número por cero es siempre cero. Por lo que ningún número puede ser solución. Luego, la ecuación $0 \cdot x = 1$ tiene por conjunto solución el conjunto vacío lo que se expresa escribiendo $S = \emptyset$.

Ejemplo 7. Resolver la ecuación $-3x + 5 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}(2 - 3x)$.

En este ejemplo vamos a proceder como en el ejemplo anterior, pero realizando varias operaciones en un mismo paso.

$-3x + 5 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}(2 - 3x)$	aplicamos la propiedad distributiva,
$-3x + 5 = -\frac{3}{2}x + 1 - \frac{3}{2}x = -3x + 1$	sumamos $3x$ y restamos 5 a ambos lados de la igualdad,
$0 \cdot x = -4$	para ningún número x se satisface esta igualdad.

Respuesta: no es posible que la multiplicación entre algún número y 0 tenga como resultado -4, por lo que el conjunto solución es vacío, en símbolos, $S = \emptyset$.

En algunas situaciones concretas saber resolver ecuaciones nos puede ayudar a tomar una decisión.

Ejercicio resuelto 6. Laura trabaja como vendedora en una empresa de telefonía celular "XX" y cobra un sueldo básico de \$1000 más un 20 % de comisión por ventas realizadas en el mes. Una amiga le consigue un trabajo similar en otra empresa de telefonía celular "YY" en la que ella trabaja, pero allí cobran un sueldo básico de \$800 más una comisión de del 22 % por ventas realizadas.

(a) Comparar las ganancias de Laura en ambas empresas si las ventas realizadas en el mes fueran de \$4000.

(b) ¿Cuánto debe vender mensualmente Laura para cobrar lo mismo en ambas empresas?

Resolución.

1. En la empresa "XX", Laura cobraría \$1.000 más un 20% de las ventas que en el ejemplo ascienden a \$4.000. En total, la ganancia de Laura sería de

$$\$1.000 + \frac{20}{100}\$4.000 = \$1.800 \ .$$

En la empresa "YY", Laura cobraría \$800 más un 22% de las ventas que en el ejemplo ascienden a \$4.000. En total, la ganancia de Laura sería de

$$\$800 + \frac{22}{100}\$4.000 = \$1.680 \ .$$

Respuesta: Laura ganaría más en la empresa "XX" puesto que en dicha empresa sus ganancias serían de \$1.800, mientras que en la empresa "YY" serían de \$1.680 .

(a) Ahora el valor de las ventas es desconocido y, por lo tanto, juega el papel de incógnita y lo llamamos x, en resumen,

x representa el valor de las ventas mensuales.

Repasando lo que se hizo en el ítem anterior, vemos que las ganancias en la empresa "XX" se calculan según la siguiente fórmula

$$\text{Ganancias en “XX”} = 1000 + \tfrac{20}{100}x.$$

Análogamente, las ganancias en la empresa "YY" se calculan según la siguiente fórmula

$$\text{Ganancias en “YY”} = 800 + \tfrac{22}{100}x.$$

Como queremos averiguar el valor de x para que ambas ganancias coincidan planteamos la ecuación

$$1000 + \frac{20}{100}x = 800 + \frac{22}{100}x \ .$$

Ahora resolvemos esta ecuación como en los ejemplos anteriores y se obtiene

$$1000 - 800 = \frac{22}{100}x - \frac{20}{100}x \iff 200 = \frac{2}{100}x \iff x = 200 \cdot \frac{100}{2} = 10.000 \ .$$

Respuesta: Laura ganaría lo mismo en ambas empresas si sus ventas alcanzaran un valor de \$10.000 .

Ejercicio resuelto 7. Un mago propone el siguiente truco a su público. Piensen un número; súmenle 4; multipliquen al resultado por 3; réstenle el número elegido y recuerden ese resultado. Ahora multipliquen al número elegido por 2 y luego súmenle 8. Por último, resten este último valor al resultado que guardaron. El mago afirma que todos obtuvieron como resultado 4. ¿Es cierto lo que dice el mago para cualquiera sea el número elegido?

Resolución.

En primer lugar hay que establecer cuál es la incógnita o variable. Evidentemente, lo que no sabemos es el número que cada persona del público piensa. A esta variable la llamamos x. Ahora hay que traducir al lenguaje simbólico las instrucciones del mago:

Piensen un número	x
Suménle 4	$x+4$
Multipliquen el resultado por 3	$3(x+4)$
réstenle el número elegido y recuerden ese resultado.	$3(x+4)-x$
Ahora multipliquen al número elegido por 2 y luego súmenle 8	$2x+8$
resten este último valor al resultado que guardaron	$3(x+4)-x-(2x+8)$

En lenguaje simbólico, el mago pide que se calcule

$$3.(x+4)-x-(2x+8)$$

y afirma que, independientemente del número que se elija se cumple que

$$3.(x+4)-x-(2x+8)=4\ .$$

Para decidir si lo que dice el mago es cierto resolvemos la ecuación planteada:

$$3.(x+4)-x-(2x+8)=4 \iff 3x+12-x-2x-8=4 \iff 4=4\ .$$

Concluimos que el conjunto solución de la ecuación es el de los reales, en símbolos $S=\mathbb{R}$.

Respuesta: Cualquiera sea el número elegido (el valor de x) el cálculo propuesto da 4. Así, lo que dice el mago es cierto.

Trabajo práctico 17

Ejercicio 1.

(a) Verificar que $\frac{29}{6}$ es solución de la ecuación del ejemplo 5.

(b) Dar un ejemplo de una ecuación cuyo conjunto solución sea vacío.

(c) Las ecuaciones estudiadas en este apartado tienen diferentes tipos de conjuntos solución ¿Cuáles son? ¿Cómo se los identifica? Clasificar de acuerdo a su conjunto solución las ecuaciones que se trabajaron en el texto hasta ahora.

(d) Resolver las siguientes ecuaciones (esto incluye la indicación, en cada caso, del conjunto solución).

i) $3x-3\cdot(x+2)=1$ ii) $3x-3\cdot(x+2)=-6$ iii) $4x-3\cdot(x+2)=0$

Ejercicio 2. Resolver la ecuación $3(2x+1)=7$ usando la propiedad distributiva y sin usarla.

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones. Indicar, en cada caso, el conjunto solución:

(a) $x - \frac{1}{3} \cdot (2x-1) = 3 - \frac{1-x}{2}$

(b) $\frac{7x-2}{8} + x = 4(\frac{1}{2}x - 1) - \frac{x}{8}$

(c) $-3x - 1 - 2x - 1 = -5(x - \frac{2}{5})$

(d) $-3x - 1 - 2x - 1 = -5(x + \frac{2}{5})$

Ejercicio 4. Decidir si $x = \frac{1}{3}$ es solución de la ecuación $3x - 1 = \frac{x-\frac{1}{3}}{7}$ sin resolver.

Ejercicio 5. Un taxi cobra $\$2,8$ la bajada de bandera y $\$3,2$ por cada kilómetro recorrido. Determinar la distancia recorrida para un viaje que costó $\$71,60$.

Ejercicio 6. El precio de una remera con el 20% de descuento es de \$12. ¿Cuál es el precio de lista? (resolverlo mediante ecuaciones).

Ejercicio 7. Tres hermanos, Pedro, Luis y Pablo, reciben una herencia. En el testamento queda establecido que Pedro debe recibir un tercio del total, Luis un medio y Pablo un millón de pesos ¿Cuánto recibe cada uno?

Ejercicio 8. Una persona desea refaccionar su casa y decide solicitar a un crédito. El banco le ofrece una interesante oportunidad con el sistema alemán, según el cual la cuota disminuye a medida que pasa el tiempo pues con este sistema se paga una parte del monto otorgado por mes (en otros sistemas, con las primeras cuotas se paga solamente el interés). Para un crédito a dos años con un interés del 1%, la cuota mensual se calcula dividiendo el monto del crédito entre las 24 cuotas (cuota pura) más el 1% del capital solicitado -que le queda por saldar al momento del pago de la cuota. Se pide calcular lo siguiente:

(a) Si el crédito es de \$12.000 a pagar en 24 cuotas, ¿de cuánto será la primera cuota? ¿De cuánto será la segunda cuota? ¿y la quinta?¿y la décimoquinta? ¿y la última?

(b) Determinar una expresión algebraica que permita calcular lo que se deberá pagar en la cuota n.

(c) ¿En qué cuota pagará \$585?

2.2 Ecuaciones cuadráticas

En las expresiones algebraicas usadas para responder a los problemas planteados anteriormente nunca se tuvo que multiplicar a la variable por sí misma. En el caso de los problemas con baldosas esto obedece a que estuvimos calculando la cantidad de baldosas necesarias para cubrir el perímetro de una figura. Cuando se pasa al trabajo con áreas de figuras las variables suelen estar elevadas al cuadrado. Algo similar ocurre cuando se usa el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 8. Calcular, en los casos en que tenga sentido, el lado faltante de los siguientes triángulos rectángulos:

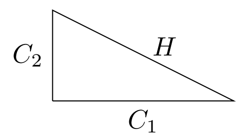
(a) uno de los catetos mide 4 y la hipotenusa mide 6,

(b) uno de los catetos y la hipotenusa miden lo mismo,

(c) un cateto mide 5 y la hipotenusa mide 4.

Resolución.

(a) Para calcular lo pedido en el inciso (a) se necesita recurrir al teorema de Pitágoras



$$H^2 = C_1^2 + C_2^2$$

donde H, C_1 y C_2 son las longitudes de la hipotenusa y los catetos respectivamente.
Llamamos x a la longitud del cateto que no conocemos.

$$x^2 + 4^2 = 6^2 \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad x^2 = 20 \ .$$

Por lo discutido en el capítulo sobre números $\sqrt{20}$ es el único número positivo cuyo cuadrado es 20. Pero, ¡cuidado! $-\sqrt{2}0$ también es solución de la ecuación $x^2 = 20$. De hecho, $-\sqrt{20}$ y $\sqrt{20}$ son las dos únicas posibilidades. Llegamos a la conclusión de que el conjunto solución de la ecuación $x^2 = 20$ es

$$S = \{-\sqrt{20}, \sqrt{20}\} \ .$$

Al retomar el contexto, se ve que x no puede ser negativo, y por lo tanto la respuesta a este inciso es la siguiente.

Respuesta: El cateto faltante mide $\sqrt{20}$.

(b) La respuesta en este caso es obvia, no se puede construir un triángulo rectángulo tal que su hipotenusa y uno de los catetos midan lo mismo. De todas formas, cabe la pregunta de que hubiéramos obtenido si se hubiera recurrido al teorema de Pitágoras. El teorema de Pitágoras nos lleva a la ecuación $x^2 + C^2 = H^2$ pero como $H = C$ resulta

$$x^2 = 0 \ .$$

El único número que elevado al cuadrado da 0 es el mismo 0, por lo que el conjunto solución de la ecuación es

$$S = \{0\} \ .$$

Como x representa la longitud de un lado de un triángulo el valor $x = 0$ no tiene sentido y la respuesta, teniendo en cuenta el contexto, es la que sigue:

Respuesta: No es posible construir un triángulo rectángulo tal que la longitud de su hipotenusa y la de uno de los catetos coincidan.

(c) Nuevamente en este caso se ve claramente que es imposible construir un triángulo rectángulo que cumpla con las condiciones dadas. Si se hubiera intentado usar el teorema de Pitágoras para encontrar el supuesto triángulo se llega a la ecuación

$$x^2 = 4^2 - 5^2 = -9 \ .$$

Esta ecuación no tiene solución pues el cuadrado de cualquier número es no negativo. Por lo tanto, el conjunto solución es

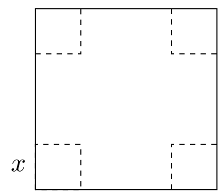
$$S = \emptyset \ .$$

La respuesta al problema es la siguiente:

Respuesta: No es posible construir un triángulo rectángulo que cumpla con las condiciones dadas.

Ejemplo 9.

Se construye una caja de cartón recortando cuatro cuadrados iguales en las esquinas de una plancha cuadrada siguiendo la línea punteada que se muestra en la figura. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes. Si la plancha de cartón tiene lados de 10cm



(a) calcular la superficie de la base para las longitudes x de los lados de los cuadrados indicadas en cada uno de los siguientes casos:
i) 2cm, ii) 5cm.

(b) Determinar para cuáles longitudes de los lados de los cuadrados tiene sentido el armado propuesto.

(c) ¿Cúanto deben medir los lados de los cuadrados para que la superficie de la base sea de 9cm^2.

Resolución. Vamos a resolver el problema propuesto quitando las unidades para simplificar la notación.

(a) Si $x = 2$, cada lado de la base de la caja mide $10 - 2 \cdot 2 = 6$ y, en consecuencia, la superficie de la base es $s = 6 \cdot 6 = 36$.

Si $x = 5$, cada lado de la base de la caja mide $10 - 2 \cdot 5 = 0$ y, en consecuencia, la construcción propuesta no tiene sentido.

(b) Para resolver el problema ignoramos ciertas variables que intervienen en la situación desde un punto de vista práctico tales como el grosor del cartón, el filo de la tijera, etc. Con esta salvedad se puede armar la caja para cualquier valor x que cumpla $0 < x < 5$.

Respuesta: Tiene sentido armar la caja si la longitud de los lados de los cuadrados es mayor que 0 y menor que 5.

(c) Siguiendo las cuentas que hicimos en (a), los lados de la base de la caja deben medir $10 - 2x$ y por lo tanto, la superficie de la base mide $(10 - 2x)^2$. El ejercicio pide encontrar x para que la superficie de la base sea 9, por lo tanto se tiene que cumplir la igualdad

$$(10 - 2x)^2 = 9 \ .$$

Para trabajar la resolución de este tipo de ecuaciones, nos olvidaremos del contexto para buscar su conjunto solución y volveremos al problema para dar la respuesta.

Hay dos números cuyo cuadrado es 9, a saber 3 y -3. Por lo que, tenemos dos posibilidades

$$10 - 2x = 3 \quad \text{o} \quad 10 - 2x = -3 \ .$$

Despejando, se obtienen dos valores posibles para x,

$$x = \frac{3 - 10}{-2} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad \text{o} \quad x = \frac{-3 - 10}{-2} = \frac{13}{2} = 6,5 \ .$$

Luego, el conjunto solución de la ecuación es

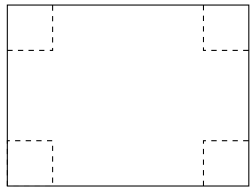
$$S = \{3,5;\ 6,5\} \ .$$

Al volver al contexto del problema y, en particular, lo discutido en el ítem 2, nos damos cuenta de que la solución $x = \frac{13}{2} = 6,5$ no es un valor aceptable para x.

Respuesta: El valor de x para que la superficie de la base de la caja sea de 9cm^2 es $x = 3,5\text{cm}$.

Ejemplo 10.

Se desean fabricar cajas de cartón de base rectangular con el mismo procedimiento del ejemplo anterior, pero esta vez la plancha tiene forma rectangular. Los lados del rectángulo de cartón miden 20cm y 15cm .



x

(a) Indicar para cuáles longitudes de los lados de los cuadrados que se recortan tiene sentido el armado propuesto.

(b) ¿Cúanto deben medir los lados de los cuadrados recortados para que la superficie de la base de la caja sea de 100cm^2.

Resolución:

(a) Razonando como en el ejercicio anterior nos damos cuenta que x, $15-2x$ y $20-2x$ deben ser positivos, luego $0 < x < 7,5$.

(b) Dejando de lado las unidades, la base de la caja (una vez armada) es un rectángulo de lados $20-2x$ y $15-2x$, por lo que su superficie es $(20-2x)(15-2x)$. Se desea que la superficie de la base de la caja sea de 100, entonces debemos resolver la ecuación

$$(20-2x)(15-2x) = 100 \ .$$

Para quitar los paréntesis usamos la propiedad distributiva y se obtiene

$$(20-2x)(15-2x) = 20 \cdot 15 + 20(-2x) - 2x \cdot 15 - 2x(-2x),$$

operando resulta

$$300 - 40x - 30x + 4x^2 = 300 - 70x + 4x^2 \ .$$

La ecuación original se transformó en

$$300 - 70x + 4x^2 = 100 \quad \text{o} \quad 200 - 70x + 4x^2 = 0 \ .$$

La ecuación de arriba es una ecuación cuadrática completa escrita en forma desarrollada, para resolver este tipo de ecuaciones disponemos de la siguiente fórmula.

Fórmula resolvente para ecuaciones cuadráticas. Una ecuación cuadrática es, en general, una ecuación del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a,\ b \text{ y } c \text{ números reales y } a \neq 0 \ .$$

Se pide que $a \neq 0$ para conservar el término cuadrático y que no se transforme en una ecuación lineal. Para encontrar las soluciones se dispone de la fórmula resolvente que dice que las soluciones tienen la forma

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{si } b^2 - 4ac \geq 0.$$

En nuestro ejemplo, $a = 4$, $b = -70$ y $c = 200$, al aplicar la fórmula se obtiene

$$x_{1,2} = \frac{70 \pm \sqrt{(-70)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 200}}{2 \cdot 4} = \frac{70 \pm \sqrt{1700}}{2 \cdot 4} = \frac{70 \pm 10\sqrt{17}}{2 \cdot 4} = \frac{35}{4} \pm \frac{5}{4}\sqrt{17}$$

y, aproximadamente, $x_1 = \frac{35}{4} + \frac{5}{4}\sqrt{17} \approx 13,90$ y $x_2 = \frac{35}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{17} \approx 3,59$.

De acuerdo a las restricciones planteadas por el problema y explicitadas en el ítem (a), solo x_2 tiene sentido.

Respuesta: El lado de los cuadrados debe medir $x_2 = \frac{35}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{17}\,\text{cm} \approx 3,59\,\text{cm}$.

Raíces de ecuaciones cuadráticas. En este apartado se estudia el conjunto solución de las ecuaciones cuadráticas. Para ello, se pide completar la siguiente tabla:

Ecuación	Conjunto solución	Cantidad de soluciones
$x^2 - 5x + 6 = 0$		
$2x^2 - 4x + 2 = 0$		
$-x^2 + 3x - 5 = 0$		

Revisando las ecuaciones resueltas, indicar qué condición debe darse para que una ecuación cuadrática tenga dos, una o ninguna solución ¿ Podría tener más de dos?

Determinación del conjunto solución según el discriminante. En resumen, la cantidad de soluciones reales que tiene una ecuación cuadrática depende del número $b^2 - 4ac$ que se llama discriminante y se lo denota con la letra griega mayúscula Δ (delta). Resumir las posibles situaciones completando el siguiente cuadro.

Ecuación	$\Delta = b^2 - 4ac$ **(discriminante)**	**Cantidad de soluciones**
$ax^2 + bx + c = 0$	positivo	
$a \neq 0$		una única solución real
		no hay soluciones reales

Trabajo práctico 18

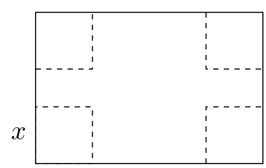
Ejercicio 1. Calcular, en el caso en que tenga sentido, el lado faltante de los siguientes triángulos rectángulos.

(a) Uno de los catetos mide 3 y la hipotenusa mide 5.

(b) Uno de los catetos y la hipotenusa miden lo mismo.

(c) Un cateto mide 6 y la hipotenusa mide 3.

Ejercicio 2. Se construye una caja de cartón recortando cuatro cuadrados iguales en las esquinas de una plancha rectangular siguiendo la línea punteada que se muestra en la figura. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes. Si la plancha de cartón tiene lados de 20cm y 30cm se pide:



(a) calcular la superficie de la base para las longitudes x de los lados de los cuadrados indicadas en cada uno de los siguientes casos:
i) 2cm, ii) 5cm iii) $9,5$cm

(b) Determinar para cuáles longitudes de los lados de los cuadrados tiene sentido el armado propuesto.

(c) ¿Cúanto deben medir los lados de los cuadrados para que la superficie de la base sea de 90cm^2.

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones

(a) $5x^2 - 7 = 9$	(b) $(x+2)^2 = 9$	(c) $-3x^2 - 3x + 2 = 0$
(d) $x^2 - x - 1 = 0$	(e) $-2x^2 = x + 2$	(f) $x^2 = 2x - 1$
(g) $16 + x^2 = 8x$	(h) $1 - x = 2x^2$	(i) $x \cdot (x-3) = 10$

Ejercicio 4. Decidir si los números $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ y $-0,414213$ son soluciones de la ecuación $3x^2 - 6x - 3 = 0$. ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación?

Ejercicio 5. Dar ejemplos de ecuaciones cuadráticas que tengan 1 solución real.

2.3 Ejemplos de resolución de distintos tipos de ecuaciones

El objetivo de este apartado es trabajar sobre algunas cuestiones técnicas que suelen ser útiles para la resolución de problemas.

Ejemplo 11. Resolver la ecuación $2x^2 + 5x = 0$.

Resolución: Veamos dos formas de resolver esta ecuación.

Forma 1: Podemos empezar por lo siguiente: $2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -5x$ Ahora, deberíamos dividir miembro a miembro por x ("pasar" x dividiendo). Pero esta operación tiene un inconveniente: no puede realizarse si $x = 0$ y, en principio, x puede ser 0 ya que el dominio de definición de la ecuación dada es $\mathbb{R}$. Entonces, hagamos la consideración $x \neq 0$ y sigamos operando, teniendo en cuenta que todo lo que hagamos desde ahora vale con $x \neq 0$,

$$2x^2 + 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = -5x,$$

para $x \neq 0$,

$$\frac{2x^2}{x} = -\frac{5x}{x} \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -5/2.$$

Para completar la resolución tenemos que analizar el caso de $x = 0$, que ha sido separado debido a nuestra forma de resolver la ecuación y no a una restricción en el dominio. Si reemplazamos en la ecuación original $x = 0$ y realizamos las operaciones indicadas se obtiene $2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 = 0$. Es decir que $x = 0$ verifica la ecuación. Por lo tanto, debemos incorporar a $x = 0$ al conjunto de soluciones. Así, $S = \{-5/2, 0\}$.

Otra forma: observemos que a la expresión algebraica que compone la ecuación, podemos escribirla de modo equivalente, extrayendo factor común:

$$2x^2 + 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (2x + 5) = 0 \ .$$

Observemos la ventaja de tener escrita la ecuación en esta nueva forma. La expresión $x \cdot (2x+5)$ es el producto de dos números desconocidos. Es claro que si al multiplicar números (dos, tres o cualquier cantidad), el resultado es 0, eso equivale a decir que alguno de esos números es 0 (uno, varios o todos, pero seguro que por lo menos uno). Aplicando esto, caben dos alternativas: x es cero o $2x + 5$ es cero. Luego, decir que $x \cdot (2x + 5) = 0$ es equivalente a decir que $x = 0$ o que $2x + 5 = 0$. La primera alternativa ya nos da el valor de x ($x = 0$), mientras que despejando de la segunda obtenemos $x = -5/2$. Luego, $S = \{0, -5/2\}$.

Escribamos la propiedad sobre la que se basa la resolución:

Propiedad. si el producto de dos o más números es cero entonces alguno (por lo menos uno) de ellos es 0. En símbolos (para el caso de dos números): Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

Esto último requiere una aclaración. En Matemática usamos el "ó" en un sentido amplio. Esto significa que cuando decimos "$a = 0$ ó $b = 0$" no estamos diciendo que $a = 0$ y que $b \neq 0$ o que $b = 0$ y que $a \neq 0$, sino que contemplamos también la posibilidad de que ambos sean cero.

Nota: en la resolución de la ecuación hemos utilizado como recurso la extracción de un factor común. Realizamos a continuación una referencia importante a él.

El factor común y la propiedad distributiva: la extracción de un factor común no es otra cosa que la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Recordemos esta última:

Propiedad distributiva. Cualesquiera sean a, b y c reales vale que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Si partimos del primer miembro de la igualdad, tenemos una multiplicación $a \cdot (b+c)$. La aplicación de la distributiva "expande" la expresión y transforma esa multiplicación en una suma: $a \cdot b + a \cdot c$. Si partimos del segundo miembro, $a \cdot b + a \cdot c$ y extraemos factor común a, obtenemos $a \cdot (b + c)$. En este caso, decimos que hemos "extraído un factor común". Queda de manifiesto que tanto la propiedad distributiva (de la multiplicación respecto de la suma) y la extracción de factor común son la misma propiedad, solo diferenciadas por si el interés está en pasar del primer miembro al segundo o viceversa, esto es, si queremos transformar una multiplicación en suma o una suma en multiplicación.

Ejemplo 12. Resolver la ecuación $\frac{2x-3}{x+2} = 3$.

Resolución. Esta ecuación presenta la particularidad de que la variable aparece en el denominador. Para resolverla, la transformamos en otra ecuación equivalente en la que la variable aparezca solo en el numerador. Pero además, por aparecer como divisor, la variable presenta una restricción: en este caso, no puede valer -2 (ya que estaríamos dividiendo por 0). Cuando lleguemos al valor (o valores) de x, debemos comprobar que entre ellos no esté -2 (si fuera así, lo descartamos). Para lograr eso, deberemos "pasar" $x+2$ multiplicando al segundo miembro (sabemos que esta forma "coloquial" equivale a multiplicar a ambos miembros por $x+2$). Entonces

$$2x - 3 = 3 \cdot (x + 2) \ .$$

La ecuación resultante es una ecuación lineal como las que ya sabemos resolver, luego

$$2x-3 = 3\cdot(x+2) \Longleftrightarrow 2x-3 = 3x+6 \Longleftrightarrow -3-6 = 3x-2x \Longleftrightarrow -9 = x \Longleftrightarrow x = -9 \ .$$

Como el valor hallado es un valor posible para la variable, esto es, no es igual a -2, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{-9\}$.

Ejemplo 13. Resolver la ecuación $\sqrt{x+4} = 1$

Resolución. Evidentemente el problema que propone la resolución de esta ecuación es deshacerse de la raíz cuadrada. Con este objeto, recurrimos a la siguiente propiedad de las raíces (estudiada en el capítulo de números)

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{si} \quad a \geq 0 \ .$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene que

$$(\sqrt{x+4})^2 = 1^2 \quad \text{si } x + 4 \geq 0 \ ,$$

y la aplicación de la propiedad nos permite deducir que

$$x + 4 = 1 \quad \text{equivalentemente} \quad x = -3,$$

como $-3 + 4 > 0$, efectivamente, -3 es la solución a la ecuación.
Respuesta: El conjunto solución de la ecuación es $S = \{-3\}$.

Trabajo práctico 19

Ejercicio 1. Resolver las siguientes ecuaciones aplicando las diversas técnicas discutidas a lo largo de esta sección. Intentar aplicar más de una para cada caso.

(a)$(x-5)\cdot(3x-1) = 1$	(b) $x(5x-2) + x^3 = 0$	(c) $\frac{x-2}{3x-1} = 1$
(d) $\sqrt{x} = \frac{4}{3}$	(e) $(x-5)\cdot x - (1-2x)(x-5) = 0$	(f) $x^3 = \frac{27}{4}$
(g) $x(x+1) = 3(x+1)$	(h) $x + \frac{1}{x+3} = -1$	(i) $\frac{x-2}{x} = \frac{2x}{x-3}$

Ejercicio 2. ¿Qué números enteros cumplen que si se los multiplica por su consecutivo y luego se les resta 2 dan por resultado 0?

Ejercicio 3. Si al cuadrado del consecutivo de un número, lo multiplicamos por 3 se obtiene el mismo resultado que si al doble del cuadrado de ese número le sumamos ocho veces dicho número y al resultado lo incrementamos en seis. Hallar el único número natural que verifica la condición anterior.

Ejercicio 4. El precio de un producto aumentó durante dos meses seguidos en un mismo porcentaje. Calcular dicho porcentaje de aumento si se sabe que el aumento acumulado durante los dos meses fue del 5%.

Ejercicio 5. Para argumentar en Matemática.

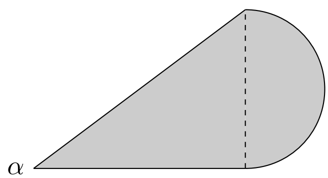
1. ¿Por qué la ecuación $(x-1)(x-2)=0$ tiene las mismas soluciones que la ecuación $x^2-3x-1=-3$?
2. Las ecuaciones $\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$ y $x-1=0$ ¿tienen el mismo conjunto solución? ¿Por qué?
3. Si se sabe que el discriminante de una ecuación cuadrática es mayor o igual que cero, ¿qué puede decir de las soluciones de la ecuación?
4. Extraer una conclusión a partir de las siguientes condiciones y explicar cómo la obtuvo:
   (a) Cualquier ecuación cuadrática tiene a lo sumo dos soluciones reales.
   (b) Se da una determinada ecuación que no tiene dos raíces reales.

   ¿qué puede decir del discriminante de la ecuación en cada caso?
5. Decidir si son válidos o no los siguientes argumentos y explicar.
   (a) Dado que sólo existen raíces cuadradas de números positivos, entonces la ecuación $\sqrt{-x}=2$ no tiene solución en el conjunto $\mathbb{R}$.
   (b) Si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo entonces o no tiene solución o tiene una sola solución real.

2.4 ¿Es Geometría o es Algebra?

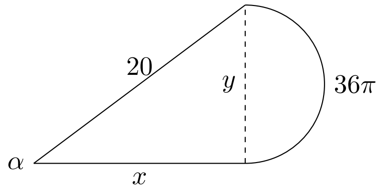
En esta sección se proponen ejercicios de índole geométrica que pueden abordarse con las diversas técnicas aprendidas en esta sección.

Ejercicio resuelto 8.
La figura de la derecha está compuesta por un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 20cm y un semicírculo de área $36\pi\text{cm}^2$. Hallar el área de la figura y la medida del ángulo α.



Resolución:

Para calcular el área de la figura es necesario conocer las longitudes de los catetos. Llamamos x e y a estas longitudes. Es conveniente consignar los datos y los nombres de las incógnitas en la figura.



El área de un círculo de radio r es igual a $\pi \cdot r^2$ y la de un semicírculo es $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$. En nuestro ejemplo, el radio del semicírculo es $\frac{y}{2}$ y su área es 36π, por lo que

$$\frac{1}{2}\pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 36\pi \ .$$

A continuación se despeja y, es conveniente hacerlo en varios pasos,

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{y}{2}\right)^2 = 2 \cdot 36 \\
&\tfrac{y}{2} = 6 \cdot \sqrt{2} \qquad \text{ó} \qquad \tfrac{y}{2} = -6 \cdot \sqrt{2} \\
&y = 12 \cdot \sqrt{2} \qquad \text{ó} \qquad y = -12 \cdot \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Como y es una longitud, la solución negativa no tiene sentido y por lo tanto $y = 12 \cdot \sqrt{2}$.
Resultado parcial: $y = 12 \cdot \sqrt{2}$.

Con este resultado parcial, es posible calcular la longitud del otro cateto, es decir, el valor de x

$$20^2 = x^2 + (12 \cdot \sqrt{2})^2 \iff 400 = x^2 + 288 \iff x^2 = 112.$$

En principio, $x = \sqrt{112}$ o $x = -\sqrt{112}$, pero como x representa una longitud, resulta $x = \sqrt{112}$.
Resultado parcial: $x = \sqrt{112}$.

Con estos datos podemos proceder a calcular el área de la figura,

área de la figura $=$ área del triángulo+área del semicírculo $= \frac{x \cdot y}{2} + 36\pi$

área de la figura $= \frac{\sqrt{112} \cdot 12 \cdot \sqrt{2}}{2} + 36\pi = 6\sqrt{224} + 36\pi \approx 202,9$

Respuesta parcial: El área de la figura es $6\sqrt{224} + 36\pi \approx 202,9$.

El ángulo α se puede calcular usando, por ejemplo, el seno:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{20} \approx 0,85 \ .$$

Por lo tanto, $\alpha \approx 58^o$.

Respuesta parcial: El ángulo α mide aproximadamente 58^o.

Respuesta: El área de la figura es $6\sqrt{224} + 36\pi \approx 202,9\text{cm}^2$ y el ángulo α mide aproximadamente 58^o.

Trabajo práctico 20

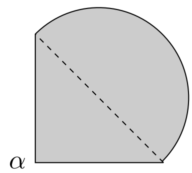
Ejercicio 1. A partir de un cuadrado se obtiene otro incrementando en 5 unidades la medida de su lado. El área del nuevo cuadrado supera en 70 al área del cuadrado inicial. ¿Cuál es la medida de lado del cuadrado inicial?

Ejercicio 2. ABC es un triángulo equilátero (sus lados son iguales y sus ángulos también lo son).

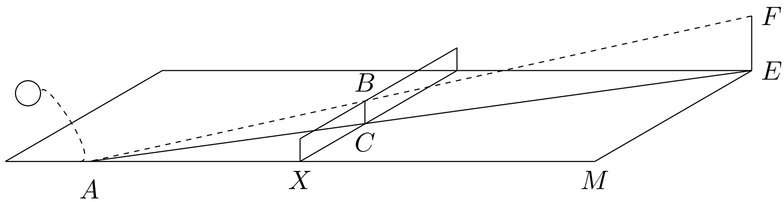
(a) ¿Cuál sería su área si uno de sus lados midiera 4 cm?

(b) ¿Cuál sería su perímetro si su área fuera $\sqrt{3}$ cm^2?

Ejercicio 3. La figura está compuesta por un triángulo rectángulo en α cuyos catetos son iguales y un semicírculo cuyo diámetro es la hipotenusa del triángulo. Calcular el área y el perímetro de la figura sabiendo que la longitud de la semicircunferencia es $5\,\pi$.

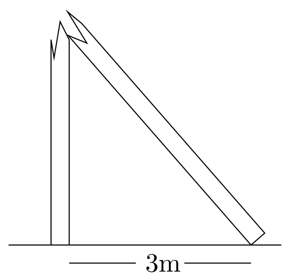


Ejercicio 4. Un tenista realiza un saque golpeando la pelota con su raqueta a una cierta altura. La pelota se sirve desde una esquina de la cancha a una altura de $2,4$m, cruza la cancha en diagonal (se asume que la trayectoria es una línea recta), pasa justo sobre la red y pica sobre el borde interno. Calcular la distancia del punto donde pica la pelota a la red.



Es útil conocer las dimensiones de una cancha de tenis: Largo: 23,77 m, ancho interno: 8,23 m, altura de la red: 1 m (promedio).

Ejercicio 5. Durante una tormenta un poste se quebró como se muestra en la figura. Se sabe que el poste mide 8 metros, que la punta del poste quedó a 3 metros del pie del poste y que el ángulo que forma la parte baja del poste con el piso es de 90^o. Calcular la altura de la quebradura.



Ejercicio 6. Se quiere plantar con pasto un cantero con forma de triángulo isósceles cuyo perímetro es de 17 m y los lados iguales son 2 m más largos que el lado desigual. El rendimiento de las semillas de ese pasto es de 5 g/m^2. ¿Cuántos gramos hay que sembrar?

Capítulo 5

Modelización

1 Comenzando a conocer las funciones.

1.1 Breve explicación sobre modelización matemática.

Conocer la realidad circundante al hombre es una de los propósitos de la Ciencia y por lo tanto también de la Matemática. Conocer puede ser entendido como dar cuenta, explicar, desentrañar razones, relaciones y evoluciones de los fenómenos y situaciones de la realidad.

Una de las características del saber científico es que éste proviene de un modo sistemático, metódico y gracias al uso de herramientas y teorías que han demostrado ser necesarias, y útiles, para diversas acciones como: resolver, explicar, fundamentar o predecir. Muchos de los fenómenos y situaciones que a la ciencia le interesa estudiar son los hechos y manifestaciones, sociales, tecnológicos y naturales. Para abordar alguno de ellos disponemos de saber matemático que permite su estudio, para otros todavía no. Nuestro propósito en este capítulo es introducir elementos que sirven para estudiar algunos fenómenos simples.

El proceso completo que nos permite estudiar matemáticamente algunos fenómenos es el que llamamos modelización. Para simplificar la explicación sobre en qué consiste la modelización, dividiremos el proceso en tres partes que pueden darse en distintos momentos y una retroalimentarse de la otra.

- Parte inicial de la modelización, *abordaje de la situación problemática o del fenómeno*: en esta parte hacemos un reconocimiento del fenómeno y de la situación, la recortamos y la aislamos de la complejidad en la que aparece incluida, intelectualmente o experimentalmente. Identificamos las variables y constantes que intervienen en el fenómeno, reconocemos que se relacionan y luego mediante experimentación, observación o supuestos que acuerden con el funcionamiento del fenómeno, decimos cómo se relacionan.

- Parte central de la modelización, *construcción del modelo matemático*: La construcción consiste en encontrar la teoría y las herramientas matemáticas, que en su totalidad llamamos modelo matemático, que describen la relación entre las variables y permiten representarla. Esto es difícil en general. Nosotros veremos algunos casos donde la construcción del modelo consiste en definir una "función matemática".

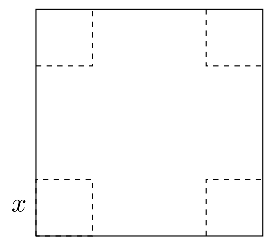
- Parte final de la modelización, *explicación del fenómeno y de su evolución*: el modelo matemático nos permitirá comprender mejor el fenómeno en su globalidad, además la manipulación de los objetos matemáticos definidos nos permitirá anticipar posibles alteraciones en el fenómeno y predecir su evolución bajo las condiciones creadas para el modelo.

Ejemplos de fenómenos modelizables:

- El crecimiento o decrecimiento de una población de bacterias,
- Concentración de sustancias sujetas a condiciones físico químicas controlables,
- Movimientos planetarios,
- Reacciones de mercado,
- Resistencia de materiales,

1.2 Relación entre variables.

Para entender qué son las variables y cómo se relacionan retomamos una de las situaciones del capítulo de Álgebra.
Se propone construir una caja de cartón recortando cuatro cuadraditos iguales en las esquinas de una plancha cuadrada siguiendo la línea punteada que se muestra en la figura. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes para armar la caja. Pensemos en una fabricación industrial de cajas mediante una máquina que realiza el proceso descripto arriba y que admite planchas de cartón de 10 cm de longitud. La medida de los lados de los cuadrados de las esquinas es regulable y se elige según las dimensiones deseadas para el producto final. Es conveniente por este proceso de fabricación a granel, para eventuales cálculos de costos por ejemplo, saber cómo varían las cantidades para diferentes cajas y lograr un una descripción matemática general.



De acuerdo a las posibilidades de fabricación, el fabricante observa que,

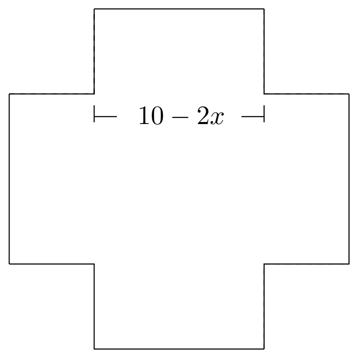
- a una longitud de 2 cm le corresponde una superficie de la base de la caja de $36\,\text{cm}^2$

- a una longitud de $2,5\,\mathrm{cm}$ le corresponde una superficie de la base de la caja de $25\,\mathrm{cm}^2$
- a una longitud de $4,8\,\mathrm{cm}$ le corresponde una superficie de la base de la caja de $0,16\,\mathrm{cm}^2$.

Y que podría seguir haciendo más cálculos ya que para cada valor de "la longitud de los lados de los cuadrados", al que denotamos con la letra x, es posible calcular "la superficie de la base de la caja" a la que denotamos y. Notar que ambas cantidades cambian para distintas cajas. En resumen,

a $x\,\mathrm{cm}$ de longitud de lado de cuadrado le corresponde $y\,\mathrm{cm}^2$ de superficie de la base.

El fabricante busca un procedimiento que le sirva para distintas cajas. Observa que una vez cortados los cuadraditos de las esquinas le queda un cuadrado central de lado igual a la longitud del lado de la plancha de cartón, 10 cm, menos dos veces la longitud del lado del cuadradito. Si en lugar de las cantidades se usan las letras que representan a dichas cantidades, lo que mide el lado del cuadrado central se representa por: $10 - 2x$. Para calcular la superficie hay que elevar esta última expresión al cuadrado. Por lo tanto, para cada longitud x la superficie y se calcula con la expresión



$$y = (10 - 2x)^2 \ .$$

El ejemplo visto muestra un procedimiento matemático usado en varios casos cuando hay cantidades variables, una dependiendo de la otra. En este ejemplo, esa dependencia se expresa mediante una fórmula en la cual es posible reemplazar cada uno de los valores numéricos que toma la variable independiente, realizar con él los cálculos indicados y obtener otro resultado numérico de la variable dependiente. Por ejemplo,

- a $x = 2$ le corresponde una superficie de la base de la caja de
$$y = (10 - 2 \cdot 2)^2 = 36,$$
- a $x = 2,5$ le corresponde una superficie de la base de la caja de
$$y = (10 - 2 \cdot 2,5)^2 = 25,$$
- a $x = 4,8$ le corresponde una superficie de la base de la caja de
$$y = (10 - 2 \cdot 4,8)^2 = 0,16.$$

Observar que como resultado de los cálculos realizados con un valor numérico se obtiene otro valor numérico y solamente uno.

Hasta aquí el fabricante contaría con un procedimiento aplicable a distintas medidas. Nos interesa ahora relacionar esto con nociones y notaciones matemáticos que nos permitan comprender lo que hicimos como un caso particular de modelización.

Vimos que hay dos cantidades en juego "la longitud de los lados de los cuadrados" y "la superficie de la base de la caja". La longitud de los lados de los cuadraditos se elige para ajustar la matriz de fabricación, la superficie de la base de la caja se calcula a partir de esta primera cantidad. Por eso a la primera la llamamos *variable independiente* y es usual denotarla con la letra x, y a la segunda la llamamos *variable dependiente* y es usual denotarla con la letra y.

Para denotar que a cada valor de la variable independiente, x, le corresponde un valor de la variable dependiente, y, se introduce una nueva letra que representa la *regla de correspondencia o regla de asignación*, que es el modo en que se describe cómo se relacionan las variables. Comúnmente, se usa la letra f para denotar dicha regla y entonces, la notación que indica la dependencia entre las variables es

$$y = f(x) \ .$$

En nuestro ejemplo,

- a $x = 2$ le corresponde $y = 36$, se denota $36 = f(2)$,
- a $x = 2,5$ le corresponde $y = 25$, se denota $25 = f(2,5)$,
- a $x = 4,8$ le corresponde $y = 0,16$, se denota $0,16 = f(4,8)$.

En la situación que estamos desarrollando, la regla de correspondencia está dada por una fórmula, esto se expresa:

$$y = f(x) = (10 - 2x)^2$$

o simplemente, $f(x) = (10 - 2x)^2$.

Observermos que la forma en que se construyen las cajas restringen los valores posibles para la longitud de los lados de los cuadrados. De hecho, para que se pueda armar una caja de esta forma la longitud de los lados de los cuadrados no puede ser mayor a 5cm. En esta situación tiene sentido tomar valores entre 0 y 5 cm. Para valores como el 0 y el 5, no podemos efectivamente armar con nuestras manos una caja, sin embargo hacemos una extensión de los valores evaluables en la fórmula y consideramos el intervalo de números reales $[0,5]$, es decir, que la variable x toma valores del intervalo $[0,5]$. Para cada uno de ellos su correspondiente es un número real, es decir que la variable y toma valores del conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Expresamos esto del siguiente modo: $f : [0,5] \to \mathbb{R}$.

Entonces el modelo matemático planteado es:

$$f : [0,5] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (10 - 2x)^2.$$

Uso del modelo planteado.

1. Indicar si para los siguientes valores es posible construir cajas según el proceso de fabricación considerado

a) -1 b) $1,5$ c) $5,01$.

2. Calcular si es posible armar una caja recortando cuadraditos con un valor para la superficie de la base de $81\,\mathrm{cm}^2$.

(a) No es posible construir una caja para el valor -1 ya que es un valor que no corresponde a ninguna medida por ser negativo, luego con el modelo matemático planteado no es posible calcular la superficie correspondiente a este valor. Esto no entra en contradicción con el hecho que el valor sí se puede reemplazar en la fórmula y si es posible hacer las operaciones aritméticas: $(10-2(-1))^2$; pero el modelo es más que una fórmula, también involucra las restricciones del fenómeno o del proceso, en este caso, de la caja que se construye a partir de una plancha. Esa restricción está expresada a través del intervalo $[0,5]$.

(b) Si la superficie de la base se desea de $81\,\mathrm{cm}^2$, deberíamos pensar en el planteo matemático que nos permite corroborar si se encuentra contemplado por el modelo dado. El valor 81 es el resultado de calcular una superficie, ¿con qué longitud de lado?, eso no se sabe de entrada sino que debemos averiguarlo. El planteo matemático es una ecuación del tipo:

$$(10-2x)^2 = 81.$$

cuya resolución es:

$$\begin{aligned} 10-2x &= \sqrt{81}, \text{ con } 10-2x \geq 0, \text{por ser long. de lado de la base} \\ 2x &= 10-9 \\ x &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Es posible construir una caja quitando un cuadradito de $\frac{1}{2}$ cm de lado, además $\frac{1}{2} \in [0,5]$.

1.3 Funciones para modelizar.

En la sección anterior nos referimos a un modelo en una situación de construcción de cajas. De modo informal, la descripción del mismo es que está conformado por una relación entre variables, expresada mediante una fórmula, con la característica de que una de esas variables tiene una restricción, impuesta por el hecho que trabajamos con medidas. En esta sección vamos a estudiar este tipo de modelos en forma descontextualizada. La herramienta que desarrollaremos para modelizar es una función numérica. La noción de *función* está generalmente asociada a la idea de *dependencia* y de *variación*. En un fenómeno hay "componentes" que van cambiando. Nos interesan aquellas componentes que pueden medirse cuantitativamente, es decir que se contabilizan o comparan con un patrón fijo de comparación. Como resultado del conteo o de la comparación debe obtenerse un número. Aquello que es susceptible de ser medido de la forma que se explicó antes se llama *magnitud*. En un fenómeno hay magnitudes que quedan fijas y otras que cambian. Una magnitud que cambia es una *variable*. Dada una magnitud variable, se designa con una misma letra a cualquiera de valores que resultan de la medición. Generalmente se usan las últimas del alfabeto: x, y, z, por eso es que hablamos de la *variable* x o *variable* y, etc.

Como ya dijimos, mediante una función se relacionan variables; el modo de hacerlo es asignando a cada valor de medida de una de ellas, un valor de medida de la otra, y sólo uno. Debemos entonces saber cuál es la variable de la cual partimos y cuál es la asignada. A la variable de la que partimos en la asignación, la llamamos *variable independiente* y los valores asignados corresponden a la *variable dependiente*. Muchas veces el mismo fenómeno nos indica cómo debemos escogerlas.

Los criterios para decidir cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente no son uniformes, dependen del fenómeno o del problema planteado. Algunos de esos criterios pueden ser:

- se determina como variable independiente aquella variable cuyo cambio no podemos alterar ni manipular, por ejemplo el "tiempo",
- se determina como variable independiente aquella que resulta más fácil de medir o que es dato en el problema,
- dadas dos variables, si una de ellas se obtiene por una regla de asignación más simple respecto a otra, entonces se la elige como dependiente.

Definición de función que vamos a utilizar. Dados dos conjuntos A y B, que consideraremos no vacíos, una *función* de A en B, que notamos $f : A \mapsto B$, es una correspondencia que a cada elemento de A le hace corresponder **uno y sólo un** elemento de B.

Según esta definición, para determinar una función es necesario indicar los conjuntos entre los cuales establecemos la correspondencia.

Dominio de una función. El conjunto formado por los elementos que tienen correspondiente, se llama *dominio* de la función, lo notamos $\operatorname{Dom} f$.

Codominio de una función. El conjunto B que contiene a los correspondientes, se llama *codominio*, lo notamos $\operatorname{Codom} f$.

Quiere decir que para una función necesitamos tres componentes:

- El dominio, $\operatorname{Dom} f$,
- El codominio o conjunto de llegada, $\operatorname{Codom} f$
- La correspondencia o regla de asignación que a cada elemento del dominio le asigna un único elemento del conjunto de llegada.

El elemento correspondiente de un valor x de A lo llamamos *imagen de* x, lo notamos $f(x)$ y pertenece a $\operatorname{Codom} f$. Si un valor $y \in \operatorname{Codom} f$ es imagen de algunos valores de variable independiente entonces a cada uno de los valores de $x \in \operatorname{Dom} f$ tales que $y = f(x)$ se lo llama *preimagen* de y. Es decir, x es preimagen de y si y sólo si $y = f(x)$.

El conjunto formado por todos los valores y del codominio que tienen preimagen se llama *imagen* de f y se anota $\operatorname{Im} f$.

Dada una función, puede plantearse que tengamos que:

- Calcular la imagen de un cierto valor dado a. En ese caso, debemos comprobar que dicho valor sea un valor posible de la variable independiente, es decir que pertenezca al dominio y luego aplicar la regla de asignación. Si dicha regla está dada por una fórmula, ésto consistiría en evaluar la misma, o sea reemplazar el valor y realizar los cálculos consignados. Esto correspondería entonces a hallar $y = f(a)$. Para cada valor de a hay un solo valor de y posible.

- Calcular la preimagen de un valor b, en ese caso si la regla de asignación está dada por una fórmula se plantea una ecuación: $b = f(x)$. Cuando existen soluciones de esa ecuación y las mismas pertenecen al $\operatorname{Dom} f$ dichas soluciones serán las preimágenes. En general, para un valor b perteneciente al codominio pueden obtenerse una, ninguna o varias preimágenes.

- Calcular la imagen f, en ese caso deberíamos ser capaces de decidir para cuáles b la ecuación $b = f(x)$ tiene solución.

Ejemplo 1. En el proceso de construcción de cajas descripto en la sección 1.2 se estudia la relación entre la longitud de los lados de los cuadraditos recortados y la superficie de la base de la caja. Se pide:

(a) Indicar variable independiente, dependiente, dominio, codominio y la regla de correspondencia de la función que modeliza la situación,

(b) calcular la imagen de $1,5$,

(c) calcular la preimagen de 81,

(d) decidir si 81 pertenece a la $\operatorname{Im} f$.

Resolución. (a) Para definir una función que modelice la situación hay que determinar las variables, el dominio, el codominio y la correspondencia o regla de asignación.

- *Variables.* De lo discutido anteriormente, ya sabemos que las variables son variable independiente: $x =$ longitud de los lados del cuadrado (en cm) variable dependiente: $y =$ superficie de la caja (en cm^2).

- *Dominio.* De acuerdo a lo discutido cuando se resolvió el problema de la caja, los valores de la variable independiente que tienen sentido en esta situación son los números reales entre 0 y 5. Luego, el dominio A de f es el conjunto de los números reales x tales que $0 \leq x \leq 5$. Esto se puede escribirse en símbolos como
$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x \leq 5\} = [0, 5]\ .$$
- *Codominio.* La variable dependiente y es siempre un número real, es decir, a cada x del dominio le corresponde un número real y, por lo que podemos tomar como codominio B de f al conjunto de los números reales, es decir,
$$B = \mathbb{R}\ .$$
- *Regla de asignación.* A cada longitud del lado del cuadrado x le corresponde una superficie de la base de la caja $y = (10 - 2 \cdot x)^2$. Esta asignación se puede expresar como sigue
$$y = f(x) = (10 - 2 \cdot x)^2.$$

(b) La imagen de $1,5$ se calcula reemplazando x por $1,5$ en la regla de asignación que en este ejemplo está dada por una fórmula

$$f(1,5) = (10 - 2 \cdot 1,5)^2 = 7 \cdot 7 = 49\ .$$

(c) Calcular la preimagen de 81 significa encontrar el valor de la abscisa x para el cual $f(x)$ es igual a 81, es decir, resolver la ecuación

$$81 = f(x) = (10 - 2x)^2\ .$$

Esto ya lo hicimos cuando usamos el modelo en el parágrafo anterior. De todas formas, lo repetimos aquí

$$\begin{aligned} 10 - 2x &= \sqrt{81},\ \text{con } 10 - 2x \geq 0, \text{porque } x \in \operatorname{Dom} f = [0, 5] \\ 2x &= 10 - 9 \\ x &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} \in \operatorname{Dom} f$, la preimagen de 81 es $\frac{1}{2}$. Para corroborarlo, calculamos $f(\frac{1}{2})$ y vemos que nos da efectivamente 81.

(d) Como la ecuación $81 = f(x)$ tiene solución, entonces 81 es un elemento de la imagen de f.

Ejemplo 2. Dosis de medicamentos. Retomamos el ejemplo sobre las dosis de medicamentos visto en el Capítulo Proporcionalidad y Geometría. En dicho ejemplo se estudia una presentación de un remedio que tiene una concentración de 750 miligramos de amoxicilina cada 5 mililitros de jarabe (750mg/5ml). Nos planteamos la cuestión de cuánto componente activo (amoxicilina) hay de acuerdo al volumen de jarabe. Es decir, podemos relacionar la magnitud “volumen de jarabe” y “peso del componente activo” puesto que sabemos que como consecuencia de la variación del volumen de jarabe se tiene una variación el peso del componente activo. En este ejemplo, podemos calcular como están vinculadas las variaciones y, de hecho, ya lo hicimos para algunos casos particulares. Procediendo como en la sección de proporcionalidad podemos calcular lo siguiente

- a 5 ml de jarabe le corresponden 750 mg de componente activo,
- a 1 ml de jarabe le corresponden 150 mg de componente activo,
- a 7 ml de jarabe le corresponden 1050 mg de componente activo.

Si con x denotamos la “cantidad de mililitros de jarabe”, que es la variable independiente y con y denotamos la “cantidad de miligramos de amoxicilina”, que es la variable dependiente, tenemos que

- a $x = 5$ le corresponde $y = 750$,
- a $x = 1$ le corresponde $y = 150$,
- a $x = 7$ le corresponde $y = 1050$.

Queremos saber cuál es el procedimiento general por el cual dado un valor x se obtiene su correspondiente valor y. Para ello, recordemos que estas cantidades varían proporcionalemente, y entonces,

$$\frac{y}{x} = \frac{750}{5} = \frac{150}{1} = \frac{1050}{7} = 150 \qquad \text{por lo que resulta,} \qquad y = 150 \cdot x \ .$$

Luego en esta situación, la regla de correspondencia está dada por la fórmula:

$$y = f(x) = 150 \cdot x.$$

y las variables son cantidades de las magnitudes *capacidad* y *peso* respectivamente, que no son negativas, es decir que pertenecen al conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}_{\geq 0}$ que también se puede escribir en notación de intervalo como $[0, \infty)$. Entonces el modelo matemático planteado es:

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad f(x) = 150 \cdot x.$$

Nota: En la definición de una función f hay que tener cuidado que el conjunto dominio $\operatorname{Dom} f$ contenga todos los valores de la variable independiente que se necesitan para describir el fenómeno y que además a cada uno de ellos se le pueda aplicar la regla de asignación definida. En cuanto al conjunto codominio $\operatorname{Codom} f$, éste debe contener las imágenes resultantes de la aplicación de dicha regla. Puede ser entonces que no haya una único codominio posible para la definición del modelo. En el caso anterior podríamos haberlo definido así

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 150 \cdot x$$

y también hubiese sido correcto.

Trabajo Práctico 21

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Cuáles son las ideas que están asociadas a la noción de función?

(b) ¿A qué se llama variable?

(c) ¿Qué hay que tener en cuenta para determinar una función?

(d) Proponer fenómenos que puedan ser modelizables. Explicar.

(e) En los siguientes fenómenos o situaciones, identificar variables y decidir cuál es independiente y cuál dependiente. Explicar.

- Movimiento de un auto que va por ruta 2 a Mar del Plata.
- Costo de servicio eléctrico.

Ejercicio 2. Acerca de la lectura.

(a) Explicar las definiciones de "dominio", "codominio", "imagen" y "preimagen".

(b) Explicar el procedimiento que se usa para calcular la imagen de un elemento del dominio cuando la función está determinada por una fórmula.

(c) Explicar el procedimiento que se usa para calcular la preimagen de un elemento del codominio cuando la función está determinada por una fórmula

Ejercicio 3. Se desean fabricar cajas de cartón de base rectangular recortando cuatro cuadrados iguales en las esquinas de una plancha rectangular de lados 20 cm y 15 cm. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes.

(a) En cada caso calcular, cuando sea posible, el valor de la superficie de la caja que se arma al recortar cuadrados de

i) $1,5$ cm   ii) 5 cm   iii) $7,4$ cm   iv) $7,5$ cm   v) 0 cm   vi) 10 cm

(b) Explicar para cuáles longitudes de los lados de los cuadrados que se recortan es posible el armado propuesto.

(c) Proponer un procedimiento matemático que le permita calcular el valor de la superficie de la caja para cualquier posible valor de lado del cuadrado recortado.

(d) Si se solicitan cajas que tengan los siguientes valores de superficie:

i) 300cm^2 ii) 14cm^2 iii) 50cm^2 iv)350cm^2.

¿Para qué casos es posible satisfacer el pedido según las condiciones de fabricación? Justificar.

(e) Defina el modelo que describe la situación planteada.

(f) Considerando la función definida en el ítem (e), ¿cuáles de los siguientes valores tienen imagen? Calcularla cuando corresponda.

i) $0,5$ cm ii) 4 cm iii) $7,2$ cm iv) $7,5$ cm v) 0 cm vi) 9 cm

(g) ¿Cuáles de los siguientes valores tienen preimagen? Calcularla cuando corresponda.

i) 300cm^2 ii) 14cm^2 iii) 50cm^2 iv)350cm^2.

Ejercicio 4. En cada fila de la siguiente tabla se presenta una situación. Para cada una de ellas se pide:

(a) Identificar las variables.

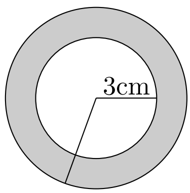
(b) Decir si hay una función que relaciona dichas variables. Indicar dominio y codominio para esa función de acuerdo a la situación planteada.

(c) Elegir alguna (o algunas) fórmula entre las dadas que sirva para representar cada situación. Explicar por qué la elige.

$f(x) = 4,5x + 5$ $\quad f(x) = \pi(x^2 - 3^2)$ $\quad f(x) = 90 - 4,5x$ $\quad f(x) = \pi\, r^2 - 3^2$

$f(x) = 90 - 4,5x^2$ $\quad f(x) = \frac{150}{x}$ $\quad f(x) = 90 - 9x$ $\quad f(x) = 5 + \frac{9}{2}x$

(d) Si encuentra una fórmula como regla de asignación, dar algunos valores numéricos de la variable independiente y hallar sus respectivos correspondientes.

SITUACIÓN	VARIABLES	DOMINIO	CODOMINIO	FÓRMULA
Una camioneta llega a una estación de servicio para llenar el tanque cuya capacidad es 50 litros. Al llegar a la estación tenía 5 litros y el surtidor tarda 10 min. en completar el tanque. Calcular cuántos litros hay en el tanque según el tiempo transcurrido				
Calcular el área de la región sombreada para diferentes radios de la circunferencia mayor. 				

SITUACIÓN	VARIABLES	DOMINIO	CODOMINIO	FÓRMULA
Para realizar una construcción, 10 albañiles tardan 15 días. Calcular el tiempo que se tarda de acuerdo a la cantidad de albañiles que se disponga.				
Una pileta de 90 litros se vacía por un grifo a razón de 4,5 litros por minuto. Hallar la cantidad de líquido en la pileta a medida que transcurre el tiempo.				

Ejercicio 5. Se quiere recubrir con cinta el contorno de una figura compuesta por un triángulo rectángulo y un semicírculo cuyo diámetro es la hipotenusa del triángulo. Se sabe que uno de los lados difiere del otro en 10 cm. ¿Cuánta cinta se necesitará? ¿De qué depende? Definir la función que modelice la situación.

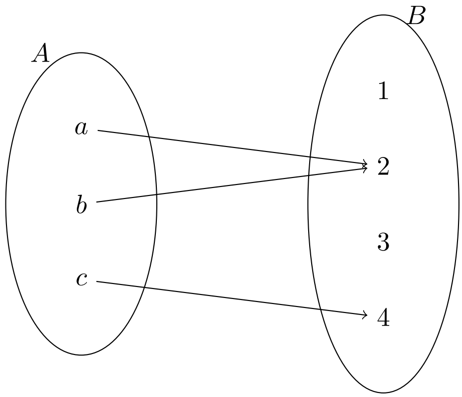
2 Distintas formas de representar una función

La presentación de la correspondencia o de la regla de asignación entre elementos puede aparecer en diferentes formas. Hasta ahora analizamos la correspondencia dada a través de fórmulas (sección 1.2). Sin embargo, hay otras formas de determinar una función y muchas veces suele ser útil contar con distintas determinaciones o representaciones de una misma función. Las representaciones más comunes son las siguientes: fórmula, diagramas de Venn, asignación coloquial, tabla de valores y gráfico cartesiano.

En las siguientes subsecciones se explican en qué consiste cada una de ellas.

2.1 Utilizando diagramas de Venn

Esta presentación es útil cuando el conjunto de partida A es finito. Por ejemplo:



Como vemos esta correspondencia indicada por las flechas es función pues cada elemento del conjunto A tiene un único correspondiente en el conjunto B. Además vemos que 2 es *la imagen de* a, 2 *es la imagen* de b y 4 *es la imagen de* c. Es decir que dos elementos pueden compartir la misma imagen.

2.2 Asignación coloquial

Hay situaciones en que coloquialmente establecemos una correspondencia que luego podemos representar mediante operaciones numéricas. Tal es el caso de la construcción de cajas del ejemplo introductorio 1.2. Otras veces se establece una relación entre elementos de conjuntos que no es posibles de describir mediante operaciones matemáticas. Por ejemplo: Si A es el conjunto de personas con nacimiento registrado en Argentina y $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales, podemos establecer entre los elementos de ambos conjuntos una relación que sea: ".....tiene por Documento de Identidad el número ....". Cada persona tiene un único número de documento asignado y todos las personas cuyo nacimiento haya sido registrado en Argentina tienen uno. Por eso se trata de una función aun cuando no haya fórmula matemática para determinar los correspondientes.

2.3 Tabla de valores

Ejemplo 3. En la sección 1.2 vimos que usar la fórmula para calcular la superficie de la base de la caja en función de la medida del lado del cuadradito que se recorta es bastante práctico. Sin embargo, el fabricante de cajas observa que ciertas medidas de cajas se venden seguido y que le resulta poco eficiente calcular las superficies de las bases de las cajas cada vez que las necesita. Por esta razón, desea que esta información se encuentre disponible de forma accesible y expeditiva. En este caso, una posible solución es la *tabla de valores.*

Para confeccionar una tabla de valores se seleccionan algunos valores del dominio de la función o rango de variabilidad de la variable independiente y se colocan al mismo nivel sus correspondientes. La tabla puede estar dispuesta de forma vertical u horizontal.

En el ejemplo de la caja, recordemos que las variables independiente y dependiente son

$$x : \text{medida del lado del cuadradito} \qquad y : \text{superficie de la base de la caja} .$$

y que están relacionadas por una función f dada por la fórmula $y = f(x) = (10-2x)^2$. La variable independiente varía entre 0 y 5, es decir $\text{Dom}\, f = [0; 5]$. Se pueden tomar valores equiespaciados en el intervalo $[0; 5]$, por ejemplo, uno cada $0,5$.

x	0	0, 5	1	1, 5	2	2, 5	3	3, 5	4	4, 5	5
$y = f(x) = (10 - 2x)^2$	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0

Con una calculadora o computadora a disposición se podrían tomar muchos valores, por ejemplo uno cada $0,01$.

Uso de la tabla de valores Se pueden mencionar las siguientes ventajas de tener los datos dispuestos en una tabla:

1. Para los valores de x que se consignan en la tabla, no es necesario realizar cálculos para saber el valor de $f(x)$.

2. Si nos dan un valor de x que no está en la tabla podemos estimar el correspondiente porque sabemos que si la longitud de lado del cuadradito recortado se achica, entonces la superficie de la base de la caja se agranda. Por ejemplo, si $x = 2,8$, podemos tomar un valor de y intermedio entre los valores de y correspondientes a $2,5$ y 3. De esta forma, podemos estimar que $f(2,8) \approx 30$.

3. Como a medida que x es más grande, la superficie de la caja es más chica. Por lo tanto, es fácil darse cuenta que el valor más grande que toma y es 100 y el más chico es 0.

Es claro que si solamente contamos con la tabla, no es posible saber con exactitud los valores de la variable dependiente que no están volcados en ella. Sin embargo contar con varios valores, en ocasiones, nos permite conocer una tendencia de cómo es la correspondencia.

Ejercicio resuelto 1. Una función f está determinada por la siguiente tabla. Dar el Dom$f$. Determinar la imagen de $-2,5$. ¿Es posible determinar la imagen de $1,2$? El valor $15,62$, ¿de quién es imagen?

x	$-1,5$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$0,75$	1	$1,5$	$2,7$
$f(x)$	$0,125$	0	$0,025$	$0,125$	1	$1,10$	$1,14$	$1,20$	8	$15,62$	$50,65$

Resolución. Los valores de x están volcados en la primera fila y los de $f(x)$ en la segunda. Luego,

$$\text{Dom}f = \{-1,5; -1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 0,75; 1; 1,5; 2,7\}.$$

Determinar la imagen de $-1,5$ significa encontrar qué valor está asignado a $-1,5$, es decir, se quiere saber $f(-1,5)$. Para ello se busca en la primera fila $-1,5$ y como el valor que está consignado abajo es $0,125$ entonces

$$f(-1,5) = 0,125 \ .$$

El valor $1,2$ no está volcado en la primera fila de la tabla, por lo que no es posible saber el valor de $f(1,2)$.

Por último, si se pregunta de quién es imagen el valor $15,62$, es porque hay que situarse en la segunda fila, donde figuran las imágenes $f(x)$, vemos que este número está en la anteúltima columna y es el correspondiente de $x = 1,5$, o sea que $1,5$ es la preimagen de $15,62$

Respuesta. La imagen de $-1,5$ por f es $0,125$. No es posible determinar $f(1,2)$. $1,5$ es preimagen de $15,62$

Ejercicio resuelto 2. De una función f se conoce la siguiente tabla. ¿Qué puede decir del Dom$f$?. Determinar la imagen de $-2,5$. ¿Es posible determinar la imagen de $1,2$? ¿Y estimarla?

x	$-1,5$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$0,75$	1	$1,5$	$2,7$
$f(x)$	$0,125$	0	$0,025$	$0,125$	1	$1,10$	$1,14$	$1,20$	8	$15,62$	$50,65$

Resolución. Seguramente el lector se extrañará al encontrar la misma tabla que en el ejemplo anterior. Desconcertado, se preguntará si nos habremos confundido y copiado el mismo ejercicio... Aunque los datos sean los mismos la actividad es distinta, a partir del enunciado debemos interpretar que en este caso la tabla muestra solo algunos valores y para dar respuesta a lo pedido debemos hacer estimaciones de acuerdo al contexto que pueden no resultar exactas. Sucede esto en general cuando se toman mediciones de fenómenos como: desplazamiento de un resorte colgado sometido a una de empuje inicial, crecimiento de bacterias a lo largo del tiempo, fluctuación mensual del dólar, etc. Por ejemplo cuando nos preguntan sobre el dominio de la función no contamos con suficiente información, no lo conocemos con certeza, sin embargo podramos hacer una propuesta con alguna justificación. Podríamos proponer que el dominio sea el conjunto $\mathrm{Dom}f = [-3, 3]$ basándonos, por ejemplo, en que los valores de la tabla son racionales, que son mayores que -3 y menores que 3.

Nuevamente la imagen de $-1,5$ se determina sin ambigüedades y es $0,125$ entonces $f(-1,5) = 0,125$. En cuanto a la imagen de $1,2$ tampoco la podemos conocer con certeza pero tal vez sí estimarla. Para ello debemos "imponer" alguna condición o realizar una suposición. Por ejemplo, a partir de observar las imágenes correspondientes a los valores positivos podemos suponer que las mismas crecen a medida que crece x. Con lo cual estimamos que la imagen de $1,2$, que está entre 1 y $1,5$, estaría entre 8 y $15,62$.

Ejercicio resuelto 3. De una función f se conoce la siguiente tabla. ¿Qué puede decir de f? ¿Qué puede decir del $\mathrm{Dom}f$?. Determinar la imagen de $-2,5$. ¿Es posible determinar la imagen de $1,2$? ¿Es posible determinar la preimagen de $1,2$?

x	$-2,5$	$-1,5$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$f(x)$	$-1,25$	$-0,75$	$-0,5$	$-0,354$	$-0,25$	0
x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$0,75$	1	$1,5$	$2,7$
$f(x)$	$0,167$	$0,25$	$0,375$	$0,5$	$0,75$	$1,35$

Observando los valores y sus correspondientes podemos decir que f sería una función creciente, ya que a medida que aumentan los valores en el renglón de x, también aumentan los valores de los correspondientes en el renglón de $f(x)$. Observando más precisamente la tabla, notaríamos que:

A $-2,5$	le corresponde su mitad	$-1,25$,
A $-1,5$	le corresponde su mitad	$-0,75$,
A -1	le corresponde su mitad	$-0,5$,
A $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	le corresponde aproximadamente su mitad	$-0,354$,
...	y así siguiendo	...

Por esto podrámos decir además que las imágenes podrían calcularse por la fórmula $y = \frac{1}{2}\,x$ y que en caso de que el número sea irracional o periódico la aproximamos con tres cifras. Al igual que en el ejemplo 2 no sabemos con precisión cuál es su dominio pero proponemos nuevamente que sea $\mathrm{Dom}f = [-3, 3]$. En cuanto a la imagen de $1,2$ tampoco la conocemos con exactitud pero si aceptamos la "tendencia" de los correspondientes, podemos decidir que sea $f(1,2) = \frac{1,2}{2} = 0,6$. Por último, tampoco conocemos la preimagen de $1,2$ pero si aceptamos la regla de asignación propuesta, deberíamos plantear $1,2 = \frac{x}{2}$ y entonces $x = 2,4$. En definitiva podríamos proponer que la tabla responde a la siguiente función : $f : [-3, 3] \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}$, con aproximaciones hasta el milésimo.

Utilidad de la tabla de valores. En los ejemplos resueltos 1, 2 y 3 vimos distintas resoluciones usando tablas de datos. Revisemos las particularidades de cada caso:

- En 1 la función está determinada por la tabla y sólo nos debemos restringir a esos datos.
- En 2 la tabla solo muestra algunos valores correspondientes por una función y mediante ellos debemos tratar de describir algunas particularidades de la misma.
- En 3, al igual que en el caso anterior, la tabla solo muestra algunos valores correspondientes de una función, pero podemos notar que hay alguna regularidad entre dichos correspondientes, "un patrón" que se puede describir mediante una fórmula. Esto nos permite describir mejor algunas particularidades de la misma.

Aclaramos que en los dos últimos casos hemos tomado decisiones y anticipado cosas basadas en suposiciones, lo cual da resultados que son inciertos...pero útiles...

En resumen, la tabla de valores es útil para:

- Percibir por datos numéricos cómo es la relación entre las variables. Si el dominio es un conjunto finito, es posible que con presentar una tabla ya mostremos todas las imágenes de los elementos del dominio. Si el conjunto es infinito en la tabla se colocan algunos valores variados (por ejemplo si la función está definida sobre los números reales tomamos números negativos, positivos, racionales, irracionales) y sus correspondientes para notar cuál es la relación numérica entre ellos.
- Graficar en un sistema de ejes cartesianos los pares ordenados obtenidos a partir de las variables.
- Cuando se realiza un experimento. Por ejemplo, si la situación es: "estudiar el estiramiento de un resorte sostenido por un extremo cuando se cuelgan pesas en el extremo inferior del mismo". El experimento consiste en colgar distintas pesas en el extremo libre de un resorte fijado por el otro extremo. Pueden registrarse en una tabla los valores de peso y su correspondiente valor de estiramiento. De ese modo, al observar los datos numéricos, es posible inferir cómo dependen dichas variables y tratar de explicar qué características del fenómeno influyen para que dependan de esa manera.
- Registrar valores numéricos, compararlos y tratar de obtener una conclusin sobre su variabilidad para tratar de sacar una conclusión global, aunque ésta sea muy provisoria.

2.4 Representación gráfica

El gráfico cartesiano de una función permite ver cómo varían dos variables relacionadas entre sí a través de un dibujo que tiene ciertas reglas de confección. Para mostrar cómo se construye retomaremos el ejemplo de la caja.

Ejemplo 4. Retomemos el ejemplo de la subsección 1.2 donde se analiza la construcción de una caja. El procedimiento para construir la caja es recortar cuadraditos de las esquinas y pegar los bordes. Las variables que se relacionan son "la longitud de los lados de los cuadraditos" y "la superficie de la base de la caja".

En esa misma subsección se definió, mediante una fórmula, una función que modeliza la situación:

$$f : [0,5] \mapsto \mathbb{R}, \quad y = f(x) = (10 - 2x)^2$$

donde la variable independiente x es la longitud del lado recortado medido en cm y la dependiente y es la superficie de la base de la caja en cm^2.

Esto le permitiría al fabricante contar con una forma práctica de calcular la superficie de la base para cada valor de la longitud de los lados de los cuadraditos. Sin embargo, tiene que repetir el procedimiento y realizar cálculos cada vez que necesita el dato de la superficie. La tabla resuelve esta objeción para algunos valores. Para tener una idea bastante aproximada, en forma global, del comportamiento de la relación entre las variables sin tener que hacer cálculos cada vez, es conveniente recurrir a una representación gráfica de la función.

En este caso iniciamos el esquema gráfico a partir de algunos valores. Para eso repetimos la tabla que habíamos confeccionado:

x	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$	5
$y = f(x) = (10 - 2x)^2$	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0

Cada valor y su correspondiente conforman un *par ordenado*: primero el valor de la variable independiente después el de su correspondiente; se escriben estos valores entre paréntesis separados por una coma o por un punto y coma. Por ejemplo:

$(0, 100)$ indica que 0 es el valor de variable independiente y 100 el valor de variable dependiente que le corresponde, o sea $f(0) = 100$,

$(0,5; 81)$ indica que $0,5$ es el valor de variable independiente y 81 el valor de variable dependiente que le corresponde,

$(1, 64)$ indica que 1 es el valor de variable independiente y 81 el valor de variable dependiente que le corresponde,

$(2,5; 25)$ indica que $2,5$ es el valor de variable independiente y 25 el valor de variable dependiente que le corresponde,

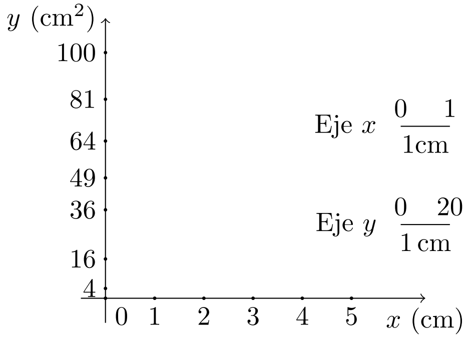
$\ldots$ y así siguiendo.

Los pares ordenados tienen una representación en la hoja imaginando que es el plano. En él consideramos dos rectas: una horizontal y una vertical que la interseca, que también se llaman *ejes cartesianos*. Sobre cada eje representamos números por lo que necesitamos un origen 0 y un segmento unidad. Para ambas rectas el origen será el mismo: el punto de interesección de las rectas. La unidad, dada por un segmento arbitrario, puede ser distinta en cada eje, la decisión sobre cuál es el segmento unidad a tomar depende de los valores que se representan. Recordemos que en la recta horizontal se conviene en representar los números positivos hacia la derecha y los negativos en la semirrecta opuesta. En la vertical se conviene en representar los números positivos hacia arriba y los negativos en la semirrecta opuesta. Convencionalmente, sobre la recta horizontal se representan las primeras componentes de los pares, es decir los valores de la variable independiente; sobre la vertical se representan las segundas componentes de los pares, es decir los respectivos correspondientes.

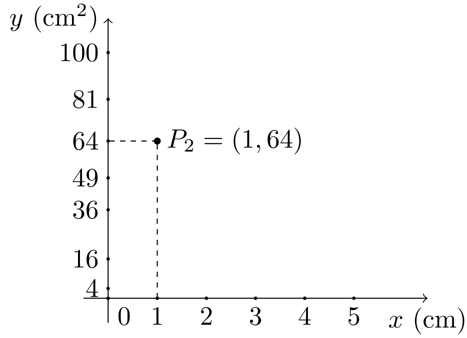
En nuestro caso, teniendo en cuenta que el dominio es $[0, 5]$, sobre el eje horizontal, marcaremos un segmento unidad de 1cm con origen en O, punto de intersección de los ejes, y ubicaremos el número 1 en el otro extremo. Esta relación entre la longitud del segmento sobre la recta y el valor que el mismo representa se llama *escala*, esta escala es: 1 : 1cm y se lee "uno en un centímetro". En el eje vertical, teniendo en cuenta que hay valores numéricos grandes (100, 81, etc.) nos conviene elegir otra escala, por ejemplo tomar un segmento de 1cm con origen en O y en el extremo ubicar el número 20, esta escala es: 20 : 1cm (veinte en un centímetro). El valor 100 en este eje se ubica entonces en el extremo del segmento vertical hacia arriba que mide 5 cm.

Para ubicar el par $(0, 100)$ se traza una recta vertical por el punto de la horizontal donde se ubica el 0 y una recta horizontal por el punto donde se ubica el 100. Ambas rectas se intersecan en un punto P_1 que es el que representa el par $(0, 100)$. Notar que en este caso el punto P_1 coincide con el punto de la vertical donde está ubicado el 100.

Para ubicar el par $(1; 64)$ se traza una recta vertical por el punto de la horizontal donde se ubica el 1 y una recta horizontal por el punto donde se ubica el 64, cada uno con sus escalas respectivas. Ambas rectas se intersecan en un punto P_2 que es el que representa el par $(1, 64)$.

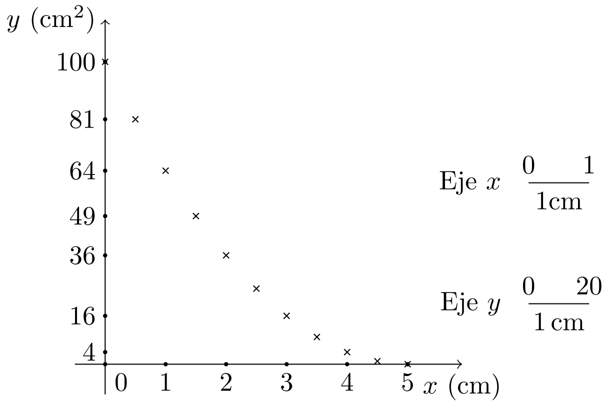


Ejes cartesianos



Representación del punto $(1, 64)$

De este modo podemos ubicar todos los pares que surgen de la tabla obteniendo el siguiente gráfico:



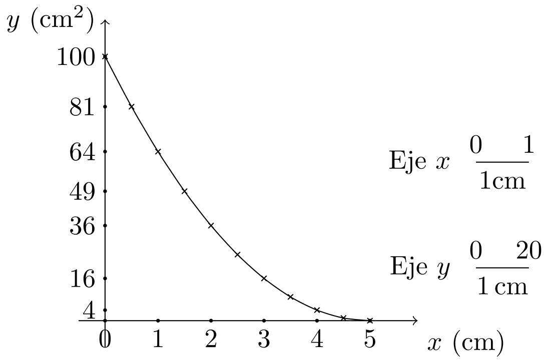
En el gráfico que represente la función deberían estar representados todos los pares ordenados cuyas primeras coordenadas son puntos del dominio y la segunda sus respectivas imágenes, en este caso, dado que en el dominio $[0, 5]$ hay infinitos valores, el conjunto de pares ordenados excede cualquier tabla que podamos confeccionar. Sin embargo se puede obtener gráficamente una impresión global de la función y tratar de completar la información de la tabla para representar al conjunto completo de pares ordenados. Para ello deberíamos poder anticipar algunas de las características de la función pensando en el contexto. Se puede inferir que:

- La mayor área de la base se obtiene en el caso extremo en que no cortemos ningún cuadradito (¡no se arma caja alguna, es todo base!). Esto se traduce en que el par $(0, 100)$ pertenece al gráfico y que 100 es el mayor valor de las imágenes.

- El caso extremo en que doblo el cuadrado en cuatro, por sus bases medias, hace que no podamos armar una caja y nos hace pensar que el punto $(5, 0)$ también pertenece al gráfico y que 0 es el menor valor posible de las imágenes.

- A medida que se aumenta la longitud de los cuadraditos recortados, las dimensiones de la base disminuyen y por lo tanto también disminuye su superficie. De modo que la curva que represente la gráfica irá “bajando”, cuando la recorro de izquierda a derecha, en el sentido que los valores de abscisa aumentan.

Con estos datos podemos hacer un gráfico que contemple las características anteriores (aunque no sea el exacto), uniendo los puntos con una línea sin ondulaciones.



2.5 Reconocimiento de imágenes y preimágenes en un gráfico

En el contexto en el que estamos trabajando, las preguntas sobre las imágenes y preimágenes de una función se plantearían del siguiente modo:

El fabricante de cajas desea determinar aproximadamente,

(a) la superficie de la caja que corresponde a un cuadradito recortado cuyos lados miden $2,8\,\mathrm{cm}$,

(b) la medida de los lados de los cuadraditos que hay que recortar para obtener una caja cuya superficie de la base es $56\,\mathrm{cm}^2$,

(c) si es posible fabricar cajas de $120\,\mathrm{cm}^2$,

(d) ¿cuál es el conjunto que contiene todos los valores posibles de superficies de las cajas?

Como no tiene a mano una calculadora, quiere hacerlo a partir de la información volcada en la representación gráfica de la función que modela la situación.

En términos matemáticos las preguntas del fabricante se pueden traducir como sigue:

(a) Calcular la imagen de $2,8$, es decir, calcular $f(2,8)$

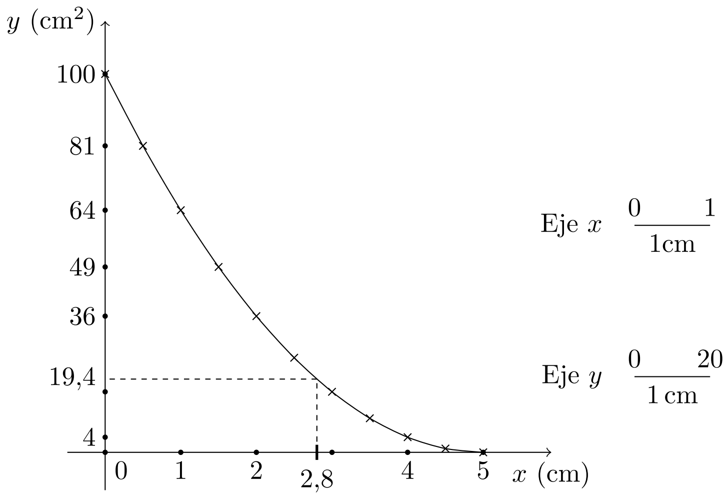
(b) Decidir si $56 \in \mathrm{Im} f$, estimar su preimagen.

(c) Decidir si 120 pertenece a la $\mathrm{Im}\, f$.

(d) Calcular la $\mathrm{Im} f$.

(a) Estimar una imagen. Nos piden estimar $f(2,8)$ a partir del gráfico. Como $2,8$ es un elemento del dominio, es posible calcular su imagen. Para ello, ubicamos a $2,8$ en el eje de las abscisas y trazamos una recta vertical que pase por $2,8$. Esta recta cruza a la gráfica de la función en un único punto cuyas primera y segunda coordenadas son $2,8$ y $f(2,8)$ respectivamente. Trazamos una recta horizontal que pase por el punto de intersección entre la recta vertical y la gráfica de la función y medimos que la recta horizontal cruza al eje de ordenadas aproximadamente a una distancia de $0,97\,\text{cm}$ del cero. Teniendo en cuenta que la escala para el eje de ordenadas es de 20 a 1, se obtiene que $f(2,8) \approx 19,4$.

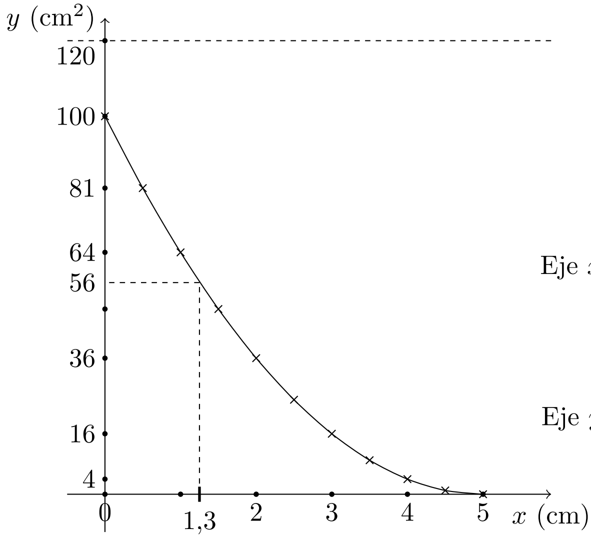
En términos del problema, esto significa que si los lados de los cuadraditos recortados miden $2,8\,\text{cm}$ la superficie de la caja será de $19,4\,\text{cm}^2$ aproximadamente.



(b) y (c) Reconocer una imagen. Si el valor 56 es imagen de algún valor del dominio, al trazar una recta horizontal que pase por $y = 56$ esta cruzará la gráfica de la función. Por ello, se comienza trazando una recta horizontal por $y = 56$ que corresponde a una altura de $2,8\,\text{cm}$ en el eje de ordenadas y corroboramos que esa recta corta a la gráfica en un punto. Trazando una recta vertical por ese punto de intersección, hasta que corte al eje x, podemos ver o estimar la abscisa. En este caso vemos que la abscisa que corresponde a 56 es aproximadamente igual a 1,3 (teniendo en cuenta la escala de 1 a 1). Luego decimos que $56 \in \operatorname{Im} f$ con $f(1,3) \approx 56$.

Del mismo modo, para $y = 120$ se traza una recta horizontal. Se observa que dicha recta no interseca a la curva de la gráfica por lo que $120 \notin \operatorname{Im} f$.

En términos del problema, esto significa que una caja cuya superficie es de $56\,\text{cm}^2$ aproximadamente fue construida a partir de cuadraditos de, $1,3\,\text{cm}$ de lado aproximadamente y que no es posible obtener cajas de $120\,\text{cm}^2$ de superficie.



(d) Reconocer el conjunto imagen de una función (Im f). Si imaginamos repetir el procedimiento realizado para $y = 56$ e $y = 120$ para todos los valores del eje y, nos damos cuenta que para todos los números en el intervalo $[0; 100]$ al trazar la recta horizontal cruzaríamos la curva. En cambio, para los valores fuera de dicho intervalo la recta horizontal correspondiente no cruzaría la curva. Esto significa que $\mathrm{Im} f = [0; 100]$.

En términos del problema de la construcción de cajas, esto significa que es posible construir cajas con una base cuya superficie varía entre 0 y $100\,\mathrm{cm}^2$.

2.6 Generalidades de la representación gráfica de funciones.

Veamos las principales características de un gráfico cartesiano.

Gráfico cartesiano: Usamos esta forma de presentación especialmente en los casos en donde las variables pueden ser medidas y toman valores numéricos. En el gráfico cartesiano se representan puntos. Cada punto está dado por un par ordenado de números reales $P = (x_0, y_0)$, donde x_0 se llama *abscisa* de P e y_0 *ordenada* de P, ambas se llaman *coordenadas del punto P*. El gráfico cartesiano consiste de:

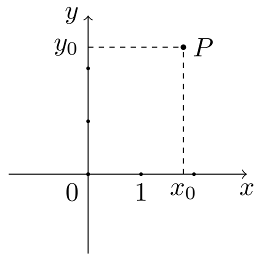
- dos rectas que se cruzan perpendicularmente, una donde se representan las abscisas, que en general se traza como recta horizontal y otra en donde se representan las ordenadas, que en general se traza como recta vertical. Ambos se llaman *ejes cartesianos.*

- Para poder representar la recta numérica en cada eje sabemos que hay que elegir un origen y una unidad. El origen en ambos ejes es el punto de intersección de las rectas. La unidad puede elegirse por eje.

- La primera componente del par ordenado, la abscisa x_0 , se representa sobre el eje horizontal

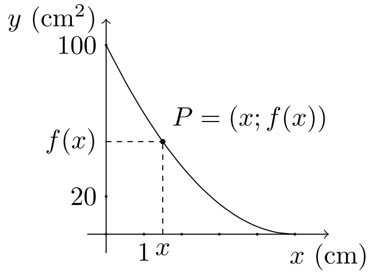
- La segunda componente del par ordenado, la ordenada y_0 , se representa sobre el eje vertical.

- Para determinar el punto P, se traza una paralela al eje de ordenadas que pase por el punto de abscisa x_0 representado en el ítem anterior y una paralela al eje de abscisas que pase por el punto de ordenada representado en el ítem anterior. El punto P es el de intersección de estas rectas trazadas.



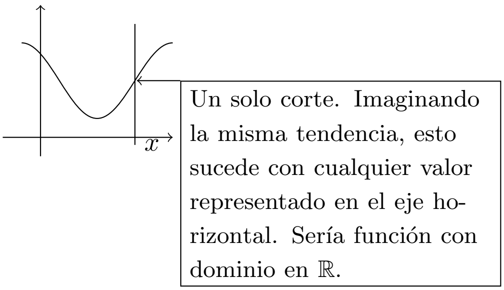
Coordenadas de los puntos de los ejes. Notar que los puntos del plano que están sobre el eje de las abscisas (horizontal) tienen coordenadas $P = (x, 0)$ mientras que los que están sobre el eje de las ordenadas (vertical) son del tipo $P = (0, y)$.

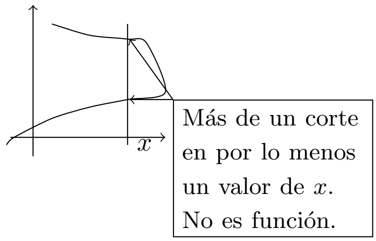
Representación de una función Cuando se presenta un gráfico que representa una función, sobre el eje horizontal están representados los valores que toma la variable en el dominio y sobre el eje vertical sus imágenes por la correspondencia. Los puntos del plano representados tienen coordenadas $(x, f(x))$. Por eso es que también se escribe $y = f(x)$ para decir que la ordenada del punto es la imagen de la abscisa según la correspondencia dada.



El conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$ con $x \in \operatorname{Dom} f$ se llama *gráfico de la función f* y son los puntos que se representan en un gráfico cartesiano.

No cualquier gráfico representa una función. Para decidir cuando un gráfico representa una función debemos recordar que la imagen de cada valor del dominio es única de modo que al trazar rectas verticales que pasen por las abscisas que representan valores del dominio las mismas intersecan al gráfico del conjunto de puntos representado sólo una vez. En los siguientes ejemplos los conjuntos de puntos representados son curvas, veamos cómo reconocer si se trata del gráfico de una función o no.





Utilidad de la representación gráfica de una función. Este párrafo resume algunas de las características que desarrollamos en las secciones anteriores:

- Para valores del dominio representados en el gráfico, es posible estimar su imagen y preimágenes sin necesidad de conocer la expresión analítica que vincula las variables.

- El gráfico permite visualizar casi completamente el conjunto de pares de correspondientes por una función, lo cual ayuda para identificar características de la misma tales como: crecimiento, valores máximos y mínimos, comportamiento de la función para abscisas de 'valor absoluto grande", dónde las imágnes son positivas o son negativas, etc.

- Permite visualizar varias funciones a la vez.

Cabe aclarar que si bien es sencillo trabajar con gráficos, se pierde precisión en la obtención de algunos resultados numéricos.

2.7 Reconocimiento de imágenes y preimágenes en un gráfico

En este parágrafo explicamos de forma general el procedimiento para reconocer imágenes y preimágenes en un gráfico.

Hallar una imagen. Para hallar la imagen $f(a)$ de un valor numérico a del dominio de la función, se ubica dicho valor en el eje de abscisas, se traza una recta vertical que pase por a. Esta recta cruzará a la gráfica de la función en un único punto $(a, f(a))$. Se traza una recta horizontal por dicho punto. La ordenada donde esta recta horizontal corta al eje vertical es justamente $f(a)$.

Identificar una imagen. Si nos dan un valor numérico a y nos piden reconocer si es imagen de algún valor del dominio, tenemos que pensar que si así fuera, ese valor estaría representado en el eje vertical, es decir debemos ubicarlo en el eje de ordenadas $y = a$. Trazamos luego una recta horizontal, paralela al eje x. Si la recta corta a la gráfica de la función en *algún* punto (*uno o más* puntos) entonces a será imagen de algún valor del dominio.

Identificar el conjunto imagen de una función. Imaginando que podemos repetir el procedimiento realizado en el inciso anterior para todos los valores que están representados en el eje y, es decir, todos los números reales, podremos diferenciar cuáles valores tienen preimagen y cuáles no. La imagen de la función es, entonces, el conjunto de todos los valores reales para los cuales al trazar una recta horizontal que corta al eje y en dichos valores, esta recta cruza la gráfica de la función.

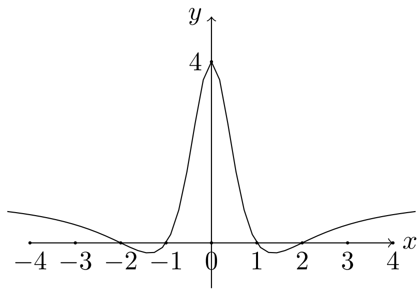
Ejercicio resuelto 4. Una de las funciones propuestas tiene por gráfico el representado en la figura. ¿Cuál de ellas es?

$f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_a(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$f_b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_b(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 2$

$f_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_c(x) = \frac{x^4-5x^2+4}{x^4+2x^2+1}$

$f_d : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_d(x) = x^2 - 5x + 4$



Resolución.

Explicación	Podemos determinar el valor de 5 imágenes exactamente: la imagen de 0 debe ser 4 y las imágenes de -2, -1, 1, y 2 debe ser 0 ¿por qué? Al evaluar las cuatro funciones en los valores que corresponden de las abcisas mencionadas podemos empezar a descartar.	
Planteo	Como $f_b(0) = 2$ y $f_d(2) = -2$, se descartan estas dos funciones	Cálculos auxiliares $f_a(-2) = f_a(-1) = f_a(1) = f_a(2) = 0$, $f_a(0) = 4$ $f_d(-2) = f_d(-1) = f_d(1) = f_d(2) = 0$, $f_d(0) = 4$
Explicación	Ahora hay que mirar otras características del gráfico para poder definir entre las dos funciones que quedan. Para ello evaluamos en las abscisas 3, 4, -3 y -4.	
Planteo	Nos damos cuenta que $f_a(4) = 180$ y que $f_d(4) = 0,62$	
Conclusión y explicitación de la respuesta	*Respuesta:* Según el gráfico la imagen de 4 debe ser menor que 4, se descarta entonces a f_a por lo calculado arriba y, como por el enunciado, sabemos que una de las cuatro es correcta, la respuesta es que la función buscada es f_d.	

Trabajo Práctico 22

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) De acuerdo a este texto, ¿cuáles son las distintas formas para representar una función?

(b) Dar, mediante diagramas de Venn, ejemplos de asignaciones que sean funciones y otras que no lo sean.

(c) ¿Cómo se representa un punto en el plano?

(d) ¿Qué relación hay entre la imagen de un valor x del dominio y $f(x)$?

(e) Explicar coloquialmente cómo se construye un gráfico a partir de una tabla de valores.

(f) Explicar coloquialmente cómo se puede representar gráficamente una función dada por una fórmula.

(g) Si conocemos una tabla de cierta función, los valores de la variable independiente consignados en ella, ¿son necesariamente todos los valores del dominio de la función?

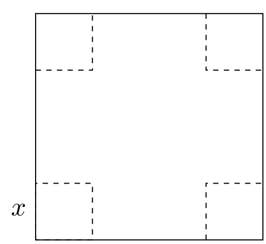
Ejercicio 2. Acerca de la lectura. En el texto se afirma lo siguiente:

"Si un valor es imagen de algún valor del dominio, al trazar una recta horizontal que pase por la ordenada que representa dicho valor, esta cruzará a la gráfica de la función."

Ubicar esta afirmación en el texto y explicar por qué es verdadera.

Ejercicio 3. Representar en el plano los siguientes pares ordenados: $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(-2,5;0)$, $(0;-1/2)$, $(1,5;3)$, $(\frac{1}{4};-\frac{7}{2})$, $(-1;-2)$, $(-1;2)$.

Ejercicio 4. Se propone construir una caja de cartón recortando cuatro cuadraditos iguales en las esquinas de una plancha cuadrada siguiendo la línea que se muestra en la figura. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes para armar la caja. Pensemos en una fabricación industrial de cajas mediante una máquina que realiza el proceso descripto arriba y que admite planchas de cartón de 20 cm de longitud. La medida de los lados de los cuadrados de las esquinas es regulable y se elige según las dimensiones deseadas para el producto final. El fabricante desea estudiar cómo varía la superficie de la base de la caja de acuerdo a la longitud del lado del cuadradito recortado y, además, disponer de manera inmediata de información acerca de la relación entre ambas variables.



(a) Indicar las longitudes de lados de cuadraditos para los cuales tiene sentido el armado propuesto. ¿Cuáles son los casos extremos? ¿Qué puede decir de la superficie de la base de la caja estos casos extremos?

(b) Dar un procedimiento que permita al fabricante calcular la superficie de la base de la caja en función de la longitud lado del cuadradito recortado.

(c) Definir una función que modelice la situación planteada.

(d) Si el fabricante recibe muchos pedidos que corresponden a lados de cuadraditos de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm,...,9 cm ¿cuál sería una forma práctica de disponer de datos sobre las correspondientes superficies de las bases?

(e) Indicar si la superficie de la base aumenta o disminuye la medida que aumenta la longitud del lado recortado.

(f) Realice una representación gráfica aproximada de la función definida en (c).

(g) Mejore la representación anterior utilizando una tabla de valores con más datos

(h) Explique cómo debería proceder el fabricante para resolver las siguientes cuestiones utilizando la representación gráfica de la función:

   (i) Un obrero le pregunta qué superficie ocupará la caja al apoyarla sobre la mesa si está recortando cuadraditos de lados que miden $7,3\,\text{cm}$.

   (ii) Un cliente llama pidiendo cajas cuyas bases ocupen una superficie de $120\,\text{cm}^2$ y quiere saber cuál es la altura de la caja (notar que la altura de la caja coincide con la longitud del lado del cuadradito recortado).

   (iii) Un cliente pregunta si el fabricante puede armar cajas cuya superficie de la base sea de $230\,\text{cm}^2$ y de altura igual a $5\,\text{cm}$.

   (iv) Un cliente pide cajas que tengan una superficie de la base de $510\,\text{cm}^2$.

Ejercicio 5. Para la misma situación del ejercicio anterior, el fabricante se propone estudiar cómo varía el *volumen* de la caja de acuerdo a la longitud del lado del cuadradito recortado y además disponer expeditivamente de información acerca de la relación entre ambas variables.

(a) Indicar las longitudes de lados de cuadraditos para los cuales tiene sentido el armado propuesto. ¿Cuáles son los casos extremos?¿Qué puede decir del volumen de la caja para estos casos extremos?

(b) Dar un procedimiento que permita al fabricante calcular el volumen de la caja en función de la longitud lado del cuadradito recortado.

(c) Definir una función que modelice la situación planteada.

(d) Si el fabricante recibe muchos pedidos que corresponden a lados de cuadraditos de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm,...,9 cm ¿cuál sería una forma práctica de disponer de datos sobre los correspondientes volúmenes?

(e) Indicar si el volumen aumenta o disminuye a medida que aumenta la longitud del lado recortado.

(f) Realice una representación gráfica aproximada de la función.

(g) Mejore la representación anterior utilizando una tabla de valores con más datos.

(h) Explique cómo debería proceder el fabricante para resolver las siguientes cuestiones utilizando la representación gráfica de la función:

  (i) Un obrero le pregunta qué volumen tendrá la caja que está construyendo si los cuadraditos que está recortando tienen lados de $7,3$ cm.

  (ii) Un cliente llama pidiendo cajas que tengan un volumen de $510\,\text{cm}^3$ y quiere saber cuál es la altura de la caja (notar que la altura de la caja coincide con la longitud del lado del cuadradito recortado).

  (iii) Un cliente pregunta si el fabricante puede armar cajas cuyo volumen sea de $400\,\text{cm}^3$ y de altura igual a 3 cm.

  (iv) Un cliente pide cajas que tengan un volumen de $650\,\text{cm}^3$.

(i) El cliente que llamó antes pidiendo cajas que tengan un volumen de $510\,\text{cm}^3$, quiere saber cuál es la altura de la caja con una precisión de 5 cifras decimales (notar que la altura de la caja coincide con la longitud del lado del cuadradito recortado).

(j) El fabricante quiere saber cuál es el volumen máximo que tienen las cajas que fabrica.

Ejercicio 6. Analizar las ventajas y desventajas de disponer de la fórmula, de una tabla o del gráfico de una cierta función.

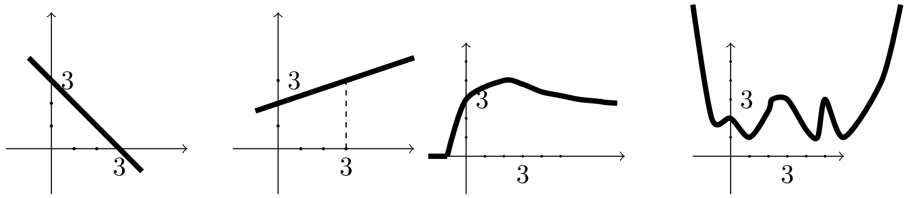
Ejercicio 7. Para cada uno de los siguientes incisos, decir cuáles de los siguientes gráficos cumplen las condiciones dadas (imaginar que la curva sigue con la tendencia indicada)

(a) El punto $P = (3; 3)$ pertenece al gráfico de la función representada.

(b) Existe algún valor de x al cual le corresponde el valor $y = 0$.

(c) La imagen de 5 es mayor que 3.

(d) Si f es la función representada entonces $f(0) = 3$.



Relación entre tabla y gráfico

Ejercicio 8. Un economista decide realizar un estudio de la variación de la cotización del dólar estadounidense en pesos argentinos a lo largo del año 2010. Para ello consigna en una tabla la cotización del primer día hábil de cada mes de 2010 y además elige la cotización usada para la venta:

Día	04-01	01-02	01-03	05-04	03-05	01-06
Cotización	3,82	3,86	3,88	3,89	3,90	3,95

Día	01-07	02-08	1-09	01-10	01-11	01-12
Cotización	3,95	3,96	3,97	3,98	3,98	4,01

Cotización del dólar (venta) durante el año 2010.

A partir del análisis de la información de la tabla se pide:

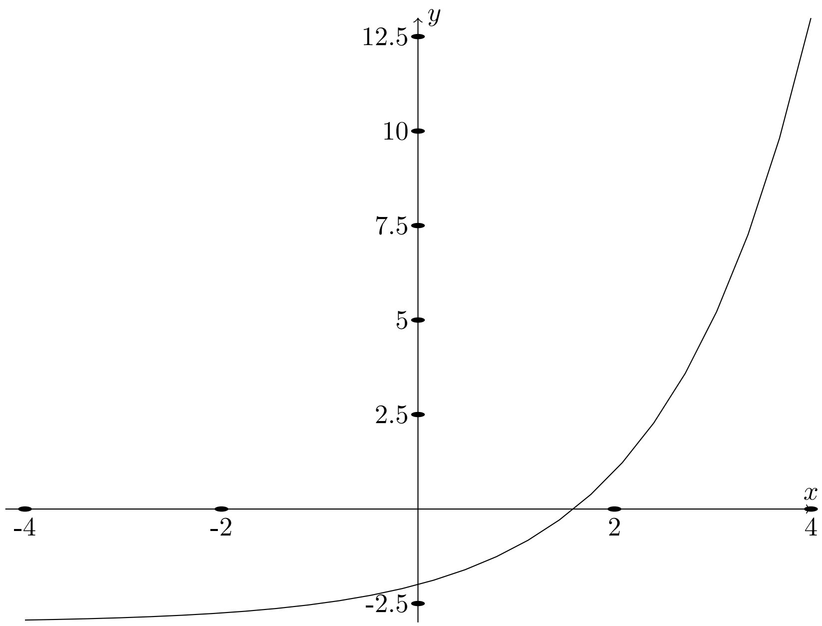
(a) Determinar las variables que se relacionan indicando cuál es la dependiente y la independiente.

(b) Definir la función que se está estudiando (dominio, codominio y regla de asignación).

(c) Realizar un gráfico de la función utilizando los datos dados en la tabla.

(d) Estimar el valor del dólar para el 15 de mayo de 2010. Explicar el criterio utilizado para realizar la estimación.

Ejercicio 9. Se tiene una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la cual se conoce su gráfico y una tabla de valores de la misma (con valores decimales aproximados):



x	-4	-2,5	-1	-1/2	0
$f(x)$	-2,939	-2,826	-2,503	-2,295	-2

x	1/3	1	1,569	2,3	3	4
$f(x)$	-1,737	-0,986	0	2,003	5,166	13,445

Las siguientes tablas corresponden a funciones relacionadas con f. Se pide en cada caso:

(a) Intente encontrar alguna relación entre cada nueva función y f.

(b) De acuerdo a la relación encontrada trazar aproximadamente sobre el gráfico cartesiano anterior,el gráfico de cada nueva función.

x	-4	-2,5	-1	-1/2	0
$g(x)$	-1,939	-1,826	-1,503	-1,295	-1

x	1/3	1	1,569	2,3	3	4
$g(x)$	-0,737	-0,014	1	3,003	6,166	14,445

x	-4	-2,5	-1	-1/2	0
$h(x)$	1,469	1,413	1,251	1,147	1

x	1/3	1	1,569	2,3	3	4
$h(x)$	0,868	0,493	0	1,001	2,583	6,723

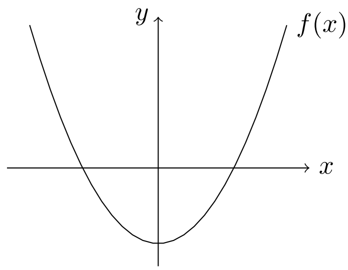
(c) Teniendo en cuenta la función inicial f, observe la siguiente tabla. Indique una posible relación entre las funciones k y f. Grafique k y f en un mismo gráfico cartesiano utilizando la misma escala sobre los ejes. ¿Qué relación hay entre sus gráficos?

x	-2,939	-2,826	-2,503	-2,295	-2	
$k(x)$	-4	-2,5	-1	-1/2	0	
x	-1,737	-0,986	0	2,003	5,166	13,445
$k(x)$	1/3	1	1,569	2,3	3	4

Relación entre fórmula y gráfico

Ejercicio 10. ¿Cuál de las siguientes funciones es la representada en el gráfico? Justificar tanto la elección como el descarte.

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$,
b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$,
c) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

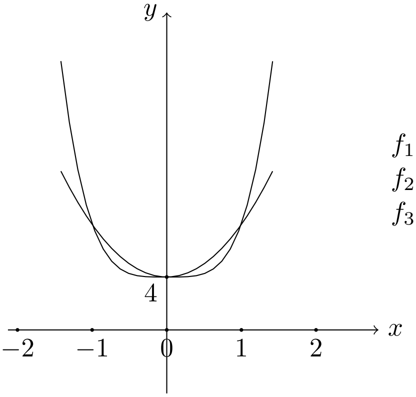


Ejercicio 11. Para cada inciso se pide:

(a) Asociar cada curva con sólo una de las funciones presentadas.

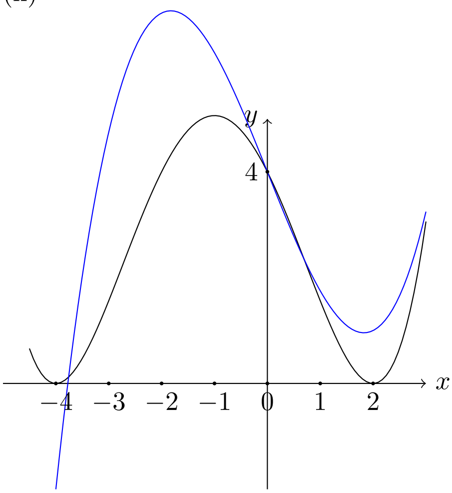
(b) En cada caso, completar el dibujo y explicar qué sucede con la curva para abscisas de valor absoluto grande,

(i)



$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2 + 4,$
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^4 + 4,$
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \frac{1}{64}(x + 4)^4$

(ii)



$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{1}{16}(x+4)^2(x-2)^2$
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2 - 4x + 4,$
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{2}x + 4$

Ejercicios integradores

Ejercicio 12.

(a) Una fábrica produce un cierto tipo de tornillos para una silla especial que necesita 4 tornillos de ese tipo. El fabricante de tornillos envía al fabricante de sillas un excedente de 8 tornillos por cada pedido para cubrir fallas.

(b) ¿Cuántos tornillos se envían si se hizo un pedido para construir 50 sillas? ¿y para construir 120? ¿y para construir 134?

(c) Para un mismo pedido el fabricante de sillas insistió con tres llamados, uno a la mañana, otro al medioda y otro a la tarde. El empleado de la mañana anotó que se tenían que mandar 519 tornillos, el del mediodía que se tenían que mandar 516 tornillos y el de la tarde anotó 518. ¿Cuántos tornillos decide enviar el fabricante? Explicar cómo tomaría la decisión si ud. fuera el fabricante.

(d) Indicar cuáles son las variables que se relacionan y si la forma en que se relacionan es por una función. En caso afirmativo definir la función de acuerdo al problema (dar dominio, codominio y la regla de correspondencia).

(e) Indicar cuáles de los siguientes pares pertenecen al gráfico cartesiano de la función planteada: $(0,8)$; $(10,40)$; $(23,100)$, $(237,955)$.

(f) Realizar un gráfico aproximado de la función.

Ejercicio 13. De un vaso de leche de 200 ml se podría extraer 6 g de materia grasa para manteca.

(a) ¿Cuántos vasos serían necesarios para obtener 240 g de materia grasa?

(b) Modelizar con una función la relación entre la cantidad de materia grasa y el volumen de leche disponible, indicando dominio, codominio, fórmula y variables. Representar gráficamente.

3 Análisis de funciones

Cuando analizamos una función intentamos dar la mayor información posible sobre la misma que a su vez nos pueda ser útil para describir el fenómeno que ella modeliza y hacer predicciones estimativas sobre dicho fenómeno. Según cómo sea presentada esa función, aprenderemos algunos procedimientos para poder obtener información sobre la misma.

3.1 Lectura y análisis de gráficos

Cuando analizamos una función intentamos dar la mayor información posible sobre la misma que a su vez nos pueda ser útil para describir el fenómeno que ella modeliza y hacer predicciones estimativas sobre dicho fenómeno. Según cómo sea presentada esa función, aprenderemos algunos procedimientos para poder obtener información sobre la misma.

En esta sección vamos a realizar el análisis de una función que está presentada a través de un gráfico cartesiano. Esta representación es muy usada en las ciencias como Química, Biología, Geología, Economía, Geografía, etc. Muchos de estos gráficos se presentan con trazo continuo aunque hayan surgido a partir de una cantidad finita de datos. Esto es porque se supone que las variables con las que se trabaja toman todos los valores reales en el dominio considerado. A partir de un gráfico cartesiano aprenderemos a obtener información sobre la misma.

Pretendemos brindar una forma de análisis que sirva en general, aunque lo vamos a situar en el contexto particular de un fenómeno de Hidrología, que es la rama de la Metereología que se encarga del estudio de los cauces de agua (ríos, lagos, canales, represas, etc.)

Clima y Pronóstico en Hidrometría

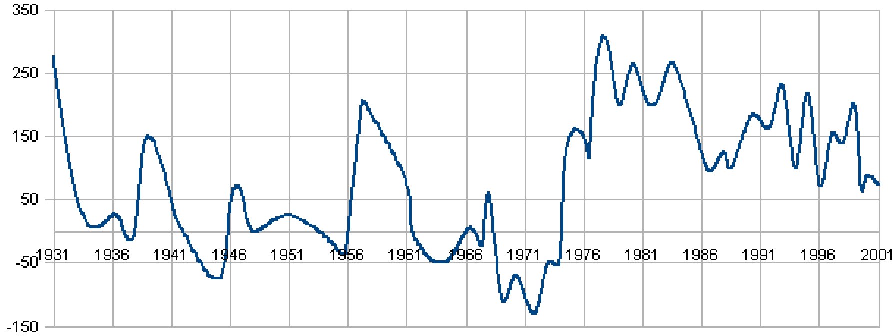
Para estudiar las variaciones en los ríos y relacionarlos con los fenómenos climáticos, se toman mediciones. Una de esas mediciones es el de la altura que alcanza el agua del río en diferentes épocas del año; el análisis de la variación de altura respecto del tiempo constituye el análisis hidrométrico del río.

El instrumento de medición que se utiliza es una barra de metal que se ubican verticalmente en puntos geográficos prefijados que se llaman estaciones hidrométricas.

Contrariamente a lo que se podría suponer, el origen de la regla graduada de la barra, el **0**, no coincide con el terraplén de la orilla del lecho del río sino que se ubica según una convención internacional. La graduación de la barra es cada 10 cm, con subdivisiones de 2 cm. Una vez determinado el origen donde se ubica el número 0, hay valores sobre ese origen, que se consideran positivos, y otros por debajo del mismo que consideran negativos. Es decir que, para esta medición en particular, la altura del río puede tomar tanto valores positivos ¡como negativos!.

Para hacer sus prospecciones de hidrología, los expertos analizan gráficos y tablas de funciones. Vamos a trabajar con la función f que a cada año considerado le asigna el mínimo valor de altura del río registrado en ese año, variable a la que llamamos directamente *altura del río*.

Nos proponemos analizar ciertas características de la función correspondiente a la cuenca del Río Paraguay, uno de los más importantes afluentes del Río Paraná, con mediciones tomadas en la estación hidrométrica de Bahía Negra, en la República del Paraguay [*]



Río Paraguay en Bahía Negra. Valores Mínimos - Período 1931-2001

En primer lugar el reconocimiento gráfico de que una correspondencia es función es trazando una recta "móvil", paralela al eje de las ordenadas (vertical), por cada abscisa del dominio y comprobar que dicha recta interseca al gráfico sólo una vez.

Haremos un análisis básico del gráfico orientado por las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las variables? ¿En cuáles ejes se representan? ¿Con qué escalas?
- ¿Qué datos de puntos podemos conocer directamente del gráfico y cuáles podemos estimar?
- ¿Qué eventos particulares se observan, tales como: máximos, mínimos, imágenes de abscisas predeterminadas, o preimágenes de ordenadas predeterminadas, etc.?
- ¿Qué información podemos obtener sobre intervalos, tal como: dónde la función supera, o es inferior, a algún valor prefijado o intervalos de crecimiento y de decrecimiento?
- ¿Qué información a largo plazo se observa para conocer la tendencia "a futuro" o suponer cómo ha sido en el "pasado"?

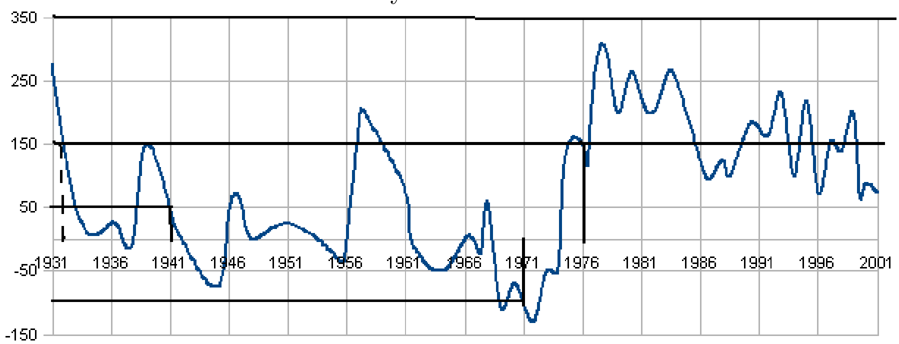
[*]Inspirado en la presentación de la Dra. Godniazki: "Clima y Pronóstico Hidrológico en Grandes Ríos"-2006

Estas preguntas pueden aplicarse para analizar cualquier gráfico de función. Veamos cómo hacerlo en este caso:

Variables y su representación en los ejes. Vemos que en el eje horizontal, de abscisas, donde convencionalmente se representa la variable independiente, los valores corresponden a la magnitud *tiempo*, medido en años. En el eje vertical, de ordenadas, donde convencionalmente se representa la variable dependiente, los valores corresponden a la magnitud *altura del río* (recordar que se trata de la altura mínima del río) medida en centímetros. Los valores representados en el eje horizontal empiezan en el año 1931 y finalizan en 2001, en el eje vertical se representan desde el -150 al 350.

Con respecto a las escalas, en el eje horizontal la escala es 5 años en un segmento de 1 cm, es decir 5 : 1. En el eje vertical la escala es 100 cm en un segmento de 1 cm, es decir 100 : 1. Se ha marcado una grilla o cuadriculado según dicha escala. Como vemos las cantidades representadas en 1 cm en cada uno de los ejes es distinta. La elección de escala se realiza de acuerdo a la conveniencia de la representación de las variables.

Datos puntuales.
Cuando hablamos de datos puntuales nos referimos a: conocida la abscisa, ver si a través del gráfico podemos conocer su imagen o bien conocida la imagen, ver si a través del gráfico podemos conocer su preimagen. A veces el gráfico nos permite conocer estos valores exactamente y otros es necesario estimarlos.



Observando el gráfico de nuestro ejemplo:

- ¿Cuál fue la altura del río en 1941? Podemos saber que para 1941 la imagen es 50 cuando es parte del dato del gráfico que la recta vertical en el punto del eje de 1941 y la horizontal en el punto del eje de 50 se intersecan sobre el trazo que representa la gráfica de la función. El punto $P_1 = (1941, 50)$ pertenece a la gráfica de la función. En el contexto dado, significa que en el año 1941 la altura fue de 50 cm.

- Si quisiéramos conocer la altura alcanzada en el año 1971, es decir su imagen, al trazar la vertical por ese valor (o mejor dicho por el punto correspondiente a ese valor) e intersecarla con el trazo de la función, vemos que no hay recta horizontal que pase por un valor de ordenada de la grilla que se encuentre en ese punto de intersección, por lo que no hay un dato preciso de su correspondiente sobre el eje de ordenadas. Podemos estimarlo, como un valor intermedio entre -150 y -50. Para estimarlo con más precisión dividimos el intervalo en cuartos, por cada cuarto se agregan o se extraen 25 cm. La ordenada buscada está en el segundo subintervalor, cercana al valor -100. Decimos entonces que estimamos que para el año 1971 la altura fue de 100 cm por debajo del nivel 0.

- Para responder la pregunta: ¿En qué años la altura del río fue de 150 cm? Deberíamos conocer las preimágenes de la ordenada 150. Al trazar una recta horizontal por el valor 150 vemos que la misma interseca al trazo de la función en varios puntos. Las abscisas de esos puntos son las preimágenes. Por los datos del gráfico, trazando la vertical por el valor 1976, vemos que las rectas horizontal por 150 y vertical por 1976 se intersecan en el trazo de la función. Luego una preimagen de 150 que podemos conocer con precisión es el 1976 y $P_2 = (1976, 150)$ es punto de la gráfica. Esto significa que uno de los años en que se alcanzó esa altura es el 1976.

  Podríamos estimar algún otro, por ejemplo entre los años 1931 y 1936 también se alcanzó esa altura, si quisiéramos una estimación más fina aún, trazando la vertical por el punto de intersección entre la horizontal por 150 y el gráfico de la función, vemos que la abscisa correspondiente está cerca del año 1931. Para estimar dicha abscisa mejor, dividimos el intervalo $[1931, 1936]$ en quintos, para que cada punto sea un año. Por la cercanía del punto sobre el eje de abscisas al número 1932, podemos decir entonces que uno de los años en los que se alcanzó la altura de 150 cm es estimativamente el 1932.

- Para responder la pregunta: ¿En qué años la altura del río fue de 350 cm? Deberíamos conocer las preimágenes del valor de ordenada 350. Al trazar la recta horizontal por el 350 vemos que la misma no interseca en ningún punto al gráfico de la función por lo que inferimos que ese valor no tiene preimagen.

Obtención de valores particulares: Máximo, mínimo, valores de intersección con los ejes.

El valor máximo de una función es un valor sobre el eje de las ordenadas que es imagen de algún valor del dominio y que supera o iguala a todas las demás imágenes. El resto de las imágenes se encuentran por debajo de él en el eje de las ordenadas.

En nuestro caso vemos que el valor máximo se encuentra entre los 250 y los 350 centímetros. Podríamos tratar de estimarlo con más precisión, trazando una recta horizontal por el punto más alto del gráfico vemos sobre el eje de las ordenadas que la misma interseca en un valor que consideraríamos equidistante entre 250 y 350, decimos entonces que el valor máximo es, aproximadamente, de 300 cm. También es importante señalar en qué año se alcanzó ese valor, es decir conocer su preimagen. Para ello procedemos como en el párrafo 3.1, ítem 3.1, para obtener aproximadamente la preimagen de 300 que se encuentra entre 1976 y 1981, dividiendo el intervalo en quintos, lo estimamos como el valor 1978. Luego decimos que estimativamente el máximo de altura del río se alcanzó en 1978 y fue de 300 cm.

El valor mínimo de una función es un valor sobre el eje de las ordenadas que es imagen de algún valor del dominio y que es inferior o iguala a todas las demás imágenes. El resto de las imágenes se encuentran por encima de él.

En nuestro caso vemos que el valor mínimo se encuentra entre los -150 y los -50 centímetros. Podríamos tratar de estimarlo con más precisión, trazando una recta horizontal por el punto más bajo del gráfico, vemos sobre el eje de las ordenadas que la misma interseca en un valor que consideraríamos cercano al -150, si dividimos el intervalo en cuartos podríamos decir que el valor mínimo es, aproximadamente, de -125. También es importante conocer su preimagen. Para ello procedemos como en el párrafo anterior y estimamos la preimagen de -125 que se encuentra entre 1971 y 1976, lo estimamos como el valor 1972. Luego decimos que estimativamente el mínimo de altura del río se alcanzó en 1978 y fue de 125 cm por debajo del nivel origen.

Los ceros de la función son aquellos valores de abscisa en los cuales el trazo de la gráfica interseca a este eje. Un cero o raíz de una función es un valor sobre el eje de las abscisas cuya imagen es el número 0.

Para identificarlos gráficamente se traza una recta horizontal por el 0 de las ordenadas y donde esa recta interseque al gráfico de la función entonces observamos o estimamos sus preimágenes. Un cero que podemos observar en el gráfico mediante los datos de la grilla es 1956. Los ceros restantes, los estimamos por el procedimiento anteriormente descrito en 3.1, ítem 3.1:

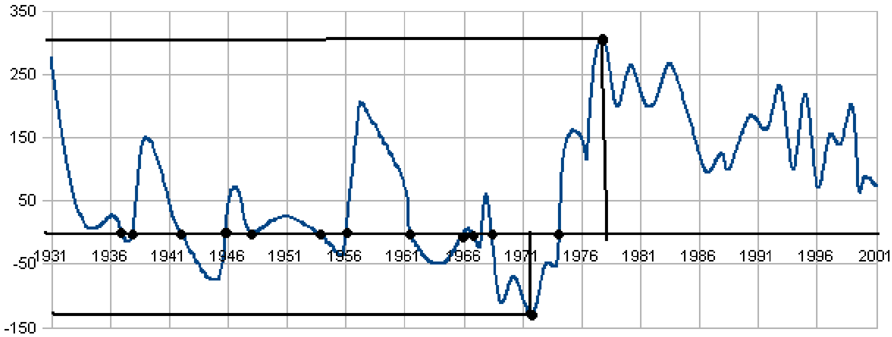
1937, 1938, 1942,1945,1948,1954,1962,1965,1967,1968,1969,1974.

Notemos que dada una función, puede haber un cero de la misma, más de un cero o ninguno si la horizontal no interseca al gráfico.

La ordenada al origen de una función es valor de las ordenadas que es imagen del 0.

En rigor nuestro caso como el 0 no pertenece al período de años estudiado no pertenece al dominio calculamos la ordenada al origen de esta función.

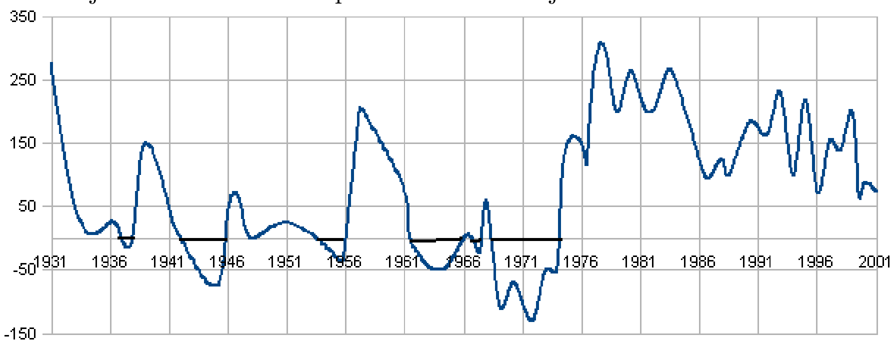
En los casos en que el cero sí pertence al dominio y está graficado, la ordenada al origen se ve como el punto de intersección entre le trazo de la función y el eje de las ordenadas.



Positividad, negatividad y crecimiento.

El conjunto de negatividad es aquel subconjunto de abscisas para el cual las imágenes de los valores de dicho conjunto son negativas (menores que 0). Lo notamos C^{-} y se representa gráficamente sobre el eje "x". Para el tipo de funciones que estudiamos en este libro, se expresa como unión de intervalos.

El conjunto de negatividad se observa del siguiente modo: se traza una recta horizontal por el valor de ordenada 0 y se identifican las abscisas cuyas imágenes están por debajo de esa recta. Se representa sobre el eje "x".



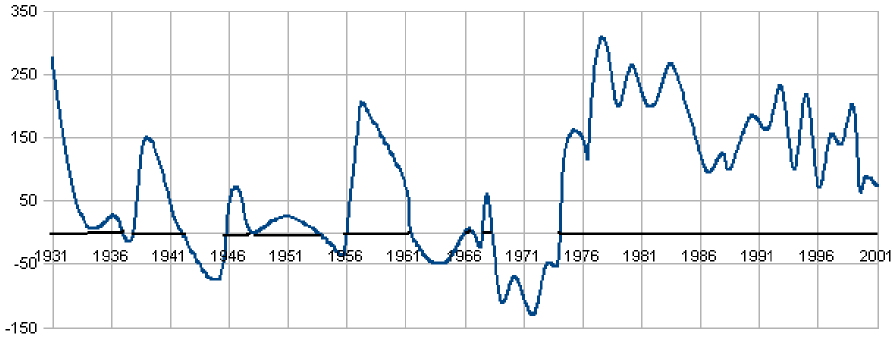
En nuestro ejemplo, trazamos la recta horizontal, estimamos los ceros de la función (las preimágenes del 0) y notamos que el conjunto de negatividad está formado por intervalos entre ceros. Estimamos dicho conjunto:

$$\begin{aligned} C^{-} \quad &= \quad (1937, 1938) \cup (1942, 1945) \cup (1954, 1956) \cup \\ & \quad\quad (1962, 1965) \cup (1967, 1968) \cup (1969, 1974). \end{aligned}$$

Nota importante: En rigor no deberíamos usar el símbolo "=" para determinar el conjunto porque los valores no son exactos sino estimados. Lo hacemos a los fines de que se entienda cómo se obtiene el conjunto C^{-} en los casos más "escolarizados"

El conjunto de positividad es aquel conjunto incluido en el eje de las abscisas para el cual las imágenes de los valores de dicho conjunto son positivas (mayores que 0). Lo notamos C^+ y, para el tipo de funciones que estudiamos en este libro, se expresa como unión de intervalos o de conjuntos que contienen puntos aislados.

El conjunto de positividad se observa del siguiente modo: se traza una recta horizontal por el valor de ordenada 0 y se identifican las abscisas cuyas imágenes están por encima de esa recta. También se representa sobre el eje "x".

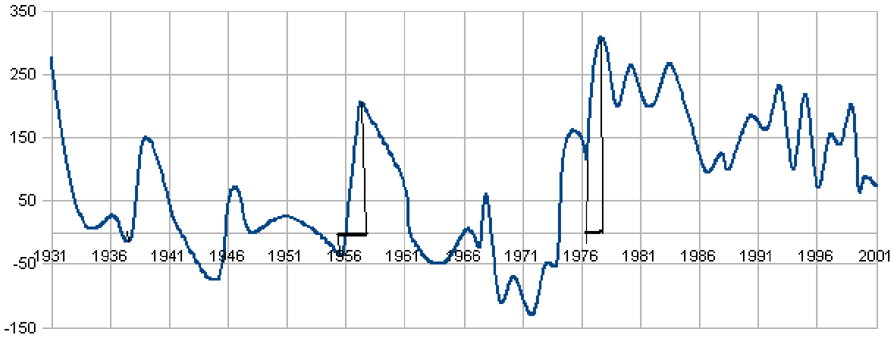


En nuestro ejemplo, trazamos la recta horizontal, estimamos los ceros de la función (las preimágenes del 0) y estimamos dicho conjunto:

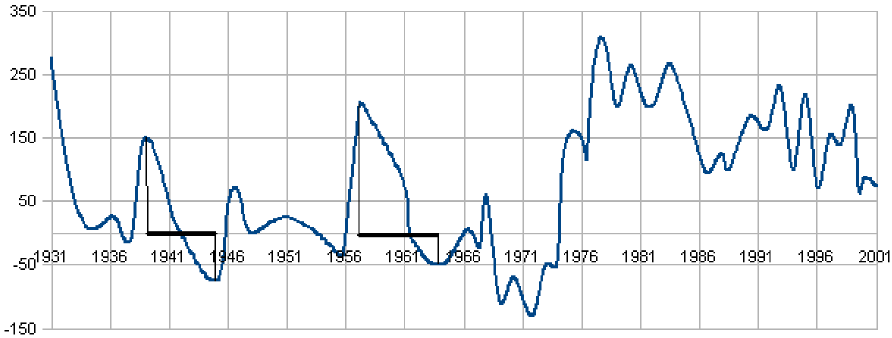
$$\begin{aligned} C^+ &= (1931, 1937) \cup [(1946, 1954) \setminus \{1948\}] \cup \\ &\quad (1956, 1962) \setminus (1965, 1967) \cup (1967, 1968) \cup (1974, 1971). \end{aligned}$$

Nota importante: En rigor no deberíamos usar el símbolo "=" para determinar el conjunto porque los valores no son exactos sino estimados. Lo hacemos a los fines de que se entienda cómo se obtiene el conjunto C^+ en los casos más "escolarizados".

Crecimiento: Gráficamente en cada intervalo el crecimiento se observa del siguiente modo: mientras observamos las abscisas en aumento (de izquierda a derecha): $\rightarrow$, el trazo de la función va subiendo: $\nearrow$. En nuestro ejemplo, hay varios intervalos de crecimiento, estimamos sólo dos de ellos: $(1955, 1957)$ y $(1977, 1978)$.



Decrecimiento Gráficamente en cada intervalo el decrecimiento se observa del siguiente modo: mientras observamos las abscisas en aumento (de izquierda a derecha): $\rightarrow$, el trazo de la función va bajando: $\searrow$. En nuestro ejemplo, hay varios intervalos de decrecimiento, estimamos solamente dos de ellos: $(1939, 1944)$ y $(1957, 1964)$



Observemos que en esta función, cuando hay un cambio de creciente a decreciente, ($\nearrow \searrow$) la imagen de esa abscisa donde se realiza el cambio supera a las imágenes de las abscisas cercanas. Ese valor se llama *máximo relativo*. Por ejemplo en 1957 hay un cambio de creciente a decreciente entonces $f(1957)$ es un máximo relativo que estimamos en, aproximadamente, 200. Esto significa que para años cercanos al 1957, la altura del río no superó los 200 cm.
Anĺogamente, podemos obtener un mínimo relativo al pasar de un intervalo de decrecimiento a uno de crecimiento. Por ejemplo, estimamos que en 1964 hay un mínimo relativo que sería -50. En años cercanos a 1964 la altura estuvo por encima de los 50 cm debajo del origen.

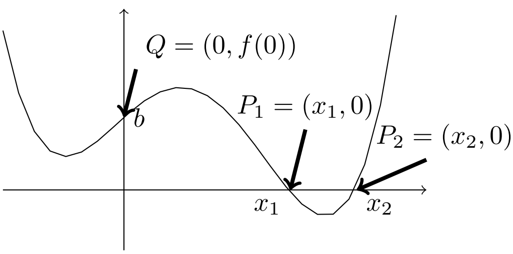
3.2 Revisión más formalizada de lo visto.

Reconocer una imagen. Si nos dan un valor numérico b y nos piden reconocer si es imagen de algún valor del dominio, tenemos que pensar que si así fuera, ese valor estaría representado en el eje vertical, es decir debemos ubicarlo en el eje de ordenadas $y = b$. Trazamos luego una recta horizontal, paralela al eje x. Si la recta corta a la gráfica de la función en *algún* punto (*uno o más* puntos) entonces b será imagen de algún valor del dominio.

En general, dado un número b, si $a \in \operatorname{Dom} f$ es tal que $f(a) = b$ entonces a se llama *preimagen de b*

Intersección de la gráfica con los ejes. Analicemos las dos posibilidades:

- **Con eje de abscisas** Si $P = (x, y)$ es el punto donde se cortan o intersecan la gráfica de una función f con el eje de abscisas. Luego, por un lado $y = f(x)$ por ser punto de la gráfica y por otro $y = 0$, por estar sobre el eje horizontal. Luego el punto de intersección de la gráfica de f con el eje de abscisas es el caso en que $f(x) = 0$. En este caso, x es un valor del dominio para el cual su imagen por la función f se anula y se lo llama *raíz o cero de la función*. Esto significa que buscar en un gráfico los ceros de una función significa buscar los puntos donde la gráfica corta al eje horizontal.
- **Con eje de ordenadas** Si $P = (x, y)$ es el punto donde se cortan la gráfica de una función f con el eje vertical entonces $x = 0$ por estar sobre el eje vertical e $y = f(0)$ por ser punto de la gráfica. El valor de y que cumple esta condición se lo llama *ordenada al origen de la función*.



En este gráfico $f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = 0$, luego x_1 y x_2 son las raíces de f. El valor b es la ordenada al origen, la imagen de 0.

Subconjuntos del dominio cuyas imágenes son positivas o negativas. Dado que las imágenes se representan sobre el eje de ordenadas, para observar cuáles son las abscisas cuyas imágenes son positivas primero hay que observar qué parte de la gráfica de f está sobre el eje horizontal (por "arriba") luego ver sobre el eje horizontal qué valores de x son aquellos cuyas imágenes están en esa región. Ese conjunto se llama *conjunto de positividad* y se define:

$$C^+ = \{x \in \operatorname{Dom} f : f(x) > 0\}.$$

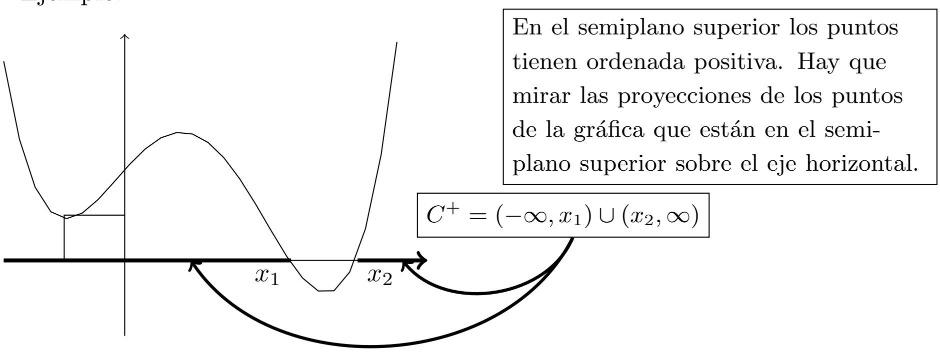
No hay que confundirse, el conjunto de positividad se representa sobre el eje de abscisas. Análogamente el *conjunto de negatividad* se define:

$$C^- = \{x \in \operatorname{Dom} f : f(x) < 0\}.$$

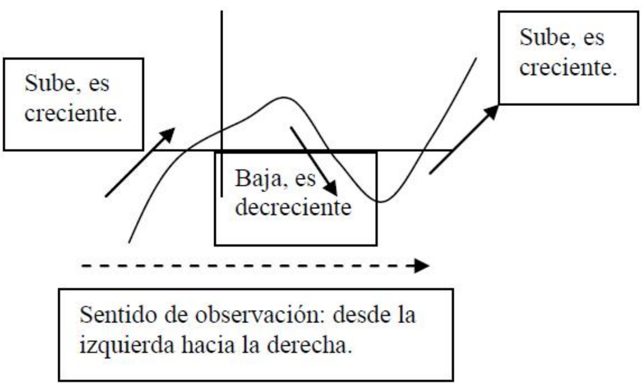
Por último recordemos la definición de "cero" de una función y entonces definimos el "Conjunto de ceros":

$$C_0 = \{x \in \operatorname{Dom} f : f(x) = 0\}.$$

Ejemplo:

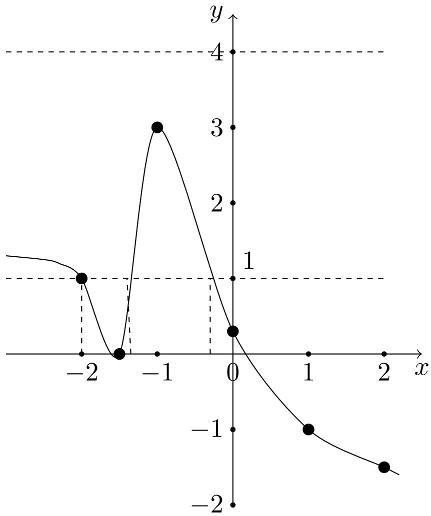


Crecimiento o decrecimiento. Una función es *creciente* en un subconjunto $S \subseteq \operatorname{Dom} f$ cuando para todo par de valores x_1 y x_2 en este conjunto, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$. Análogamente una función es *decreciente* en un subconjunto $S \subseteq \operatorname{Dom} f$ cuando para todo par de valores x_1 y x_2 en este conjunto, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$. El gráfico cartesiano permite observar crecimiento y decrecimiento fácilmente. Si la gráfica de la función, vista de izquierda a derecha, "sube" entonces la función es creciente y si "baja" es decreciente. Para estudiar el crecimiento (o decrecimiento) lo importante es indicar cuáles son los subconjuntos del dominio donde la función es creciente para lo cual hay que mirar las proyección de parte de la gráfica que sube sobre el eje x (o que baja si se quiere ver decrecimiento). En general los subconjuntos de crecimiento, o decrecimiento, de los casos que estudiaremos son intervalos en $\mathbb{R}$. Hay que mirar el crecimiento (o decrecimiento) de la función en cada uno de los intervalos por separado.



Valores de máximo o de mínimo de una función. Cuando una función de trazo continuo cambia su condición de creciente a decreciente a partir de un cierto valor de abscisa a, es porque su imagen, $f(a)$, es mayor que todas las imágenes de los valores cercanos a a. Decimos entonces que en a la función alcanza un valor *máximo relativo* (relativo a valores cercanos de a. Del mismo modo, cuando una función cambia su condición de decreciente a creciente a partir de un cierto valor de abscisa a, es porque su imagen, $f(a)$, es menor que todas las imágenes de los valores cercanos a a. Decimos entonces que *en a la función alcanza un valor mínimo relativo* (relativo a valores cercanos de a) y es $f(a)$.

Ejercicio resuelto 5. A continuación repasaremos lo visto mediante un ejemplo analizando el siguiente gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hay que imaginar que la curva sigue con la tendencia indicada, es decir hacia la derecha, la curva "baja indefinidamente" y hacia la izquierda "sube sostenidamente" sin superar el valor $3,5$, por ejemplo.



Reconocer una imagen. A partir del gráfico, se desea saber si: a)$1 \in \operatorname{Im} f$, b) $4 \in \operatorname{Im} f$.

Se traza una recta horizontal por $y = 1$, vemos que esa recta corta a la curva en tres puntos. Trazando una recta vertical por cada uno de esos puntos de intersección, hasta que corten al eje x, podemos ver o estimar la abscisa de los mismos. En este caso vemos que la abscisa de uno de los puntos es $x_1 = -2$ y estimamos el resto abscisas como $x_2 = -1,4$, $x_3 = -0,3$. Luego decimos que $-1 \in \operatorname{Im} f$ con $f(-2) = 1$, por ser $(-2; 1)$ un punto marcado en el gráfico, y que $f(-1,4) \approx 1$ y $f(-0,3) \approx 1$.

Del mismo modo, para $y = 4$ se traza una recta horizontal. Se observa que dicha recta no interseca a la curva de la gráfica por lo que $4 \notin \operatorname{Im} f$.

Intersección de la gráfica con los ejes. A partir del mismo gráfico se desea estimar los ceros de la función y la ordenada al origen.

Para dar valores de los ceros, simplemente se observan las abscisas donde la curva corta al eje x que son dos: $x_1 = -1,5$, ya que sobre esta abscisa hay marcado un punto de la gráfica en el eje x y $x_2 \approx 0,3$ (este último está estimado luego de dividir al segmento $[0,1]$ en 10 partes iguales). Resulta $C_0 = \{x_1 = -1,5, x_2 \approx 0,3\}$ y los puntos del gráfico tienen por coordenadas: $P_1 = (-1,5;0)$ $P_2 = (0,3;0)$.

Para la intersección con el eje y, observamos dónde la gráfica corta a dicho eje para lo cual miramos el valor de y correspondiente a la abscisa $x = 0$. En este caso está dado como dato que la ordenada al origen es $y = 0,3$, luego el punto de intersección es: $P = (0;0,3)$.

Subconjuntos del dominio cuyas imágenes son positivas o negativas. En el gráfico dado, vemos los valores de imágenes positivas observando sobre qué parte de la recta, el gráfico se mantiene en el semiplano superior al eje x. Esto nos da:

$$C^+ = (-\infty, -1,5) \cup (-1,5, 0,3).$$

Observemos que las raices $x_1 = -0,5$, $x_2 = 0,3$ no están contenidas en el conjunto pues sus imágenes son 0.

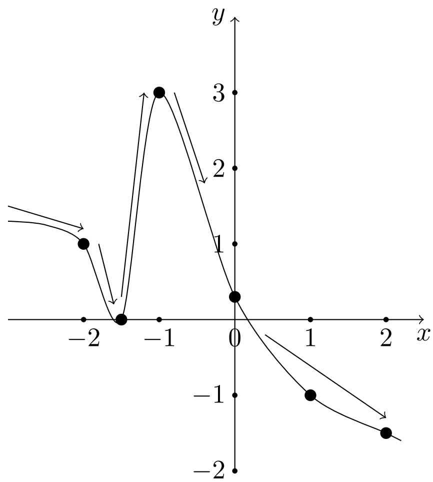
Análogamente, obtenemos el conjunto de valores cuyas imágenes son negativas.

$$C^- = (0,3, \infty).$$

Crecimiento o decrecimiento. Recordemos que para mirar crecimiento o decrecimiento en el gráfico, la lectura debe hacerse en forma conjunta sobre el eje x y sobre el trazo de la curva que representa la gráfica.

Sobre el eje x, se leen los valores en el sentido de crecimiento de los números, de izquierda a derecha: $\longrightarrow$.

Sobre el trazo de la curva debe verse si, en la dirección dada por la lectura de las abscisas, el trazo *sube* $\nearrow$, indicando crecimiento, o baja $\searrow$ indicando decrecimiento.



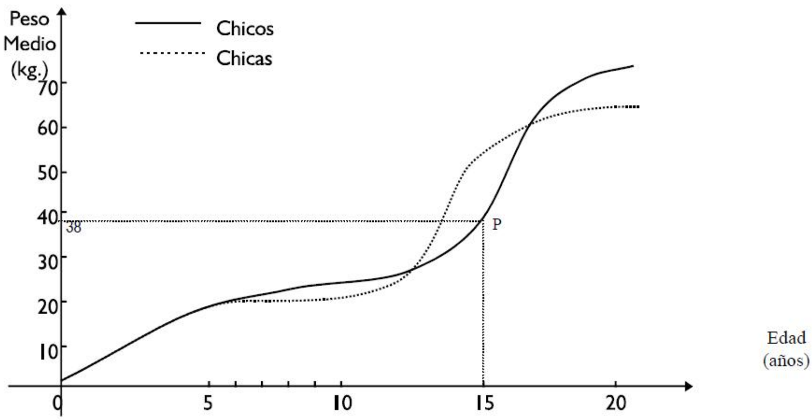
$$\text{Intervalo de crecimiento : } I_1 = [-1,5, -1].$$

$$\text{Intervalos de decrecimiento : } J_1 = (-\infty, -1,5]; J_2 = [-1, \infty].$$

Valores de máximo o de mínimo de una función. En este ejemplo, vemos que en el valor $x = -1,5$ la función pasa de ser decreciente a creciente. Allí se alcanza un mínimo relativo que es $y_1 = f(-1,5) = 0$. Del mismo modo, en el valor $x_2 = -1$ la función pasa de ser creciente a decreciente, por lo que en $x_2 = -1$ se alcanza un máximo relativo que es $y_2 = f(-1) = 3$

Trabajo Práctico 23

Ejercicio 1. Según surge de un estudio estadístico, el peso medio de los chicos desde que nacen hasta los 20 años viene dado por el siguiente gráfico:



Observando el mismo responder:

(a) Estime el peso medio de las mujeres al nacer. ¿Cuál es el peso medio de los varones de 9 años?

(b) ¿A qué edad tienen las mujeres un peso medio superior a los 40 kg.?

(c) ¿En qué período el peso medio de las mujeres supera al de los varones?

(d) ¿Cuándo ganan peso más rápidamente los chicos? ¿Y más lentamente?

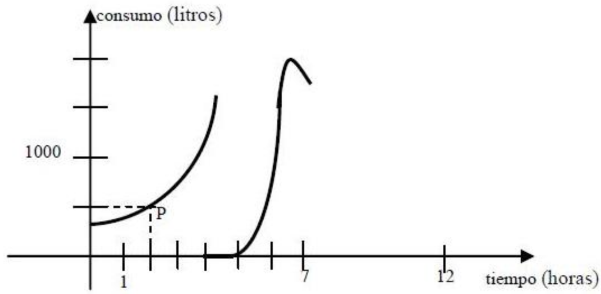
(e) ¿Qué coordenadas tiene el punto P indicado en la gráfica? ¿qué datos indican esas coordenadas?

(f) ¿Qué significan los puntos de intersección? ¿Cuáles son las coordenadas de esos puntos? (dar valores aproximados que surjan de la lectura del gráfico)

(g) Explicar por qué las curvas no cortan el eje de las abscisas.

(h) ¿Para qué edades están definidos los pesos en el gráfico?

Ejercicio 2. Se quiere confeccionar un gráfico que muestra el consumo de agua de una fábrica durante una jornada de trabajo desde las siete de la mañana hasta las cinco de la tarde. Se comenzó a confeccionarlo volcando los datos del período que va desde las siete de la mañana hasta las dos de la tarde.



(a) ¿Cuáles son las coordenadas de P? ¿Cómo se interpretan dichas coordenadas en relación a la situación planteada?

(b) ¿Podría estimar el consumo a las diez de la mañana? Explicar cómo se infiere este dato a partir de la lectura del gráfico.

(c) ¿ En un momento de la mañana hubo un incidente con el aprovisionamiento de agua. ¿Puede decir en qué momento? ¿cuánto duró el incidente?

(d) ¿Completar el gráfico sabiendo que:

- a las tres y media de la tarde el consumo es de mil quinientos litros.
- a las cinco de la tarde el consumo es la mitad del consumo al inicio de la jornada.
- Compare su gráfico con el de su compañero.

(e) Según su interpretación de la situación ¿en cuántos momentos del día el consumo es de 1000 litros?

(f) Según el gráfico que usted dibujó,

- ¿Cuándo es creciente el consumo? ¿Cuándo es decreciente?
- ¿En qué período el consumo fue inferior a 50 litros?

(g) Continuar el gráfico imaginando el consumo de la fábrica durante la noche de esa jornada y durante la jornada de trabajo siguiente (sin incidentes de aprovisionamiento). Para el gráfico completo, indicar el lapso de tiempo representado en el eje x.

Ejercicio 3. La siguiente tabla contiene las temperaturas en grados centígrados registradas durante un día de agosto en San Miguel:

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Temperatura	9^o	$8,5^o$	8^o	7^o	$5,5^o$	6^o	8^o	12^o	12^o	6^o	$4,5^o$	4^o

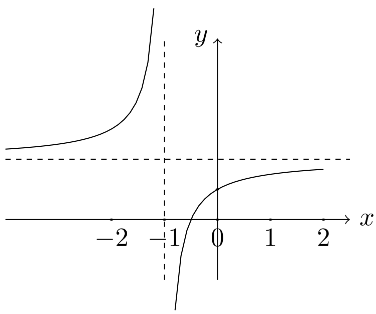
(a) Representar gráficamente en ejes cartesianos los datos.

(b) Estime qué temperatura había a las 12 hs. $30'$. ¿Cómo hizo esa estimación? ¿es la misma estimación que hizo su compañero?

(c) ¿En qué períodos la temperatura fue por lo menos de 8^o?

(d) ¿A qué hora penetró en San Miguel un frente frío ese día? ¿Puede conocer esa hora exactamente o el valor será estimativo?

Ejercicio 4. Observar el siguiente gráfico: ¿Representa una función creciente? Explicar.



Ejercicio 5. Para pensar...

(a) Enunciar alguna proposición (pensarla por cuenta propia) que involucre a la raíz o cero de una función y que sea verdadera.

(b) Leer las siguientes afirmaciones, decir cuál es verdadera o cuál es falsa y por qué:

Si un punto $P = (x, y)$ no pertenece a la gráfica de una función f, entonces $y \neq f(x)$.

Para que una asignación sea función es necesario que cada valor que es imágen sea correspondiente de un único valor del dominio.

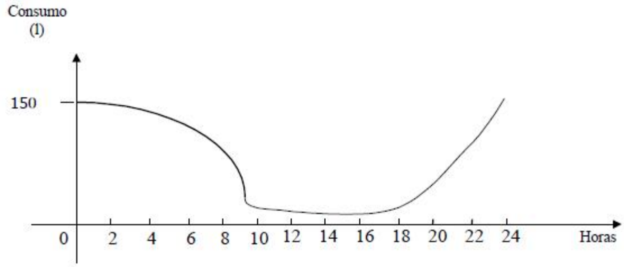
Ejercicio 6. En cada una de las situaciones planteadas en los ejercicios de arriba (Edades de Jóvenes, Temperaturas en San Miguel), indicar:

(a) Cuáles son las variables que se relacionan.

(b) Dominio y codominio de la función de acuerdo al contexto de la situación planteada,

(c) Intervalos de crecimiento, decrecimiento y conjunto de ceros de la función.

Ejercicio 7. El consumo de agua en un boliche viene dado por la gráfica:



(a) ¿Cuándo es nulo el consumo de agua?

(b) ¿Cuándo es creciente el consumo? cuándo decreciente? durante qué horas se alcanzan los valores máximos y mínimos de consumo de agua?

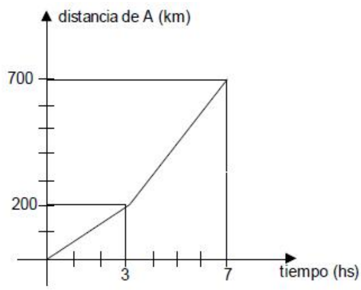
(c) ¿En qué período de tiempo el consumo fue superior a 50 litros?

(d) Escribir el par ordenado que informa sobre el consumo al inicio del registro.

(e) ¿Cuánto vale $f(24)$?

(f) Dibujar un gráfico similar para el consumo de agua de un club de fútbol en un día que hay partido.

Ejercicio 8. En el siguiente gráfico se representa la distancia a una ciudad A de un auto que sale de la ciudad A y se desplaza por una ruta rectilinea hacia la ciudad B. Entre A y B hay 700 km.



Realizar para el mismo viaje el gráfico que representa a lo largo del trayecto

(a) la distancia del auto a la ciudad B.

(b) la distancia del auto a una ciudad C que se encuentra a 200 km de A sobre la misma ruta, entre A y B.

(c) la distancia de un auto a una ciudad C que se encuentra a 200 km de A sobre la ruta que une A con B, pero en sentido contrario al del recorrido del auto.

Capítulo 6

Modelización con funciones lineales

1 Funciones de proporcionalidad directa

En este apartado vamos a estudiar a la proporcionalidad directa desde un punto de vista funcional, completando el estudio que iniciamos con las proporciones numéricas. Para introducir el tema usaremos la situación descripta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Estudiar las distintas posiciones por las que pasa un auto a medida que transcurre el tiempo, sabiendo que marcha a una velocidad constante de 80km/h por un camino recto.

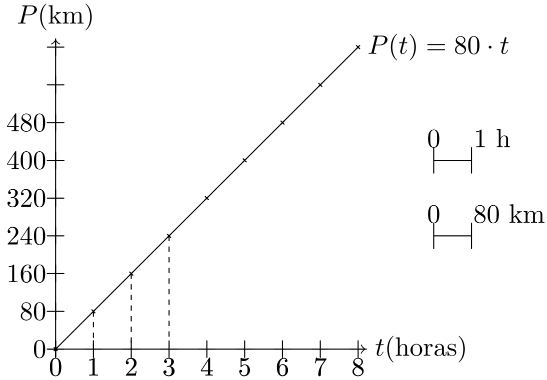
Las magnitudes involucradas en esta situación son: la posición del auto respecto a un punto de referencia fijo y el tiempo. Si se sabe que el auto tiene una velocidad constante de 80km/h podemos afirmar que por cada hora que pase el auto va a aumentar su posición en 80km respecto a la posición inicial (km 0), es decir:

$$\begin{array}{llll}
\text{a} & t = 0 \text{ h} & \text{le corresponde} & P = 0 \\
\text{a} & t = 0,5 \text{ h} & \text{le corresponde} & P = 80 \cdot 0,5 = 40 \\
\text{a} & t = 1 \text{ h} & \text{le corresponde} & P = 80 \\
\text{a} & t = 2 \text{ h} & \text{le corresponde} & P = 80 \cdot 2 = 160 \\
\text{a} & t = 3 \text{ h} & \text{le corresponde} & P = 80 \cdot 3 = 240 \\
 & \vdots & & \vdots \\
\text{a} & \text{t genérico} & \text{le corresponde} & P = 80 \cdot t
\end{array}$$

De esta forma, la relación que describe la posición del automóvil es $P = 80.t$, o bien, $P(t) = 80.t$ (con ambas variables expresadas en las unidades correspondientes). La función que queda definida por esa expresión algebraica es

$$P : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad P(t) = 80.t.$$

Su gráfica resulta ser **una semirrecta que contiene al origen de coordenadas.**



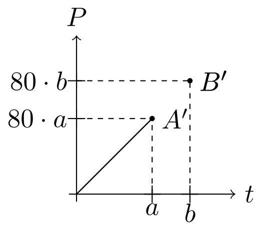
Observemos en la figura que quedan formados triángulos semejantes que verifican:

$$80 = \frac{80}{1} = \frac{160}{2} = \frac{240}{3} = \cdots$$

¿Por qué los puntos que responden a la fórmula $P(t) = 80.t$ están alineados?

Tenemos que $O = (0, 0)$ satisface la ecuación y consideramos otro par ordenado que la satisfaga: $A' = (a, P(a))$, es decir, $(a, 80.a)$. Esos dos puntos, O y A' determinan una recta, que llamaremos r. La idea ahora es tomar un punto cualquiera que satisfaga la ecuación $P(t) = 80.t$ y probar que ese punto debe pertenecer a r. Llamemos B' a ese punto. Entonces: $B' = (b, 80.b)$. Para probar que B' pertenece a la recta r, consideramos los puntos del plano $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$.

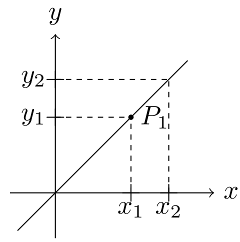
Tenemos así cinco puntos: O, A, B, A' y B'. Si pudiéramos asegurar que los triángulos rectángulos OAA' y OBB' tienen los ángulos agudos iguales, resultaría suficiente para que B' pertenezca a r (es decir que O, A' y B' están alineados). Veamos la relación entre los catetos



$$\frac{B'B}{A'A} = \frac{80 \cdot b}{80 \cdot a} = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}\ .$$

Hemos obtenido que $\frac{B'B}{A'A} = \frac{OB}{OA}$, es decir, los catetos de ambos triángulos son proporcionales. Usando el criterio que dice que "si dos triángulos rectángulos tienen sus catetos proporcionales entonces tienen sus ángulos agudos respectivamente iguales" (en otras palabras, los triángulos son semejantes), podemos afirmar que el ángulo determinado por A', O, A será el mismo que el determinado por B', O, B y, como dijimos, eso garantiza que B' pertenece a r. De esta manera, todos los puntos que cumplen que $P(t) = 80 \cdot t$ resultan alineados. Notemos que con lo anterior hemos probado que si una función tiene expresión que $P(t) = 80 \cdot t$, entonces todos los pares $(x; y)$ que cumplen esta relación, determinan puntos alineados. Sin embargo, esto tiene alcance general, esto es, que se cumple en todas las funciones de proporcionalidad. Dejamos como ejercicio su realización que es análoga a la exhibida.

Nos preguntamos ahora por la situación recíproca de la anterior: ¿Por qué si tenemos la gráfica de una recta (no vertical) que contiene al origen de coordenadas, todos sus puntos verifican una fórmula del tipo de la proporcionalidad directa? En primer lugar, es claro que las rectas no verticales corresponden a funciones, porque para cualquier valor real es posible asignar un único correspondiente (eso se ve gráficamente trazando paralelas al eje de las ordenadas y viendo que intersecan a la gráfica en un solo punto).



Por otro lado, si tomamos dos puntos cualesquiera de la recta que no sean el origen de coordenadas, podemos formar triángulos como se indica en la figura de arriba. Los triángulos son semejantes y por lo tanto:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Si a uno de los puntos de la recta lo dejamos fijo, por ejemplo P_1, y consideramos "móvil" al otro punto de la recta, obtendríamos siempre triángulos semejantes que cumplen la condición de proporcionalidad de arriba y que puede escribirse de forma equivalente como:

$$y_2 = \frac{y_1}{x_1} x_2$$

Si llamamos $m = \frac{y_1}{x_1}$ y al "punto móvil" lo indicamos genéricamente $(x; y)$ entonces,

$$y = m \cdot x$$

Concluimos entonces que una función proporcional tiene por gráfica una recta que contiene al origen y viceversa, es decir una recta que contiene al origen corresponde a la gráfica de una funci'on proporcional. Dependiendo de las condiciones del problema, que pueden implicar una restricción en el dominio, el gráfico de una función proporcional puede ser una recta, una semirrecta, un segmento o puntos aislados alineados.

Supongamos ahora que estudiamos la misma situación para un auto se desplaza al doble de velocidad, esto es, 160 km/h. La fórmula que nos permite conocer la posición P luego de trancurrido un tiempo t es entonces:

$$P = 160 \cdot t$$

En estas condiciones, el gráfico también corresponde a una semirrecta que contiene al origen, pero la relación entre los incrementos resulta el doble que en el caso anterior. Esto quiere decir que cuando el tiempo se incremente en una hora ($\Delta t = 1$) la posición se incrementará en 160 kilómetros ($\Delta P = 160$); para un incremento de tiempo $\Delta t = 2$

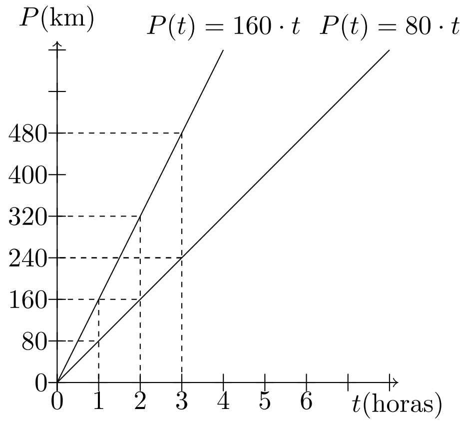
le corresponderá un incremento en la posición de $\Delta P = 320$, y cualquiera sea el incremento de tiempo que se considere siempre se va a cumplir:

$$\text{velocidad}=\tfrac{\Delta P}{\Delta t} = \tfrac{160}{1} = \tfrac{320}{2} = \tfrac{480}{3} = \cdots = 160$$

Incrementos no enteros. En todos los ejemplos exhibidos los incrementos son números enteros ($\Delta t = 1,\ 2, \dots$), pero podrían tomar cualquier valor real. Por ejemplo, si el auto anduviera durante media hora ($\Delta t = \frac{1}{2} = 0,5$) avanzaría 80 km, si el auto anduviera durante o una hora y cuarto ($\Delta t = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$) avanzaría $160 + 40 = 200$ km. En todos los casos obtendríamos la misma velocidad

$$\text{velocidad} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{80}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 80 = 160 \qquad \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{200}{\frac{5}{4}} = \frac{200 \cdot 4}{5} = 160$$

Si graficamos ambas funciones en un mismo gráfico, restringiendo el dominio a los valores no negativos de t, podemos ver que la semirrecta que corresponde al móvil con velocidad de 160 km/h posee una inclinación más pronunciada que la del móvil con velocidad de 80 km/h. En ambos ejemplos, si consideramos el conjunto de los reales mayores o iguales que 0 como dominio, los gráficos obtenidos son *rectas que contienen al origen* y la velocidad de los móviles está relacionada con la inclinación de la misma respecto al semieje positivo de las abscisas.



Estas fórmulas corresponden a un tipo especial de funciones caracterizadas por la proporcionalidad que existe entre las variables que intervienen.

Funciones de proporcionalidad directa. Se llaman *funciones de proporcionalidad directa* a las funciones de la forma

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = m.x$$

donde m es un número real cualquiera al que se llama *pendiente*. En estas funciones, las variables independiente y dependiente son directamente proporcionales, aunque es común que se diga que son proporcionales (a secas).

En los ejemplos anteriores, m vale 80 y 160 respectivamente, y en el contexto del problema hemos trabajado con la función de proporcionalidad restringiendo su dominio al intervalo $[0, +\infty)$. Siguiendo el mismo razonamiento que el llevado a cabo en el caso particular, resulta que la gráfica de este tipo de funciones de proporcionalidad es una recta que contiene al origen. Observamos además que:

- cuando $x = 0$ se cumple que $f(0) = 0$.
- por cada unidad que se incremente el valor de x la función se incrementará constantemente la misma cantidad m (en los ejemplos 80 ó 160), esto es fácil de ver

$$\begin{aligned}
&\text{para } x = 0,\ f(0) = 0\\
&\text{para } x = 1,\ f(1) = m \cdot 1 = m\\
&\text{para } x = 2,\ f(2) = m \cdot 2 = 2 \cdot m\\
&\text{para } x = 3,\ f(3) = m \cdot 3 = 3 \cdot m\\
&\text{para } x = 4,\ f(4) = m \cdot 4 = 4 \cdot m
\end{aligned}$$

y la variación del crecimiento (o decrecimiento si m es negativo) se mantiene constante. Justamente esta propiedad es distintiva de las rectas.

Hemos analizado que el número m, que multiplica a la variable independiente x , nos da idea de la inclinación de la recta: cuanto mayor es m (positivo) más empinada resulta y la variación del crecimiento de la función es mayor. Por eso a este número m se lo denomina pendiente de la recta y su valor determina cuánto aumenta (o disminuye, si m es negativo) la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta en una unidad.

En los ejemplos de los automóviles, la velocidad es el cociente entre incrementos $v = \frac{\Delta P}{\Delta t}$.

Cálculo de la pendiente. La pendiente m nos indica la relación entre el incremento de la variable dependiente Δy y el de la variable independiente Δx de la siguiente forma

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ . \tag{1.1}$$

En el caso de las funcioens g y h definidas de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ y dadas por $g(x) = 80 \cdot x$ y $h(x) = 160 \cdot x$ podemos hacer algo similar. Entonces para g es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{80}{1} = \frac{160}{2} = \frac{240}{3} = \cdots = 80$$

y para h es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{160}{1} = \frac{320}{2} = \frac{480}{3} = \cdots = 160$$

Para reafirmar estos conceptos veamos diferentes funciones de proporcionalidad.

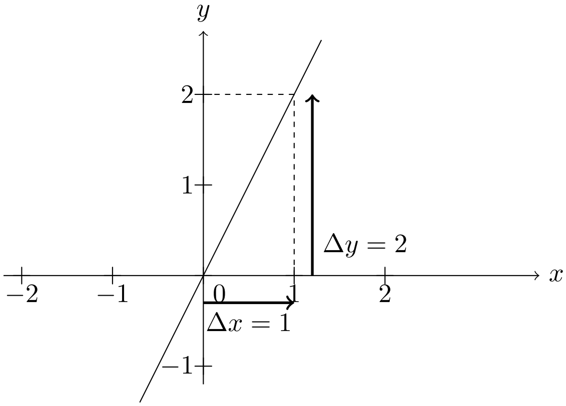
Ejemplo 2.

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot x$. La expresión de laf unción responde al formato $f(x) = m \cdot x$, ya podemos afirmar que:
   - es una función de proporcionalidad, lo que significa que su gráfica es una recta que contiene al origen.

- su pendiente es 2, o sea que si x se incrementa en una unidad ($\Delta x = 1$) entonces y se incrementa en 2 unidades ($\Delta y = 2$) o, si x se incrementa en dos unidades ($\Delta x = 2$) entonces y se incrementa en 4 unidades ($\Delta y = 4$) y así sucesivamente, es decir:

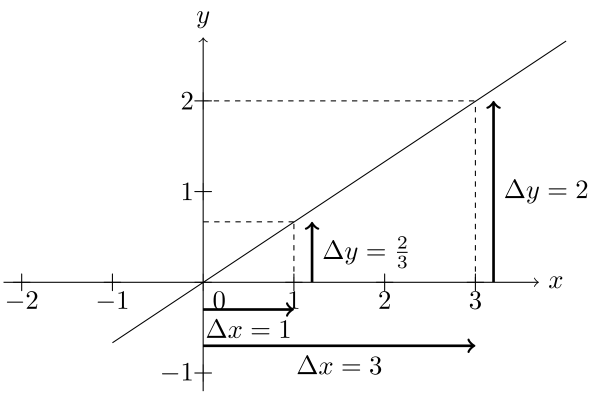
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{3} = \cdots 2$$

Volcando esta información sobre el gráfico obtenemos:



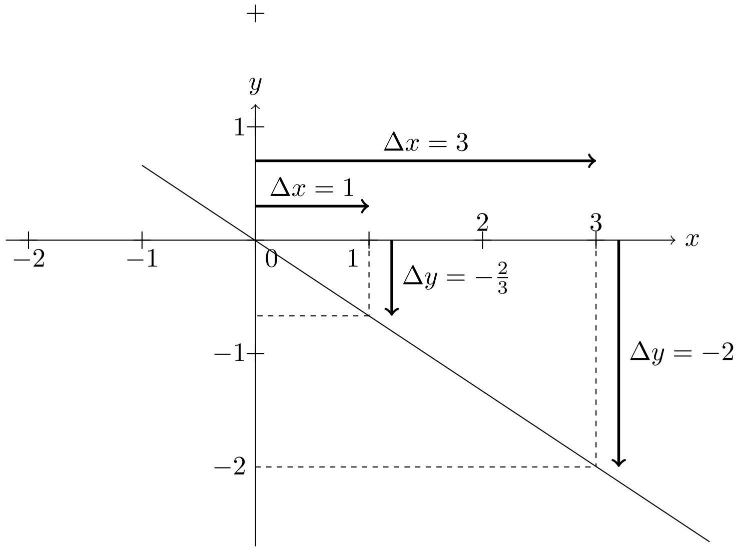
En la figura se indica que, partiendo del punto $(0;0)$, si nos desplazamos una unidad hacia la derecha en el eje horizontal y luego nos desplazamos 2 unidades verticalmente obtenemos un punto del gráfico.

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x$, la pendiente es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$. Este caso es análogo al anterior. Su gráfico resulta:



En el gráfico se muestra que si desde el punto $(0;0)$ nos desplazamos una unidad en el eje horizontal y luego $2/3$ verticalmente se determina la misma recta que si nos desplazamos desde el origen de coordenadas 3 unidades horizontalmente y 2 verticalmente. Esta última elección tiene la ventaja de trabajar con valores enteros.

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x$, la pendiente es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2/3}{1} = -\frac{2}{3}$. Este caso es análogo al anterior. Su gráfico resulta:



En el gráfico se muestra que si desde el punto $(0; 0)$ nos desplazamos una unidad en el eje horizontal y luego $-2/3$ verticalmente se determina la misma recta que si nos desplazamos desde el origen de coordenadas 3 unidades horizontalmente y -2 verticalmente. Esta última elección tiene la ventaja de permitirnos trabajar con valores enteros.

Hay muchos fenómenos que corresponden a (o que se pueden aproximar por) un modelo proporcional directo. He aquí algunos ejemplos:

Ejemplo 3.

- Supongamos que un resorte está colgado de uno de sus extremos. Su alargamiento (incremento de su longitud respecto de la longitud inicial) resulta proporcional al peso que colgamos de él (esta aproximación es muy buena siempre y cuando el peso no sea demasiado grande como para que el resorte comience a deformarse y pierda elasticidad):

$$A(p) = k \cdot p$$

  donde $A(p)$ representa el alargamiento del resorte respecto de su longitud inicial, p representa el peso colgado y k representa la constante de elasticidad del resorte (que va a depender del material).

- El dinero que gana un inversor, en concepto de intereses, es directamente proporcional al capital que deposita:

$$I(c) = k \cdot c$$

donde el factor k de proporcionalidad guarda relación con la tasa de ínteres ue paga el banco y el tiempo que dura la inversión.

- La dosis de un medicamento es proporcionalidad al peso del enfermo. En este caso la relación proporcional es aproximada.

Las funciones de proporcionalidad directa y la regla de tres simple directa

En el estudio de la proporcionalidad numérica, hemos visto que cuando dos magnitudes son directamente proporcionales (y solo en ese caso), vale la regla de tres simple directa. Asociado a la regla de tres simple directa suele utilizarse la expresión "a más, más y a menos, menos", en alusión a cómo varían las magnitudes que son proporcionales. Si bien esto se cumple en todas las situaciones de proporcionalidad directa, otras relaciones también la verifican sin ser directamente proporcionales. Por ejemplo, consideremos dos magnitudes A y B que varían como se muestra en la siguiente tabla:

A	1	2	3	4	5
B	2	3	4	5	6

En este caso, se cumple que "a más, más y a menos, menos" ya que a medida que aumenta (o disminuye) A también aumenta (o disminuye) B. Sin embargo, A y B no son magnitudes directamente proporcionales ya que, por ejemplo, $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$ (esto significa que no hay una constante de proporcionalidad). Si bien es necesario que para que dos magnitudes sean directamente proporcionales se cumpla que "a más, más y a menos, menos", esto no es suficiente: ambas deben aumentar en la misma proporción; Esto último se asocia a otras expresiones usuales, en este caso correctas, como "al doble de una, el doble de la otra", "al triple de una, el triple de la otra", etc.

Trabajo práctico 24

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Qué formato tienen las funciones de proporcionalidad directa?

(b) Explicar porqué todas las funciones de proporcionalidad directa tienen como gráfico una recta.

(c) Explicar qué son los incrementos Δx y Δy y su relación con la pendiente.

Ejercicio 2. Considerar el problema de la dosis de medicamentos del cuadernillo 2 sección 1: un medicamento tiene una concentración de 750 miligramos de amoxicilina cada 5 mililitros de jarabe (750mg/5$m\ell$).

(a) Completar la siguiente tabla, si v indica el volumen de jarabe y A la cantidad de amoxicilina

a	$v = 1$ mℓ	le corresponde	$A =$	$A/v =$
a	$v = 3$ mℓ	le corresponde	$A =$	$A/v =$
a	$v = 10$ mℓ	le corresponde	$A =$	$A/v =$
a	$v = 20$ mℓ	le corresponde	$A =$	$A/v =$
a	$v = 50$ mℓ	le corresponde	$A =$	$A/v =$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a	v genérico	le corresponde	$A =$	$A/v =$

(b) Determinar el incremento ΔA para $\Delta v = 1$ y para $\Delta v = 3,5$.

(c) Definir la función que vincula las variables v y A y anticipar qué gráfico tendrá.

(d) Representar gráficamente la función definida en el inciso c).

(e) ¿A qué tipo de funciones pertenece la función definida? ¿Cuál es la pendiente?

(f) Un conocido jarabe para aliviar el dolor y bajar la fiebre usa como componente activo el ibuprofeno. En la presentación infantil, 100 mℓ contienen 200 mg de componente activo. ¿Cómo varía la cantidad de componente activo en relación al volumen de jarabe? ¿Puede anticipar que el gráfico que representa la situación es una recta? ¿Por qué?

Ejercicio 3. Un biólogo estudia el comportamiento de las lombrices en relación a la luz, para ello consigue un tubo de ensayo graduado con el cero ubicado en el centro del mismo. Pone a la lombriz en el punto marcado como cero y una luz fuerte en el extremo derecho del tubo. La lombriz comienza a desplazarse hacia la izquierda a una velocidad constante de 1cm cada treinta segundos.

(a) Representar en un diagrama el experimento del biólogo.

(b) Indicar la posición de la lombriz al segundo, a los 15 segundos y a los 45 segundos de comenzado su movimiento.

(c) Indicar la velocidad de la lombriz en m/seg.

(d) Modelizar el desplazamiento de la lombriz en función del tiempo definiendo una función adecuada.

(e) ¿Puede garantizar que dicha función tiene como gráfico una recta?¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa, calcular la pendiente. Representar gráficamente.

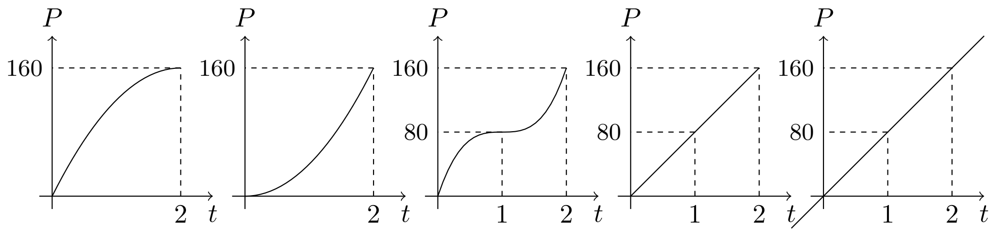
Ejercicio 4. Se obtuvo cierta información de la posición P y el instante t en que un automóvil atraviesa diferentes mojones en la ruta 2. Los datos relevados se muestran en la tabla:

t **(tiempo)**	P **(posición)**
0 hs	0 km
30 min	40 km
1 h	80 km
2 hs	160 km

(a) Estimar la posición a la que se encontraría el auto a las 3 hs, a las 5 hs y a las 6 horas y media.

(b) ¿Por qué en el ítem a) se pide "estimar" y no "calcular exactamente"? ¿Se puede responder de manera exacta? ¿Qué supuesto adicional en el contexto del problema se está considerando al responder?

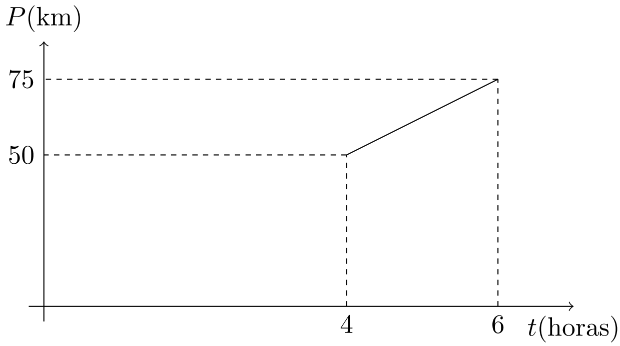
(c) Decidir si cada uno de los gráficos que siguen podría corresponder a la situación planteada y si responden o no al supuesto considerado en a). En cada caso, justificar tanto la elección como el descarte.



(d) Proponer la fórmula que permita estimar la posición P del auto (en km) en función el tiempo t (en horas). ¿Responde esta fórmula al supuesto plateado?

(e) ¿A qué hora se estima que llegaría a Mar del Plata (400km)?

Ejercicio 5. Se tomaron registros de la distancia a San Miguel en función del tiempo para un móvil que partió desde San Miguel a la hora 0 a velocidad constante. Esa información se volcó en el siguiente gráfico:



(a) ¿Cuál es la velocidad del móvil? Pensando en la función lineal cuyo gráfico es la recta dada ¿con qué parámetro de la fórmula se corresponde la respuesta?

(b) Realizar el cálculo de la velocidad como cociente entre distancia recorrida y tiempo empleado, utilizando un lapso distinto del que se muestra en el gráfico. Verificar que se obtiene el mismo resultado que en a).

Ejercicio 6. Elegir cuál o cuáles de las siguientes opciones son las correctas. La longitud de una circunferencia y la medida de su radio son magnitudes directamente proporcionales porque:

- si el radio aumenta la longitud de la circunferencia aumenta.
- si el radio se incrementa en 2 unidades la longitud de la circunferencia se incrementa en 2 unidades.
- la razón entre la longitud de la circunferencia y el radio de la misma, cuando éste es no nulo, es constante.
- si se multiplica al radio por una constante positiva cualquiera, la longitud de la circunferencia aumenta.
- si se multiplica al radio por una constante positiva cualquiera, la longitud de la circunferencia correspondiente a ese nuevo radio resulta de multiplicar la longitud de la circunferencia inicial por la misma constante.

2 Funciones lineales

2.1 Definición y gráfico

Ejemplo 4. Volvamos a la situación anterior en la que estudiamos el movimiento del automóvil cuya velocidad constante era de 80 km/h, pero supongamos ahora que en el instante inicial el auto no está en el km 0 sino que se encuentra en el km 100. Por esta razón, la función P propuesta debe cumplir que $P(0) = 100$. Luego, como sabemos que su velocidad se mantiene constante en 80 km/h, podemos afirmar que por cada hora que pase el auto va a aumentar su posición en 80 km respecto al inicial (km 100). Lo señalado puede verse en la tabla que sigue:

a	$t = 0$ h	le corresponde	$P = 100$
a	$t = 1$ h	le corresponde	$P = 100 + 80 = 180$
a	$t = 2$ h	le corresponde	$P = 100 + 80 \cdot 2 = 260$
a	$t = 3$ h	le corresponde	$P = 100 + 80 \cdot 3 = 340$
	$\vdots$		$\vdots$
a	t genérico	le corresponde	$P = 100 + 80 \cdot t$

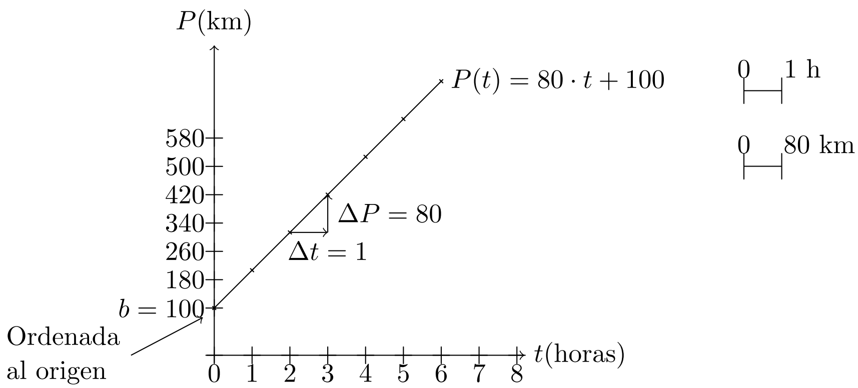
La función que describe este comportamiento es $P : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $P(t) = 100 + 80 \cdot t$. Notar que se cumple la condición $P(0) = 100$. El gráfico de esta función no contiene al origen pues para $t = 0$ la posición no es 0 km. Se trata de una semirrecta que contiene al punto $(0, 100)$ y de pendiente 80. Estas fórmulas corresponden a un tipo especial de funciones cuyo estudio desarrollamos ahora.

Funciones lineales. Se llaman así a las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son números reales cualesquiera. El gráfico de la función lineal $f(x) = mx + b$ es la recta de ecuación $y = mx + b$. El caso en que $b = 0$, se obtiene una función de proporcionalidad directa como las ya estudiadas en la sección 1, de modo que estas funciones son más generales que las anteriores pues las incluyen como un caso particular.

Podemos pensar que el gráfico de una función lineal de expresión $f(x) = mx + b$ resulta ser una traslación vertical del gráfico de la función de proporcionalidad directa $g(x) = mx$ en b unidades (hacia arriba si $b > 0$ o hacia abajo si $b < 0$). En efecto, si el punto $(x; m \cdot x)$ pertenece al gráfico de la función g, el punto $(x; mx + b)$, ubicado b unidades hacia arriba o hacia abajo de acuerdo al signo de b, pertenece al gráfico de la función f.

Luego, el gráfico de las funciones lineales también es una recta.

En particular, en la situación que estamos estudiando, $b = 100$ es la posición inicial en el instante $t = 0$. El número $b = 100$ produce un corrimiento de la recta correspondiente a la función proporcional, desplazándola de tal forma que interseca al eje y en la posición $y = 100$. Por eso, al número b se lo denomina *ordenada al origen*. Gráficamente:

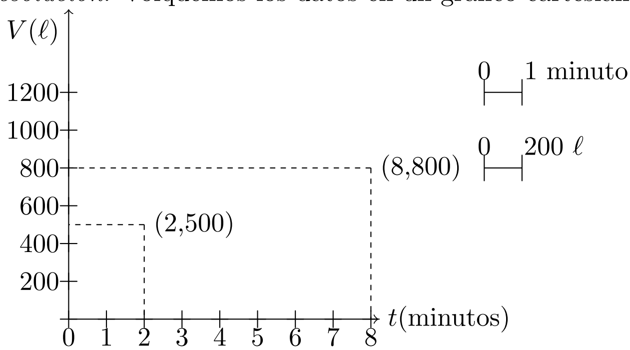


2.2 Obtención de la fórmula de una función lineal conociendo dos puntos de su gráfico

La representación gráfica de una función lineal es una recta y para trazarla sólo hace falta conocer dos de sus puntos. Teniendo como datos dos puntos del plano (dos pares ordenados), ¿será posible calcular de forma sistemática la fórmula de la función lineal cuyo gráfico sea la recta que pasa por los dos puntos dados? Veámoslo con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5. Supongamos que un piletón que tiene una cierta cantidad de agua, se llena usando una canilla de forma tal que el volumen de agua aumenta linealmente con el tiempo. Se observa que a los dos minutos hay 500 litros y que a los 8 minutos hay 800 litros. ¿Cuál es el volumen de agua en el piletón en cada instante t (en minutos)?

Resolución. Volquemos los datos en un gráfico cartesiano:



Los datos corresponden a los puntos $(2, 500)$ y $(8, 800)$ los cuales que determinan unívocamente a una recta.

Aclaramos que el problema presenta restricciones en el dominio de la función (solo tienen sentido valores positivos de t hasta el tiempo que tarda en llenarse la pileta, que no es informado en el problema), pero solo nos interesa aquí ocuparnos de la obtención de la fórmula de la función lineal.

Sabemos que la fórmula de la función lineal buscada es del tipo $V(t) = m \cdot t + b$ y una vez determinados los valores de la pendiente m y de la ordenada al origen b, nos permitirá calcular el volumen V de agua después de t minutos de funcionamiento de la canilla.

Cálculo de la pendiente. La pendiente nos dice cuánto varía el volumen V (ΔV) ante un incremento del tiempo t de una unidad ($\Delta t = 1$ minuto), o también es igual a la relación entre estos incrementos, es decir

$$m = \frac{\Delta V}{\Delta t} \ . \tag{2.2}$$

En nuestro caso, lo que sabemos es que cuando el tiempo pasa de 2 a 8 minutos, o sea un incremento de tiempo de $\Delta t = 8 - 2 = 6$ minutos, el volumen se incrementa de 500 litros a 800 litros, esto es, un incremento de $\Delta V = 800 - 500 = 300$. Por ende la relación de los incrementos es:

$$m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{80 - 500}{8 - 2} = \frac{300}{6} = 50$$

Entonces $m = 50$ indica que por cada minuto que pasa, el aumento de volumen es de 50 litros. Ya encontramos uno de los parámetros de la expresión de la función lineal, $m = 50$, de modo que la fórmula es de la forma

$$V(t) = 50 \cdot t + b \ .$$

Queda todavía averiguar la ordenada al origen b. La función que estamos buscando nos va a servir para calcular el volumen V de agua en el piletón después de t minutos de haber empezado a funcionar la canilla, por lo que debe servir para calcular los casos particulares que conocemos. Por ejemplo,

Volumen de agua a los 2 minutos es de 500 litros

Volumen de agua a los 8 minutos es de 800 litros

y cuya traducción matemática es:

Volumen de agua a los 2 minutos es de 500 litros	$500 = V(2) = 50 \cdot 2 + b$
Volumen de agua a los 8 minutos es de 800 litros	$800 = V(8) = 50 \cdot 8 + b$

De cualquiera de esas dos ecuaciones podremos despejar el valor de b. Si por ejemplo tomamos la primera:

$$50 \cdot 2 + b = 500 \ \Rightarrow \ 100 + b = 500 \ \Rightarrow \ b = 500 - 100 = 400$$

Entonces, el volumen de agua que había en el piletón al comenzar a funcionar la canilla era de 400 litros. Si hubiéramos despejado de la segunda ecuación por supuesto habríamos obtenido el mismo valor (comprobarlo). Ya hemos determinado los dos valores que necesitamos, $m = 50$ y $b = 400$, por lo que la expresión de la función lineal es:

$$V(t) = 50 \cdot t + 400 \ .$$

Tenemos una forma de verificar que lo obtenido es correcto, es decir, comprobar que la expresión hallada da lo que tiene que dar en los dos casos que conocemos:

$$V(2) = 50 \cdot 2 + 400 = 500, \; V(8) = 50 \cdot 8 + 400 = 800.$$

¿Por qué enfatizamos lo de verificar en los dos casos? Porque la única forma de saber que hemos hallado la fórmula de la recta que contiene a los puntos $(2, 500)$ y $(8, 800)$ es probar que ambos puntos satisfacen la relación funcional V.

Respuesta: El volumen de agua a cada instante t viene dado por la fórmula $V(t) = 50 \cdot t + 400$ y tiene sentido para valores de t mayores o iguales a 0 (no se informa la capacidad de la pileta).

Otra forma de pensar el cálculo de la pendiente es a partir de la regla de tres simple: los incrementos de volumen son proporcionales a los correspondientes intervalos de tiempo. Plantemos la regla de tres simple para los incrementos:

Si en 6 minutos, el volumen se incrementa en 300 litros	$6 \longrightarrow 300$
entonces en solo un minuto se incrementa x	$1 \longrightarrow x$

De donde resulta $x = \frac{300}{6} = 50$. Llegamos por supuesto, al mismo resultado que antes: $m = 50$.

La regla de tres y las funciones lineales no proporcionales.

Vale destacar que en una función lineal no proporcional, esto es con ordenada al origen distinta de 0, la regla de tres puede aplicarse solo a los incrementos de las variables. Veamos, con un ejemplo, que aplicada a las variables, los resultados obtenidos son incorrectos. Sabemos que a los 2 minutos, el volumen de agua es 500. Calculemos mediante regla de tres, el volumen a los 8 minutos.

$$\begin{array}{lcl} 2 \longrightarrow & 500 & \\ 8 \longrightarrow & x & = \frac{500 \cdot 8}{2} = 2000 \end{array}$$

El valor obtenido, 2000 litros, es incorrecto ya que sabemos que a los 8 minutos hay 800 litros. En síntesis, **en una función lineal no proporcional, la regla de tres no es aplicable a las variables sino a los incrementos de las variables.**

2.3 Ecuación de la recta. Recta que pasa por dos puntos

Ejemplo 6. Obtener la fórmula de la función lineal cuyo gráfico contiene a los puntos $(5; -4)$ y $(-3; 2)$.

Resolución: Calculamos la pendiente:

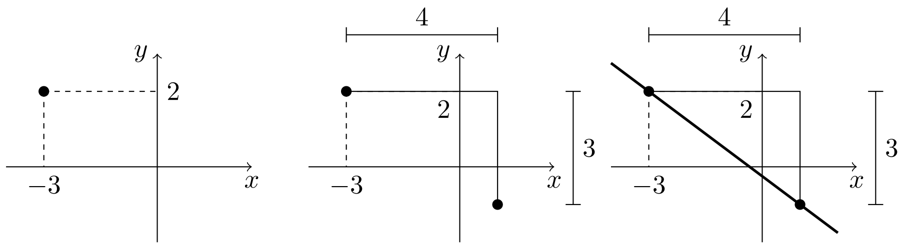
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-1)}{-3-5} = \frac{2+1}{-3-5} = \frac{-3}{8}$$

La fórmula es del tipo : $f(x) = \frac{-3}{4} \cdot x + b$ Para averiguar la ordenada al origen, podemos sustituir las variables x y $f(x)$ por cualquiera de los dos puntos dados. Tomando el segundo sabemos que

$$f(-3) = 2 \Leftrightarrow 2 = -\frac{3}{4} \cdot (-3) + b \Leftrightarrow 2 = \frac{9}{4} + b \Leftrightarrow 2 - \frac{9}{4} = b \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = b$$

Respuesta: La fórmula de la función lineal es $f(x) = -\frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{4}$

Realicemos el gráfico de la recta. Si bien disponemos de dos puntos, vamos a graficarla usando el valor de la pendiente para mostrar cómo trabajar con una pendiente negativa. Tomamos un punto de la recta, por ejemplo, $(-3; 2)$. La pendiente es $-\frac{3}{4}$, que podemos pensarla como $\frac{-3}{4}$. Así, a partir del punto $(-3; 2)$, por cada 4 unidades que aumenta la abscisa, la ordenada disminuye 3. Con esto determinamos un segundo punto de la recta y la trazamos. Los gráficos siguientes muestran el procedimiento explicado.

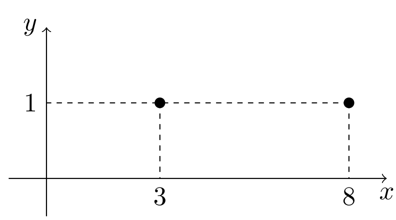


Rectas horizontales y verticales

Ejemplo 7. ¿Cuál es la fórmula de la función lineal cuyo gráfico contiene a los puntos $(3; 1)$ y $(8; 1)$.

Resolución: Al represeentar gráficamente a los puntos $(3; 1)$ y $(8; 1)$ se observa que la recta que los contiene es horizontal. Al calcular la pendiente obtenemos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-1}{8-3} = 0 \ .$$

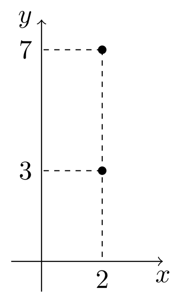


Además, la ordenada al origen es 1 (sin necesidad de realizar cálculos). De lo anterior se deduce la siguiente respuesta.

Respuesta: La fórmula de la función lineal es $f(x) = 0 \cdot x + 1$ o, directamente, $f(x) = 1$.

Observemos que esta particularidad de obtener el valor 0 para la pendiente ocurre en cualquier recta horizontal ya que los puntos de una recta así tienen todos el mismo valor de ordenada y, así,$\Delta y = 0$, mientras que Δx no. En general, la fórmula de una función lineal cuyo gráfico es una recta horizontal es de la forma $f(x) = b$.

Ejemplo 8. ¿Cuál es la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(2;3)$ y $(2;7)$?



Resolución: La recta que contiene a los puntos dados es vertical y "no tiene pendiente" ya que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-3}{2-2}$ y resulta una división con divisor cero. Esto ocurre en todas las rectas verticales ya que todos sus puntos tienen el mismo valor de abscisa y así $\Delta x = 0$ y no podemos realizar la división. Sin embargo, la recta tiene una ecuación ya que sus puntos sí cumplen una propiedad: en este caso, $x = 2$. Todo punto que tenga abscisa 2 pertenece a la recta y todo punto que está en la recta tiene abscisa 2.
Respuesta: La ecuación de la recta es $x = 2$.

En general, las rectas verticales tienen ecuación $x = k$ (k es un real cualquiera). Es importante observar que estas rectas no corresponden a funciones ya que para hay un valor de x que tiene infinitas imágenes. Por no ser funciones, no responden al formato $f(x) = m.x + b$.

Trabajo práctico 25

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Cuál es la diferencia entre una función de proporcionalidad directa y una función lineal cualquiera?

(b) Explicar qué indican la pendiente y la ordenada al origen de una recta.

(c) Si se sabe que dos magnitudes están relacionadas por una función lineal, ¿es posible usar la regla de tres para calcular valores de la variable dependiente? Si la respuesta es afirmativa, explicar cómo. Si la respuesta es negativa, decir si en algún caso es posible usarla.

Ejercicio 2. Se obtuvo cierta información de la posición P y el instante t en que un automóvil atraviesa diferentes mojones en la ruta 2. Los datos relevados se muestran en la tabla:

t **(tiempo)**	P **(posición)**
0 hs	40 km
30 min	80 km
1 h	120 km
2 hs	200 km

(a) ¿Qué supuesto adicional en el contexto del problema se podría hacer para poder estimar la posición a la que se encontraría el auto a las 3 hs, a las 5 hs y a las 6 horas y media? Calcular la posición en esos instantes, usando el supuesto.

(b) Bajo el supuesto planteado en (a),

 (i) proponer un gráfico que describa la situación planteada,

 (ii) ¿cuál es la posición P del auto (en km) en cada instante t (en horas)?

 (iii) ¿Cuánto varía la posición del auto por cada hora de viaje?

 (iv) Si nos ubicamos en un lugar cualquiera de la ruta y vemos pasar el auto, en tres horas más de viaje, ¿cuántos kilómetros avanzará? Suponer que el viaje continúa todo lo que sea necesario.

 (v) ¿Qué relación tienen las dos preguntas anteriores con la pendiente de la recta?

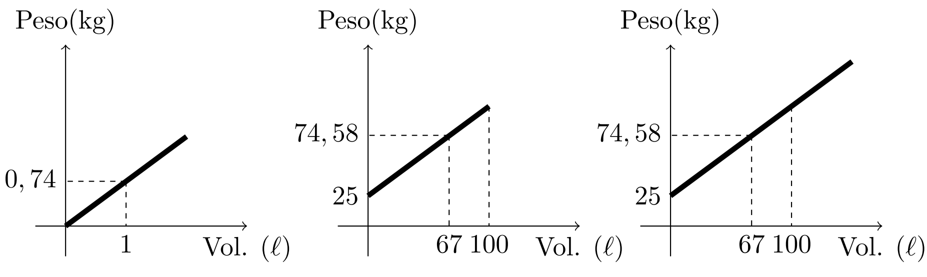
Ejercicio 3. Se tiene un barril de madera que tiene capacidad para 100 litros y sabemos que vacío pesa 25 kg. Si un litro de aceite pesa $0,74$ kg responder:

(a) ¿Puede ser que el barril contenga 20 litros de aceite y que al apoyarlo en una balanza ésta marque $39,8$ kg? ¿Puede ser que contenga 43 litros y la balanza marque $55,8$ kg?

(b) ¿Cuál es el peso máximo que se puede obtener apoyando el barril sobre la balanza?, ¿qué cantidad de litros tendría el barril en ese caso?

(c) ¿Cuántos litros habría que poner en el barril para que éste pese $106,4$ kg?

(d) ¿Cuál o cuáles de los siguientes gráficos puede corresponder a la situación anterior? Justificar la elección.



(e) Indicar cómo se usaría la regla de tres para calcular cuánto pesa el barril si el mismo contiene 22 litros de aceite.

(f) El barril contiene una cierta cantidad de aceite y pesa $33,28$ kg. Calcular el peso del barril cuando se le agregan 15 litros de aceite más.

(g) Definir una función mediante una fórmula que exprese el el peso del barril en términos de la cantidad de aceite que éste contiene.

Ejercicio 4. En una quinta tenemos una pileta de natación que se vacía mediante el uso de una bomba. Ésta extrae 250 litros de agua por hora a velocidad constante. Sabiendo que originalmente la pileta tenía 8000 litros de agua.

(a) ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que en la pileta queden 6300 litros?

(b) Después de un cierto tiempo se sabe que en la pileta hay 6000 litros ¿cuánto tiempo deberá pasar para que queden 4300 litros?

(c) ¿En qué momento se vacía la pileta?

(d) Definir una función mediante una fórmula que exprese el volumen de agua que queda en la pileta para cada instante t.

(e) Hacer un gráfico cartesiano que describa la situación.

Ejercicio 5. Para la función lineal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4.x + 2$, se pide:

(a) Indicar dos puntos del gráfico.

(b) Indicar dos puntos que no pertenezcan a su gráfico.

(c) Hallar los puntos deonde la gráfica corta a cada uno de los ejes coordenados.

Ejercicio 6. Hallar la expresión de la función lineal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que la recta correspondiente cumpla con lo indicado en cada inciso y representarla gráficamente.

(a) su pendiente es 3 y contiene al punto $(-1; 2)$

(b) su pendiente es $\frac{1}{2}$ y contiene al punto $(-1; \frac{2}{5})$,

(c) su pendiente es $-2/3$ y contiene al punto $(4; -1)$,

(d) su pendiente es $-5/3$ y contiene al punto $(-2; 0)$,

(e) su pendiente es 0 y contiene al punto $(1; -1)$,

(f) su pendiente es 0 y contiene al punto $(2; 0)$,

Ejercicio 7. Dar la ecuación de la recta que cumple lo indicado en cada inciso y representarla gráficamente.

(a) es una recta vertical y contiene al punto $(1; -1)$,

(b) es una recta vertical y contiene al punto $(-1; 4)$,

(c) es una recta vertical y contiene al punto $(-2, 0)$.

Ejercicio 8. Hallar, si es posible, la expresión de la función lineal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que la recta correspondiente contenga a los puntos indicados en cada inciso. Representar gráficamente.

(a) $(3; 2)$ y $(-2; 4)$, (b) $(-4; -\frac{2}{3})$ y $(-\frac{5}{6}; -1)$ (c) $(3; -1)$ y $(-2; -1)$,

(d) $(3; 2)$ y $(-2; 2)$, (e) $(2; 1)$ y $(2; 5)$ (f) $(-3; 1)$ y $(-3; -5)$,

(g) $(-4; 0)$ y $(5; -1)$, (h) $(0; 1)$ y $(\frac{1}{4}; 0)$, (i) $(\frac{1}{3}; \frac{7}{8})$ y $(2; 0)$.

Ejercicio 9. Estamos de vacaciones en EEUU y nos encontramos que la temperatura se mide en grados Fahrenheit (F). Lo único que sabemos es que 50 F equivalen a 10 Cy que 140F equivalen a 60 C.

(a) Hallar una fórmula que nos permita traducir de grados Fahrenheit a centígrados.

(b) Ya de vuelta de las vacaciones y otra vez en Buenos Aires, nos encontramos con un turista estadounidense que está de visita en la ciudad. El tiene un problema análogo al nuestro: necesita interpretar los grados centígrados en grados Fahrenheit. Usando nuestra experiencia del viaje por EEUU, ¿cómo podríamos ayudarlo?

3 Sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales.

3.1 Intersección de rectas. Sistemas de ecuaciones lineales.

Nos ocupamos ahora de encontrar la intersección entre dos rectas. Lo estudiaremos a partir de la siguiente situación:

Ejemplo 9. Se observó que durante dos días consecutivos, las temperaturas de dos ciudades variaron en forma lineal según el tiempo. Considerando a las 0 horas del segundo día como el 0 del eje de las abscisas y llamando y a la temperatura (en grados centígrados) y x al tiempo (en horas), la variación está dada por las fórmulas $f(x) = 2x - 3$ para la ciudad A y $g(x) = -2x + 2$ para la ciudad B. ¿A qué hora se registró la misma temperatura en ambas ciudades?

Resolución: El planteo que responde al problema es la búsqueda del punto de intersección entre las rectas correspondientes a las funciones lineales f y g, ambas con dominio $[-24, 24]$, debido a que el 0 está ubicado al comienzo del segundo día, y cuyas expresiones son $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = -2x + 2$. Para ello, debemos trabajar analíticamente porque, salvo algún caso particular, la lectura gráfica no nos da precisión acerca de la intersección. Los puntos comunes a ambas rectas, si existen, son pares $(x; y)$ que pertenecen tanto a una como a otra recta, es decir, que verifican ambas ecuaciones. Así, en el (o los) punto(s) de intersección, el valor de y obtenido en f debe ser el mismo que el valor de y obtenido en g. De este modo, para hallar los puntos de intersección, nos proponemos, en primer lugar, hallar x tal que $f(x) = g(x)$.

Como $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = -2x + 2$ queda planteada la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x - 3 = -2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2x = 2 + 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 4x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{4}\ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Luego, cuando $x = \frac{5}{4}$, las expresiones

$$2x - 3 \qquad \text{y} \qquad -2x + 2$$

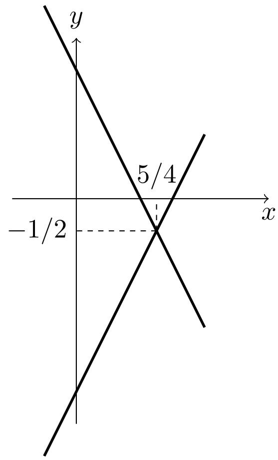
producen el mismo valor. Ese valor es

$$y = 2.\frac{5}{4} - 3 = -\frac{1}{2}\quad .$$

Como el valor de x es único, y por lo tanto también el de y, las rectas se intersecan en un único punto:$(\frac{5}{4}; -\frac{1}{2})$. Esto nos permite deducir la siguiente respuesta.

Respuesta: Ambas ciudades tienen el mismo registro térmico a las $1 : 15$h del segundo día (considerar que $\frac{5}{4}$ de hora son una hora y quince minutos) y que la temperatura de ambas ciudades en ese momento fue de $-0,5°$. Cabe resaltar que el tiempo obtenido ($1 : 15$h del segundo día) es un valor que está dentro del dominio de ambas funciones.

La interpretaci ón gráfica es la siguiente: (por razones de escala, omitimos destacar que el dominio es $[-24, 24]$).



Algunas consideraciones sobre intersección de rectas

Al buscar la intersección de dos rectas tratamos a las fórmulas de las funciones lineales correspondientes en forma simultánea. En términos algebraicos, hablamos de un sistema de ecuaciones. En este caso, son dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los sistemas de ecuaciones se presentan con una notación particular. Para el caso que resolvimos se escribe así:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

Entonces, resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es hallar la intersección de las dos rectas correspondientes a cada una de esas ecuaciones. En el caso que resolvimos, las rectas se intersecan en un único punto. Dos rectas así se llaman transversales. Un sistema de ecuaciones formado por dos rectas transversales se dice que es compatible determinado (compatible, porque tiene solución; determinado, porque tiene una sola). El método que usamos para resolver el sistema anterior se llama método de igualación ya que se basa en igualar las expresiones correspondientes a una misma variable. Al analizar la intersección de dos rectas, podemos encontrarnos con distintos casos:

(a) que se intersequen en un único punto (el caso ya estudiado);

(b) que no tengan puntos comunes. Este es el caso de dos rectas que son paralelas y que no son coincidentes.

(c) que tengan todos sus puntos comunes. Esto se da cuando las dos rectas son coincidentes (son la misma recta)

Si bien no estudiaremos en detalle los casos b) y c), podemos decir que cuando dos rectas tienen la misma pendiente, resultan paralelas. Si, además, las ordenadas al origen son distintas, las rectas no tienen puntos comunes (paralelas no coincidentes, caso b), mientras que si tienen la misma ordenada al origen, las dos rectas son la misma (paralelas coincidentes, caso c).

Un ejemplo del caso b) es el sistema

$$\begin{cases} y = 5x - 3 \\ y = 5x + 2 \end{cases} .$$

Las rectas que corresponden a las ecuaciones tienen igual pendiente y distinta ordenada al origen, es decir, son rectas paralelas no coincidentes.

Un ejemplo del caso c) es el sistema

$$\begin{cases} y = -9x - 3 \\ y = -9x - 3 \end{cases} .$$

Las rectas que corresponden a las ecuaciones tienen igual pendiente e igual ordenada al origen, es decir, son rectas paralelas coincidentes.

3.2 Inecuaciones en general

Como se explicó en los capítulos correspondientes a Algebra y Modelización, la frase "resolver una ecuación" significa encontrar los valores de x para los cuales se cumple una igualdad del tipo "$f(x) =$ número" donde $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es una función de variable x en un dominio A. Cuando en lugar del símbolo "$=$" se encuentran uno de los símbolos "$>$, $\geq$, $<$, $\leq$" y se buscan los valores de x para los cuales se cumple una desigualdad, se dice que se está resolviendo una inecuación. Veamos algunos ejemplos de inecuaciones.

Ejemplo 10.

(a) $3x - 4 \leq 7$,

(b) $x^2 - 4 > 3x - 1$,

(c) $f(x) \geq 7$ donde $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$,

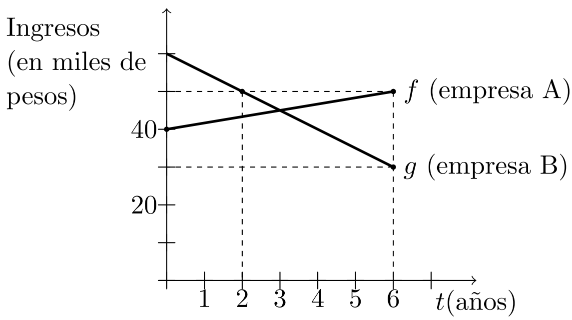
(d) $f(x) \geq 7$ donde $f : [1; 4,5] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.

Se dice que un número es solución de una inecuación si al reemplazar la variable x por dicho número se cumple la desigualdad planteada. Por ejemplo, $x = 2$ es solución de la inecuación a) pero no lo es de la b). La ecuación c) tiene como una de sus soluciones al número $-3,5$, pero este número no es solución de la inecuación d) pues $-3,5$ no es un elemento del intervalo $[1; 4,5]$. En general las inecuaciones tienen infinitas soluciones que se suelen describir usando la notación de intervalos.

3.3 Inecuaciones lineales

En esta sección se explica, mediante un ejemplo, como resolver inecuaciones lineales con ayuda de un gráfico. Una inecuación lineal es una inecuación en el sentido que se explicó arriba en la cual solo intervienen funciones lineales.

Ejemplo 11. El gráfico describe los ingresos por ventas de dos empresas A y B (expresados en miles de pesos) a lo largo de un lapso de 6 años. Determinar en qué períodos la empresa A supera en ingresos a la empresa B.



Resolución: Conocer cuándo los ingresos de A superan a los de B, es saber cuándo la función f toma valores mayores que los de g, lo que se expresa simbólicamente en saber cuáles son los valores de x que verifican la inecuación $f(x) > g(x)$.

Los ingresos de ambas empresas varían linealmente en un intervalo. Para poder saber con precisión cuándo la empresa A supera en ingresos a la empresa B, tenemos que conocer primero el momento en que ambas empresas tienen la misma ganancia, es decir que tenemos que conocer el punto de intersección de las rectas que corresponden a la evolución de los ingresos de ambas empresas. Para esto, deberemos resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas. Conocido esto, la lectura gráfica nos permitirá saber en qué período ocurre lo que el problema pregunta. Obtengamos entonces, las ecuaciones de las dos rectas.

Empresa A: El ingreso inicial de \$40(mil) nos da la ordenada al origen y el incremento de \$10 (mil) cada 6 años se expresa en que la pendiente de la recta es $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Luego, la ecuación de la recta es $y = \frac{5}{3}.x + 40$. Como el estudio abarca 6 años, la función lineal que representa la evolución de los ingresos de la empresa A es $f : [0, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5}{3}.x + 40$ (un segmento de recta).

Empresa B: Tenemos como dato los puntos $(2; 50)$ y $(6; 30)$.
Así, $m = \frac{30-50}{6-2} = -\frac{20}{4} = -5$.

Para obtener la ordenada al origen (que no es dato), utilizamos uno de los puntos de la recta que es conocido como, por ejemplo, el punto $(2; 50)$. De este modo nos queda

$$50 = -5.2 + b \Rightarrow 50 = -10 + b \Rightarrow b = 60\ .$$

La ecuación de la recta es $y = -5x + 60$. Considerando las restricciones del problema, la función lineal que da los ingresos de la empresa B es $g : [0, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -5.x + 60$ (otro segmento de recta).

Conocidas las ecuaciones de las rectas (en realidad, de los segmentos que representan la evolución de los ingresos), planteamos y resolvemos el sistema de ecuaciones que nos permite encontrar el punto de intersección, esto es, el momento en el que ambas empresas obtienen los mismos ingresos.

$$\begin{cases} y = \frac{5}{3}x + 40 \\ y = -5x + 60 \end{cases} .$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, igualamos y se obtiene

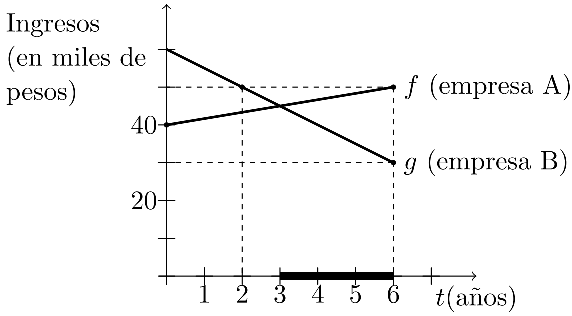
$$\frac{5}{3}x + 40 = -5x + 60 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x + 5x = 60 - 40 \Leftrightarrow \frac{20}{3}x = 20 \Leftrightarrow x = 3,$$

reemplazando en la segunda encuación del sistema $y = -5x + 60$, se deduce que $y = -5.3 + 60 = 45$.

Las rectas se intersecan en el punto $(3; 45)$. Como además 3 es un valor perteneciente al intervalo $[0, 6]$, es decir, un valor factible para las condiciones del problema, podemos afirmar que ambas empresas igualan sus ingresos a los 3 años (además, podemos decir que se igualan en \$45000).

Nuestro interés estaba en saber cuándo la empresa A supera en ingresos a la empresa B. Sabiendo ya con certeza que se igualan a los 3 años, la lectura gráfica nos permite decir, sin imprecisiones, que los ingresos de A son mayores que los de B entre los 3 y los 6 años.

En el gráfico de abajo se muestra que, por ejemplo, para a los 5 años, los ingresos de la empresa A son mayores que los de la empresa B. Sin necesidad de conocer con exactitud cuáles son los ingresos de ambas en ese momento, vemos que el valor de y es mayor en la función f que en la función g. Además, esto sucede para todos los valores de x del intervalo $(3;6]$, marcado en el gráfico. Por lo visto anteriormente, el conjunto solución de la inecuación es $S=(3;6]$.



Respuesta: La empresa A supera los ingresos de la empresa B entre los tres y seis años.

Trabajo práctico 26

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) Dadas dos funciones f y g mediante sus fórmulas explicar cómo se decide para qué valores de x se cumple que $f(x) > g(x)$.

(b) De dos funciones f y g se sabe que f es creciente, que g es decreciente y que sus gráficos se intersecan en el punto $(3;1)$. ¿Cuáles son todos los valores de x para los cuales $f(x) < g(x)$.

Ejercicio 2. Laura trabaja como vendedora en una empresa de telefonía celular “XX” y cobra un sueldo básico de \$2000 más un 20% de comisión por ventas realizadas en el mes. Una amiga le consigue un trabajo similar en otra empresa de telefonía celular “YY” en la que ella trabaja, pero allí cobran un sueldo básico de \$1800 más una comisión de del 22% por ventas realizadas. Laura quiere saber cuánto debe vender mensualmente para cobrar lo mismo en ambas empresas. Para ello se pide:

(a) Definir dos funciones f y g que indiquen el sueldo de Laura en cada una de las empresas.

(b) Representar gráficamente ambas funciones. ¿Alcanza la representación gráfica para dar la respuesta exacta?

(c) Hallar la respuesta exacta trabajando analíticamente. ¿Qué método utilizó para resolver la ecuación?

Ejercicio 3. Decidir, en cada caso, si los pares de rectas correspondientes a las siguientes funciones lineales, son transversales o paralelas. En caso de ser transversales, hallar las coordenadas del punto de intersección. Interpretar la solución hallada en un gráfico.

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = -3x + 4$

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \frac{-x+7}{2}$

(c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = 3x - 1$

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \frac{-x+3}{3}$

(e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \frac{-x+7}{2}$

Ejercicio 4. En una empresa de productos químicos se trasvasa líquido de un tanque a otro a razón de 3 litros por hora. Cuando comienza la operacin el tanque 1 que tiene una capacidad de 1000 litros está lleno y el tanque 2 está vacío. Se quiere saber a partir de qué momento el tanque 2 tiene más líquido que el tanque 1. Para ello se pide,

(a) Definir dos funciones f y g que indiquen la cantidad de líquido en cada uno de los tanques en función del tiempo transcurrido.

(b) Representar gráficamente ambas funciones. ¿Alcanza la representación gráfica para dar la respuesta exacta?

(c) ¿En qué momento los tanques tienen la misma cantidad de líquido?

Ejercicio 5. En cada uno de los casos del ejercicio 3, indicar cuáles son todos los valores de x para los cuales $f(x) \leq g(x)$.

Ejercicio 6. Una compañía de luz eléctrica cobra a sus clientes un monto fijo de $\$11,25$ y el costo por kwh consumido es de $\$0,52$. La compañía de la competencia cobra $15 de monto fijo y $\$0,40$ por kwh consumido. ¿Para qué consumos la primera compañía es más conveniente que su competidora?

Ejercicio 7. Dos automóviles A y B parten de San Miguel (km 0) con destino a Mar del Plata (km 400) en diferentes horas a velocidad constante. El móvil A es visto pasar por Chascomús (km 100) a las 12 hs y llega a Mar del Plata a las 18 hs. El móvil B parte de San Miguel a las 13 hs con el doble de velocidad que el A.

(a) ¿A qué hora salió de San Miguel el móvil A?

(b) ¿A qué velocidad va el móvil B?

(c) Graficar en un mismo gráfico la posición de cada uno de los móviles en función del tiempo.

(d) ¿Se encuentran en la ruta? ¿En qué kilómetro y a qué hora?

Ejercicio 8. Un empresario adquiere un equipo multimedia por \$36.500 para hacer trabajos de publicidad. La máquina gasta en promedio $\$7,25$ en mantenimiento y energía por hora. El técnico especializado en manejarla cobra $\$9,80$ por hora. A los clientes se les cobra a razón de \$30 la hora de uso del equipo. ¿Recuperará en algún momento la inversión de la compra? Interpretarlo con un gráfico cartesiano.

Ejercicio 9. Un empleado de una refinería tenía catalogados tres barriles de aceites con la siguiente categoría: barril A el que contenía el aceite de mayor peso específico, barril B el de peso específico medio, y barril C al de menor peso específico. Se produjo un accidente y se borraron las etiquetas de los barriles, sólo quedaron registrados los siguientes datos:

Barril ...	Barril:.....	Barril:.....
Paso vacío: 27 kg	Peso con 10 litros: 38 kg	Peso con 1 litros: $25,85$ kg
Peso con 5 litros: $31,5$ kg	Peso con 5 litros: 35 kg	Peso de 1 litro de aceite: $0,85$ kg

(a) volver a clasificar los barriles con A, B, C. Recordar que el peso específico se calcula como peso/volumen, por lo que si para un mismo volumen (sin contar el peso del barril) un tipo de aceite pesa más que el otro, éste tendrá mayor peso específico.

(b) Se puede encontrar un valor en litros de aceite para el cual el barril A pesa lo mismo que el barril C. Si existe, ¿cuál es el valor?

(c) ¿Para qué cantidades de aceite vertidas en el barril A se logra superar los 50 kg de peso?

Ejercicio 10. Teniendo en cuenta el ejercicio de las etiquetas del barril, decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y justificar:

(a) Si aumenta la cantidad de aceite aumenta la cantidad de kilos del barril.

(b) Si la cantidad de aceite aumenta el doble, el peso del barril aumenta al doble.

(c) Si la cantidad de aceite disminuye a la cuarta parte, el peso del barril disminuye en la misma proporción.

(d) Si la cantidad de aceite disminuye a la cuarta parte, el peso del líquido vertido disminuye en la misma proporción.

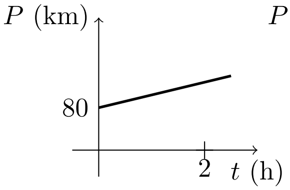
(e) El volumen de aceite vertido y el peso del barril son magnitudes directamente proporcionales.

Ejercicio 11. Los siguientes gráficos representan la posición de móviles, que se desplazan con movimiento rectilíneo uniforme, en función del tiempo. Determinar:

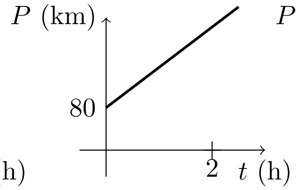
(a) ¿Cuál es el más veloz?

(b) ¿Qué puede decirse del movimiento del móvil 3?

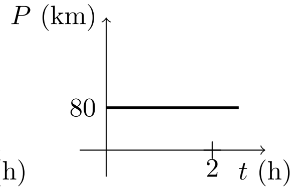
(c) Para los casos en que sea posible, definir una función mediante una fórmula que indique la posición del móvil para cada instante t.



Móvil 1

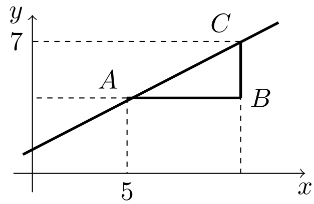


Móvil 2



Móvil 3

Ejercicio 12. Hallar el área del triángulo rectángulo ABC de la figura, sabiendo que la ecuación de la recta AC es $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.



Ejercicio 13. El precio sugerido del kilo de café es \$11. Los dueños del almacén A deciden aplicarle un descuento del 20%.

(a) Si el café promocionado se vendiera suelto, averiguar cuánto se pagaría por un octavo, un cuarto y tres octavos.

(b) Si se pagó una suma de \$10 ¿cuántos kilos de café se compraron?

(c) Hacer un gráfico cartesiano en el que se describa el precio pagado en función de la cantidad de café comprada.

(d) El almacén B decide aplicarle un descuento al café vendiendo paquetes con un 20% más de café gratuito. ¿En cuál de los dos almacenes el kilo de café es más barato?

Ejercicio 14.

(a) Trazar la mediatriz del segmento PQ siendo $P = (2; -3)$ y $Q = (6; 4)$ y dar su ecuación. (Recordar que la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo que contiene a su punto medio)

(b) Dado $D = (2; 1)$ dibujar el triángulo PDQ. Determinar las ecuaciones de las rectas que contienen sus lados.

(c) Para cada uno de los lados del triángulo determinar las ecuaciones de las mediatrices.

Capítulo 7

Modelización con funciones cuadráticas

A lo largo de este capítulo trabajaremos con las funciones cuadráticas a partir del desarrollo de algunos problemas y ejemplos que involucran la modelización de distintas situaciones mediante este tipo de funciones.

1 Una introducción al tema a partir de problemas

1.1 El problema del disparo

El problema que desarrollamos en este apartado, que llamamos *El problema del disparo,* nos permite hacer una introducción a las funciones cuadráticas a partir de una situación modelizada mediante una función de este tipo.

Ejemplo 1. Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba. Su altura h sobre el suelo (expresada en metros), t segundos después del disparo, puede ser aproximada por la función $h : A \to B$ definida mediante la expresión $h(t) = -5.(t-12)^2 + 720$.

(a) ¿Desde qué altura fue lanzado el proyectil? ¿A qué altura se encuentra a los 7 segundos de haber sido disparado? ¿Alcanza esta misma altura en algún otro instante a lo largo de su trayectoria?

(b) ¿Existe algún instante en el que la altura del proyectil sea de 675 metros? En caso afirmativo, decir cuál o cuáles. En caso negativo, explicar por qué. ¿Qué podría decirse si la altura es de 720 metros?

(c) ¿Para qué valores de t el proyectil asciende? ¿Para cuáles desciende? Hallar el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo.

(d) ¿Existe algún instante en el que la altura del proyectil sea de 1300 metros? En caso afirmativo, decir cuál o cuáles. En caso negativo, explicar por qué.

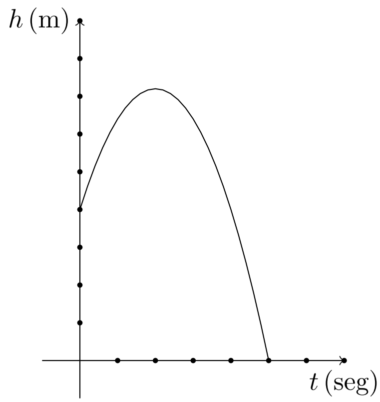
(e) Determinar el dominio y codominio de la función (conjuntos A y B respectivamente) y hacer un gráfico aproximado de la misma. Indicar su conjunto imagen.

Resolución. Antes de comenzar con la resolución del problema, parece interesante proponer algún gráfico que describa aproximadamente la situación planteada, aunque no sea exactamente el gráfico de la función h que se propone en el enunciado. Este gráfico servirá para orientarnos en las respuestas y, luego de analizar el problema, podría modificarse de acuerdo a los resultados que se vayan obteniendo.

En principio, y de manera intuitiva, podríamos pensar que un gráfico que represente la altura del proyectil en distintos instantes de su trayectoria, debería presentar un primer tramo creciente, que se corresponde con el intervalo de tiempo en el que el proyectil está subiendo (recordemos que se lo lanzó *verticalmente hacia arriba*), hasta lo que sería la altura máxima que alcanza el proyectil, y desde allí, un segundo tramo decreciente, que se relaciona con el período en el que el proyectil "cae" hasta llegar al suelo.

Puede pensarse también que esta descripción intuitiva genera un gráfico en el que se observa alguna simetría entre los tramos crecientes y decrecientes, a partir de suponer que tarda el mismo tiempo en subir que en bajar.

A partir de estas interpretaciones, podemos proponer el siguiente gráfico aproximado:



La función que modeliza la situación planteada en el problema es una función cuadrática definida por la expresión: $h(t) = -5(t-12)^2 + 720$, presentada en lo que se conoce como la "*forma canónica*". Si desarrollamos esta expresión, resolviendo el cuadrado del binomio y realizando las operaciones que sean necesarias, la fórmula queda escrita como: $h(t) = -5t^2 + 120t$, conocida como la "*forma polinómica*" de la función.

Antes de comenzar concretamente con la resolución de esta actividad, observemos que, como se señala en el enunciado, la función definida por la expresión

$$h(t) = -5(t-12)^2 + 720$$

indica, para *cada instante* t (medido en segundos), la *altura* (medida en metros) a la que se encuentra el proyectil en ese instante. De este modo, por ejemplo, el resultado obtenido al calcular $h(5)$ indica la altura del proyectil a los 5 segundos de su lanzamiento, y $h(15)$ la altura alcanzada a los 15 segundos.

En el ítem *a)* se nos pregunta por la altura desde la cual fue lanzado el proyectil y la altura alcanzada por éste a los 7 segundos de haber sido lanzado.

El momento en que se lanza el proyectil corresponde al instante inicial del proceso que modeliza la función h, y eso es el instante $t = 0$. De este modo, la altura desde la que se ha lanzado el proyectil se obtiene calculando el valor $h(0)$:

$$h(0) = -5(0-12)^2 + 720 = -5.144 + 720 = 0$$

Este resultado, $h(0) = 0$, indica que la altura desde la que se lanzó el proyectil es de 0 metros, es decir que el proyectil fue lanzado desde el suelo.

Para saber a qué altura está el proyectil a los 7 segundos de su lanzamiento, debemos calcular $h(7)$, es decir:

$$h(7) = -5(7-12)^2 + 720 = -5.25 + 720 = 595.$$

Es decir $h(7) = 595$, lo que indica que el proyectil se encuentra a 595 metros del suelo a los 7 segundos de haber sido lanzado.

Se plantea también averiguar si *alcanza esta misma altura en algún otro instante a lo largo de su trayectoria*. Antes de plantear algún cálculo, pensemos si esta pregunta tiene o no sentido... En principio, salvo que 595 metros sea la máxima altura que alcanza el proyectil, habrá dos momentos en los que se encuentre a esa altura: uno durante el ascenso y otro durante el descenso. Como no sabemos cuál es la altura máxima que puede alcanzarse ni el tiempo total en que se completó la trayectoria, no podemos aún afirmar si se alcanza o no esa altura en más de un instante. Para saberlo debemos operar con la expresión de la función h para dar la respuesta que se espera, teniendo en cuenta que lo que necesitamos saber es en qué instante (o instantes) la altura del proyectil es de 595 metros. En defintiva, debemos conocer el o los valores de t en los cuales se verifica que $h(t) = 595$, lo que nos obliga a resolver la ecuación:

$$-5(t-12)^2 + 720 = 595\ . \tag{1.1}$$

Antes de comenzar con la resolución de la ecuación (1.1), reflexionemos sobre algunas características de su conjunto solución, en términos de cuestiones ya estudiadas en el apartado *Álgebra*. En primer lugar, obervemos que *ya sabemos* que la ecuación tiene por lo menos una solución (es decir, el conjunto solución *no es vacío*) la cual es $t = 7$, porque, a partir de los cálculos hechos anteriormente, sabemos que a los 7 segundos el proyectil alcanza una altura de 595 metros. Para decidir si ésta es o no la única solución de la ecuación debemos resolverla:

$$-5(t-12)^2 + 720 = 595$$

o, lo que es equivalente, (haciendo “pasaje de términos”) resolver:

$$5(t-12)^2 = 720 - 595,$$

es decir,

$$(t-12)^2 = 125$$

de donde,

$$(t-12)^2 = \frac{125}{5} = 25 \ .$$

Como sabemos, hay dos soluciones de la ecuación

$$(t-12)^2 = 25$$

y ellas son las que se obtienen haciendo:

$$t-12 = -\sqrt{25} \ \text{ o } \ t-12 = \sqrt{25}$$

$$t-12 = -5 \ \text{ o } \ t-12 = 5$$

Es decir:

$$t = 7 \ \text{ o } \ t = 17$$

con lo que podemos decir que el proyectil se encuentra a 595 metros de altura sobre el suelo, en dos instantes: a los 7 segundos y a los 17 segundos de lanzado. Por las características del problema, el menor de los valores se da durante el ascenso, y el segundo durante el descenso.

En cuanto a lo que se propone en el ítem b), observemos que el trabajo que hemos hecho, es también el que debemos realizar para saber en qué instantes el proyectil está a 675 y a 720 metros de altura, pues lo que estamos buscando es para qué valores de t se verifica que $h(t) = 675$ en un caso, o $h(t) = 720$ en el otro.

Comencemos con el cálculo correspondiente a 675 metros. Como en el caso anterior, debemos resolver la ecuación

$$-5(t-12)^2 + 720 = 675$$

es decir:

$$5(t-12)^2 = 45$$

$$(t-12)^2 = 9$$

$$t-12 = -\sqrt{9} \ \text{ o } \ t-12 = \sqrt{9}$$

$$t-12 = -3 \ \text{ o } \ t-12 = 3$$

con lo que

$$t = 9 \ \text{ o } \ t = 15$$

es decir que el proyectil alcanza una altura de 675 metros, a los 9 y a los 15 segundos de haber sido lanzado.

Para averiguar en qué instante (o instantes) la altura es de 720 metros, la ecuación que debemos resolver es:

$$-5(t-12)^2 + 720 = 720$$

es decir:

$$5(t-12)^2 = 0$$

$$(t-12)^2 = 0$$

condición que se cumple únicamente cuando

$$t - 12 = 0$$

es decir, cuando

$$t = 12$$

De este modo, vemos que el único instante en que el proyectil está a 720 metros sobre el suelo es a los 12 segundos de su lanzamiento.

Como esa altura es alcanzada en un único instante, de acuerdo con lo comentado anteriormente, podría afirmarse que 720 metros es la altura máxima que el proyectil puede alcanzar y ello ocurre a los 12 segundos del lanzamiento.

En el ítem c) se pide determinar los instantes en que el proyectil asciende y desciende. A partir de los resultados obtenidos, y sabiendo que el proyectil asciende desde su lanzamiento hasta el momento de alcanzar la máxima altura, podemos decir que el período de ascenso es desde el instante $t = 0$ hasta $t = 12$, es decir que el ascenso se produce para $t \in [0, 12]$.

El período de descenso será el que se inicie en $t = 12$ (que es el instante en que el proyectil comienza a caer) y finalice en el instante en que el proyectil se encuentre nuevamente en el suelo. Para determinar este momento, debemos hallar el valor de t para el cual la altura del proyectil sea 0, es decir, debemos resolver la ecuación $h(t) = 0$ (ya sabemos que $t = 0$ es una solución de esta ecuación, que corresponde al instante inicial).

Resolvemos entonces la ecuación $h(t) = 0$, es decir

$$-5(t-12)^2 + 720 = 0$$

Para resolverla, observemos que la ecuación planteada es equivalente a:

$$5(t-12)^2 = 720$$

es decir:

$$(t-12)^2 = \frac{720}{5} = 144$$

de donde resulta que

$$t - 12 = 12 \quad \text{ó} \quad t - 12 = -12$$

es decir:

$$t = 24 \quad \text{ó} \quad t = 0\ .$$

De este modo, las soluciones de la ecuación $h(t) = 0$ son $t = 0$ y $t = 24$, de donde podemos afirmar que el proyectil desciende desde el instante $t = 12$ hasta $t = 24$, es decir, para $t \in [12, 24]$.

Notar que estos cálculos nos permiten saber también que el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo es de 24 segundos desde el momento en que fue lanzado.

Para responder al ítem d), donde nos preguntan por la posibilidad de alcanzar una altura de 1300 metros, tenemos dos alternativas para dar la respuesta. Una es a partir de todo el análisis que ya tenemos hecho hasta ahora. En efecto, los cálculos hechos para resolver el ítem b) de este problema, nos informan que la altura máxima alcanzada por el proyectil es de 720 metros sobre el suelo. Este dato, en particular, dice que es imposible que el proyectil alcance alturas superiores a los 720 metros, por lo que como respuesta al ítem d) diremos que *no existe ningún instante en que la altura alcanzada sea de 1300 metros sobre el suelo.*

La otra alternativa que disponemos es la de realizar los cálculos, tal como ya lo hemos hecho anteriormente. En este caso, lo que se propone es que hallemos el o los instantes t en que la altura $h(t)$ sea de 1300 metros. De esta manera, debemos hallar los valores de t para los cuales se verifique que

$$h(t) = 1300$$

con lo que la ecuación que debemos resolver es:

$$-5(t-12)^2 + 720 = 1300$$

lo que nos lleva a tener que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} 5(t-12)^2 &= 720 - 1300 \\ 5(t-12)^2 &= -580 \\ (t-12)^2 &= \tfrac{-580}{5} \\ (t-12)^2 &= -116\ . \end{aligned}$$

Con lo hecho hasta aquí, observamos que no será posible hallar valores de t que verifiquen la ecuación $-5(t-12)^2+720 = 1300$, pues ésta nos conduce a buscar valores de t que hagan que un "cuadrado" (como es $(t-12)^2$) dé por resultado un número negativo, lo cual sabemos que es un absurdo en el contexto de los números reales. De este modo, dado que la ecuación que debíamos resolver no tiene solución, la respuesta al ítem d) es que *no existe ningún instante en que la la altura del proyectil sea de 1300 metros sobre el suelo*, tal como habíamos concluido en la anterior alternativa de resolución.

Como observación, nos parece importante notar las ventajas de la primera forma de resolución: no sólo es más breve y simple, sino que además surge de una reflexión sobre el problema a partir de toda la información recogida previamente.

En el ítem e) se pide determinar el dominio, codominio e imagen de la función h y, además, hacer un gráfico aproximado de la misma.

Como sabemos, el *dominio* de una función representa el conjunto de todos los valores sobre los cuales puede definirse la misma. En los casos en que la función está definida por una situación planteada en un problema, ésta, y no solo la fórmula o expresión de la función, es la que determina su dominio. En nuestro caso, se trata de un elemento lanzado verticalmente hacia arriba, por lo que interesa saber el lapso (intervalo) durante el cual "está en movimiento" el objeto, es decir, el período de tiempo que transcurre desde el momento en que se dispara el objeto hasta que éste caiga al suelo. A partir de esta interpretación, es claro que el tiempo que debemos considerar para la determinación del dominio es el que transcurre entre "los dos momentos en que el objeto está a nivel del suelo": el momento en que es disparado y el momento en el cuál retorna luego de haber descripto toda su trayectoria.

Si tenemos en cuenta que la expresión $h(t) = -5(t-12)^2 + 720$ define la altura sobre el suelo en cada instante t a lo *largo de toda la trayectoria*, el lapso que define al dominio de la función tendrá que ser el comprendido *entre los dos valores* de t en los cuales el proyectil está a altura cero incluyendo ambos. Estos valores ya han sido hallados para el ítem c), y son $t = 0$ y $t = 24$. De este modo, resulta que el dominio de la función está determinado por el intervalo $[0; 24]$, es decir, $A = Dom(h) = [0; 24]$.

Con respecto al *codominio*, sabemos que representa "el conjunto de llegada" de la función, por lo que la condición que debe cumplir es que sea "un conjunto lo suficientemente grande" como para contener a **todos** los resultados de la función, es decir, debe contener al conjunto imagen de la función. En este sentido, no es único el conjunto que podría proponerse como el codominio de la función. En el contexto de funciones a valores reales (como es el caso de la función que modeliza este problema) siempre puede considerarse a todo el conjunto $\mathbb{R}$ como codominio. Dependiendo del contexto del problema que se considere, el codominio puede restringirse a conjuntos más acotados, como por ejemplo, en nuestro caso, el de los números reales mayores o iguales que 0, $[0, +\infty)$ o, en general, el conjunto imagen de la función. De esta manera podemos considerar para nuestro problema que el codominio es el conjunto $B = \mathbb{R}$.

Con las definiciones de conjuntos dominio y codominio que hemos adoptado, la función que modeliza este problema es:

$$h : [0, 24] \to \mathbb{R} \text{ y está dada por la expresión } h(t) = -5(t-12)^2 + 720 \ .$$

Para determinar el conjunto imagen de la función, debemos tener en cuenta que el mismo es el conjunto de todos los valores de la ordenada "y" que están afectados por la función. En este caso, éstos representan todos los valores de altura alcanzados por el proyectil que, como hemos visto, son todos los valores que van desde $y = 0$, que es la altura inicial, hasta el valor $y = 720$ que corresponde a la máxima altura alcanzada. De este modo, se tiene que la imagen de la función es el conjunto $\text{Im}(h) = [0, 720]$.

A partir de toda la información recogida en el análisis precedente, estamos en condiciones de "ajustar" o "corregir" el gráfico que habíamos propuesto anteriormente, sabiendo ahora que, entre otras cosas:

1. La altura máxima que alcanza el proyectil es de 720 metros, y lo hace a los 12 segundos de su lanzamiento. En el gráfico, esto se traduce en una curva que tiene un máximo en el punto $(12, 720)$,

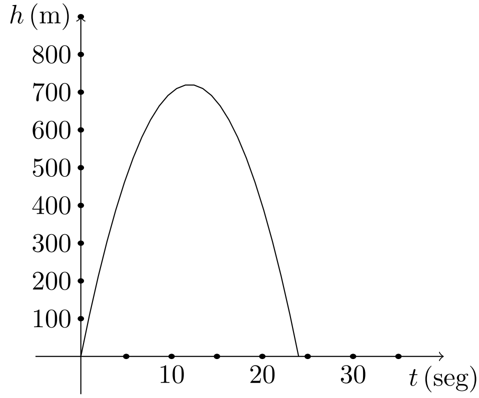
2. La altura en el instante incial es de 0 metros sobre el suelo (o sea que el lanzamiento se realiza *desde el suelo*), lo que indica que el gráfico “comienza” en el punto $(0, 0)$,

3. El tiempo que estuvo el proyectil en el aire fue de 24 segundos, lo que indica que el gráfico “termina” en el punto $(24, 0)$

4. Durante los primeros 12 segundos el proyectil asciende, lo que hace que el gráfico sea *creciente* en el intervalo $[0, 12]$ y entre los 12 y los 24 segundos desde el lanzamiento, el proyectil desciende, por lo que el gráfico es *decreciente* en el intervalo $[12, 24]$,

5. Todas las alturas del proyectil, entre 0 (altura desde la que fue lanzado) y 720 metros (altura máxima) son alcanzadas, salvo esta última, en dos momentos diferentes: uno en el ascenso y otro durante el descenso. Algunos ejemplos de esta afirmación pueden observarse en las respuestas dadas en distintos ítemes del problema: el proyectil alcanzó los 595 metros a los 7 y a los 17 segundos del lanzamiento, alcanzó los 675 metros a los 9 y 15 segundos. Además, estuvo a nivel del suelo (0 metros) en dos momentos distintos: a los 0 y a los 24 segundos. Esta observación sugiere una *simetría* del gráfico entre los momentos correspondientes al ascenso y al descenso del proyectil. Efectivamente, podemos ver que 5 segundos antes y 5 segundos después de alcanzar la máxima altura (es decir a los 7 y a los 17 segundos) el proyectil alcanzó la altura de 595 metros. Del mismo modo, el proyectil está a 675 metros en dos momentos: a los 9 y a los 15 segundos, es decir, 3 segundos antes y 3 segundos después de alcanzar el máximo.

En conclusión el gráfico que describe la situación planteada en el problema sería, aproximadamente, el siguiente:

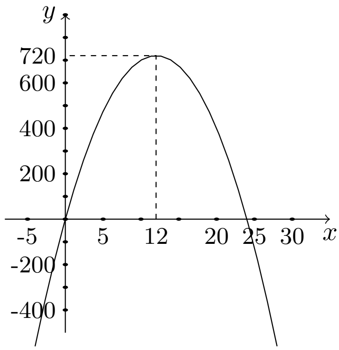


1.2 Algunas características de las funciones cuadráticas

La función que modelizó el problema anterior, $h : [0, 24] \to \mathbb{R}$, $h(t) = -5(t-12)^2+720$ puede verse como un "recorte" de la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = -5(x-12)^2 + 720$$

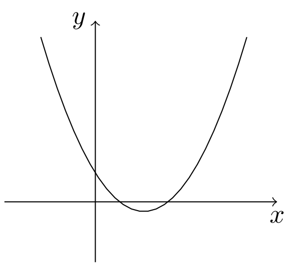
que, como ya hemos dicho anteriormente, es una *función cuadrática*, en este caso escrita en *forma canónica*, cuyo gráfico es una *parábola*, que tiene, aproximadamente, la siguiente forma:



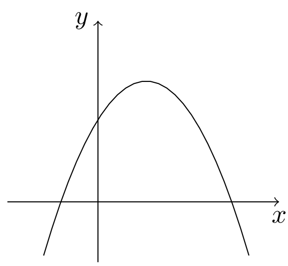
En general, una función cuadrática es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida, usualmente, por alguna de las siguientes expresiones:

1. $f(x) = a(x-h)^2 + k$, conocida como *forma canónica*, donde $a, h, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,
2. $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, conocida como *forma factorizada*, donde $a, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,
3. $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, llamada *forma polinómica*, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

El gráfico de una función cuadrática es la *parábola*, que puede ser de alguna de las dos siguientes formas:



Forma 1



Forma 2

Las "ramas" de las parábolas van "hacia arriba" (como en Forma 1) si $a > 0$, y van "hacia abajo" (como en Forma 2) si $a < 0$, como ocurre en el caso de la función utilizada en el problema del disparo ($a = -5 < 0$).

Entre los elementos que caracterizan a las funciones cuadráticas están: el *vértice*, el *eje de simetría* y los *puntos simétricos.*

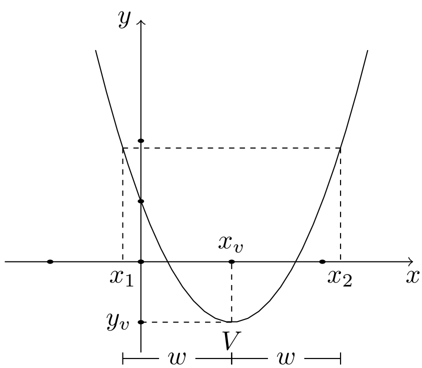
Sobre el vértice:

El *vértice* es el punto de la parábola en el cual la función alcanza el máximo o el mímimo, según sea como en las Formas 1 o 2, y suele ser notado como el punto $V = (x_v, y_v)$. En el caso del problema del disparo el vértice es $V = (12; 720)$, que representa el punto en donde se alcanza la máxima altura del proyectil.

Sobre el eje de simetría y los puntos simétricos

El *eje de simetría* de la parábola es la recta vertical de ecuación $x = x_v$ que tiene la particularidad de "dividir" al gráfico en dos "ramas" simétricas respecto de este eje, con lo que, conociendo sólo una de ellas, podemos determinar la otra. En otras palabras, decir que la función f es simétrica respecto de la recta $x = x_v$ es equivalente a decir que toma los mismos resultados en valores de la variable independiente que se encuentran a una misma distancia de x_v, ya sea a la derecha como a la izquierda. Esto se expresa diciendo que, cualquiera sea el valor que pueda tomar $w \in \mathbb{R}$ se verifica que $f(x_v - w) = f(x_v + w)$ y, en este caso, $x_v - w$ y $x_v + w$ son dos *valores simétricos* de la función. Concretamente, diremos que x_1 y x_2 son dos valores simétricos de una función cuadrática f si verifican $f(x_1) = f(x_2)$. Los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ se llaman puntos simétricos de la gráfica de la función f.

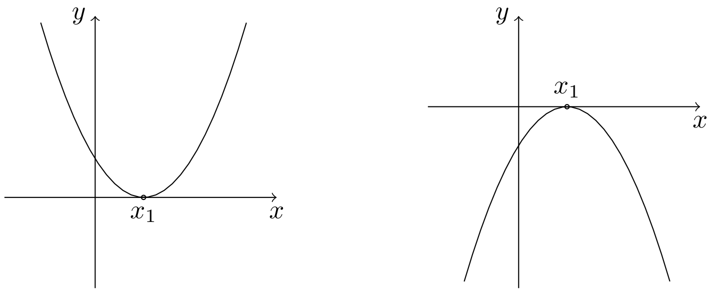
A modo de ejemplo, como ya lo señalamos, en el problema del disparo, dos valores simétricos de la función son, por ejemplo, los correspondientes a $x_1 = 7$ y $x_2 = 17$, pues $f(7) = f(17) = 595$. En este caso, el eje de simetría es $x = 12$, con lo que la simetría de los puntos recién mencionados queda verificada porque vale que $f(7) = f(12-5) = f(12+5) = f(17) = 595$. Otro par de valores simétricos de la función que modeliza el problema del disparo, es el formado por las raíces de la función: $x_1 = 0$ y $x_2 = 24$.



Otra particularidad de los puntos simétricos es que el promedio de sus abscisas es la **abscisa** del vértice. Por ejemplo, en lo que respecta al problema del disparo, el punto medio entre 7 y 17 es 12 , hecho que también puede observarse en cualquiera de los pares de puntos simétricos señalados anteriormente. Esto nos proporciona una forma práctica de hallar la coordenada x del vértice a partir de cualquier par de *puntos* *simétricos.* En efecto, si x_1 y x_2 son dos valores simétricos de una función cuadrática f, es decir, $f(x_1) = f(x_2)$, el valor x_v debe ser exactamente el *promedio* entre x_1 y x_2, es decir que podemos calcular x_v mediante la “fórmula”:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Como caso particular, cuando la función tiene dos raíces reales distintas, x_1 y x_2, éstas pueden ser utilizadas como valores simétricos para calcular la abscisa del vértice. En el caso en que la función tenga una única raíz real ésta será llamada *ríz doble* y resulta que $x_2 = x_1$. En este caso, éste será el valor de la coordenada x del vértice, pues $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_1 + x_1}{2} = \frac{2.x_1}{2} = x_1$, y es lo que se ilustra en los dos siguientes gráficos que representan tal situación:



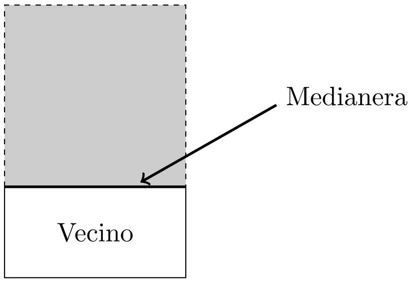
Forma aproximada del gráfico de una función cuadrática con raíz doble en $x = x_1$.

Recordar que las raíces de una función son los valores del dominio en los cuales la función toma el valor 0, es decir, las raíces son los elementos del conjunto $C_0 = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) = 0\}$, tal como ya fue defnido en el apartado correspondiente a modelización.

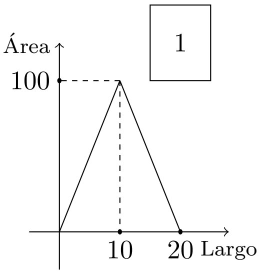
1.3 El problema del granjero

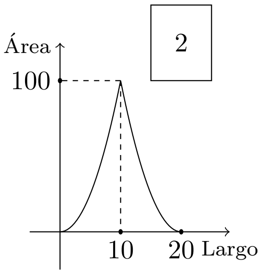
Ejemplo 2. En un terreno un granjero quiere delimitar una región rectangular con un alambre de 40 m para hacer una zona de cultivos. Este terreno limita con un único vecino que tiene construida su medianera de más de 40 m de largo (ver esquema). Sobre dicha medianera se quiere apoyar uno de los bordes que delimitan la zona de cultivos. Todo el recinto será bordeado por el alambre, incluso el lado que está contra la medianera.

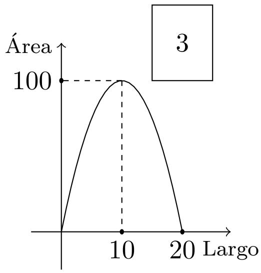
(a) Como el dueño de la medianera es el vecino, el granjero deberá solicitarle autorización para hacer uso de la misma, indicándole qué parte de ella será ocupada. Indicar por lo menos cuatro posibles dimensiones de la zona de cultivo, explicitando para cada caso, qué longitud estaría apoyada sobre la medianera.

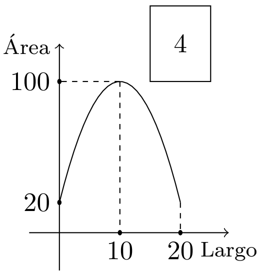


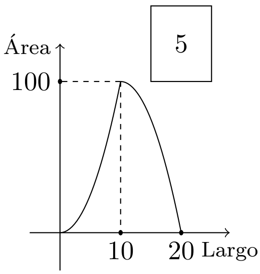
(b) ¿Cuál o cuáles de los siguientes gráficos podrían representar el área de la región en función del largo? ¿por qué?

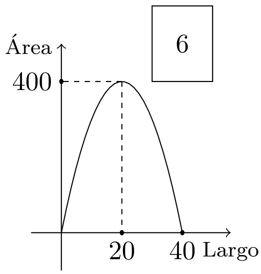










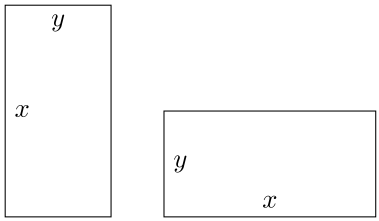


(c) ¿De qué dimensiones debería hacer el granjero la zona de cultivo si quiere maximizar su cosecha? En este caso, ¿qué le informaría a su vecino respecto de la longitud utilizada de su medianera? Justificar la respuesta.

Algunas observaciones:

1. Para comenzar con la resolución de este problema, tengamos en cuenta un dato importante que se plantea en su enunciado: el cerco de la región que será delimitada, se hará con un alambre de 40 metros de longitud. Esto quiere decir que esos 40 metros de alambre son los que "definen" el perímetro de la región. Obviamente, como las dimensiones del terreno son suficientes (la medianera mide más de 40 metros) el granjero querrá utilizar "todo el alambre" para cercar su zona de cultivos, para que ésta sea lo más amplia posible.

2. Como el recinto que el granjero quiere delimitar es rectangular, debemos tener en cuenta que, a partir de las medidas que puedan tener sus lados, hay eventualmente “dos esquemas” posibles para ubicar a los terrenos. Por ejemplo, los dos rectángulos que indicamos a continuación, cuyos lados tienen medidas x e y, tienen el mismo perímetro, por lo que si hubiera que decidirse por un recinto que tenga estas dimensiones, será el lado de menor longitud el que se ubique sobre la medianera, como para molestar menos al vecino.



3. Como última observación, tengamos presente que pueden darse las siguientes dos situaciones:

   (i) con un **mismo perímetro**, pueden construirse rectángulos de **distintas áreas** y

   (ii) con un **mismo valor para el área**, pueden construirse rectángulos de **distintos perímetros**.

   Como ejemplo de la situación (ii) pensemos, por ejemplo, en un rectángulo cuyos lados midan 2 y 12 metros respectivamente. Su área es $A = 2 \cdot 12 = 24\,\mathrm{m}^2$ y su perímetro es $P = 2.12 + 2.2 = 28\,\mathrm{m}$. El rectángulo con lados que miden 3 y 8 metros respectivamente también tiene un área $A = 3 \cdot 8 = 24\,\mathrm{m}^2$, pero su perímetro es $P = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 22\,\mathrm{m}$.

   Como veremos a continuación, la respuesta que daremos a la primera consigna del ejercicio sirve como ejemplo para la situación **i)**

Resolución:

En la consigna (a) del problema nos piden que demos cuatro posibles dimensiones para la zona de cultivo que se quiere delimitar, esto es, utilizando el mismo perímetro (determinado por los 40 metros de alambre) dar “cuatro pares” de medidas para los lados del rectángulo. Para ello podemos dar, entre otros, los rectángulos cuyos lados tienen medidas x (que diremos que es el “largo” del rectángulo) e y (que será el “ancho” del rectángulo”) como indicamos en los siguientes ejemplos, donde cada valor está medido en **metros**:

Ejemplo 1: $y = 5$ y $x = 15$
Ejemplo 2: $y = 8$ y $x = 12$
Ejemplo 3: $y = 2$ y $x = 18$
Ejemplo 4: $y = 10$ y $x = 10$

En cada caso, observar que el perímetro, $P = 2.x + 2.y = 2.(x + y)$ es de 40 metros. La longitud que se ubicaría en la pared del vecino sería, en cada caso, la que tiene la menor medida, que en los ejemplos dados es la que hemos llamado y.

A partir de lo planteado en la respuesta que acabamos de dar, puede uno preguntarse: ¿cuál de los cuatro rectángulos planteados en los ejemplos le convendrá más al grangero (en cuanto a la superficie que cada uno proporciona para el cultivo)? ¿habrá alguno que no esté señalado en los ejemplos y que sea más conveniente que cualquiera de estos cuatro? Para responder a la primera de estas preguntas, debiéramos calcular el área de cada rectángulo, y así observar cuál de las áreas calculadas es la mayor, con lo que concluiríamos que la región que tenga esas medidas será la más conveniente de las cuatro propuestas.

Veamos esos cálculos...

Para eso, llamemos A_1, A_2, A_3 y A_4 a las áreas (medidas en metros cuadrados) de los rectángulos correspondientes a cada uno de los 4 ejemplos respectivamente. Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} A_1 &= 5.15 = 75 \\ A_2 &= 8.12 = 96 \\ A_3 &= 2.18 = 36 \\ A_4 &= 10.10 = 100 \end{aligned}$$

De este modo, a partir de los cálculos realizados, surge que, de los cuatro ejemplos propuestos, el del **ejemplo 4** es el que corresponde al rectángulo "más conveniente", dado que $A_4 = 100$ resulta ser el mayor valor de las áreas calculadas. Con esto, no podemos asegurar que no haya otra forma de delimitar un terreno rectangular que sea más conveniente que la de considerar 10 metros por lado. La respuesta a esta inquietud surgirá como una consecuencia del desarrollo que presentaremos a continuación.

El ítem (b) nos propone que identifiquemos entre la serie de gráficos si alguno puede corresponder al área de la región en "función del largo", que hemos llamado x. Antes de comenzar con el estudio de los gráficos, hagamos un pequeño análisis de lo que puede observarse a partir de los cálculos hechos y de la forma rectangular del recinto. Para ello, destacaremos algunas cuestiones relevantes del problema:

Los valores que toman x e y pueden intercambiarse, es decir: puede considerarse el rectángulo en el que el largo x tome el valor 15 y el ancho y el valor 5, es decir: $x = 15$ e $y = 5$, como el caso planteado en el **ejemplo 1**, o también el rectángulo en el que los valores del largo y ancho están invertidos, es decir: $x = 5$ e $y = 15$. Lo que se observa es que ambos rectángulos tienen el mismo valor de área: $A = 5.15 = 15.5 = 75$ Lo mismo ocurre, por ejemplo, con los rectángulos de lados $x = 12$ e $y = 8$, como el del **ejemplo 2** y el de lados $x = 8$ e $y = 12$, entre otros. Esta situación nos sugiere una característica para la función que determina el área en términos del largo: dicha función tiene que tomar el mismo valor en $x = 5$ y en $x = 15$ y también el mismo valor en $x = 8$ y en $x = 12$. Podríamos preguntarnos también: ¿qué otros pares de "medidas del largo" tienen esta "simetría"? o dicho de otra forma ¿qué otros pares de valores de x tendrán el mismo resultado (o *la misma imagen*) por la función del área? Dicho en otros términos: Si llamamos $A(x)$ al "valor del área de la región rectangular de largo x" que el granjero desea cercar, sabemos que $A(5) = A(15)$, que $A(8) = A(12)$ y también, $A(9) = A(11)$ entre otros, y nos preguntamos ¿cuáles serán todos los pares de valores de x en los que esto ocurre?

El valor que puede tomar x no es arbitrario. En efecto, el valor del largo (y también el ancho) que tendrá el recinto está condicionado por la longitud del alambre disponible, que es de 40 metros. A partir de este hecho, los valores de x y de y están sujetos a la siguiente restricción: el perímetro del rectángulo de lados x e y es de 40 metros, es decir: $2 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \cdot (x + y) = 40$, lo que implica que $x + y = 20$. A partir de esto, podemos observar que cualquiera de los pares de valores que hemos estado utilizando cumplen la condición de que ambos valores suman 20. Por otro lado, "puede observarse" que la simetría que hemos señalado está asociada a la conmutatividad de la suma (da lo mismo $x + y$ que $y + x$) y se plantea en torno al par $x = 10$ e $y = 10$.

¿Cuáles son, entonces, los valores que puede tomar x en nuestro problema? En primer lugar, como x representa una longitud (el largo del recinto cercado) debe ser un número **no negativo**, es decir, $x \geq 0$. Por otro lado, a partir de la condición que surge de la longitud del alambre ($x + y = 20$) se tiene también que x **no puede ser mayor que 20**, es decir, debe ser $x \leq 20$. De este modo, x debe satisfacer simultáneamente las condiciones $x \geq 0$ y $x \leq 20$, lo que puede expresarse como $0 \leq x \leq 20$ o lo que es igual, $x \in [0; 20]$. Naturalmente, los valores $x = 0$ y $x = 20$ son "valores extremos" con los que se obtendría un "rectángulo de área 0"

Por último, podemos ahora dar alguna respuesta a las preguntas sobre los pares de valores de x en los cuales se obtienen los mismos valores para el área. El único par de valores "que no se repite" es $x = 10$ e $y = 10$, es decir, el valor "simétrico" de $x = 10$ es también $x = 10$ (y el área que resulta en este caso es $A = 10.10 = 100$). Los otros valores del largo x que generan igual área son simétricos con respecto a $x = 10$ (como $x = 9$ y $x = 11$ o como $x = 5$ y $x = 15$ por ejemplo), es decir que los dos valores de x que estén a la misma distancia del 10 son "medidas del largo" que forman rectángulos de igual área. Una pregunta que puede hacerse es ¿cuál es la singularidad que tiene el valor $x = 10$ para que no tenga otro valor? En principio, es **el punto medio del intervalo** $[0; 20]$, donde $x = 0$ y $x = 20$ son los "valores extremos" de la variable, con los cuales el rectángulo tendría área 0.

Información sintetizada

Resumiendo la información que hemos obtenido en este análisis, previo a tomar alguna decisión sobre qué gráfico puede representar el área de la región en función del largo, tenemos:

- x toma valores en el intervalo $[0; 20]$

- con $x = 0$ y $x = 20$ se obtienen rectángulos de área 0

- el gráfico debe ser simétrico respecto de $x = 10$

- para $x = 10$ el área es $A = 100$

A partir de esta información que acabamos de resumir podemos descartar algunos de los gráficos propuestos en el ítem b) del ejercicio. Efectivamente:

- El gráfico 4 no puede ser porque para los valores $x = 0$ y $x = 20$ el resultado no da 0

- El gráfico 5 no puede ser porque no corresponde a una gráfica simétrica respecto de $x = 10$

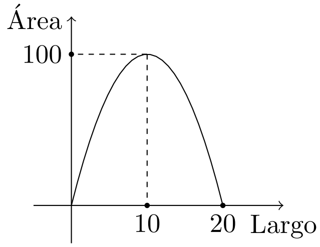
- El gráfico 6 no puede ser porque el dominio es el intervalo $[0; 40]$ en vez de ser $[0; 20]$ y además, porque el valor de área que le corresponde a $x = 10$ en este gráfico no es 100.

Queda entonces, decidir cuál de los tres primeros puede ser el que corresponda a la situación que estamos analizando:

- El gráfico 1, si bien es simétrico respecto de $x = 10$, está definido para $x \in [0; 20]$ y verifica $A(10) = 100$, está formado por dos tramos rectos. El primero, correspondiente a $x \in [0; 10]$, describe parte de una función de proporcionalidad (el gráfico es parte de una recta por el origen) y, por lo tanto, si fuese el gráfico que representa al área en función del largo, estaría indicando que $A(5) = 50$, pues como es parte de una función de proporcionalidad, verifica que al punto medio del intervalo $[0; 10]$ (para x) le corresponde el punto medio del intervalo $[0; 100]$ (para y), lo que sabemos que no es cierto porque, como vimos en el **ejemplo 1**, $A(5) = 75$. Por lo tanto, tampoco es el gráfico 1 el que corresponde a la función que estamos considerando.

- El gráfico 2, que también tiene las características de ser simétrico respecto de $x = 10$, estar definido para $x \in [0; 20]$ y verificar $A(10) = 100$, no puede ser el que represente el área de la región cercada en términos del largo pues, por ejemplo, el tramo correspondiente al intervalo $[0; 10]$ muestra una curva que no podría corresponderse (de acuerdo a la escala sugerida en cada eje) con el dato $A(5) = 75$.

  De este modo, queda que el gráfico (aproximado) que describe el **área** del recinto cercado en función del **largo** del mismo es el gráfico 3.



Otras características que pueden señalarse (a partir del gráfico) son las siguientes:

- En el intervalo $[0;10]$ la función es creciente mientras que en el $[10;20]$ es decreciente
- El máximo lo alcanza en $x = 10$ y toma el valor $A(10) = 100$

Esto último quiere decir que la máxima zona para el cultivo la obtiene cercando un cuadrado de 10 metros de lado, por lo que debería informarle a su vecino que serían 10 metros los que utilizaría de la medianera (y esto constituye la respuesta a la consigna c) de nuestro problema).

Características de la función. Una pregunta que parece interesante hacerse es si puede definirse, mediante alguna fórmula, una función que determine el valor del área de la región de cultivo en términos del "largo" del mismo".

Algunas características que presenta el gráfico que describe aproximadamente la situación como, por ejemplo, su simetría, que posee un máximo y que su formato se asemeja al de una parábola, permitirían suponer que la función que modelice esta situación sea una función cuadrática.

Para decidir sobre las suposiciones que acabamos de plantear, tengamos en cuenta cómo calculamos el área para cada valor del largo x. Sabemos que el área del rectángulo de largo x y ancho y es $A = x.y$, donde x e y están relacionadas por la condición $x+y = 20$. Lo que nos interesa es ver al área como función solo de x, pero al escribir $A = x.y$ se observa que A depende de ambas variables, x e y. La condición $x+y = 20$ implica que $y = 20 - x$, y a partir de esta relación, podemos escribir, entonces,

$$A = x.y = x.(20 - x)$$

con lo que A está expresada solo en función de x, por lo que podemos escribir

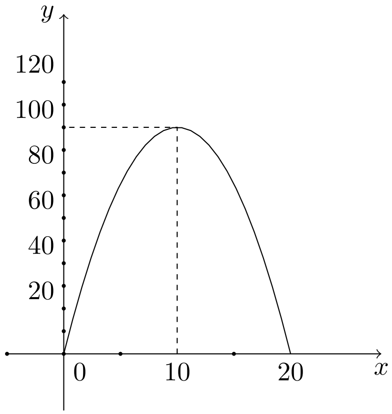
$$A(x) = x.(20 - x)$$

donde no hay que olvidar que $x \in [0;20]$. De este modo, la función que "modeliza" a nuestro problema es la siguiente:

$$A : [0;20] \to \mathbb{R} \text{ definida por la expresión } A(x) = x.(20 - x).$$

lo que resulta ser una función cuadrática que, escrita en forma polinómica, sería $A(x) = -x^2 + 20x$, por lo que resulta entonces que la suposición hecha al elegir el gráfico 3 como el apropiado para el problema resultó correcta.

Un gráfico más detallado de la función $A : [0; 20] \to \mathbb{R}$, $A(x) = x \cdot (20 - x)$ sería:



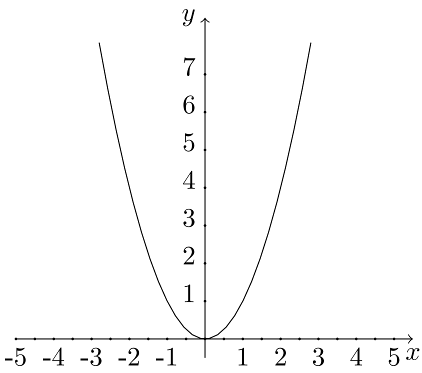
En esta función, el vértice es el punto $V = (10, 100)$, que representa el máximo de la función.y el eje de simetría está dado por la recta $x = 10$.

Ejercicio resuelto 1. Para la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ graficar e identificar vértice, eje de simetría, raíces, un par de puntos simétricos, máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Resolución: Usamos una tabla de valores para obtener algunos puntos que pertenecen al gráfico de la función:

x	$y = x^2$	Puntos del gráfico
-3	$(-3)^2 = 9$	$(-3, 9)$
-2	$(-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$(-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$2^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$3^2 = 9$	$(3, 9)$

Sabemos, a partir de lo trabajado anteriormente, que el gráfico será una parábola y esto es lo que nos permite trazarlo a partir de los pocos puntos proporcionados por la tabla de valores. De esta manera, ubicamos dichos puntos en un gráfico cartesiano y los unimos obteniendo la siguiente parábola:



Puntos simétricos

Para determinar pares de puntos simétricos debemos tener en cuenta que en una parábola dichos puntos son aquellos que tienen el mismo valor en la coordenada y. Si observamos la tabla de valores encontramos que en ella hay varios pares de puntos simétricos: $(-3, 9)$ y $(3, 9)$; $(-2, 4)$ y $(2, 4)$; $(-1, 1)$ y $(1, 1)$. Si quisiéramos hallar un par de puntos simétricos que no figure en la tabla podríamos hacerlo de la siguiente manera: elegimos un valor de y, por ejemplo $y = 36$, para determinar puntos simétricos que tengan como segunda coordenada al valor elegido debemos hallar los valores de x para los cuales $f(x) = 36$, resolviendo la ecuación

$$x^2 = 36\ .$$

Las soluciones de dicha ecuación son $x = 6$ o $x = -6$. Esto quiere decir que

$$f(-6) = f(6) = 36.$$

Por lo tanto, los puntos simétricos son $(-6, 36)$ y $(6, 36)$.

Observemos que lo descripto arriba es un procedimiento general para obtener pares de puntos simétricos.

Eje de simetría y vértice.

Para determinar el eje de simetría de la parábola debemos recordar que dicho eje es la recta vertical de ecuación $x = x_v$, por lo que para hallarlo debemos calcular el valor promedio de las abscisas correspondientes a un par de puntos simétricos. Considerando alguno de los pares de puntos simétricos mencionados anteriormente, por ejemplo $(-2, 4)$ y $(2, 4)$, el eje de simetría es la recta $x = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$ (Sugerencia para el lector: verificar que el resultado es el mismo cualquiera sea el par de puntos simétricos elegido).

El vértice de la parábola se encuentra en el eje de simetría, por lo tanto su abscisa es $x_v = 0$. Para hallar la ordenada del vértice debemos evaluar la función en el valor x_v y de esta manera $y_v = f(x_v)$. En este caso, $y_v = f(0) = 0^2 = 0$ y, por lo tanto, el vértice es el punto $(0, 0)$.

Raíces

Con respecto a las raíces, recordemos que éstas son los valores de x para los cuales la función se anula y, además, son los valores en los que el gráfico de la función interseca al eje de abscisas. Analizando el gráfico realizado, y verificando con la tabla de valores, podemos comprobar que la función tiene una única raíz: $x = 0$ puesto que es el único valor en el que se verifica que $f(x) = 0$.

Máximos y mínimos

Observar que la función $f(x) = x^2$ alcanza un valor mínimo en la coordenada x_v por ser una función cuadrática con coeficiente $a = 1 > 0$. Este valor mínimo es el correspondiente a la coordenada y_v.Es decir que para cualquier otro valor de x la imagen correspondiente es mayor que 0.

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función

Intervalo de crecimiento: $(0; +\infty)$

Intervalo de decrecimiento: $(-\infty; 0)$

Observar que en $x = 0$ cambia el comportamiento de la función: decrece hasta $x = 0$ y luego comienza a crecer. Esto resulta coherente con el hecho de que en dicho valor se alcance el valor mínimo de la función.

Trabajo práctico 27

Ejercicio 1. (Acerca de la lectura)

(a) ¿Cuál sería la interpretación gráfica del procedimiento para determinar pares de puntos simétricos?

(b) ¿Es cierto que el vértice es el único punto de la parábola cuyo simétrico es igual a sí mismo? Justificar.

Ejercicio 2. Para la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$ dibujar su gráfico e identificar vértice, eje de simetría, raíces, un par de puntos simétricos, máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 3. Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba. El mismo tarda 12 segundos en subir y alcanzar la altura máxima, la cual es de 720 metros.

Aclaración: considerar que el proyectil parte desde el suelo, de manera que su altura inicial es de 0 metros.

(a) Suponiendo que no hay factores que alteren la trayectoria del proyectil, describir cualitativamente cómo varia su altura en función del tiempo transcurrido desde el momento del disparo.

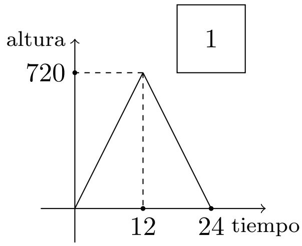
(b) Decidir cuál (o cuáles) de las siguientes expresiones podrían representar la situación descripta en el ítem anterior. Explicar tanto la elección como el descarte.

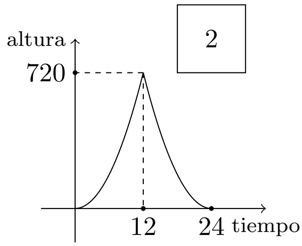
(i) $f(t) = -5.t^2 + 120t$ (ii) $f(t) = 5.(t-12)^2 + 1440$

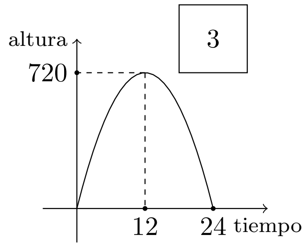
(iii) $f(t) = -5(t-12)^2 + 720$ (iv) $f(t) = -5.(t-24).t$

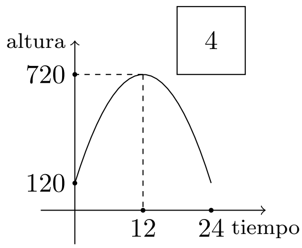
(v) $f(t) = 5.(t-24)^2 + 720$

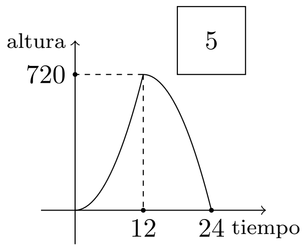
(c) ¿Alguno de los siguientes gráficos podría representar la altura del proyectil en función del tiempo transcurrido desde el momento del disparo? Explicar tanto la elección como el descarte

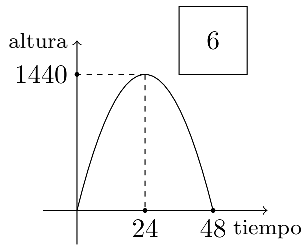












(d) ¿A qué altura se encuentra el proyectil a los 7 segundos de haber sido disparado? ¿Alcanza esta misma altura en algún otro instante a lo largo de su trayectoria?

(e) ¿Existe algún instante en el que la altura del proyectil sea de 675 metros? En caso afirmativo, decir cuál o cuáles. En caso negativo, explicar por qué

(f) Definir la función que modeliza la altura del proyectil en función del tiempo y determinar su conjunto imagen.

(g) Otro proyectil es disparado en iguales condiciones, pero desde una plataforma que se encuentra a 70 metros de altura. Determinar la expresión de una función que mida la altura del proyectil en cada instante t (en segundos) de su trayectoria desde el disparo hasta que toca el suelo. Determinar dominio e imagen de esta función y realizar un gráfico aproximado.

Ejercicio 4. Un granjero desea cercar un pequeño huerto donde se propone sembrar tomates. Para ello dispone de 100 metros de alambre tejido. Analizando el lugar disponible, decide cercar una superficie rectangular del terreno. ¿Qué longitud deberían tener los lados del rectángulo para maximizar la producción de tomates?

2 Presentaciones de una función cuadrática

En los problemas que hemos desarrollado anteriormente trabajamos con las funciones cuadráticas en distintas "presentaciones". En lo que sigue, trataremos de profundizar el estudio de cada una de ellas, señalando sus particularidades.

2.1 Forma canónica de una función cuadrática

Una función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está escrita en la forma canónica si su expresión responde al formato

$$f(x) = a.(x-h)^2 + k$$

donde a, h y k son números reales y $a \neq 0$. Notar que si $a = 0$, la función f no es cuadrática sino que es una función constante.

A continuación presentamos una breve explicación acerca de cómo obtener información sobre las características o elementos del gráfico de una función cuadrática cuando viene presentada en la forma canónica:

¿Cómo determinar el tipo de concavidad de la parábola?

El valor a, llamado *coeficiente principal*, informa sobre el tipo de concavidad del gráfico:

- si $a > 0$ la parábola tiene sus ramas hacia arriba,
- si $a < 0$ la parábola tiene sus ramas hacia abajo.

¿Cómo determinar la posición de las ramas respecto del eje de simetría?

El coeficiente principal indica, además del tipo de concavidad, cuán abiertas o cerradas están las ramas de la parábola respecto del eje de simetría. En el caso de $a > 0$, si $a > 1$ la parábola resulta "más cerrada" con respecto al eje de simetría que la correspondiente a $y = x^2$; si en cambio $a < 1$, las ramas resultan "más abiertas".

Si $a < 0$, se realiza el mismo análisis pero comparando con la parábola correspondiente a $y = -x^2$

¿Cómo determinar las coordendas del vértice?

Si $a > 0$, el vértice está dado por el punto donde la parábola alcanza el *mínimo* valor de ordenada. Como a es positivo, $a.(x-h)^2$ resulta siempre mayor o igual que 0 para cualquier valor de x, o sea $a.(x-h)^2 \geq 0$ cualquiera sea x en $\mathbb{R}$. De manera que el mínimo valor se alcanza cuando el cuadrado da 0, lo cual ocurre cuando $x = h$. De esta manera resulta que la abscisa del vértice es el valor $x_v = h$ y para determinar la ordenada del vértice, teniendo en cuenta $y_v = f(x_v)$, reemplazamos dicho valor:

$$y_v = a.(h-h)^2 + k = 0 + k = k \ .$$

Es decir que los parámetros h y k representan las coordenadas del vértice: $x_v = h$ e $y_v = k$.

Si $a < 0$, el vértice está dado por el punto donde la parábola alcanza el *máximo* valor de ordenada. Como a es negativo, $a.(x-h)^2$ resulta siempre menor o igual que 0 para cualquier valor de x, o sea $a.(x-h)^2 \leq 0$. Luego el máximo valor que puede tomar esta expresión es 0 y eso se logra cuando $x = h$. Realizando la misma cuenta que en el caso anterior, la ordenada del vértice será $y_v = k$. Es decir que los parámetros h y k representan las coordenadas del vértice: $x_v = h$ e $y_v = k$.

¿**Cómo determinar el eje de simetría**?

El eje de simetría es la recta de ecuación $x = x_v$ y, por lo tanto, en este caso resulta $x = h$.

¿**Cómo determinar las intersecciones del gráfico con los ejes coordenados**?

Para hallar las raíces o ceros, que corresponden a las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el eje x, debe resolverse la ecuación

$$a.(x-h)^2 + k = 0$$

Recordando lo trabajado en la sección de Álgebra, las soluciones de esta ecuación se obtienen de la siguiente manera:

$$(x-h)^2 = -\frac{k}{a}$$

$$x_1 - h = \sqrt{-\tfrac{k}{a}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{-\tfrac{k}{a}} + h \quad \text{ó} \quad x_2 - h = -\sqrt{-\tfrac{k}{a}} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{-\tfrac{k}{a}} + h$$

Notemos que la ecuación solo tiene solución en los casos en que $-\frac{k}{a} \geq 0$: tiene dos soluciones distintas cuando $-\frac{k}{a} > 0$ y sólo una si $-\frac{k}{a} = 0$.

Para calcular la ordenada al origen o intersección con eje y debe evaluarse la fórmula en el valor $x = 0$. De esta manera el gráfico interseca al eje de ordenadas en el valor $y = f(0) = a(0-h)^2 + k = ah^2 + k$.

2.2 Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 2. Para cada función determinar vértice, tipo de concavidad e intersecciones con los ejes coordenados y, con la información obtenida, realizar un gráfico aproximado:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}.(x + \frac{7}{2})^2 + 2$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-4)^2 + \frac{5}{3}$

Resolución del ítem 1. El valor del coeficiente principal de la función f es negativo ($a = -\frac{1}{2}$), esto nos informa que la parábola tiene sus ramas hacia abajo y que, por lo tanto, alcanza un máximo en la abscisa del vértice. Las coordenadas del vértice se determinan teniendo en cuenta que el valor x_v anula la parte cuadrática, en este caso, a la expresión $(x + \frac{7}{2})^2$. De esta manera tenemos que $x_v = -\frac{7}{2}$ puesto que es el valor que verifica

$$(x + \frac{7}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{7}{2} = 0\,.$$

El valor de la ordenada del vértice es $y_v = 2$ pues es el resultado de evaluar a la función en $x_v = -\frac{7}{2}$, es decir, $y_v = f(x_v) = f(-\frac{7}{2}) = 2$. Por lo tanto, el vértice es el punto $V = (-\frac{7}{2}, 2)$.

Con respecto a la intersección con los ejes coordenados, podemos asegurar que la función tiene raíces puesto que la parábola posee sus ramas hacia abajo y el valor de la ordenada del vértice es positiva. A partir de este análisis, anticipamos (antes de realizar el planteo analítico) que necesariamente el gráfico interseca al eje de abscisas en dos valores distintos. Para hallar dichos valores tenemos que resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$$-\frac{1}{2}.(x + \frac{7}{2})^2 + 2 = 0$$

$$(x + \frac{7}{2})^2 = (-2).(-2)$$

$$(x + \frac{7}{2})^2 = 4$$

$$x + \frac{7}{2} = \sqrt{4} \quad \text{o} \quad x + \frac{7}{2} = -\sqrt{4}$$

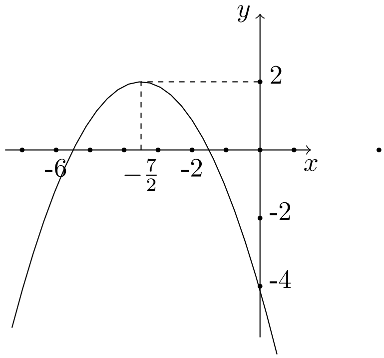
$$x = 2 - \frac{7}{2} \quad \text{o} \quad x = -2 - \frac{7}{2}$$

Por lo tanto, las raíces o ceros de la función son $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $x_2 = -\frac{11}{2}$.

Para determinar la ordenada al origen o intersección con el eje y debemos evaluar la función en $x = 0$. Por lo tanto, la parábola interseca al eje de ordenadas en el valor $y = f(0)$ que se calcula a continuación

$$f(0) = -\frac{1}{2}.(0 + \frac{7}{2})^2 + 2 = -\frac{1}{2}.\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{2}.\frac{49}{4} + 2 = -\frac{33}{8}.$$

A partir de la información obtenida realizamos un gráfico aproximado de la función:



Resolución del ítem 2. En este caso, la función es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+4)^2 + \frac{5}{3}$. El valor del coeficiente principal es positivo ($a = 1$), esto nos permite afirmar que la parábola tiene sus ramas hacia arriba y que, por lo tanto, alcanza un mínimo en la abscisa del vértice. Las coordenadas del vértice son $x_v = 4$ e $y_v = \frac{5}{3}$.

Con respecto a las raíces podemos anticipar que la parábola no posee intersección con el eje x puesto que sus ramas apuntan hacia arriba y la ordenada del vértice es positiva. Para verificar analíticamente que la función no tiene raíces resolvemos la ecuación $f(x) = 0$:

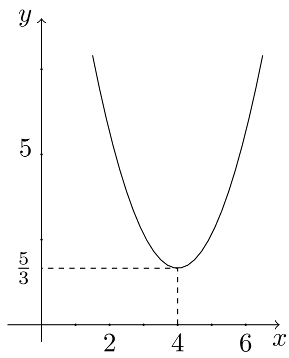
$$(x-4)^2 + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = -\frac{5}{3}$$

En este paso de la resolución podemos observar que la ecuación no tiene solución dado que no existe ningún valor de x que verifique la igualdad planteada, pues cualquier número elevado al cuadrado da por resultado otro número mayor o igual a cero. Por lo tanto, $C_0(f) = \emptyset$. De esta manera hemos confirmado lo anticipado acerca de las raíces.

Para hallar la ordenada al origen evaluamos la función en $x = 0$:

$$f(0) = (0-4)^2 + \frac{5}{3} = 16 + \frac{5}{3} = \frac{53}{3}$$

Con la información obtenida realizamos un gráfico aproximado de la función:



2.3 Forma factorizada de una función cuadrática

Recordemos que la función cuadrática en *forma factorizada* se escribe como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = a.(x - r_1).(x - r_2)$$

donde a, r_1 y r_2 son números reales, y $a \neq 0$. En esta expresión puede observarse que $f(r_1) = 0$ y también $f(r_2) = 0$ de donde resulta que r_1 y r_2 son las *raíces* de la función. Al coeficiente a se le pide la condición de ser no nulo pues si fuese $a = 0$, f sería la función que constantemente toma el valor 0 (y no sería entonces una función cuadrática).

En el caso de la función que modeliza al problema del granjero, definida por la expresión $f(x) = x.(20 - x)$, se observa que está escrita en forma "casi" factorizada. Para llevarla a esa forma, debemos escribirla como

$$f(x) = (-1).x.(x - 20) = (-1).(x - 0).(x - 20)$$

y aquí se ve que las raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = 20$ tal como sabíamos, y además, que $a = -1$.

Como es natural pensar, dado que la expresión factorizada de una función cuadrática explicita las raíces de dicha función, si ésta no posee raíces **no podrá ser escrita en forma factorizada**.

En resumen, la *expresión factorizada* de una función cuadrática da lugar a las siguiente "forma de presentación" en términos de sus raíces reales r_1 y r_2:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a.(x - r_1).(x - r_2)$ donde $a \neq 0$.

Si acaso $r_1 = r_2$, la expresión factorizada se reduce:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a.(x - r_1)^2$ si $r_1 = r_2$.

Algunos ejemplos de funciones cuadráticas escritas en forma factorizada pueden ser:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ g(x) = 2.(x - 3).(x + 1)$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ h(x) = -3.(x - 5)^2$$

A continuación presentamos una breve explicación acerca de cómo obtener información sobre las características o elementos del gráfico de un función cuadrática cuando ésta viene presentada en la forma factorizada:

Para determinar el tipo de concavidad de la parábola y también la posición de sus ramas respecto del eje de simetría, se realiza el mismo análisis que hemos hecho para la forma canónica, pues dichas características dependen del coeficiente principal a.

¿Cómo determinar las coordendas del vértice? Las coordenadas del vértice son $x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}$ e $y_v = f(x_v)$

¿Cómo determinar el eje de simetría? El eje de simetría equidista de cualquier par de valores simétricos de la parábola y, en particular, de las dos raíces $x = r_1$ y $x = r_2$. De esta forma, el eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x = \frac{r_1+r_2}{2}$.

¿Cómo determinar las intersecciones del gráfico con los ejes coordenados? La intersección con el eje de las abscisas se da en los puntos $(r_1, 0)$ y $(r_2, 0)$, donde r_1 y r_2 son las raíces o ceros de la función.

La ordenada al origen o intersección con eje y se obtiene de reemplazar $x = 0$ en la fórmula. Por lo tanto, el gráfico interseca al eje de ordenadas en el valor $y = f(0)$, que en este caso particular sería: $y = a(0 - r_1)(0 - r_2) = ar_1r_2$.

Ejercicio resuelto 3. Dada la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2.(x - 3).(x + 1)$, determinar intersecciones con los ejes coordenados, vértice y determinar máximo o mínimo según corresponda. Indicar intervalos en donde la función es creciente y decreciente, y conjunto imagen. Determinar el punto del gráfico que es simétrico al punto de abscisa $x = -\frac{8}{3}$.

Resolución: La función cuadrática $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2.(x - 3).(x + 1)$ está escrita en forma factorizada, y sus raíces son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$. De este modo tenemos determinadas las intersecciones con el eje de las abscisas: se da en los puntos $(3, 0)$ y $(-1, 0)$.

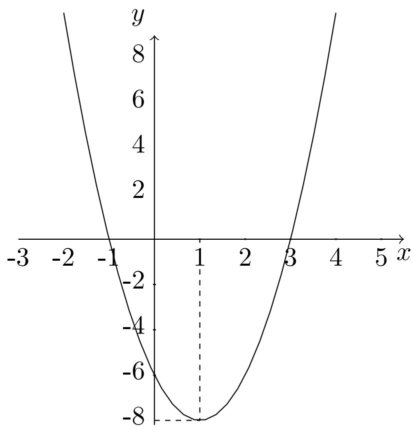
La intersección con el eje de ordenadas, se da en el punto $(0, y)$, donde $y = g(0)$. En este caso, $y = g(0) = 2.(-3).1 = -6$.

El vértice de esta función tiene coordenadas: $x_v = \frac{r_1+r_2}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1$ e $y_v = g(x_v) = g(1) = 2(1 - 3)(1 + 1) = -8$, es decir, $V = (1; -8)$.

Como el coeficiente principal de la función es $a = 2 > 0$, la parábola tiene las ramas hacia arriba y, por lo tanto, la función alcanza un mínimo en el vértice. Es decir, en $x = 1$ la función alcanza su valor mínimo, y éste es $g(1) = -8$. A partir de esta información, deducimos que el conjunto imagen de la función será $\mathrm{Im}(g) = [-8, +\infty)$. Como en el vértice alcanza un mínimo, la función es creciente en el intervalo $[1, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1]$

El punto del gráfico que tiene abscisa $x = -\frac{8}{3}$ es $P = (-\frac{8}{3}, \frac{170}{9})$. Para determinar el punto simétrico a este, debemos observar a qué distancia se encuentra $-\frac{8}{3}$ de $x_v = 1$. Para ello, observemos que $-\frac{8}{3} < 1$, con lo que la distancia se calcula mediante la diferencia $1 - (-\frac{8}{3}) = \frac{11}{3}$. De este modo, sabemos que el punto simétrico a P tendrá abscisa mayor que 1, y ésta será $x = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3}$. Luego, el punto simétrico a P es $Q = (\frac{14}{3}, \frac{170}{9})$.

Observación: Como $g(-\frac{8}{3}) = \frac{170}{9}$, para calcular el punto simétrico a P podríamos tener en cuenta que la ordenada de dicho punto será $\frac{170}{9}$, y que la abscisa se obtendría al resolver la ecuación $g(x) = \frac{170}{9}$, una de cuyas soluciones será $-\frac{8}{3}$ y la otra será la abscisa buscada. Proponemos como ejercicio realizar estos cálculos y verificar lo dicho.



2.4 Forma polinómica de una función cuadrática

Una función cuadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ está en su forma polinómica cuando su expresión responde al formato

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$. Notar que si $a = 0$, la función no sería cuadrática sino una función lineal.

A continuación presentamos una breve explicación acerca de cómo obtener información sobre las características o elementos del gráfico de un función cuadrática cuando viene presentada en la forma polinómica:

El tipo de concavidad y la posición de las ramas de la parábola respecto del eje de simetría, dependen del "coeficiente principal" a como en los otros formatos.

¿Cómo determinar las coordenadas del vértice? La abscisa del vértice x_v, se obtiene como promedio de cualquier par de abscisas de puntos simétricos, o sea, si x_1 y x_2 son tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$x_v = \tfrac{x_1+x_2}{2}.$$

Esto lo vimos cuando estudiamos la forma factorizada donde x_1 y x_2 son las raíces de la función. En caso de que la cuadrática no posea raíces ¿cómo encontramos dos puntos simétricos de la función? Es decir ¿cómo encontramos x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$? Como se trata de buscar cualquier par de puntos simétricos, vamos a buscar todos los valores de x que tengan ordenada $y = c$, o sea, las soluciones de la ecuación $f(x) = c$. En este caso, resulta

$$ax^2 + bx + c = c$$

es decir

$$ax^2 + bx = 0 \Longleftrightarrow x.(a.x + b) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad (a.x + b) = 0\ .$$

De esta manera concluimos que las soluciones son

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{b}{a}\ .$$

Resulta entonces que $x_v = \dfrac{0 - \frac{b}{a}}{2} = -\dfrac{b}{2a}$.

Una vez conocido el valor x_v, la coordenada y_v se obtiene evaluando la función en el valor x_v, o sea, $y_v = f(x_v)$.

¿**Cómo determinar el eje de simetría**? El eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x = x_v$, que en este caso resulta $x = -\frac{b}{2a}$

¿**Cómo determinar las intersecciones del gráfico con los ejes coordenados**?

Los puntos de intersección con el eje x resultan de plantear $ax^2 + bx + c = 0$. Como ya sabemos (de la sección de Álgebra) las soluciones de esta ecuación se obtienen aplicando la fórmula resolvente:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{o} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se observa que si $b^2 - 4ac > 0$ la parábola tiene dos raíces reales distintas, si $b^2 - 4ac = 0$ tiene sólo una raíz real (raíz doble) que es $x = -\frac{b}{2a}$, que coincide con la abscisa del vértice, y por último, si $b^2 - 4ac < 0$ la parábola no tiene raíces reales, es decir, la gráfica no corta al eje de las abscisas.

La intersección con el eje y resulta de reemplazar $x = 0$ en la fórmula, de donde se obtiene que la ordenada al origen es el valor

$$y = f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$$

2.5 Problema resuelto: El problema de las temperaturas

Ejercicio resuelto 4. Durante un día de junio se midió la temperatura ambiente en una localidad de Chubut. A partir de los datos registrados se propuso la siguiente función que describe la variación de la temperatura ambiente durante ese día,

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 7$$

donde A es el dominio de la función

(a) ¿Cuál fue la temperatura máxima alcanzada ese día? ¿y la mínima? Indicar en qué momentos se alcanzaron dichos valores.

(b) En una casa de dicha localidad las estufas se autorregulan en función de la temperatura externa de la siguiente manera: se encienden al máximo cuando la temperatura externa es inferior a los 3 grados bajo cero. ¿Estuvieron al máximo las estufas de la casa en ese día? En caso afirmativo, indicar en qué instantes del día las estufas estuvieron encendidas al máximo.

Resolución: Antes de comenzar a hacer cálculos, observemos algunas cuestiones que surgen del análisis de la función que describe la variación de la temperatura ambiente a lo largo de ese día de junio:

1. es una función cuadrática cuyo dominio es el intervalo $A = [0, 24]$, puesto que el mismo representa la duración de un día

2. su gráfico es una parábola cuyas ramas van "hacia abajo", dado que el coeficiente principal es negativo $(a = -\frac{1}{9})$. Además, el vértice es un punto máximo de la función.

Es importante notar que resultaría muy útil contar con el gráfico de la función pues éste nos permitiría conocer de manera global la evolución de la temperatura a lo largo de ese día.

Para realizar el gráfico necesitamos conocer, por lo menos, un par de puntos simétricos y las coordenadas del vértice de la parábola. Un par de puntos simétricos se puede encontrar, por ejemplo, a partir de la ordenada al origen, la cual calculamos evaluando la función en $x = 0$

$$f(0) = -\frac{1}{9}.0^2 + \frac{8}{3}.0 - 7 = -7$$

De esta manera tenemos un punto de la parábola, el $(0, -7)$, que representa la intersección con el eje de ordenadas. Para determinar (si es que existe) el simétrico de dicho punto necesitamos saber para qué otro valor de x también se verifica que $f(x) = -7$. Esto lo averiguamos resolviendo la ecuación

$$-\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 7 = -7$$

Observar que ya conocemos una de sus soluciones, $x = 0$; veamos si existe otra:

$$-\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 7 = -7 \iff -\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x = 0 \iff x.(-\frac{1}{9}x + \frac{8}{3}) = 0$$

esta última condición se cumple si y solo si

$$x = 0 \text{ ó } -\frac{1}{9}x + \frac{8}{3} = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 24$$

Hemos encontrado dos soluciones distintas, $x_1 = 0$ y $x_2 = 24$, lo que nos indica que los puntos $(0, -7)$ y $(24, -7)$ son simétricos.

Sabemos, por lo trabajado anteriormente, que la abscisa del vértice se calcula realizando el promedio de dos valores simétricos, en este caso 0 y 24: $x_v = \frac{0+24}{2} = 12$.

Notemos que el procedimiento realizado para hallar la abscisa del vértice se puede repetir con cualquier función cuadrática, puesto que siempre es posible calcular su ordenada al origen y determinar su simétrico. Observar que si el simétrico coincide con el mismo punto, significaría que ese punto no es otro que el vértice.

De manera que el procedimiento desarrollado anteriormente se puede generalizar, tal como vimos en el apartado anterior, y es a partir de este procedimiento que se deduce la "famosa" fómula para la abscisa de vértice

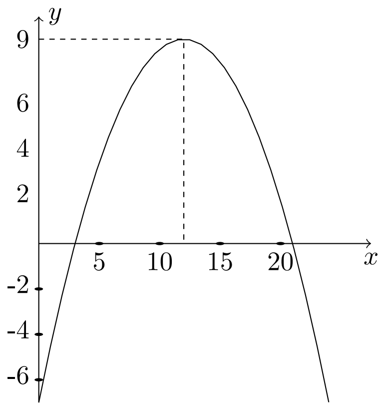
$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Una vez conocida la abscisa del vértice, la ordenada se calcula reemplazando dicho valor en la función

$$y_v = f(x_v)$$

en este caso, $y_v = f(12) = -\frac{1}{9}(12)^2 + \frac{8}{3}.12 - 7 = 9$.

De esta manera ya estamos en condiciones de realizar un gráfico aproximado de la función:



Observemos que a partir de la lectura del gráfico podemos realizar una descripción global de la variación de la temperatura ambiente durante el día en cuestión: la temperatura a la hora 0 fue de 7 grados bajo cero, luego comenzó a subir hasta llegar a 9 ^{o}C a las 12 del medio día, esta temperatura representó la máxima registrada ese día. A partir de ese momento la temperatura descendió hasta llegar nuevamente a los 7 grados bajo cero, temperatura que alcanzó a la medianoche.

Con esta información podemos responder al ítem a:

Respuesta: La temperatura máxima se alcanzó a las 12 horas y la misma fue de 9 ^{o}C. La temperatura mínima fue de 7 grados bajo cero y se alcanzó en dos momentos distintos: a las 0 y a las 24 horas.

Para responder al ítem b necesitamos, en primer lugar, saber cuándo la temperatura fue de -3 grados. Es decir, debemos calcular para qué valor o valores de x tales que $f(x) = -3$. Analizando el gráfico podemos anticipar que hubo dos momentos en los que la temperatura alzanzó dicho valor, uno en la primera parte del día, entre $x = 0$ y $x = 5$, y otro en la segunda parte, entre $x = 20$ y $x = 24$. Resolvamos la ecuación y encontremos los instantes exactos en los que se registró dicha temperatura:

$$-\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 7 = -3 \iff -\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 4 = 0$$

aplicando la fórmula resolvente encontramos que las soluciones son $x_1 = 12 + 6\sqrt{3} \cong 22,4$ y $x_2 = 12 - 6\sqrt{3} \cong 1,6$.

Para determinar si las estufas estuvieron encendidas al máximo necesitamos saber si la temperatura fue inferior a -3 en algún momento del día. Para ello debemos determinar si existen valores de x para los cuales $f(x) < -3$, es decir, si hay valores de x cuyas imágenes son valores inferiores a $y = -3$. Si recurrimos al gráfico y trazamos una recta horizontal en $y = -3$ encontramos que hay dos puntos de intersección entre la parábola y la recta: $(x_1, -3)$ y $(x_2, -3)$. Vemos, además, que por debajo de esa recta horizontal hay dos tramos de la parábola; uno de los tramos corresponde al intervalo $[0, x_1)$ y el otro al intervalo $(x_2, 24]$. Esto quiere decir que los valores de x que pertenecen a ambos intervalos verifican que sus imágenes, $f(x)$, son valores inferiores a $y = -3$.

Respuesta: la temperatura ambiente fue inferior a -3 ^{o}C y, por lo tanto, las estufas estuvieron encendidas al máximo, en dos intervalos de tiempo: en $[0, x_1)$ y en $(x_2, 24]$ con $x_1 = 12 + 6\sqrt{3}$ y $x_2 = 12 - 6\sqrt{3}$.

2.6 Problema resuelto: El problema de las ganancias

Ejercicio resuelto 5. Las ganancias G (en pesos) de un proveedor mayorista dependen del precio de venta p (también en pesos) del producto que comercializa y pueden ser modelizadas mediante una función cuadrática, que también llamaremos G, que verifica las siguientes condiciones:

(i) $G(3) = G(21) = 608$

(ii) La ganancia es de \$3200 cuando el precio es de \$12

(iii) El precio de venta no puede superar los \$25.

Sabiendo estas condiciones, se pide:

(a) Definir la función G (dominio, codominio y fórmula)

(b) Determinar qué precio debe fijar la empresa para que la ganancia sea de \$1362 considerando que el mismo debe ser inferior a los \$12.

Resolución:

Resolución del inciso (a): Para responder a esta consigna, debemos determinar el dominio y codominio de la función G que modeliza las ganancias del proveedor en términos del precio de venta p. En relación con el dominio, observemos que la variable independiente es el precio p, de manera que los valores de la misma deben ser mayores o iguales que cero, es decir $p \geq 0$. Por otro lado, la restricción planteada en iii) acerca del precio, establece que éste no puede superar los 25 pesos, lo cual nos permite afirmar que $p \leq 25$. De esta manera, tenemos que $\mathrm{Dom}(G) = [0, 25]$. Para el codominio podemos considerar el conjunto de todos los números reales: $\mathrm{Codom}(G) = \mathbb{R}$.

Para determinar la fórmula o expresión que define a la función, debemos decidir en cuál de los 3 formatos que conocemos de las funciones cuadráticas nos conviene presentar. Analicemos los datos que se dan e intentemos determinar qué elementos representan. En primer lugar, podemos ver que el dato $G(3) = G(21) = 608$ nos aporta la información de *dos puntos simétricos* del gráfico de G, que son el $(3, 608)$ y el $(21, 608)$. Sabemos que a partir de un par de puntos simétricos es posible obtener la abscisa del vértice como el promedio de las dos abscisas de los puntos dados. Calculémosla en nuestro caso: $p_v = \frac{p_1+p_2}{2} = \frac{3+21}{2} = 12$

Por otro lado, también tenemos como dato que el punto $(12, 3200)$ pertenece a la gráfica de la función y que, a partir del cálculo anterior, no es otro que el vértice de la parábola definida por la función G (pues hemos obtenido que $p_v = 12$). De este modo, tenemos que los datos que disponemos son el vértice $V = (12, 3200)$ y un par de puntos simétricos de la función.

Repasando los tres formatos de la función cuadrática que hemos analizado (polinómica, factorizada y canónica), podemos ver que lo que conviene es construir la expresión de G en forma canónica puesto que contamos con la información del vértice. El procedimiento que se sigue sería el siguiente:

El formato general de la forma canónica de una función cuadrática es

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \text{ donde } h = x_v \text{ y } k = y_v.$$

Para definir la función G en dicho formato necesitamos conocer los valores de a, h y k. Conocemos los valores de $h = 12$ y $k = 3200$, pero nos falta determinar cuál es el valor que le corresponde al coeficiente principal a.

Reemplazamos los valores que ya conocemos en el formato general, nombramos a las variables según el problema, a la variable independiente la denotamos p y a la dependiente G. De esta forma la fórmula de la función será: $G(p) = a(p-12)^2 + 3200$.

El valor de a lo calcularemos a partir de los datos dados; para ello deberíamos poder plantear una ecuación cuya incógnita sea a. Un dato que nos puede ser útil es que la función G debe verificar, por ejemplo, que $G(3) = 608$. Es decir que cuando reemplacemos $p = 3$ en la fórmula, ésta nos debe devolver 608 como resultado. Considerando este dato queda planteado:

$$G(3) = a(3-12)^2 + 3200 = 608,$$

es decir

$$a(-9)^2 + 3200 = 608$$

Observemos que hemos obtenido una ecuación cuya <u>única</u> incógnita es a, de manera que al resolverla encontraremos el valor que se ajusta a los datos dados. La resolución es:

$$a(-9)^2 + 3200 = 608$$

$$81.a + 3200 = 608$$

$$81.a = 608 - 3200$$

$$81.a = -2592$$

$$a = \frac{-2592}{81}$$

$$a = -32$$

La respuesta entonces sería:

La función G *puede definirse de la siguiente manera:*

$$G : [0, 25] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad G(p) = -32.(p-12)^2 + 3200$$

Resolución del inciso (b): Para determinar qué precio debe fijar la empresa para obtener una ganancia de \$1632 podemos utilizar la expresión de la función G: debemos determinar para qué valores de p se verifica que $G(p) = 1632$. De esta manera planteamos y resolvemos la ecuación

$$-32.(p-12)^2 + 3200 = 1632$$

que para resolverla comenzamos "despejando", por ejemplo, de la siguiente manera:

$$-32.(p-12)^2 = 1632 - 3200$$

$$-32.(p-12)^2 = -1568$$

de donde

$$(p-12)^2 = \frac{-1568}{-32}$$

es decir

$$(p-12)^2 = 49$$

con lo cual

$$p - 12 = \sqrt{49} \quad \text{ó} \quad p - 12 = -\sqrt{49}$$

$$p - 12 = 7 \quad \text{ó} \quad p - 12 = -7$$

es decir

$$p = 19 \quad \text{ó} \quad p = 5$$

Así, a partir de los cálculos realizados hallamos que, para obtener una ganancia de \$1632 el precio puede ser \$5 ó \$19. Sin embargo, para responder debemos tener en cuenta la restricción impuesta en el enunciado, que establece que el precio debe ser inferior a \$12. Con esto, obtenemos la siguiente respuesta:

Respuesta: para obtener una ganancia de \$1632 la empresa debe vender su producto a un precio de \$5 la unidad.

Trabajo práctico 28

Ejercicio 1. (Acerca de lectura)

(a) ¿En qué formato está escrita la fórmula de la función cuadrática

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \quad (a \neq 0)?$$

Explique al menos dos formas distintas de resolver la ecuación $a(x-h)^2 + k = 0$.

(b) Explicar cómo puede predecirse el conjunto imagen de una función cuadrática a partir del análisis de los parámetros de su expresión en la forma canónica.

Ejercicio 2. Para cada función determinar vértice, tipo de concavidad, intersecciones con los ejes coordenados y el conjunto imagen. Con la información obtenida realizar un gráfico aproximado. En cada caso, determinar un par de puntos simétricos de abscisas diferentes a las raíces.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x + \frac{5}{4})^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5}{3}(x-1)^2 - 5$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3(x+2)^2 - 1$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3(x - \frac{3}{4}).x$

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{3}(x+2)(x-3)$

Ejercicio 3. Los ingresos mensuales I de cierta compañía, están dados por la expresión $I(p) = 800p - 4p^2$, en donde p es el precio en pesos del producto que fabrica.

(a) Definir una función que modelice la situación de la compañía en relación a los ingresos por ventas cuya expresión sea la dada por $I(p)$.

(b) ¿A qué precio se obtendrían ingresos de \$30.000, si el mismo debe ser inferior a \$100 pesos?

(c) ¿En qué precio se da el mayor ingreso? ¿cuál es dicho ingreso?

Ejercicio 4. Una empresa comercializa un producto de limpieza cuyo precio varía en función de la cantidad de unidades vendidas del producto. Teniendo en cuenta que para una cantidad q de unidades vendidas el precio unitario del producto es $(80-q)/5$, analizar la evolución del ingreso de la empresa según la cantidad de unidades vendidas.

Ejercicio 5. Las ganancias g de una empresa (en pesos) a través del tiempo t (medido en meses) se pueden calcular mediante una función cuadrática que cumple $g(15) = g(55) = 2250$. Si además se sabe que a los 35 meses tuvo una ganancia de \$ 6250, se pide definir dicha función g (dominio, codominio y fórmula) y determinar el o los momentos en los que la empresa tuvo una ganancia de \$ 6000.

Ejercicio 6. Un proyectil se lanza desde una plataforma ubicada a 144 m del piso. Al principio, el proyectil comenzó a subir rápidamente, y después de un tiempo, comenzó a descender. Si se sabe que la altura del proyectil en función del tiempo responde a una función cuadrática, que la altura máxima alcanzada fue 722 m y que se alcanzó a los 17 segundos del lanzamiento:

a) Determinar en qué instantes el proyectil se encuentra a 624 m del piso.

b) ¿Durante cuánto tiempo estuvo el proyectil en el aire?

Ejercicio 7. Las ganacias (en pesos) de una empresa a través del tiempo t (medido en meses) están dadas por la función $g : A \to \mathbb{R}$, $g(t) = -10t^2 + 500t - 490$.

(a) Determinar el conjunto A y realizar un gráfico aproximado de la función.

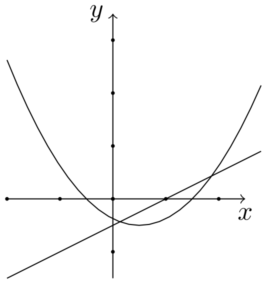
(b) Determinar el conjunto B que representa los meses en que la empresa no tuvo pérdidas. Representar dicho conjunto en el gráfico del ítem anterior.

(c) Determinar en qué momento se produjo la mayor ganacia y calcularla.

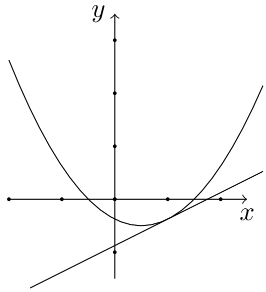
Ejercicio 8. Un productor de sidra que tiene una plantación de 40 manzanos desea aumentar su producción incrementando el número de manzanas cosechadas. Contrata a un ingeniero agrónomo para que lo asesore. El profesional realiza un estudio en el que concluye que con la cantidad de manzanos que posee actualmente, la producción de cada uno es de 500 manzanas al año, pero si agrega árboles a la plantación la producción de cada uno disminuirá. Sabiendo que por cada árbol que agregue la producción de los manzanos disminuye en 5 unidades, determinar qué cantidad de árboles le conviene tener en su plantación para obtener la mayor cantidad de manzanas cosechadas.

3 Intersecciones entre parábolas y rectas.

Hablar de las intersecciones entre parábolas y rectas, es hablar de las intersecciones entre los gráficos de una función cuadrática y una lineal, pero ¿qué representan o indican? y sobre todo ¿cómo se calculan? La primera pregunta tiene una respuesta sencilla, pues las intersecciones entre curvas (gráficos) en el plano, en general, indican los puntos en los cuales las curvas "se cruzan", incluyendo en esta expresión el caso en que las curvas "solo se toquen" y no se crucen. En definitiva, estamos hablando de situaciones como las que se presentan en las siguientes ilustraciones, en las que se involucran parábolas y rectas.

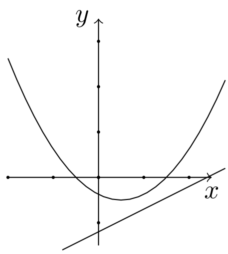


Curvas que "se cruzan"



Curvas que "se tocan" y no se "cruzan"

Las anteriores son dos de las tres posibilidades que se presentan al pensar en las intersecciones entre rectas y parábolas. La tercera posibilidad es aquella en la que ambas curvas no tienen intersección, es decir "ni se tocan ni se cruzan". Un ejemplo es el que se observa en la siguiente ilustración



Curvas que no se "tocan" no se "cruzan"

La pregunta ¿cómo se calculan los puntos de intersección? merece un tratamiento más extenso.

Para determinar los puntos de intersección de los gráficos o las curvas definidas por las funciones f y g, cuadrática y lineal respectivamente, debemos plantear, como ya lo hemos visto en los anteriores capítulos, la ecuación $f(x) = g(x)$. De la resolución de esta ecuación obtenemos la o las abscisas de los puntos de intersección en caso de que éstas existan, y luego, reemplazando éstas en las expresiones de f o de g obtenemos las respectivas ordenadas de los puntos buscados. Esto lo veremos con todo detalle en el siguiente apartado.

3.1 Determinación de los puntos de intersección.

Para mostrar, concretamente, cómo calcular las coordenadas de los puntos de intersección, supongamos que f sea la función cuadrática definida, por ejemplo, como

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$$

y la función lineal g como:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = mx + k$$

donde a, b, c, m y k son números reales fijos, con $a \neq 0$.

Los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones son puntos de la forma $P = (x_0, y_0)$, donde la abscisa x_0 del punto verifica que $f(x_0) = g(x_0)$, y la ordenada y_0 del punto se obtiene, entonces, como $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$.

Lo que se necesita, entonces, es determinar la abscisa x_0. Para ello, lo que debemos resolver es la ecuación

$$f(x) = g(x)$$

y sus soluciones serán las abscisas de todos los puntos de intersección que tengan la parábola y la recta determinadas por las funciones f y g.

En este caso, es interesante observar que esa ecuación, escrita en términos de las expresiones que definen a las funciones, adquiere la forma:

$$ax^2 + bx + c = mx + k$$

que resulta ser una ecuación de segundo grado. De allí, que sean tres las posibilidades que se presentan al pensar en las intersecciones de una parábola con una recta, tal como hemos señalado al comienzo de esta sección. Estas tres posibilidades obedecen a las tres diferentes situaciones que se presentan al resolver una ecuación cuadrática o de segundo grado:

- Que tenga dos soluciones reales y distintas, lo que hace referencia a la situación que ilustramos como *curvas que se cruzan*
- Que tenga una única solución real (que será una solución o raíz doble de la ecuación), que se refiere a las *curvas que se tocan y no se cruzan* y
- Que no tenga ninguna raíz real, lo cual hace referencia a las *curvas que no se cruzan* ni se tocan.

Como ya mencionamos anteriormente, una vez halladas las soluciones de esta ecuación (en el caso que las tenga), las segundas coordenadas de los puntos de intersección surgen de evaluar en alguna de las dos funciones cada una de dichas soluciones.

Todo lo mencionado en este apartado, posiblemente sea más comprensible a partir de ver el análisis de una situación concreta, como el que haremos en lo que sigue.

3.2 Problemas con intersecciones: un ejemplo resuelto

En este apartado resolveremos el siguiente ejemplo:

Ejercicio resuelto 6.

Determinar los puntos de intersección de las funciones f y g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dadas por las siguientes expresiones:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \text{ y } g(x) = -2x + 3.$$

Hacer un gráfico aproximado donde se observen las intersecciones halladas.

Resolución: Como mencionamos en el apartado anterior, para hallar las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas definidas por ambas funciones debemos, en primer lugar, hallar las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$, que en nuestro caso se traduce en resolver la ecuación

$$-x^2 + 2x + 3 = -2x + 3$$

o, equivalentemente,

$$-x^2 + 2x + 3 + 2x - 3 = 0$$

es decir,

$$-x^2 + 4x = 0.$$

Pero

$$-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 4$$

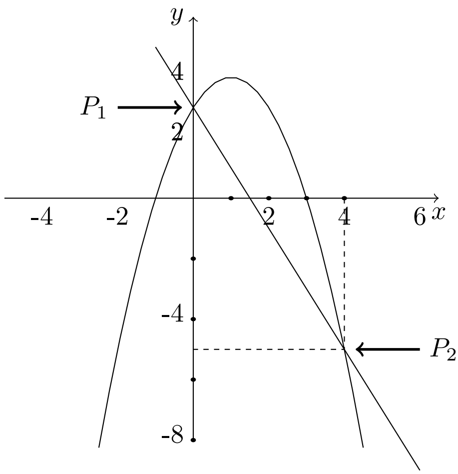
Luego, esta ecuación tiene dos soluciones reales distintas, que son: $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$. Así, habrá dos puntos de intersección entre las funciones, y serán los puntos $P_1 = (0, y_1)$ y $P_2 = (4, y_2)$, donde $y_1 = f(0) = g(0)$ e $y_2 = f(4) = g(4)$.

Como para los valores hallados, $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$ es indistinto el resultado que, en cada uno, arrojen las funciones f y g por ser los valores en los que ambas funciones coinciden, podemos elegir en qué función evaluar cada uno. Para ello, podemos tener en cuenta el tipo de dificultades que ofrecen ambas funciones, y elegir aquella en la cual haya "menos cálculos" por hacer. En este caso, parece que lo más "económico" en cuentas es evaluar en la función lineal g. De este modo, tenemos que:

$y_1 = g(0) = -2.0 + 3 = 3$, y también,

$y_2 = g(4) = -2.4 + 3 = -5$.

A partir de estos resultados, se tiene que los puntos de intersección de ambas funciones son: $P_1 = (0, 3)$ y $P_2 = (4, -5)$. El gráfico aproximado es:



4 Inecuaciones con expresiones cuadráticas.

Como ya sabemos, las inecuaciones en una variable, son desigualdades entre expresiones que vinculan a la variable a partir de alguno de los símbolos $<, >, \leq$ ó $\geq$, y resolvemos una inecuación cuando hallamos el conjunto de todos los valores de la variable que satisfacen esa desigualdad. Por lo general, sólo se las presentan como una desigualdad, e implícitamente se supone que lo que hay que hacer con ellas es "resolverlas", es decir hay que resolver la inecuación.

Algunos ejemplos de inecuaciones que involucran expresiones cuadráticas pueden ser:

(a) $x^2 - 2x < 3x - 5$ (b) $-2x^2 + 6x + 8 > 0$ (c) $3x - 6 < x^2 - 16$

El tratamiento que daremos en este curso a la resolución de inecuaciones de este tipo es a partir del análisis de las situaciones gráficas a las que se las puede asociar. En este sentido, no recurriremos a métodos "puramente algebraicos", sino que utilizaremos únicamente las herramientas del álgebra que sean necesarias para resolver ecuaciones, y luego nos apoyaremos en la información que ésto aporte al gráfico con el que realicemos el análisis.

En el siguiente apartado daremos las pautas para la resolución de este tipo de inecuaciones, con el método que mencionamos.

4.1 Resolución gráfica de inecuaciones cuadráticas

Del mismo modo que se ha abordado el tratamiento de las inecuaciones en el capítulo correspondiente a funciones lineles, mostraremos el procedimiento que permite resolver una inecuación cuadrática mediante la resolución de un ejemplo.

La inecuación que resolveremos es la que corresponde al tercero de los ejemplos que hemos dado. Concretamente, la actividad es:

Ejercicio resuelto 7.

Determinar el conjunto de todos los números reales que verifican la desigualdad $3x - 6 < x^2 - 16$

Resolución:

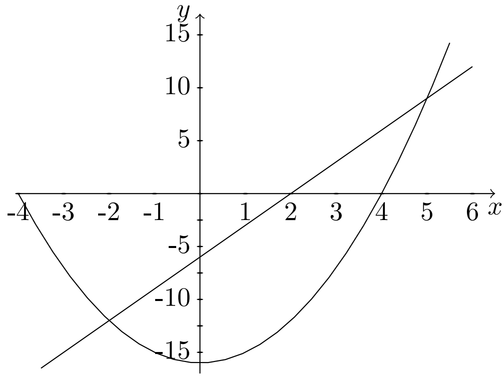
Daremos dos métodos de resolución para esta inecuación, que pueden ser utilizados en todas las que se sugieran hacer en este curso, aunque de acuerdo a las características de la actividad, tal vez uno sea más eficiente que otro.

En el primero de los métodos que proponemos pondremos en juego a dos funciones f y g, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que son las que están dadas por las expresiones

$$f(x) = 3x - 6 \text{ y } g(x) = x^2 - 16.$$

De este modo, todos los números que verifiquen la inecuación propuesta son todos los números reales que verifican que $f(x) < g(x)$, y éstos los hallaremos a través del gráfico de ambas funciones.

Para ello, realicemos ambos gráficos, a partir de las distintas herramientas que, para tal efecto, hemos aprendido hasta este momento. Los gráficos, en forma aproximada son los siguientes (los haremos en un mismo sistema de ejes cartesianos)



Lo que debemos observar ahora, es que lo que necesitamos hallar es el conjunto de todos los números reales x para los cuales el resultado que le asigna la función f es menor que el que le asigna la g pues lo que se quiere es que $f(x) < g(x)$. En este sentido, los x que debemos determinar son todos aquellos para los cuales el gráfico de la función f "está debajo" del de la función g. Para ello, es importante observar que la posición relativa que tiene el gráfico de una función respecto de la otra cambia o "se modifica" a partir de los puntos de intersección entre ambos. De este modo, resulta imprescindible conocer todos los puntos de intersección entre ambas funciones para poder determinar el conjunto solución de la inecuación.

Hallemos entonces todas las soluciones de **la ecuación** $f(x) = g(x)$ a partir de lo que determinaremos los puntos de intersección.

Para ello, planteamos lo siguiente:

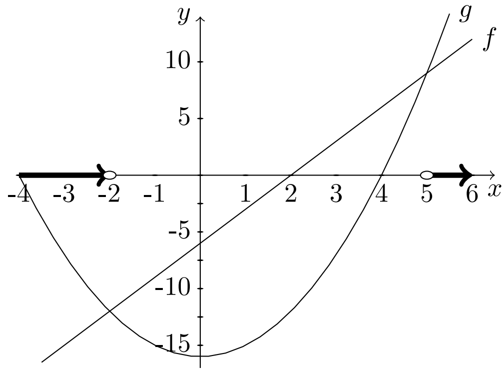
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x - 6 = x^2 - 16$$

y esto es equivalente a resolver la ecuación

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Haciendo los cálculos necesarios, se llega a que las soluciones son: $x = -2$ y $x = 5$.

A partir de estos resultados, y observando los gráficos de ambas funciones, observamos que la función f está "por debajo" de la función g para todos los números reales que sean menores que -2 o mayores que 5 . De esta forma, el conjunto solución de la inecuación $3x - 6 < x^2 - 16$ es el conjunto $S = (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$ que corresponde a la zona que está marcada sobre el eje x con línea gruesa en el siguiente gráfico.



Otro método para resolver esta misma inecuación, y también desde el análisis de un gráfico, es pensar la expresión que define a la inecuación de la siguiente manera:

$$3x - 6 < x^2 - 16$$

es equivalente a la siguiente:

$$x^2 - 16 - (3x - 6) > 0$$

es decir:

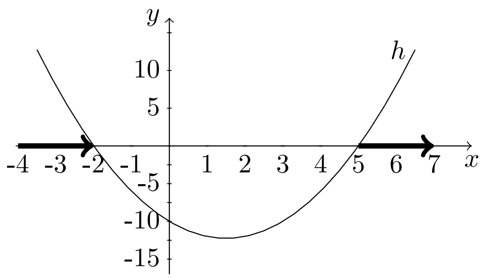
$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

y es ésta la inecuación que nos proponemos resolver en este caso. Para ello, resulta interesante observar que, como hay sólo una expresión en juego en esta escritura, el problema se reduce a considerar solo una función, y más precisamente, su conjunto de positividad..

La función que consideraremos está definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y está dada por la expresión $h(x) = x^2 - 3x - 10$.

Como hemos señalado, debemos calcular el conjunto de todos los números reales que verifican la desigualdad $h(x) > 0$ los cuales constituyen el conjunto de positividad de la función h. De este modo, el conjunto solución que buscamos es el conjunto de todos los x para los cuales el gráfico de la función está "por encima" del eje x.

Para determinar este conjunto, tengamos en cuenta que la función h es una función cuadrática, que sus raíces son $x = -2$ y $x = 5$ y su coeficiente principal es positivo ($a = 1$), por lo que las ramas de la parábola "van hacia arriba". Estos datos nos permiten anticipar (y sin tener frente a nuestra vista el gráfico) que la porción del gráfico que está "por debajo" del eje x es la correspondiente a los valores del dominio de h comprendidos entre ambas raíces, por lo cual, la función será positiva "desde su comienzo" hasta la menor raíz, y también en su "último tramo", a partir de la mayor de las raíces. A partir de lo dicho, lo que resulta es que el conjunto de positividad de la función h, y por lo tanto el conjunto solución de la inecuación $3x - 6 < x^2 - 16$, es el conjunto $S = (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$, como se ve en el siguiente gráfico.



Trabajo práctico 29

Ejercicio 1. (Acerca de lectura) Explicar un procedimiento para determinar los posibles puntos de intersección entre los gráficos de una función lineal y una cuadrática. Representar gráficamente las posibles situaciones que se presenten.

Ejercicio 2. Un camión sale de Mar del Plata (km 400) con destino a Buenos Aires con velocidad constante de 56 km por hora. Al mismo tiempo sale desde otra ciudad, con destino a Mar del Plata y por la misma ruta, un automóvil cuya distancia a Buenos Aires a las t horas de haber iniciado la marcha está dada por la expresión: $A(t) = 8.t^2 + 20.t + 100$.

(a) Definir la función que mide la distancia del camión a Buenos Aires a las t horas de haber comenzado su viaje.

(b) ¿A qué distancia de Buenos Aires se encontraba el auto cuando inició su viaje a Mar del Plata?

(c) El camión y el auto, ¿se encontraron en la ruta? De ser así: ¿en qué kilómetro? ¿cuánto tiempo habían viajado antes de encontrarse?

(d) ¿En qué tramos de la ruta estuvo el auto más cerca de Mar del Plata que el camión?

(e) ¿Cuánto tardó el auto en llegar a Mar del Plata?

Ejercicio 3. Hallar, si existen, las coordenadas de los puntos de intersección de las graficas de las funciones f y g definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ como $f(x) = (x-2)^2 + 2$ y $g(x) = x + 2$. Representar gráficamente.

Ejercicio 4. Dadas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que llamamos f y g definidas como$f(x) = 2(x-1)^2 - 2$ y $g(x) = x + 3$, hallar:

(a) las coordenadas del vértice y las raíces de la función f.

(b) las coordenadas de los puntos de intersección de los gráficos de las funciones f y g. Hacer un gráfico aproximado que represente esta situación.

En cada uno de los siguientes ejercicios, señalar la única opción correcta, justificando tanto la opción elegida como las que se descartan.

Ejercicio 5. Dadas las funciones f y g definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ como $f(x) = -3x^2 + 6x + 14$ y $g(x) = -6x + 26$, y V el vértice del gráfico de f, se verifica que:

(a) $V = (-1, 5)$ y los gráficos de ambas funciones se intersecan sólo en el punto $Q = (2, 14)$.

(b) $V = (1, 17)$ y los gráficos de ambas funciones tienen exactamente dos puntos de intersección.

(c) $V = (1, 17)$ y los gráficos de ambas funciones se intersecan sólo en el punto $Q = (2, 14)$.

(d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 6. Si f y g son las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas como $f(x) = -(x-1)^2+1$ y $g(x) = -\frac{x}{2} + 1$ entonces...

(a) Sus gráficos se intersecan en los puntos $(2; 0)$ y $(\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$

(b) Sus gráficos se intersecan en los puntos $(2; 0)$ y $(\frac{1}{2}; 0)$

(c) Sus gráficos se intersecan únicamente en el punto $(2; 0)$

(d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta

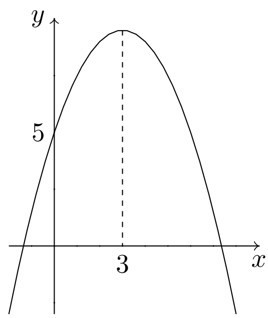
Ejercicio 7. Considerando las funciones f y g definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ por las expresiones $f(x) = x - 4$ y $g(x) = (x - 3)^2 - 3$, si se define A como el conjunto de valores reales para los cuales se cumple que $f(x) < g(x)$, entonces resulta:

(a) $A = \phi$ (b) $A = \mathbb{R}$ (c) $A = (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$ (d) $A = (2; 5)$

Ejercicio 8. Si f es la función cuadrática cuyo gráfico aproximado es el de la figura, entonces, el conjunto solución de la inecuación $f(x) \geq 5$ es:

(a) $S = [0; 9]$ (b) $S = [0; 4]$ (c) $S = [5; 10]$

(d) $S = [0; 6]$ (e) $S = [1; 7]$ (f) $S = [0; 3]$



En *Matemática en contexto* se presentan situaciones concretas en las que la matemática aporta herramientas para su abordaje y contenidos básicos desarrollados en torno de la modelización con álgebra y funciones, la explicación y argumentación en matemática y sobre cómo estudiar matemática.
Este es el texto de referencia para el Taller de Matemática del Curso de Aprestamiento Universitario de la UNGS y ofrece explicaciones y desarrollos para que pueda ser utilizado también por cualquier estudiante que desee acercarse a las cuestiones abordadas en él.
Cada capítulo presenta problemas y actividades resueltos, en las que se ha puesto especial interés en atender distintos aspectos involucrados en su resolución, tales como la comprensión de las consignas, el uso del lenguaje específico, la organización de la resolución, las estrategias posibles para abordarlos y la justificación de los procedimientos. Cada apartado contiene actividades propuestas al estudiante para que complete el estudio y la comprensión de los temas abordados.

9789876301473

Universidad Nacional de General Sarmiento

2013