

## **Notas de Matemática IV**

Pinasco, Juan Pablo

Notas de matemática IV / Juan Pablo Pinasco ; Gabriel Acosta ;  
Patricia Palacios - 1a ed. 2a reimp. - Los Polvorines : Univ. Nacional de  
General Sarmiento, 2013.

300 p. ; 17x24 cm.

ISBN 978-987-630-022-3

1. Matemática. 2. Ecuaciones Diferenciales. 3. Álgebra Lineal. I.  
Acosta, Gabriel II. Palacios, Patricia III. Título  
CDD 512

© Universidad Nacional de General Sarmiento, 2008  
J. M. Gutiérrez 1159 (B1613GSX) Los Polvorines, Bs. As. Argentina  
Tel.: (54 11) 4469-7578  
e-mail: publicaciones@ungs.edu.ar  
www.ungs.edu.ar/publicaciones

ISBN: 978-987-630-022-3

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.  
Prohibida su reproducción total o parcial.  
Derechos reservados.

# Notas de Matemática IV

Gabriel Acosta, Patricia Palacios  
y Juan Pablo Pinasco

***Colección Textos Básicos***



Universidad  
Nacional de  
General  
Sarmiento

# UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO

## AUTORIDADES

Rector

**Dr. Eduardo Rinesi**

Vicerrector

**Lic. Gustavo Kohan**

Director del Instituto de Ciencias

**Dr. Roberto Schmit**

Directora del Instituto del Conurbano

**Lic. Daniela Soldano**

Director del Instituto de Industria

**Lic. Claudio Fardelli Corropele**

Director del Instituto del Desarrollo Humano

**Dr. Daniel Lvovich**

Secretario de Investigación

**Lic. Pablo Bonaldi**

Secretaria Académica

**Dra. Gabriela Diker**

Secretario General

**Prof. José Gustavo Ruggiero**

Secretaria Administrativa

**CP Daniela Guardado**

Secretario Legal y Técnica

**Dr. Jaime González**

# Índice general

<b>I Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal</b> Por Gabriel Acosta y Patricia Palacios	<b>13</b>
<b>1. Algunos Ejemplos</b>	<b>15</b>
<b>2. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden</b>	<b>21</b>
1. Interpretación geométrica . . . . .	22
2. Ecuaciones de Variables Separables . . . . .	24
3. Ecuaciones Lineales de Primer Orden . . . . .	26
4. Problema de valores iniciales . . . . .	30
5. Demostración del teorema de existencia y unicidad . . . . .	33
<b>3. Más Sobre Ecuaciones de Primer Orden</b>	<b>39</b>
1. Ecuaciones Diferenciales Exactas . . . . .	39
2. Factor integrante . . . . .	42
3. Aplicaciones geométricas . . . . .	46
4. Aproximaciones Numéricas . . . . .	49
4.1. El método de Euler . . . . .	49
4.2. El método de Runge-Kutta . . . . .	50
<b>4. Ecuaciones diferenciales lineales</b>	<b>53</b>
1. Definiciones previas . . . . .	53
2. Ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden . . . . .	55
3. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas a coeficientes constantes . . . . .	60
4. Algunas aplicaciones. . . . .	66
5. Resolución de ecuaciones lineales no homogéneas . . . . .	72
5.1. Método de coeficientes indeterminados . . . . .	72
5.2. Variación de las constantes . . . . .	76

<b>5. Nociones de Álgebra Lineal</b>	<b>81</b>
1. Espacios vectoriales . . . . .	81
2. Sistemas de generadores e independencia lineal . . . . .	83
3. Bases . . . . .	85
4. Coordenadas . . . . .	88
5. Transformaciones lineales . . . . .	90
6. Diagonalización . . . . .	92
7. Formas canónicas de matrices de tamaño $2 \times 2$ . . . . .	97
7.1. $P_M(\lambda)$ tiene dos raíces reales distintas . . . . .	97
7.2. $P_M(\lambda)$ tiene una raíz real doble $\lambda_0$ . . . . .	97
7.3. $P_M(\lambda)$ con dos raíces complejas conjugadas . . . . .	100
8. <b>Exponencial de una matriz</b> . . . . .	101
<b>6. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.</b>	<b>109</b>
1. Sistemas de ecuaciones diferenciales . . . . .	109
2. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a co- eficientes constantes. . . . .	116
3. Diagramas de fase . . . . .	120
4. Estabilidad de puntos de equilibrio . . . . .	132
4.1. Estabilidad del punto de equilibrio de un sistema lineal	134
4.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal . . . . .	137
4.3. Método de Lyapunov . . . . .	141
<b>7. Series de Fourier</b>	<b>153</b>
1. Coeficientes de Fourier . . . . .	153
2. Cálculo de coeficientes para funciones de período arbitrario . .	164
3. Series de Fourier de senos y de cosenos . . . . .	168
4. Interpretación geométrica. . . . .	170
5. Nociones de Convergencia. . . . .	179
<b>8. Aplicaciones de las Series de Fourier</b>	<b>183</b>
1. Introducción . . . . .	183
2. Ecuación del calor . . . . .	183
3. Ecuación de ondas . . . . .	188
4. Ecuación de Laplace . . . . .	194

## II Variable Compleja

Por Juan Pablo Pinasco

199

### 9. Números Complejos 201

1. Operaciones con números complejos . . . . . 201
  - 1.1. Representación binomial . . . . . 201
  - 1.2. Representación polar . . . . . 203
  - 1.3. Pasaje de una forma a otra . . . . . 206
2. El plano complejo . . . . . 208
  - 2.1. Complejo conjugado . . . . . 208
  - 2.2. Inverso . . . . . 208
  - 2.3. Módulo y distancia . . . . . 209
3. Nociones de topología del plano complejo . . . . . 211

### 10. Funciones de variable compleja 215

1. Definiciones básicas . . . . . 215
  - 1.1. Operaciones con funciones complejas . . . . . 216
2. Partes real e imaginaria de  $f$  . . . . . 217
3. Límite y continuidad . . . . . 218
4. Algunas funciones especiales . . . . . 219
  - 4.1. Función exponencial . . . . . 220
  - 4.2. Logaritmo Complejo . . . . . 220
  - 4.3. Funciones Trigonométricas Complejas . . . . . 223
5. Derivación . . . . . 224
  - 5.1. Condiciones para derivabilidad . . . . . 229
6. Funciones holomorfas . . . . . 232
7. Reglas de derivación . . . . . 233
8. Funciones armónicas . . . . . 236

### 11. Integración 239

1. Integración en el plano complejo . . . . . 239
  - 1.1. Integrales de curvas . . . . . 239
  - 1.2. Integrales curvilíneas . . . . . 242
2. Integrales complejas y campos vectoriales . . . . . 245
  - 2.1. Propiedades de la integral . . . . . 246
3. Acotación de integrales . . . . . 249

<b>12.El Teorema de Cauchy</b>	<b>253</b>
1. Teorema de Cauchy . . . . .	253
1.1. Campos conservativos . . . . .	253
1.2. Teorema de Cauchy . . . . .	254
2. Funciones holomorfas . . . . .	256
3. Fórmulas de Cauchy . . . . .	259
<b>13.Integrales reales</b>	<b>267</b>
1. Integrales impropias . . . . .	267
2. Cálculo de integrales . . . . .	270
2.1. Integrales de la primera clase . . . . .	271
2.2. Integrales de la segunda clase . . . . .	273
2.3. Desigualdad de Jordan . . . . .	275
2.4. Integrales de la tercera clase . . . . .	276
<b>III Prácticas de Matemática IV</b>	<b>281</b>



# Prólogo

Estas notas están basadas en el curso cuatrimestral de Matemática IV dictado por nosotros y otros colegas en la Universidad Nacional de General Sarmiento durante los años 2001 al 2007. Estas notas no pretenden sustituir la bibliografía de la materia, sino servir como soporte de las clases teóricas brindando un resumen de los resultados más relevantes, así como variados ejemplos que durante la cursada no siempre encuentran espacio debido a la falta de tiempo material.

Los temas contenidos comprenden Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, algunos conceptos elementales de Álgebra Lineal, Series de Fourier con aplicaciones y Variable Compleja. Hemos tratado de brindar un enfoque unificado que resulte de utilidad tanto para los estudiantes de los distintos profesorados de ciencias exactas como para los de tecnología. Con ese propósito decidimos equilibrar los contenidos formales y los prácticos en un punto de compromiso entre los intereses de ambas menciones.

Toda vez que ha sido posible hemos intentado presentar los temas basándonos en ejemplos con aplicaciones concretas, aunque en ocasiones hemos optado por evitar esa tendencia en beneficio de la brevedad, debido a lo ya dilatado de este volumen.

Queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a todos los docentes de Matemática IV por su contribución directa o indirecta en estas notas y por su participación invaluable en la elaboración de las guías prácticas, cuya autoría pertenece a todos los involucrados en el dictado de la materia. Finalmente, queremos agradecer también a Leandro Vendramín, quien hizo una lectura crítica del texto antes de su impresión.

*Los autores, Los Polvorines, Diciembre de 2007.*



Parte I

# Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal

Por Gabriel Acosta y Patricia Palacios



# Capítulo 1

## Algunos Ejemplos

Las ecuaciones diferenciales permiten expresar las leyes del cambio. Más adelante definiremos con precisión que entendemos por ecuación diferencial, pero, por lo pronto, nos contentaremos con saber que en una ecuación diferencial de primer orden intervienen una función desconocida y su derivada siendo la función desconocida la incógnita del problema.

Para aclarar lo dicho consideremos el siguiente ejemplo de ecuación diferencial,

$$x'(t) = x(t). \quad (0.1)$$

Aquí  $x(t)$  es una función desconocida y sólo sabemos de ella lo que dice (0.1), o sea que  $x(t)$  coincide con su derivada. La función  $e^t$  tiene precisamente esa propiedad, por lo que es una solución posible de (0.1). Sin embargo si tomamos una constante  $C$  es fácil ver, calculando  $x'(t)$ , que  $x(t) = Ce^t$  también verifica (0.1) y por ende la ecuación admite infinitas soluciones.

Análogamente, si tomamos  $a \in \mathbb{R}$  y consideramos

$$x'(t) = ax(t), \quad (0.2)$$

podemos verificar fácilmente que  $x(t) = Ce^{at}$  es solución para cualquier constante  $C$ .

En los siguientes ejemplos veremos que la ecuación (0.2) permite expresar ciertas leyes de manera compacta y elegante.

### *Ejemplo 0.1. El Interés Compuesto Continuo*

Imaginemos un depósito bancario  $D(0)$  invertido a una tasa  $R$  por un período de tiempo  $T$ . La fórmula de interés simple da para el final del período:

$$D(T) = D(0)(1 + R).$$

Desde luego es razonable pensar que si el período es menor también será menor el interés. Claramente la tasa que está dispuesta a pagar el banco depende del tiempo por el que hagamos el depósito, o sea que  $R = R(T)$ , y naturalmente  $R(0) = 0$ . Si bien la forma funcional de  $R$  es, en principio, desconocida, podemos suponer que es derivable y entonces, por un período suficientemente pequeño y llamando  $R'(0) = r$ ,

$$R(h) \sim R(0) + hR'(0) = hR'(0) = hr.$$

En tal caso, considerando ahora un tiempo  $t$  cualquiera, suponiendo que nuestro capital en ese tiempo es  $D(t)$ , y que decidimos invertirlo por un intervalo breve de tiempo  $h$

$$D(t+h) = D(t)(1 + R(h)) = D(t)(1 + rh),$$

de donde

$$D'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(t+h) - D(t)}{h} = rD(t),$$

y entonces el capital  $D(t)$  sigue una ley de la forma (0.2). ¿Entiende por qué se denomina interés compuesto continuo?

**Ejemplo 0.2. La Ley de Decaimiento Radioactivo**

Ciertos átomos son por naturaleza inestables y tienden a desintegrarse. Esta transición es puramente estadística, y por ese motivo, dada una población de  $N$  núcleos radioactivos estudiados en un intervalo de tiempo  $[t, t+h]$  suficientemente pequeño, la cantidad de ellos que habrán de desintegrarse será proporcional al tiempo transcurrido y a un porcentaje fijo  $p$  del total  $N$  (este porcentaje no depende de  $N$  sino de la naturaleza del material radioactivo). Si suponemos entonces que  $h > 0$  es pequeño y llamamos  $N(t)$  a la cantidad de núcleos presentes en el tiempo  $t$ , se tiene:

$$N(t+h) = N(t) - phN(t),$$

de donde

$$N(t+h) - N(t) = -phN(t),$$

y tomando límite

$$N'(t) = -pN(t).$$

**Ejemplo 0.3. El crecimiento de las poblaciones**

En el siglo XVIII Thomas Malthus (pastor y economista) propuso que, si no existieran limitaciones de recursos (léase alimentos), el crecimiento de las

## Capítulo 1. Algunos Ejemplos

poblaciones en intervalos cortos de tiempo  $[t, t + h]$  sería aproximadamente proporcional a la cantidad de habitantes  $P(t)$  y al tiempo transcurrido

$$P(t + h) - P(t) \sim rhP(t),$$

donde la constante de proporcionalidad  $r$  representa la tasa de crecimiento. De aquí se concluye inmediatamente

$$P'(t) = rP(t),$$

que es otra vez (0.2).

En las figuras 1 y 2, puede verse el comportamiento exponencial de las soluciones de las ecuaciones dadas en los ejemplos.

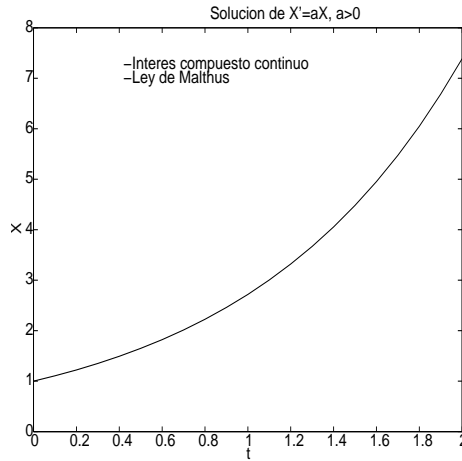


Figura 1

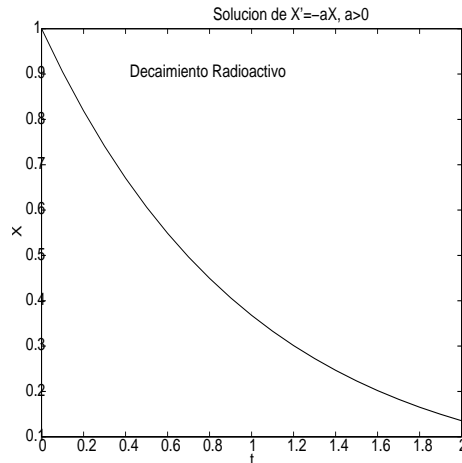


Figura 2

*Observación 0.1.* A pesar de la sencillez de (0.2) hemos visto que esta ecuación permite modelizar muchos procesos reales. Sin embargo, ligeros cambios en los modelos hacen intervenir ecuaciones más complicadas. Por ejemplo, la famosa conclusión de Malthus fue que los recursos crecen más lentamente que las poblaciones (observe que la solución de (0.2) es una exponencial) y en consecuencia éstas deberán más tarde o más temprano competir por los recursos existentes. Esta observación conduce naturalmente a intentar incorporar algún término de competencia en la ecuación de Malthus, así que en el siglo XIX, Verhulst (biólogo y matemático) propone lo siguiente:

$$P'(t) = aP(t) - bP(t)^2, \quad (0.3)$$

con  $a, b > 0$ . Observe que para poblaciones pequeñas el término lineal  $aP(t)$  es dominante y esperamos que la solución se comporte como en el modelo de Malthus, pero a medida que  $P$  crece el término cuadrático  $-bP^2$ , que es negativo, domina. La solución se conoce como curva logística y es la siguiente

$$P(t) = \frac{aCe^{at}}{1 + bCe^{at}}, \quad (0.4)$$

donde una vez más  $C$  es una constante arbitraria. En la Figura 3, se ve una solución con  $a = b = 1$  y  $C = 0,1$ . Note de (0.3) que  $P$  está impedida de crecer demasiado, en efecto, como  $aP(t) - bP(t)^2 = P(t)(a - bP(t))$ , se tiene que si  $P(t) > \frac{a}{b}$  deberá ser  $P'(t) < 0$  y por ende  $P(t)$  es decreciente. O sea que la población solo puede crecer si  $P(t) < \frac{a}{b}$  y por ende  $P'(t) > 0$ . Esto sugiere que el punto  $x_A = \frac{a}{b}$  tiene la particularidad de que la especie que estamos modelando tenderá a tener una población estable de  $x_A$  habitantes.

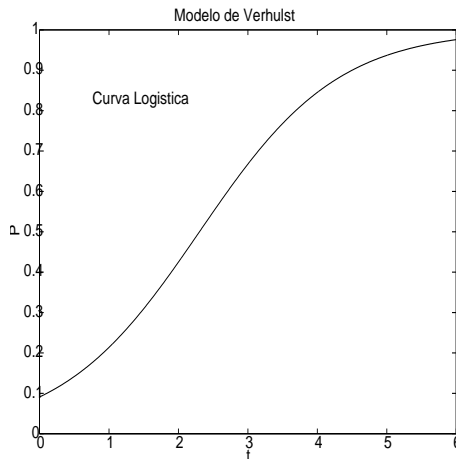


Figura 3



*Ejercicio 0.1.* Considere una tasa  $R$  fija en un período de tiempo  $T = 1$ .

1. Dividiendo el intervalo de tiempo en  $T = 1$  en  $n$  períodos y utilizando la fórmula de interés compuesto, interprete la ecuación

$$D(j) = D(0) \left( 1 + \frac{R}{n} \right)^j,$$

con  $0 \leq j \leq n$ .

2. Llame  $t_j = j \frac{T}{n}$  y, suponiendo que  $n \rightarrow \infty$  y  $t_j = cte$ , diga cuánto vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(0) \left( 1 + \frac{R}{n} \right)^j$$

e interprete el límite.

Ésto vuelve a explicar el nombre de interés compuesto continuo utilizado previamente.

*Ejercicio 0.2.* Compruebe que (0.4) es solución de (0.3). Calcule

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$$

y pruebe que coincide con  $x_A$ .



## Capítulo 2

# Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Hasta ahora hemos usado  $t$  como variable independiente (en nuestros ejemplos  $t$  representaba el tiempo), así las funciones resultaban  $x(t)$ ,  $D(t)$ ,  $P(t)$ . De ahora en más la variable independiente podrá ser  $x$  o cualquier otra. Además, en ciertas ocasiones (y toda vez que se entienda por el contexto) simplificaremos la notación. Por ejemplo, en vez de

$$x(t) = t^2 \quad \text{usaremos} \quad x = t^2$$

y en general, si aparece  $x'(t)$  usaremos  $x'$  y lo mismo para otras funciones, así, por ejemplo,  $y'(x)$  se podrá escribir  $y'$  indistintamente.

Definamos ahora con más precisión qué entendemos por una ecuación diferencial de primer orden

**Definición 0.0.1.** *Dada cierta  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** es una expresión de la forma*

$$F(t, x, x') = 0, \tag{0.1}$$

*o cualquier otra expresión que se reduzca a ésta. Diremos que la ecuación está **resuelta respecto de la derivada** si puede escribirse como*

$$x' = f(t, x),$$

*para cierta*

$$f : \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

*Si  $F$  no depende explícitamente de  $t$ , la ecuación (0.1) se dice **autónoma**.*

*Ejemplo 0.4.* Las siguientes son ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$x' = -xt$$

$$\frac{xx'}{\sqrt{1+x'^2}} = 1$$

En el primer caso,

$$F(t, x, y) = y + xt$$

y la ecuación está resuelta respecto de la derivada. En el segundo caso,

$$F(t, x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} - 1$$

y la ecuación no está resuelta respecto de la derivada. Notemos además que la segunda ecuación es autónoma.

*Ejemplo 0.5.* La ecuación (0.2) es una ecuación de primer orden resuelta respecto de la derivada, donde  $f(t, x) = ax$ .

Resolver la ecuación (0.1) significa hallar **una** función  $x$  (**solución particular**) derivable que la verifique, o **todas** las funciones derivables que la verifican (**solución general**).

En el caso general de una ecuación de primer orden habrá una constante indeterminada. Una **solución general** de (0.1) es, dicho informalmente, una función  $x(t)$  derivable que satisface (0.1) y en la que aparece esta constante de integración. Por su parte dándole un valor numérico a esta constante se obtiene una **solución particular** de (0.1).

*Ejemplo 0.6.* Por ejemplo (0.4) es la solución general de (0.3). Tomando cierto valor para la constante de integración, digamos  $C = 2$ , se obtiene una solución particular de (0.3)

$$P(t) = \frac{a2e^{at}}{1 + b2e^{at}}.$$

En el caso de las soluciones generales la aparición de las constantes adopta en ocasiones una forma sencilla, como veremos en la Proposición 2.1 y el Teorema 2.1 para ecuaciones lineales.

## 1. Interpretación geométrica

Las ecuaciones de primer orden admiten una interpretación geométrica interesante. En efecto, aunque no sepamos resolver la ecuación (cosa no siempre sencilla) podremos obtener información acerca de la solución.

Consideremos una ecuación de primer orden resuelta respecto de la derivada

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.2}$$

Si recordamos que la derivada  $x'(t_0)$  representa la pendiente de la recta tangente a la curva  $(t, x(t))$  en el punto  $(t_0, x(t_0))$ , entonces el miembro derecho de (1.2) está diciendo qué pendientes debe tener la curva solución para satisfacer (1.2). En particular, si buscamos en el plano  $(t, x)$  los puntos tales que  $f(t, x) = cte$  (o sea las curvas de nivel de  $f$ ), hallaremos los puntos en los cuales las pendientes de las tangentes a las curvas solución deben coincidir con ese valor  $cte$ . Debido a que sobre la misma curva de nivel las soluciones poseen la misma pendiente, este método se llama de las isoclinas.

Veamos el procedimiento con un ejemplo:

$$x' = tx$$

Esta ecuación indica, por ejemplo, que en el punto  $(1, 1)$  la curva solución debe tener una tangente con pendiente 1, en el punto  $(1, 2)$  debe tener pendiente 2, en el  $(3, 4)$  pendiente 12 y así sucesivamente. Si estudiamos las curvas de nivel de la función  $f(t, x) = tx$  vemos que resultan ser hipérbolas. En la Figura 4 se han graficado varias de estas hipérbolas, y sobre ellas las pendientes que debería tener una solución.

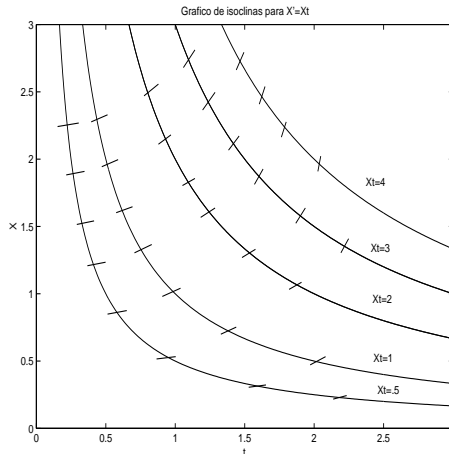


Figura 4

Observemos que del mismo gráfico se desprende algo que ya hemos notado: no hay en general una única solución. Esto se relaciona con el hecho de que

al integrar aparecen constantes de integración. En efecto, si consideramos la siguiente ecuación

$$x'(t) = f(t),$$

notamos que el problema clásico de integración puede interpretarse como una ecuación diferencial, y entonces llamando  $P$  a una primitiva de  $f$

$$x(t) = P(t) + C,$$

con  $C$  una constante.

## 2. Ecuaciones de Variables Separables

Si bien ya sabemos formalmente qué es una ecuación diferencial y qué representa geoméricamente, no conocemos técnicas sistemáticas de resolución. Lamentablemente no siempre es posible resolver analíticamente una ecuación diferencial, sin embargo hay casos particulares en los que puede sistematizarse el cálculo de soluciones.

Comencemos por un tipo particular de ecuación diferencial de orden 1, que llamaremos de **variables separables**. Supongamos que

$$x' = f(t, x), \tag{2.3}$$

con

$$f(x_1, x_2) = h(x_1)g(x_2).$$

En este caso (2.3) se puede escribir como

$$\frac{x'}{g(x)} = h(t).$$

Esta ecuación se resuelve integrando esta igualdad (recuerde que  $x = x(t)$ )

$$\int \frac{x'}{g(x)} dt = \int h(t) dt,$$

para lo cual es conveniente hacer el cambio de variables  $x = x(t)$  en la integral de la izquierda resultando

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int h(t) dt, \tag{2.4}$$

ecuación de la que puede obtenerse  $x$  en función de  $t$ .

Veamos un par de ejemplos

*Ejemplo 2.1.* Resolvamos la ecuación de Verhulst (0.3)

$$P' = aP - bP^2.$$

En este caso la ecuación es autónoma ya que el miembro derecho no depende explícitamente de  $t$  (es  $f(x_1, x_2) = g(x_2)$ ). Se tiene

$$\frac{dP}{aP - bP^2} = dt. \quad (2.5)$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{aP - bP^2} &= \int \frac{dP}{aP} + \int \frac{bdP}{a(a - bP)} \\ &= \frac{1}{a} \ln(|P|) - \frac{1}{a} \ln(|a - bP|) + K \\ &= \frac{1}{a} \ln \left( \left| \frac{P}{a - bP} \right| \right) + K, \end{aligned}$$

con  $K$  una constante arbitraria. Por otro lado

$$\int dt = t + Q,$$

con  $Q$  una constante arbitraria. Entonces de la igualdad (2.5) obtenemos

$$\frac{1}{a} \ln \left( \left| \frac{P}{a - bP} \right| \right) = t + Q - K,$$

o sea,

$$\ln \left( \left| \frac{P}{a - bP} \right| \right) = at + a(Q - K).$$

Llamando  $C = e^{a(Q-K)}$  (note que esta constante es **positiva**) resulta

$$\left| \frac{P}{a - bP} \right| = Ce^{at}$$

y formalmente deberíamos quitar el módulo dependiendo del signo de  $\frac{P}{a-bP}$ , lo que conduciría a dos soluciones diferentes. Sin embargo podemos resumir los resultados para ambos signos si escribimos

$$\frac{P}{a - bP} = Ce^{at},$$

donde ahora  $C$  es arbitraria (positiva o negativa), y entonces

$$P(t) = \frac{aCe^{at}}{(1 + bCe^{at})}$$

es la solución general.

*Ejemplo 2.2.* Resolvamos el ejemplo del cual hemos graficado las isoclinas, o sea

$$x' = tx.$$

Se tiene

$$\frac{dx}{x} = t dt.$$

O sea,

$$\ln(|x|) = \frac{t^2}{2} + K.$$

En definitiva, llamando  $C = e^K$

$$|x| = C e^{\frac{t^2}{2}}$$

con  $C > 0$ , y obtenemos la solución general

$$x = C e^{\frac{t^2}{2}}$$

donde  $C$  denota ahora una constante arbitraria.

*Ejercicio 2.1.* Halle la solución general de

(i)  $x^2 y' + y = 0$

(ii)  $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = xy$

(iii)  $y' = 2t\sqrt{y-1}$

(iv)  $y' \cos(x) - y^2 \operatorname{tg}(x) = 0$

### 3. Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Una ecuación lineal de primer orden es una ecuación diferencial de la forma

$$p(t)x' + q(t)x = f(t), \tag{3.6}$$

con  $p(t) \neq 0$ . Como ya hemos aclarado escribiremos a veces  $p, q$  o  $f$  en vez de  $p(t), q(t)$  o  $f(t)$ . Si  $f = 0$ , diremos que la ecuación es **homogénea**. Si  $f(t)$  no es constantemente igual a 0, la ecuación se dirá **no homogénea**. Si  $p, q$  son constantes, decimos que la ecuación es a coeficientes constantes.

Veamos cómo hallar las soluciones de este tipo de ecuaciones. Comencemos resolviendo la ecuación homogénea asociada

$$px' + qx = 0.$$



Ésta es una ecuación de variables separables. Según lo visto en la sección anterior, la solución de la ecuación homogénea es

$$x_{gh}(t) = e^{-\int \frac{q}{p} dt}$$

El subíndice  $gh$  indica la solución general de la ecuación homogénea. Con el subíndice  $ph$  denotaremos a **una** solución particular de la ecuación homogénea. Se busca ahora una solución general de la ecuación no homogénea (3.6)  $x(t)$  de la forma

$$x(t) = C(t)x_{ph}(t).$$

O sea que se hace variar la constante  $C \equiv C(t)$ , por este motivo este método se llama de variación de las constantes.

**Aclaración:** Note que hemos tomado  $x_{ph}$  por lo que **no** debe aparecer ninguna constante de integración en su expresión.

Reemplazando en (3.6) y reagrupando términos resulta

$$\begin{aligned} px' + qx &= C(px'_{ph} + qx_{ph}) + pC'x_{ph} \\ &= pC'x_{ph}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Entonces eligiendo

$$C'(t) = \frac{f(t)}{p(t)x_{ph}(t)},$$

o sea

$$C = \int \frac{f}{px_{ph}} dt, \quad (3.8)$$

obtenemos una solución general de la ecuación no homogénea (3.6).

**Aclaración:** Una observación importante es que al hallar  $C(t)$  aparece una constante arbitraria  $K$  dada por la primitiva que estamos calculando.

*Ejemplo 3.1.* Resolvamos la ecuación

$$x' - x = e^{2t}.$$

Una solución particular de la ecuación homogénea asociada

$$x' - x = 0$$

es  $x_{ph}(t) = e^t$  (observe que **no** tiene constantes de integración). Proponemos

$$x(t) = C(t)x_{ph}(t).$$

Entonces hay que elegir (ver (3.8))

$$C(t) = \int \frac{f(t)}{p(t)x_{ph}(t)} dt = \int \frac{e^{2t}}{e^t} dt = \int e^t dt = e^t + K.$$

Por lo tanto, la solución general del problema es

$$x(t) = C(t)x_{ph}(t) = e^{2t} + Ke^t.$$

**Aclaración:** En el ejemplo anterior usamos la expresión explícita (3.8). En general no es buena idea ya que es más confiable recordar el procedimiento. En el ejemplo siguiente hacemos el cálculo sin el uso de (3.8).

*Ejemplo 3.2.* Resolvamos la ecuación

$$\cos(x)y' + y\sin(x) = 1$$

El primer paso que debemos realizar es resolver la ecuación homogénea asociada

$$\cos(x)y' + y\sin(x) = 0.$$

Esta es una ecuación de variables separables, reemplazando  $y' = \frac{dy}{dx}$  y despejando tenemos

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx.$$

Integrando queda

$$\ln(|y|) = \ln(|\cos(x)|) + k.$$

Luego, la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_{gh}(x) = C\cos(x).$$

Ahora proponemos como solución general de la ecuación no homogénea

$$y_{gnh}(x) = C(x)\cos(x).$$

Reemplazando en la ecuación no homogénea tenemos

$$\cos(x)(C'(x)\cos(x) - C(x)\sin(x)) + C(x)\cos(x)\sin(x) = 1,$$

y simplificando obtenemos que

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Luego

$$C(x) = tg(x) + k,$$

y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y_{gnh} = (tg(x) + k)\cos(x) = \text{sen}(x) + k\cos(x).$$

*Ejemplo 3.3.* Hallemos la solución general de la ecuación

$$y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada

$$y' - \frac{n}{x}y = 0.$$

Reemplazando  $y' = \frac{dy}{dx}$  obtenemos

$$\frac{dy}{y} = \frac{n}{x}dx.$$

Integrando queda

$$\ln(|y|) = n\ln(|x|) + k = \ln(|x|^n) + k.$$

Luego, la solución general es

$$y_{gh}(x) = Cx^n.$$

Proponemos como solución general de la ecuación no homogénea

$$y_{gnh}(x) = C(x)x^n.$$

Reemplazando en la ecuación no homogénea tenemos

$$C'(x)x^n + C(x)nx^{n-1} - nC(x)x^{n-1} = e^x x^n.$$

Luego

$$C'(x) = e^x \quad y \quad C(x) = e^x + k,$$

y la solución general de la ecuación no homogénea queda

$$y(x) = (e^x + k)x^n.$$

*Ejercicio 3.1.* Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones

(i)  $y' - 3y = e^x$

(ii)  $y' - 2xy = x$

(iii)  $xy' + 2y = e^{x^2}$

(iv)  $\frac{dy}{dx} = \text{sen}x + y\text{tg}x$

(v)  $xy' + xy + y = e^{-x}$

## 4. Problema de valores iniciales

Mencionemos una vez más el tema de las constantes de integración. Ya vimos en los ejemplos que al resolver las ecuaciones diferenciales la solución involucra cierta constante indeterminada, indicando que las ecuaciones no poseen en general solución única. La pregunta natural es entonces ¿qué tipo de restricciones serán razonables a la hora de garantizar la unicidad de soluciones? Por lo pronto ya notamos que para conseguir una solución particular podíamos darle un valor concreto a la constante. ¿Cuál sería un modo razonable de hacerlo? Veamos la siguiente definición.

**Definición 4.0.2.** *Un problema de valores iniciales (PVI) consiste en resolver (0.1) sujeto a la siguiente restricción, o dato inicial*

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.9)$$

donde  $x_0$  y  $t_0$  son valores dados.

Veamos ejemplos

*Ejemplo 4.1.* Se invierten 1000 pesos a una tasa de interés compuesto continuo de  $r = 0,07$  anual. ¿Qué capital se tendrá después de 30 meses?

Se sabe que el capital  $C(t)$  verifica

$$C'(t) = 0,07C(t),$$

cuya solución general es  $C(t) = Ce^{0,07t}$ . Como el dato de inicial es

$$C(0) = 1000,$$

se deduce que la solución particular

$$C(t) = 1000e^{0,07t}$$

es la solución del problema de valores iniciales.

Como la tasa está dada en años y 30 meses equivalen a  $t = 2,5$  años, resulta en consecuencia  $C(2,5) \sim 1191$  pesos.

*Ejemplo 4.2.* Supongamos que en el modelo de Verhulst con constantes  $a = 100$ ,  $b = 2$  comenzamos con una población  $P(0) = 10$ . Luego la población está dada por la fórmula

$$P(t) = \frac{100\frac{1}{8}e^{100t}}{1 + 2\frac{1}{8}e^{100t}}.$$

*Ejercicio 4.1.* Resolver los siguientes problemas de valores iniciales

- (i)  $y' = y^2 + 1, \quad y(1) = 0$
- (ii)  $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}, \quad y(0) = 1$
- (iii)  $y' = \frac{y \ln y}{x}, \quad y(1) = e$
- (iv)  $\frac{dy}{dt} = \frac{ty+3t}{t^2+1}, \quad y(0) = 2$
- (v)  $y' + y = x + e^x, \quad y(0) = 0$
- (vi)  $xy' - 3y = x^2, \quad x > 0, y(1) = 0$
- (vii)  $(1 + x^2)y' + 2xy = 3\sqrt{x}, \quad y(0) = 2$
- (viii)  $xy' - \frac{y}{x+1} = x, \quad y(1) = 0, x > 0$

Vemos de los ejemplos 4.1 y 4.2 que los datos iniciales parecen asegurar la unicidad de la solución. Bajo ciertas condiciones ésto es cierto, sin embargo veamos el siguiente ejemplo.

*Ejemplo 4.3.* Considere el siguiente problema de valores iniciales:

$$x'(t) = 3x^{\frac{2}{3}}$$

con dato inicial  $x(0) = 0$ . La siguiente función

$$x_1(t) = \begin{cases} (t-1)^3 & \text{si } t \geq 1, \\ 0 & \text{si } t < 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

es derivable en todo  $\mathbb{R}$  y el PVI. Sin embargo la función  $x_2(t) \equiv 0$  también lo resuelve y obviamente  $x_1 \neq x_2$ .

*Ejercicio 4.2.* Haga un gráfico de  $x_1(t)$  del ejemplo previo y demuestre además que es derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

Del Ejemplo 4.3 se ve que en algunos casos los datos iniciales no alcanzan para determinar la unicidad de la solución. Ahora vamos a enunciar un teorema que garantiza la unicidad de soluciones de un PVI, además garantiza otra cuestión de tanta importancia como la anterior, y por la que no nos hemos preocupado hasta ahora, que es la de la existencia de soluciones.

**Aclaración:** El problema de la existencia y unicidad de soluciones no tiene interés puramente matemático. Lo cierto es que cualquier modelo (físico, biológico, económico, etc.) que utilice ecuaciones diferenciales solo tiene sentido si:

- Existe solución y en consecuencia el modelo puede dar una respuesta concreta.

- La solución es única y por ende la respuesta del modelo se determina de manera unívoca.

El teorema que garantiza existencia y unicidad del PVI se enuncia para ecuaciones de orden 1, simplemente porque como veremos más adelante las ecuaciones de orden  $n$  se pueden reducir a un **sistema de ecuaciones de orden 1**.

La demostración del teorema de existencia y unicidad se dará en la próxima sección en el caso que  $f(x, y)$  sea una función continua que verifica la condición de Lipschitz con respecto a la segunda variable en  $\Omega$ . Veamos que significa que  $f$  posea esta propiedad:

**Definición 4.0.3.** Diremos que  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la condición de Lipschitz con respecto a la variable  $y$  en  $\Omega$ , con constante de Lipschitz  $C$ , si

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq C|y_2 - y_1|$$

para todo  $(x, y_1), (x, y_2) \in \Omega$ .

*Observación 4.1.* Si  $|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}| \leq C$  en  $\Omega$ , para cierta constante  $C$ , entonces, por el teorema del valor medio,  $f$  verifica la condición de Lipschitz con respecto a la variable  $y$  en  $\Omega$ .

*Observación 4.2.* Si abandonamos la condición de Lipschitz y suponemos sólo que  $f(x, y)$  es continua en  $\Omega$ , se puede probar que el problema de valores iniciales tiene solución (no necesariamente única).

*Ejemplo 4.4.* Para la ecuación del Ejemplo 4.3,  $x'(t) = 3x^{\frac{2}{3}}$ , se observa que

$$f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$$

es continua por lo que hay existencia de soluciones. Sin embargo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}},$$

por ende

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = +\infty$$

y no está acotada la derivada parcial (ni siquiera existe en el eje de las  $x$ ). Por lo que no hay garantía de unicidad (de hecho ya vimos que no hay unicidad).

## 5. Demostración del teorema de existencia y unicidad

En esta sección demostraremos la siguiente versión del teorema de existencia y unicidad:

*Teorema 5.1.* Para  $a, b \in \mathbb{R}$ , definamos un entorno del plano

$$\Omega = (t_0 - a, t_0 + a) \times (x_0 - b, x_0 + b)$$

Sea  $f(x, y)$  una función continua en  $\Omega$  que satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable, con constante de Lipschitz  $C$ , en  $\Omega$ . Entonces existe  $h > 0$  con la propiedad que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene única solución  $x(t)$  en el intervalo  $|t - t_0| < h$ .

Antes de comenzar la demostración del teorema aclaremos ciertos conceptos que utilizaremos en el desarrollo de ella.

**Definición 5.0.4.** Sea  $\mathcal{C}[a, b]$  el conjunto de todas las funciones continuas en  $[a, b]$ . Si  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  se define la norma de  $f$  como  $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(x)|$ .

La norma de una función  $f(x)$  puede ser interpretada como la distancia entre la función  $f(x)$  y la función nula  $f \equiv 0$ . Generalizando esta definición, se puede definir la distancia entre  $f(x)$  y  $g(x) \in \mathcal{C}[a, b]$  como la norma de  $f - g$ , ésto es,

$$d(f, g) = \|f - g\| = \max_{t \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

A partir de esta noción de distancia podemos decir qué entendemos por convergencia de una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  a una función límite  $f$ .

**Definición 5.0.5.** Una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones en  $\mathcal{C}[a, b]$  converge uniformemente a una función límite  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$$

Además tenemos la siguiente propiedad acerca de la convergencia de una sucesión de funciones continuas:

*Proposición 5.1.* Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en  $\mathcal{C}[a, b]$  que converge uniformemente a una función límite  $f$ . Entonces  $f$  es una función continua en  $[a, b]$ .

Antes de ver la demostración del teorema hagamos la siguiente

*Observación 5.1.* Toda solución de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5.11)$$

es solución de la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (5.12)$$

Esto es, si  $x(t)$  es solución de 5.11, integrando obtenemos

$$\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = \int_{t_0}^t x'(s) ds = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0.$$

Recíprocamente, si  $x(t)$  es solución de 5.12, por el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Además,

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s)) ds = x_0.$$

**Dem:** La idea de la demostración del teorema de existencia y unicidad es la siguiente: construir la siguiente sucesión de funciones continuas

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0, \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds, \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds, \\ &\vdots \\ x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s)) ds, \end{aligned}$$

para  $n \in \mathbb{N}$  y demostrar que esta sucesión converge a una función continua  $x(t)$  que es solución de 5.12. Este procedimiento se conoce como *método de aproximaciones sucesivas de Picard*.

Notemos que  $x_n(t)$  es la  $n$ -ésima suma parcial de la serie de funciones

$$x_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n(t) - x_{n-1}(t)). \quad (5.13)$$

Luego, la convergencia de la sucesión  $\{x_n(t)\}$  es equivalente a la convergencia de esta serie.



Elijamos  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\Omega_1 = \{(t, x) / |t - t_0| \leq a_1, |x - x_0| \leq b_1\} \subset \Omega.$$

Como  $f(x, y)$  es continua en  $\Omega_1$  existe una constante  $M > 0$  tal que

$$|f(x, y)| < M,$$

para todo  $(x, y) \in \Omega_1$ . Además la función  $f(x, y)$  verifica la condición de Lipschitz para la segunda variable con constante  $C \neq 0$ , ésto es,

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq C|y_2 - y_1|,$$

para  $(x, y_1), (x, y_2) \in \Omega_1$ .

Elegimos  $h > 0$  tal que  $Ch < 1$  y el rectángulo

$$R = [t_0 - h, t_0 + h] \times [x_0 - Mh, x_0 + Mh]$$

esté contenido en  $\Omega_1$ . Ésto es,  $h < \min\{\frac{1}{C}, \frac{b_1}{M}, a_1\}$ . En adelante, vamos a trabajar con  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ .

Vamos a demostrar que la serie

$$|x_0(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \tag{5.14}$$

converge. La convergencia de 5.14 implica la convergencia uniforme de 5.13. Observemos que los puntos  $(t, x_n(t))$  pertenecen a  $R$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para probarlo usaremos un argumento inductivo. Es obvio que el gráfico de  $x_0(t) = x_0$  está incluido en  $R$ , luego

$$|f(t, x_0(t))| \leq M \quad y \quad |x_1(t) - x_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds \right| \leq Mh.$$

De esta desigualdad tenemos que los puntos  $(t, x_1(t))$  pertenecen a  $R \subset \Omega$ , luego

$$|f(t, x_1(t))| \leq M \quad y \quad |x_2(t) - x_1(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds \right| \leq Mh.$$

Por lo tanto los puntos  $(t, x_2(t))$  pertenecen a  $R \subset \Omega$  y repitiendo este argumento podemos ver que los puntos  $(t, x_n(t))$  pertenecen a  $R$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Ahora acotemos los términos  $|x_n(t) - x_{n-1}(t)|$ . De nuevo lo haremos en forma inductiva. Tenemos que  $|x_1(t) - x_0(t)| \leq Mh$  por lo visto anteriormente. Como los puntos  $(t, x_0(t))$  y  $(t, x_1(t))$  están en  $R$ , tenemos que

$$|f(t, x_1(t)) - f(t, x_0(t))| \leq C|x_1(t) - x_0(t)| \leq CMh.$$

Luego,

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))| ds \leq CMh^2.$$

Análogamente, como los puntos  $(t, x_1(t))$  y  $(t, x_2(t))$  pertenecen a  $R$ , tenemos que

$$|f(t, x_2(t)) - f(t, x_1(t))| \leq C|x_2(t) - x_1(t)| \leq MC^2h^2.$$

Luego,

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))| ds \leq Mh(Ch)^2.$$

En general, para todo  $n \geq 1$ , se verifica

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq Mh(Ch)^{n-1}.$$

Luego,

$$|x_0(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq |x_0| + \sum_{n=1}^{\infty} Mh(Ch)^{n-1}$$

y la última serie converge ya que  $Ch < 1$ .

Por lo tanto la serie

$$x_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n(t) - x_{n-1}(t))$$

converge uniformemente a una función  $x(t)$ . Como  $x_n(t)$  es continua para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el límite es una función continua.

Veamos que el gráfico de  $x(t)$  se encuentra en  $R$ . Supongamos que el gráfico de  $x(t)$  sale fuera de  $R$ . En este caso, debe existir  $t_1$  tal que

$$|t_1 - t_0| < h, \quad |x(t_1) - x_0| = Mh \quad y \quad |x(t) - x_0| < Mh$$

para  $|t - t_0| < |t_1 - t_0|$ . Luego,

$$\frac{|x(t_1) - x_0|}{|t_1 - t_0|} = \frac{Mh}{|t_1 - t_0|} > \frac{Mh}{h} = M.$$

Por otro lado, el teorema de Lagrange asegura que existe  $t^*$  entre  $t_0$  y  $t_1$  tal que

$$\frac{|x(t_1) - x_0|}{|t_1 - t_0|} = |x'(t^*)| = |f(t^*, x(t^*))| \leq M,$$

ya que  $(t^*, x(t^*))$  está en  $R$ . Esta contradicción prueba que no puede existir ningún punto con las propiedades de  $t_1$ . Luego el gráfico de  $x(t)$  está en  $R$ .

Veamos que la función  $x(t)$  es la solución de la ecuación integral, es decir,  $x(t)$  verifica

$$x(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = 0.$$

Como

$$x_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s)) ds = 0,$$

tenemos que

$$x(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = x(t) - x_n(t) - \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, x_{n-1}(s))) ds.$$

Luego,

$$|x(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds| \leq |x(t) - x_n(t)| + Ch \max_t |x(t) - x_{n-1}(t)|.$$

Como  $x_n(t)$  converge uniformemente a  $x(t)$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$  y  $n \geq n_0$ ,

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \frac{\epsilon}{1 + Ch}.$$

Por lo tanto, si  $n - 1 \geq n_0$ ,

$$|x(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds| \leq \epsilon$$

y como  $\epsilon$  es arbitrario,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Veamos la unicidad de la solución. Supongamos que existe otra función  $\tilde{x}(t)$  que es solución de la ecuación integral. Observemos que el gráfico de  $\tilde{x}(t)$  debe estar en  $R$  por un argumento análogo al dado al demostrar que el gráfico de la solución  $x(t)$  pertenece a  $R$ .

Como los puntos de la forma  $(t, \tilde{x}(t))$  están en  $R$ , vale lo siguiente

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))| ds \leq Ch \max_t |x(t) - \tilde{x}(t)|.$$

Luego,

$$\max_t |x(t) - \tilde{x}(t)| \leq Ch \max_t |x(t) - \tilde{x}(t)|,$$

y como  $Ch < 1$ , tenemos que

$$\max_t |x(t) - \tilde{x}(t)| = 0.$$

Por lo tanto, para todo  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$  se verifica

$$x(t) = \tilde{x}(t)$$

y queda probada la unicidad.  $\square$

## Capítulo 3

# Más Sobre Ecuaciones de Primer Orden

### 1. Ecuaciones Diferenciales Exactas

**Definición 1.0.6.** Dada  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se define la diferencial total de  $f$  por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

para todos los puntos  $(x, y) \in D$  donde estén definidas las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Como  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son funciones de  $x$  e  $y$ , la diferencial total se puede escribir en la forma

$$df = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Supongamos que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{1.1}$$

está definida en una región  $D$  del plano y que existe una función diferenciable  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

en todos los puntos de  $D$ . Entonces  $f(x, y) = c$ , donde  $c \in \mathbb{R}$  es una constante arbitraria, define la solución general de 1.1 en  $D$ . Notemos que  $f(x, y) = c$  define una familia de curvas, las cuales se obtienen variando  $c \in \mathbb{R}$ . Como

esta familia de curvas depende de un único parámetro  $c \in \mathbb{R}$  diremos que  $f(x, y) = c$  define una familia de curvas uniparamétrica.

**Definición 1.0.7.** *Se dice que una expresión de la forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

*es una diferencial exacta en una región  $D$  si existe una función  $f$  tal que*

$$df = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

*En este caso se dice que la ecuación diferencial de primer orden correspondiente*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

*es exacta.*

*Ejemplo 1.1.* La expresión  $ydx + xdy$  es exacta porque  $d(xy) = ydx + xdy$ . Luego la ecuación

$$ydx + xdy = 0$$

es exacta y la solución general es  $xy = c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ .

Veamos una proposición que nos servirá como criterio para detectar cuando la ecuación 1.1 es exacta.

*Proposición 1.1.* Sean  $M(x, y), N(x, y)$  dos funciones continuamente diferenciables en un dominio  $D$ . La ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es exacta en  $D$  si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

**Dem:** Supongamos que la ecuación es exacta. Esto es, existe  $f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ . Como  $f$  resulta de clase  $C^2$ , vale la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Recíprocamente, queremos ver que existe  $f$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ .

Consideremos

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y N(x, s) ds,$$

con  $(x_0, y_0) \in D$ . Verifiquemos que esta función verifica las condiciones pedidas.

Derivando con respecto a  $x$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= M(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial N}{\partial x}(x, s) ds = M(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial M}{\partial y}(x, s) ds \\ &= M(x, y_0) + M(x, y) - M(x, y_0) = M(x, y) \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ .  $\square$

*Ejemplo 1.2.* Consideremos la siguiente ecuación

$$(2xy^4 + \text{sen}y)dx + (4x^2y^3 + x\text{cos}y)dy = 0. \quad (1.2)$$

Si llamamos  $M(x, y) = 2xy^4 + \text{sen}y$  y  $N(x, y) = 4x^2y^3 + x\text{cos}y$ , tenemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3 + \text{cos}y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^x M(t, 0) dt + \int_0^y N(x, s) ds \\ &= \int_0^y 4x^2s^3 + x\text{cos}(s) ds = x^2y^4 + x\text{sen}(y). \end{aligned}$$

Luego, la solución de la ecuación diferencial exacta es

$$f(x, y) = x^2y^4 + x\text{sen}(y) = c.$$

*Ejercicio 1.1.* Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas

- (i)  $2xydx + (x^2 + 4y)dy = 0$
- (ii)  $y(y^2 - 3x^2)dx + x(3y^2 - x^2)dy = 0$

*Ejercicio 1.2.* Demostrar que

$$y' = \frac{ax + by}{cx + dy},$$

donde  $a, b, c, d$  son constantes,  $ad - bc \neq 0$ , es exacta si y sólo si  $b + c = 0$ . Hallar en este caso la solución general.

## 2. Factor integrante

En general, una ecuación diferencial del tipo

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.3)$$

no es exacta. En esta sección vamos a ver que, multiplicando la ecuación 2.3 por una función conveniente (llamada factor integrante), la podemos convertir en una ecuación exacta. Lamentablemente, en general, no es sencillo encontrar factores integrantes. Para ser más precisos

**Definición 2.0.8.** Una función  $\mu(x, y)$  con la propiedad que la ecuación

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

es exacta, se llama un factor integrante de la ecuación.

*Observación 2.1.* Si 2.3 tiene solución, entonces admite un factor integrante.

**Dem:** Supongamos que existe una función  $f$  tal que  $f(x, y) = c$  es solución de la ecuación 2.3. Entonces, derivando tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \quad (2.4)$$

De las ecuaciones 2.3 y 2.4 obtenemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Esto es,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{M(x, y)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{N(x, y)}$$

Si llamamos  $\mu$  a este cociente, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N.$$

Luego la ecuación

$$(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0 \quad (2.5)$$

es exacta.  $\square$



Veamos qué condición tiene que cumplir el factor integrante.  
La ecuación 2.5 tiene solución si

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

ésto es

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Luego,  $\mu$  es solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{1}{\mu} \left( N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

No es necesario que hallemos la solución general de esta ecuación, nos alcanza con encontrar una solución particular.

Veamos algunos casos donde encontrar  $\mu$  es sencillo:

1. Si  $\mu$  sólo depende de  $x$ ,  $\mu$  debe verificar la ecuación de variables separables:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

Si llamamos

$$g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N},$$

entonces

$$\mu(x) = e^{\int g(x) dx}$$

es un factor integrante de la ecuación.

Por ejemplo: Considerar la ecuación

$$(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

En este caso

$$g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{y - x}{x(x - y)} = -\frac{1}{x}$$

Luego,  $\mu = \frac{1}{x}$  es un factor integrante para la ecuación. Multiplicando por  $\mu$ , la ecuación se transforma en

$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + (x - y)dy = 0,$$

cuya solución es  $f(x, y) = c$  donde

$$f(x, y) = \int_1^x M(t, 0)dt + \int_0^y N(x, s)ds = \int_1^x -\frac{1}{t}dt + \int_0^y (x - s)ds.$$

Esto es

$$f(x, y) = -\ln|x| + xy - \frac{y^2}{2} = c$$

es la solución de la ecuación diferencial.

2. Análogamente, si  $\mu$  sólo depende de  $y$ , llamamos

$$h(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

y entonces

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy}$$

es un factor integrante.

Por ejemplo: Consideremos la ecuación

$$(y^2 + 1)dx + y(x + y^2 - 1)dy = 0, \quad (2.6)$$

donde  $M(x, y) = y^2 + 1$  y  $N(x, y) = y(x + y^2 - 1)$ . Si llamamos

$$h(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-y}{y^2 + 1},$$

tenemos que

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-y}{y^2 + 1} dy} = e^{-\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1)} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}.$$

es un factor integrante de la ecuación 2.6

Multiplicando la ecuación 2.6 por el factor integrante hallado obtenemos la siguiente ecuación exacta equivalente

$$\sqrt{y^2 + 1}dx + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}(x + y^2 - 1)dy = 0 \quad (2.7)$$

La solución de esta ecuación es  $f(x, y) = c$  con

$$f(x, y) = \int_0^x M(t, 0)dt + \int_0^y N(x, s)ds = \int_0^x dt + \int_0^y \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}}(x + s^2 - 1)ds$$

$$\begin{aligned}
 &= x + \int_0^y s\sqrt{s^2 + 1}ds + (x - 2) \int_0^y \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}}ds \\
 &= x + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} + (x - 2)[(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1]
 \end{aligned}$$

Esto es, la solución general de la ecuación 2.6 es

$$(\sqrt{y^2 + 1})(x + \frac{1}{3}y^2 - \frac{5}{3}) = c, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

*Ejercicio 2.1.* Hallar un factor integrante de la forma  $\mu(x)$  o  $\mu(y)$  y resolver las siguientes ecuaciones:

(i)  $(x^3 + x + y)dx - xdy = 0$

(ii)  $(y^2 + 1)dx + y(x + y^2 - 1)dy = 0$

(iii)  $(3x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$

*Observación 2.2.* También se puede hallar un factor integrante teniendo en cuenta las siguientes fórmulas diferenciales:

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{ydx - xdy}{y^2} \\
 d(xy) &= xdy + ydx \\
 d(x^2 + y^2) &= 2(xdx + ydy) \\
 d(\arctg(\frac{x}{y})) &= \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \\
 d(\ln(\frac{x}{y})) &= \frac{ydx - xdy}{xy}
 \end{aligned}$$

y haciendo un cambio de variables adecuado.

Veamos algunos ejemplos:

*Ejemplo 2.1.* Consideremos la ecuación

$$xdy - ydx = (1 + y^2)dy.$$

Multiplicando por  $-\frac{1}{y^2}$  queda

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = \left(-\frac{1}{y^2} - 1\right)dy.$$

Usando las fórmulas diferenciales tenemos

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \left(-\frac{1}{y^2} - 1\right)dy.$$

Llamando  $z = \frac{x}{y}$  e integrando

$$z = \frac{1}{y} - y + c.$$

Luego, la solución general de la ecuación es

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{y} - y + c.$$

Esto es,

$$x = 1 - y^2 + cy, \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}.$$

*Ejemplo 2.2.* Consideremos la ecuación

$$(x + y)dy = (y - x)dx.$$

Reescribiéndola tenemos

$$x dx + y dy = y dx - x dy.$$

Si dividimos por  $x^2 + y^2$  queda

$$\frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = d(\arctg(\frac{x}{y})).$$

Integrando tenemos que la solución de la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \arctg(\frac{x}{y}) + c.$$

### 3. Aplicaciones geométricas

Hemos visto en las secciones anteriores que la solución general de una ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es una familia uniparamétrica de curvas  $f(x, y) = c$ . Recíprocamente, una familia uniparamétrica de curvas es, en general, la solución de una ecuación diferencial de primer orden adecuada si se satisfacen ciertas condiciones de continuidad y diferenciabilidad. Veamos cómo se halla tal ecuación diferencial.

Sea

$$g(x, y, c) = 0 \tag{3.8}$$

una familia de curvas uniparamétrica. Derivando con respecto a  $x$  tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

Si eliminamos  $c$  usando ambas ecuaciones obtendremos una sola ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.9}$$

Esta ecuación tiene a la familia de curvas como soluciones aunque puede tener más soluciones que no pertenezcan a esta familia de curvas. La ecuación 3.9 se llama la ecuación diferencial de la familia uniparamétrica 3.8.

*Ejemplo 3.1.* Hallar la ecuación diferencial de la familia uniparamétrica de hipérbolas  $x^2 - y^2 = c$ .

Este ejemplo es muy sencillo pues al derivar ya desaparece el parámetro  $c$  y la ecuación diferencial es

$$2x - 2yy' = 0.$$

Luego, la ecuación resuelta con respecto a la derivada es

$$y' = \frac{x}{y}.$$

*Ejemplo 3.2.* Hallar la ecuación diferencial de la familia uniparamétrica de circunferencias  $x^2 + y^2 = 2ax$ .

Derivando con respecto a  $x$  tenemos  $2x + 2yy' = 2a$ . Si multiplicamos por  $x$  y reemplazamos queda

$$2x^2 + 2xyy' = 2ax = x^2 + y^2.$$

Despejando la derivada, obtenemos la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

*Ejercicio 3.1.* Hallar la ecuación diferencial de cada una de las siguientes familias uniparamétricas de curvas.

- (i)  $xy = a$
- (ii)  $y^2 = ax$
- (iii)  $y = ax^2$
- (iv)  $y = c \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$

Veremos ahora cómo encontrar las trayectorias ortogonales a una familia uniparamétrica de curvas. Estas trayectorias ortogonales son curvas que intersecan a todas las curvas de la familia dada en ángulos rectos.

En muchos problemas físicos aparecen familias de curvas mutuamente ortogonales. Por ejemplo:

1. Las curvas a lo largo de las cuales fluye el calor en un objeto físico bidimensional tal como una hoja delgada de metal son ortogonales a las curvas isotermas (curvas de igual temperatura).
2. Las líneas de flujo que surgen de un campo eléctrico o magnético en el plano son las trayectorias ortogonales a la familia de curvas equipotenciales del campo.

Vamos a suponer que cada una de las curvas tiene una tangente única en cada punto y que la ecuación diferencial de la familia dada está resuelta con respecto a la derivada, esto es,

$$y' = F(x, y).$$

Luego, las curvas solución de la ecuación

$$y' = \frac{-1}{F(x, y)}$$

son ortogonales a la familia dada. También puede haber curvas excepcionales que surgen a causa de tangentes verticales.

*Ejemplo 3.3.* Hallemos las trayectorias ortogonales a la familia uniparamétrica de hipérbolas  $x^2 - y^2 = c$ .

Vimos que la ecuación diferencial de esta familia es  $y' = \frac{x}{y}$ , entonces las trayectorias ortogonales a esta familia son solución de la ecuación

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que las trayectorias ortogonales buscadas son las hipérbolas de ecuación

$$y = \frac{c}{x}.$$

*Ejercicio 3.2.* Verificar que las siguientes familias de curvas son ortogonales:

(i)  $x^2 + y^2 = C_1$  e  $y = C_2x^4$

(ii)  $x^2 - y^2 + \ln(\cos(2xy)) = C_1$  y  $x^2 - y^2 + \ln(\sen(2xy)) = C_2$

*Ejercicio 3.3.* Determinar las trayectorias ortogonales a las familias de curvas del ejercicio 3.1.

## 4. Aproximaciones Numéricas

### 4.1. El método de Euler

Las ecuaciones diferenciales no siempre pueden integrarse explícitamente. Ésto ha llevado al desarrollo de métodos que permitan al menos aproximar las soluciones utilizando sólo la información disponible en la ecuación diferencial. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

y digamos que estamos interesados en conocer el valor aproximado de  $x(L)$ . Para fijar ideas supongamos que  $L > 0$  aunque el procedimiento es el mismo para valores negativos de  $L$ . Comencemos dividiendo el intervalo  $[0, L]$  en  $N$  pasos de longitud  $h$ . Esto es, tomamos un  $N \in \mathbb{N}$  cualquiera, hacemos  $0 < h = L/N$  y definimos  $t_k = kh$  con  $0 \leq k \leq N$ . Observemos que  $t_0 = 0$  y  $t_N = L$ .

Imaginemos ahora cómo aproximar el valor de la solución en el primer paso  $t_1 = h$  utilizando únicamente (4.10). Lo que puede observarse es que, si  $x(t)$  posee derivadas segundas continuas, el desarrollo de Taylor indica

$$x(t_1) = x(h) = x(0) + hx'(0) + O(h^2) = x(t_0) + hx'(t_0) + O(h^2)$$

y por ende para valores de  $h$  pequeños

$$x(t_1) \sim x(t_0) + hx'(t_0),$$

de donde usando (4.10)

$$x(t_1) \sim x(t_0) + hf(x(t_0), t_0) = x_0 + hf(x_0, t_0).$$

Llamemos ahora  $x_1 = x_0 + hf(x_0, t_0)$  al valor aproximado de  $x(t_1)$ , se observa que

$$|x(t_1) - x_1| \sim O(h^2). \quad (4.11)$$

Si repetimos la idea previa para el segundo paso tenemos

$$x(t_2) \sim x(t_1) + hx'(t_1) = x(t_1) + hf(x(t_1), t_1).$$

El problema es que no conocemos exactamente  $x(t_1)$  por lo que usaremos su aproximación  $x_1$  para construir el siguiente valor aproximado

$$x_2 = x_1 + hf(x_1, t_1),$$

y en general, para la  $k$ -ésima aproximación, resulta el método de Euler

$$x_k = x_{k-1} + hf(x_{k-1}, t_{k-1}) \quad 1 \leq k \leq N.$$

Finalmente para  $k = N$  obtendremos  $x_N$  el valor aproximado de  $x(L)$ .

Un problema interesante es saber cómo depende el error  $|x(L) - x_N|$  respecto del paso  $h$ . En principio es razonable esperar que éste tienda a cero a medida que tomamos pasos más pequeños. Por ejemplo ya vimos que el primer paso verifica (4.11). Para los pasos subsiguientes vamos perdiendo orden en la aproximación debido a que calculamos  $x_k$  a través de la aproximación  $x_{k-1}$  (para  $x_1$  usamos el valor *exacto*  $x_0 = x(0)$  dado por la ecuación (4.10)). Dicho informalmente todo ocurre como si los errores fuesen acumulativos, es decir cometemos errores  $O(h^2)$  en cada paso, los cuales se propagan en los  $N$  pasos aproximadamente como

$$O(h^2)N = O(h^2)\frac{1}{h} = O(h),$$

lo cual permite acotar (ver por ejemplo [9])

$$|x(L) - x_N| \leq Ch$$

( $C$  depende fuertemente de la  $f$  dada en (4.10)). Por este motivo el método de Euler se dice que es de *primer orden*. Esto significa que si obtuvimos una aproximación con cierto  $h$  y queremos disminuir el error a la novena parte tendremos que tomar en principio un paso que sea  $\frac{h}{9}$ , lo que implica que hay que hacer 9 veces más cálculos para arribar a  $x_N = L$ .

Escenarios mejores se plantean con otros métodos. Supongamos que conseguimos aproximaciones  $x_0, x_1, \dots, x_N$  de segundo orden, o sea, que verifiquen

$$|x(L) - x_N| \leq Ch^2,$$

entonces para reducir el error a la novena parte basta tomar  $\frac{h}{3}$  (sólo tres veces más cálculos para la misma aproximación). Métodos de mayor orden que el de Euler son posibles, en la sección siguiente comentamos algunos de ellos.

## 4.2. El método de Runge-Kutta

La idea del método de Euler puede generalizarse rápidamente tomando más términos en el desarrollo de Taylor de  $x(t)$  (suponiendo siempre que la función tiene suficientes derivadas). Aquí sólo examinaremos lo que se obtiene al



tomar términos de segundo orden. Volviendo a la notación de la sección previa tenemos

$$x(t_1) = x(t_0) + hx'(t_0) + \frac{h^2}{2}x''(t_0) + O(h^3). \quad (4.12)$$

Ahora bien, de (4.10) sabemos que  $x'(t_0) = f(x(t_0), t_0)$ , para calcular  $x''(t_0)$  hacemos

$$x''(t) = (x'(t))' = (f(x(t), t))' = f_x(x(t), t)x'(t) + f_t(x(t), t),$$

y usando de nuevo (4.10)

$$x''(t) = f_x(x(t), t)f(x(t), t) + f_t(x(t), t).$$

Observe que tanto  $f_x$  como  $f_t$  pueden calcularse explícitamente. Con esta técnica podemos aproximar  $x_k$  a través de  $x_{k-1}$  del siguiente modo

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + hf(x_{k-1}, t_{k-1}) \\ &+ \frac{h^2}{2}(f_x(x_{k-1}, t_{k-1})f(x_{k-1}, t_{k-1}) + f_t(x_{k-1}, t_{k-1})). \end{aligned}$$

Para este método tenemos, usando (4.12)

$$|x(t_1) - x_1| \sim O(h^3)$$

y con las consideraciones de la sección previa

$$|x(L) - x_N| \leq CO(h^2).$$

Uno de los problemas más cuestionados de este método es que, en su implementación computacional, es necesario el cálculo de las derivadas de  $f$ . Esto atenta contra el uso sistemático dentro de rutinas numéricas.

El método de Runge-Kutta consigue el mismo orden sin necesidad de derivar  $f$ . En efecto, volvamos a (4.12), nuestro problema es hallar una expresión alternativa de  $x''$  que no utilice explícitamente  $f_x$  y  $f_t$ . Para hacer el cálculo llamemos  $f = f(x(t), t)$ ,  $f_x = f_x(x(t), t)$   $f_t = f_t(x(t), t)$ . Calculando el polinomio de Taylor de orden 1 en dos variables tenemos

$$f(x(t) + hf, t + h) = f + hff_x + hf_t + O(h^2) = f + h(ff_x + f_t) + O(h^2).$$

Como ya vimos  $x''(t) = (ff_x + f_t)$ , entonces podemos despejar de la ecuación previa

$$x''(t) = (ff_x + f_t) = \frac{f(x(t) + hf, t + h) - f}{h} + O(h).$$

En particular tomando  $t = t_0$  y reemplazando en (4.12) (recuerde que  $t_1 = t_0 + h$ )

$$x(t_1) = x(t_0) + \frac{1}{2}hf(x(t_0), t_0) + \frac{1}{2}hf(x(t_0) + hf(x(t_0), t_0), t_1) + O(h^2),$$

lo que provee el método de Runge-Kutta de segundo orden

$$x_k = x_{k-1} + \frac{1}{2}(f_{k-1}^1 + f_{k-1}^2),$$

donde  $f_{k-1}^1 = f(x_{k-1}, t_{k-1})$  y  $f_{k-1}^2 = f(x_{k-1} + hf_{k-1}^1, t_k)$ .

## Capítulo 4

# Ecuaciones diferenciales lineales

En la sección 3 estudiamos las ecuaciones lineales **de primer orden**. En este capítulo estudiaremos las ecuaciones lineales de orden general. Pero antes de comenzar a estudiar este tipo de ecuaciones daremos un par de definiciones que serán vistas en un contexto de mayor generalidad en el próximo capítulo.

### 1. Definiciones previas

**Definición 1.0.1.** Dadas las funciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y los números reales  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , la expresión

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

se denomina una **combinación lineal** de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

*Ejemplo 1.1.* Dadas las funciones  $\ln(x)$ ,  $\text{sen}(x)$ ,  $e^x$ ,

$$3 \ln(x) - 2 \text{sen}(x) + e^x$$

es una combinación lineal de las funciones dadas, donde  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -2$  y  $\lambda_3 = 1$ .

**Definición 1.0.2.** Dado un conjunto de funciones  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  diremos que es linealmente dependiente (LD) si existe  $x_i$  tal que

$$x_i = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_n x_n$$

para ciertos reales  $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$ . Esto equivale a decir que  $x_i$  es una combinación lineal de  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ .

*Ejercicio 1.1.* Verifique que la definición de funciones LD es equivalente a la siguiente:

El conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es LD si, y sólo si, existen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  **no todos nulos** tal que

$$0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

*Observación 1.1.* Note que dos funciones  $\{x_1, x_2\}$  son LD si, y sólo, si una es un múltiplo no nulo de la otra.

*Observación 1.2.* Las funciones  $\cos(x), \sin(x), \sin(x + 3)$  son LD. En efecto, usando que  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$  se tiene que

$$\sin(x + 3) = \cos(3)\sin(x) + \sin(3)\cos(x),$$

o sea que  $\sin(x + 3)$  es una combinación lineal de  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ .

**Definición 1.0.3.** Dado un conjunto de funciones  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  diremos que es linealmente independiente (LI) si no es LD. Equivalentemente, si

$$0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n,$$

entonces necesariamente  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

*Ejemplo 1.2.* Veamos que el conjunto  $\{e^{at}, e^{bt}, e^{ct}\}$ , con  $a, b, c$  reales distintos, es LI. Planteamos

$$\lambda_1 e^{at} + \lambda_2 e^{bt} + \lambda_3 e^{ct} = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Derivando esta igualdad tenemos que

$$a\lambda_1 e^{at} + b\lambda_2 e^{bt} + c\lambda_3 e^{ct} = 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

y derivando nuevamente,

$$a^2 \lambda_1 e^{at} + b^2 \lambda_2 e^{bt} + c^2 \lambda_3 e^{ct} = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Evaluando en  $t = 0$ , obtenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que la matriz del sistema es una matriz de Van der Monde  $V(a, b, c)$ , cuyo determinante es

$$\det(V(a, b, c)) = (c - a)(c - b)(b - a).$$

Como  $a, b, c$  son distintos, el determinante es distinto de 0 y el sistema tiene única solución  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

*Ejemplo 1.3.* Con la misma técnica probemos que  $\{e^{at}, te^{at}, t^2e^{at}\}$  es un conjunto LI. Planteamos

$$\lambda_1 e^{at} + \lambda_2 te^{at} + \lambda_3 t^2 e^{at} = 0.$$

Derivando una vez tenemos

$$\lambda_1 a e^{at} + \lambda_2 (e^{at} + a t e^{at}) + \lambda_3 (2 t e^{at} + a t^2 e^{at}) = 0.$$

Derivando otra vez obtenemos

$$\lambda_1 a^2 e^{at} + \lambda_2 (2 a e^{at} + a^2 t e^{at}) + \lambda_3 (2 e^{at} + 4 a t e^{at} + a^2 t^2 e^{at}) = 0.$$

Las 3 igualdades valen para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Evaluando en  $t = 0$ , tenemos que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  son solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & 2a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene única solución  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  y por lo tanto el conjunto es LI.

*Ejemplo 1.4.* Veamos que el conjunto  $\{e^{at} \cos(bt), e^{at} \sin(bt)\}$ , con  $b \neq 0$ , es LI. Planteamos

$$\lambda_1 e^{at} \cos(bt) + \lambda_2 e^{at} \sin(bt) = 0,$$

donde suponemos que la identidad que se verifica  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Derivando tenemos

$$\lambda_1 (a e^{at} \cos(bt) - b e^{at} \sin(bt)) + \lambda_2 (a e^{at} \sin(bt) + b e^{at} \cos(bt)) = 0,$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ . Al evaluar las dos igualdades en  $t = 0$ , obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ a \lambda_1 + b \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Luego el conjunto considerado es LI.

## 2. Ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden

Lo mismo que ocurre con las ecuaciones algebraicas, las ecuaciones diferenciales más sencillas de resolver, o al menos aquellas para las que existen métodos generales de resolución son las lineales.

**Definición 2.0.4.** Una ecuación diferencial se dice **lineal** si puede escribirse como

$$\sum_{i=0}^n a_i(t)x^{(i)} = f(t),$$

donde  $x^{(i)}$  denota la  $i$ -ésima derivada de la función  $x(t)$ . Se dice que es una ecuación diferencial **homogénea** si  $f = 0$ . Finalmente, se dice **a coeficientes constantes** si  $a_i(t) = a_i$  son constantes (independientes de  $t$ ).

Comencemos por ver qué relaciones existen entre las soluciones de una ecuación lineal no homogénea y su ecuación homogénea asociada.

*Proposición 2.1.* 1. La suma de dos soluciones de una ecuación lineal homogénea es solución de esa ecuación homogénea.

2. Un múltiplo de una solución de una ecuación homogénea es solución de esa ecuación homogénea.

3. Todas las soluciones de una ecuación lineal no homogénea se obtienen sumando a la solución general de la ecuación homogénea asociada una solución particular de la ecuación no homogénea.

**Dem:** Las dos primeras afirmaciones son consecuencia de la linealidad de la derivada.

Notemos por  $x_{pnh}$  a una solución particular de la ecuación no homogénea y  $x_{ph}$  a una solución particular de la ecuación homogénea asociada. Entonces  $x_{ph} + x_{pnh}$  es solución de la ecuación no homogénea pues

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i(t)(x_{ph} + x_{pnh})^{(i)} &= \sum_{i=0}^n a_i(t)(x_{ph})^{(i)} + \sum_{i=0}^n a_i(t)(x_{pnh})^{(i)} \\ &= 0 + f(t) = f(t). \end{aligned}$$

Además, dadas  $x_{pnh1}$  y  $x_{pnh2}$ , dos soluciones particulares de la ecuación no homogénea, la resta  $x_{pnh1} - x_{pnh2}$  es solución de la ecuación homogénea asociada pues:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i(t)(x_{pnh1} - x_{pnh2})^{(i)} &= \sum_{i=0}^n a_i(t)(x_{pnh1})^{(i)} - \sum_{i=0}^n a_i(t)(x_{pnh2})^{(i)} \\ &= f(t) - f(t) = 0. \end{aligned}$$

La demostración de la última afirmación es consecuencia de estas dos propiedades.

□

*Observación 2.1.* De la proposición se desprende el siguiente resultado: Si  $x_1, \dots, x_n$  son soluciones de la ecuación homogénea y  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , entonces  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$  es solución de la ecuación homogénea. Esto es, toda combinación lineal de soluciones de una ecuación homogénea es solución de la ecuación homogénea.

Más aún, vamos a ver que si tenemos  $n$  soluciones LI de una ecuación lineal homogénea de orden  $n$ , entonces cualquier solución de la ecuación homogénea se escribe como combinación lineal de estas soluciones.

Si bien enunciaremos los resultados para ecuaciones de orden  $n$ , haremos las demostraciones para el caso  $n = 2$ . Comencemos con algunas definiciones y resultados previos:

**Definición 2.0.5.** Dadas  $f_1, \dots, f_n$  funciones  $n$  veces derivables, definimos el **wronskiano** de  $f_1, \dots, f_n$  en  $t$  como el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

En particular, para  $n = 2$  tenemos que el wronskiano de  $f_1, f_2$  es

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} = f_1(t)f_2'(t) - f_1'(t)f_2(t).$$

*Lema 2.1.* Si  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  son soluciones de la ecuación homogénea

$$\sum_{i=0}^n a_i(t)x^{(i)} = 0, \quad a_n(t) \neq 0, \forall t$$

entonces su wronskiano o es idénticamente nulo o no se anula en ningún punto.

**Dem:** La haremos para  $n = 2$ . Supongamos que  $x_1, x_2$  son dos soluciones de la ecuación

$$a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0.$$

Su wronskiano es  $W(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)$ . Veamos que el wronskiano verifica la ecuación diferencial

$$W'(t) = -\frac{a_1(t)}{a_2(t)}W.$$

Para simplificar la notación, no escribiremos la dependencia de  $t$ . Tenemos que

$$W'(t) = x_1'x_2' + x_1x_2'' - x_1''x_2 - x_1'x_2'.$$

Como  $x_1, x_2$  son soluciones de la ecuación homogénea,

$$x_i'' = -\frac{a_1(t)}{a_2(t)}x_i' - \frac{a_0(t)}{a_2(t)}x_i,$$

para  $i = 1, 2$ . Reemplazando queda

$$W'(t) = -\frac{a_1(t)}{a_2(t)}(x_1x_2' - x_1'x_2) = -\frac{a_1(t)}{a_2(t)}W.$$

Luego,

$$W(t) = Ce^{-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt}.$$

Entonces,  $W(t) = 0$  o  $W(t) \neq 0, \forall t$ .  $\square$

*Lema 2.2.* Sean  $x_1, \dots, x_n$  soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$\sum_{i=0}^n a_i(t)x^{(i)} = 0.$$

Entonces,  $x_1, \dots, x_n$  son LD si, y sólo si,  $W(t) = 0, \forall t$ .

**Dem:** Nuevamente la haremos para  $n = 2$ . Las soluciones  $x_1, x_2$  son LD si existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $x_2(t) = kx_1(t)$ . Luego,  $x_2'(t) = kx_1'(t)$  y reemplazando,

$$W(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) = 0.$$

Supongamos ahora que  $W(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) = 0, \forall t$ .

Si  $x_1(t) = 0$  para todo  $t$ , el conjunto  $\{x_1, x_2\}$  es LD ya que  $x_1(t) = 0 \cdot x_2(t)$ .

Supongamos que  $x_1(t) \neq 0$ , entonces

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)' = \frac{x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)}{x_1^2(t)} = 0$$

Luego

$$\frac{x_2}{x_1} = k \in \mathbb{R}$$

y por lo tanto,

$$x_2(t) = kx_1(t).$$

Ésto es,  $x_1, x_2$  son LD.  $\square$



*Teorema 2.1.* Sean  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  soluciones LI de la ecuación homogénea  $\sum_{i=0}^n a_i(t)x^{(i)} = 0$ . Entonces

$$c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t), \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

es la solución general de la ecuación homogénea. Ésto es, dada una solución particular de la ecuación lineal homogénea  $x_p$ , existen constantes  $c_i \in \mathbb{R}$  tales que  $x_p = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$ .

**Dem:** La haremos para  $n = 2$ . Sean  $x_1(t), x_2(t)$  dos soluciones LI de la ecuación

$$a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0$$

y sea  $x_p(t)$  una solución particular de esta ecuación. Esta solución particular queda determinada por su valor y el valor de su derivada en un punto  $t_0$ . Ésto es,  $x_p(t)$  es la única solución del problema

$$\begin{cases} a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Queremos ver que existen  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $x_p(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ . Consideremos  $c_1, c_2$  la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x'_1(t_0) & x'_2(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de este sistema es el wronskiano de  $x_1, x_2$  en  $t_0$ . Como  $\{x_1, x_2\}$  es LI, entonces  $W(t_0) \neq 0$ . Luego este sistema tiene única solución  $c_1, c_2$  y  $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  es una solución del problema 2.2. Por el teorema de existencia y unicidad se sigue que

$$x_p(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t).$$

□

*Ejemplo 2.1.* Veamos que  $c_1e^t + c_2e^{2t}$  es la solución general de la ecuación  $x'' - 3x' + 2x = 0$ . Observemos que  $e^t$  y  $e^{2t}$  son soluciones de esta ecuación homogénea. Además son soluciones linealmente independientes ya que

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} = e^{3t} \neq 0.$$

Por el teorema anterior podemos asegurar que  $x_{gh}(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$  es la solución general de la ecuación.

*Ejemplo 2.2.* Hallemos una solución particular de la ecuación

$$x'' - 3x' + 2x = 0$$

que verifique  $x(0) = -1$  y  $x'(0) = 3$ . Ya sabemos que la solución general es  $x_{gh}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ . Debemos hallar  $c_1, c_2$  para que se verifiquen las condiciones iniciales, ésto es,  $c_1, c_2$  deben ser solución del sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= -1 \\ c_1 + 2c_2 &= 3 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos que  $c_1 = -5$  y  $c_2 = 4$ . Luego la solución particular es  $x_p(t) = -5e^t + 4e^{2t}$ .

### 3. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas a coeficientes constantes

Veamos ahora métodos para resolver las **ecuaciones lineales homogéneas a coeficientes constantes**. En los ejemplos no iremos más allá de las ecuaciones de tercer orden, ésto implica que para nosotros  $1 \leq n \leq 3$ .

Supongamos que  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son funciones derivables. En tal caso, es fácil ver, calculando el límite del cociente incremental, que la función

$$X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida como

$$X(t) = x_1(t) + ix_2(t)$$

también es derivable, y vale que

$$\frac{dX(t)}{dt} = X'(t) = x_1'(t) + ix_2'(t).$$

**Definición 3.0.6.** *Un operador diferencial lineal  $L$  de orden  $n$  es una aplicación de la forma*

$$L(x(t)) = \sum_{i=0}^n a_i(t)x^{(i)}(t)$$

con  $a_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Diremos que el operador es **lineal a coeficientes constantes** si los  $a_i(t) = a_i$  son constantes.

*Observación 3.1.* Note que el “dominio natural” de un operador de orden  $n$  son las funciones  $C^n$  (funciones  $n$ -veces derivables).

*Ejercicio 3.1.* Demuestre que si  $L$  es un operador lineal se tiene que

1.  $L(x_1(t) + x_2(t)) = L(x_1(t)) + L(x_2(t))$
2.  $\forall C \in \mathfrak{C}, L(Cx(t)) = CL(x(t)).$
3. Si  $x = x(r, t)$  (o sea que  $x$  depende de otra variable  $r$ ), y es suficientemente derivable,

$$\frac{\partial L(x(r, t))}{\partial r} = L\left(\frac{\partial x(r, t)}{\partial r}\right)$$

(Sug.: use que las derivadas respecto de  $x$  y  $t$  conmutan)

4.  $L(x_1(t) + ix_2(t)) = L(x_1(t)) + iL(x_2(t)).$

*Observación 3.2.* Usando operadores lineales las ecuaciones diferenciales lineales pueden escribirse con facilidad. Por ejemplo, dada la ecuación lineal  $\sum_{i=0}^n a_i(t)x^{(i)} = f(t)$ , consideramos el operador asociado

$$L(x(t)) = \sum_{i=0}^n a_i(t)x^{(i)}(t)$$

y entonces la ecuación puede escribirse

$$L(x(t)) = f(t).$$

La ecuación homogénea asociada se escribe

$$L(x(t)) = 0.$$

Consideremos ahora la ecuación

$$\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)} = 0 \tag{3.3}$$

En el caso de una ecuación lineal homogénea de orden 1

$$a_1 x' + a_0 x = 0.$$

Según lo que hemos visto en la sección 3, la solución de la ecuación es

$$x_{gh} = Ce^{-\frac{a_0}{a_1}t}$$

Llamemos  $\lambda = -\frac{a_0}{a_1}$  y observemos que  $\lambda$  es raíz del polinomio  $p(x) = a_1x + a_0$ . Éste es, como veremos, el polinomio característico asociado a la ecuación homogénea considerada.

De acuerdo a lo obtenido en el caso  $n = 1$ , es razonable proponer como solución de las ecuaciones lineales de orden superior a la función

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

y analizar qué condiciones debe satisfacer  $\lambda$  para que esta función sea solución de la ecuación diferencial. Para ello se reemplaza en (3.3) lo que produce

$$\sum_{i=0}^n a_i C \lambda^i e^{\lambda t} = C e^{\lambda t} \left( \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \right) = 0$$

Como no queremos una solución idénticamente nula suponemos que  $C \neq 0$ . En consecuencia, para obtener una solución (ya que la exponencial nunca se anula), debemos hallar  $\lambda$  tal que

$$\sum_{i=0}^n a_i \lambda^i = 0.$$

O sea que  $\lambda$  debe ser una raíz del así llamado **polinomio característico**

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Es decir que cada raíz  $\lambda_i$  de dicho polinomio genera una solución de la forma

$$x(t) = Ce^{\lambda_i t},$$

con  $C$  una constante de integración arbitraria.

Imaginemos por un instante que  $P$  posee exactamente  $n$  raíces reales diferentes, digamos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . En tal caso, como  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  son funciones LI (la demostración es análoga a la dada en el Ejemplo 1.2), por el teorema 2.1,

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}, \tag{3.4}$$

con  $C_i \in \mathbb{R}$ , es la solución general de la ecuación homogénea y aquí vemos aparecer las  $n$  constantes de integración. Esto indica que conociendo las raíces del polinomio característico conocemos **todas** las soluciones de (3.3).

¿Qué ocurre en el caso en que el polinomio no posea  $n$  raíces reales distintas? En tal caso no habrá suficientes constantes de integración en (3.4) indicando que estamos perdiendo soluciones. La siguiente proposición nos proporciona la solución general en el caso de ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n \leq 3$ .

*Proposición 3.1.* La solución de la ecuación 3.3 está dada en los siguientes casos:

**Caso n=1** El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es

$$P(x) = a_1x + a_0,$$

que tiene una sola raíz, digamos  $r \in \mathbb{R}$ . La solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = Ce^{rt}.$$

**Caso n=2** El polinomio característico es

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

y se tienen las siguientes posibilidades:

1. El polinomio tiene dos raíces reales **distintas**, digamos  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ . La solución de la ecuación es

$$x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$$

2. El polinomio tiene **una sola raíz real de multiplicidad 2**, digamos  $r \in \mathbb{R}$ . La solución es entonces

$$x(t) = C_1e^{rt} + C_2te^{rt}$$

(y acá aparecen las dos constantes de integración aunque haya una sola raíz.)

3. El polinomio tiene **una raíz compleja**, digamos  $r_1 = a + ib$ . Entonces también es raíz su conjugada  $r_2 = a - ib$ . En este caso la solución es

$$x(t) = C_1e^{at} \operatorname{sen}(bt) + C_2e^{at} \operatorname{cos}(bt).$$

**Caso n=3** El polinomio característico es

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

y tenemos las siguientes posibilidades:

1. Tiene las tres raíces reales **distintas**, digamos  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ . La solución es

$$x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + C_3e^{r_3t}.$$

2. Tiene **una raíz real de multiplicidad 2**, entonces la tercera también es real. Digamos  $r_d \in \mathbb{R}$  y  $r_s \in \mathbb{R}$  son las raíces doble y simple respectivamente. La solución es

$$x(t) = C_1 e^{r_s t} + C_2 e^{r_d t} + C_3 t e^{r_d t}.$$

3. Tiene **una raíz real de multiplicidad 3**, digamos  $r \in \mathbb{R}$ . Entonces la solución general es

$$x(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} + C_3 t^2 e^{rt}.$$

4. Tiene **una sola raíz real**  $r \in \mathbb{R}$ . Entonces tiene un par de raíces complejas conjugadas  $a + ib$ ,  $a - ib$ . Entonces la solución es

$$x(t) = C_1 e^{rt} + C_2 e^{at} \operatorname{sen}(bt) + C_3 e^{at} \operatorname{cos}(bt).$$

**Dem:** Si las raíces del polinomio característico son todas reales y distintas ya hemos demostrado los resultados enunciados.

Veamos qué ocurre cuando hay una raíz real doble  $r_0$  en el polinomio característico. Supongamos, sin perder generalidad, que la ecuación es de segundo orden y se escribe

$$L(x) = a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0.$$

El polinomio característico es

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Queremos probar que, además de  $e^{r_0 t}$ , también  $t e^{r_0 t}$  es solución de la ecuación diferencial. Ahora bien, como  $r_0$  es doble entonces  $P(r_0) = 0$  y  $P'(r_0) = 0$ . En particular si fijamos  $t$  y construimos la función

$$g(r) = L(e^{rt}),$$

ésta debe anularse en  $r_0$ . En efecto

$$g(r_0) = L(e^{r_0 t}) = e^{r_0 t} (a_2 r_0^2 + a_1 r_0 + a_0) = e^{r_0 t} P(r_0) = 0.$$

Derivando  $g$  respecto de  $r$  y evaluando en  $r_0$  se tiene, por un lado

$$\frac{dg}{dr}(r_0) = \frac{\partial L(e^{rt})}{\partial r}(r_0) = \frac{\partial (e^{rt} P(r))}{\partial r}(r_0) = r_0 e^{r_0 t} P(r_0) + e^{r_0 t} P'(r_0) = 0$$

pues  $r_0$  es raíz doble, y por otro lado (ver ítem 3) del Ejercicio 3.1) tenemos que

$$\frac{dg}{dr}(r_0) = \frac{\partial L(e^{rt})}{\partial r}(r_0) = L\left(\frac{\partial e^{rt}}{\partial r}\right)(r_0).$$

Por ende

$$L(te^{r_0 t}) = 0,$$

como queríamos demostrar.

En el caso de una raíz compleja  $a + bi$  ( $b \neq 0$ ), queremos ver que

$$e^{at} \cos(bt) \quad \text{y} \quad e^{at} \operatorname{sen}(bt)$$

son soluciones de la ecuación. Observemos que  $e^{(a+bi)t}$  es solución compleja de la ecuación o sea

$$L(e^{(a+bi)t}) = 0.$$

Como

$$e^{(a+bi)t} = e^{at} e^{ibt} = e^{at} \cos(bt) + ie^{at} \operatorname{sen}(bt)$$

se obtiene que (ver ítem 4) del Ejercicio 3.1)

$$0 + i0 = L(e^{(a+bi)t}) = L(e^{at} \cos(bt)) + iL(e^{at} \operatorname{sen}(bt))$$

Entonces

$$L(e^{at} \cos(bt)) = 0 \quad \text{y} \quad L(e^{at} \operatorname{sen}(bt)) = 0,$$

como queríamos demostrar.  $\square$

*Ejemplo 3.1.* Hallemos la solución de la ecuación

$$x''' + 2x'' + x' = 0.$$

Se tiene que

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x$$

cuyas raíces son  $r = -1$  con multiplicidad 2 y  $r = 0$ . La solución es entonces

$$C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t}.$$

*Ejercicio 3.2.* Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

(i)  $y'' - 3y' + 2y = 0$

(ii)  $y'' - y = 0$

(iii)  $y'' - 4y' + 13y = 0$

$$(iv) \quad 9y'' - 30y' + 25y = 0$$

$$(v) \quad y'' + 25y = 0$$

$$(vi) \quad 25y'' - 20y' + 4y = 0$$

*Ejercicio 3.3.* Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales

$$(i) \quad y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$(ii) \quad y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$(iii) \quad y'' + 4y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 4$$

$$(iv) \quad y'' + 9y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

## 4. Algunas aplicaciones.

Para dar ejemplos recordemos ahora la segunda ley de Newton. Esta establece que la fuerza aplicada sobre un objeto material es igual a la derivada (variación instantánea) de la cantidad de movimiento  $m(t)v(t)$  (masa por velocidad) del mismo. O sea

$$F = \frac{d(m(t)v(t))}{dt}.$$

Si la masa del cuerpo no cambia (cosa que no ocurre por ejemplo en un cohete que pierde masa por la tobera de escape) entonces  $m(t) = m$  es constante, y la ley de Newton se escribe

$$F = ma \tag{4.5}$$

donde  $a$  es la aceleración. Veamos ahora un ejemplo clásico de ecuación de segundo orden.

*Ejemplo 4.1. Oscilador armónico* Consideremos un resorte sujeto en una pared. Del otro extremo se fija un cuerpo  $M$  de masa  $m$  que está apoyado sobre una superficie sin rozamiento. ¿Cuál es la ley de movimiento para este cuerpo? En la Figura 6 vemos una descripción de la situación. Es razonable suponer que el cuerpo va a desplazarse en línea recta por lo que podemos imaginar que lo hace a lo largo del eje de las  $x$ . Si fijamos el origen de coordenadas  $x = 0$  de tal modo que coincida con el extremo derecho del resorte cuando éste no está deformado (y por ende no opone resistencia), entonces la fuerza (que llamaremos  $F_r$ ) que actúa sobre la masa cuando el extremo del resorte está en un punto  $x$  es, por la ley de Hooke (ver Observación 4.1),

$$F_r = -Kx,$$



donde  $K > 0$  es la constante de rigidez del resorte. Usando la ley de Newton (4.5) obtenemos la ecuación

$$ma = -Kx,$$

o sea

$$mx'' + Kx = 0.$$

El polinomio característico de esta ecuación es:

$$P(x) = mx^2 + K.$$

Como la masa y la constante del resorte son positivas,  $P(x)$  tiene raíces complejas

$$r = i\sqrt{\frac{K}{m}} \quad y \quad \bar{r} = -i\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Llamando  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ , la solución general es

$$x(t) = C_1 \text{sen}(\omega t) + C_2 \text{cos}(\omega t),$$

solución evidentemente periódica como era de esperar. En la Figura 7 se grafica una solución particular. Vemos que el cuerpo oscila alrededor de la posición de equilibrio con amplitud y frecuencia constante.

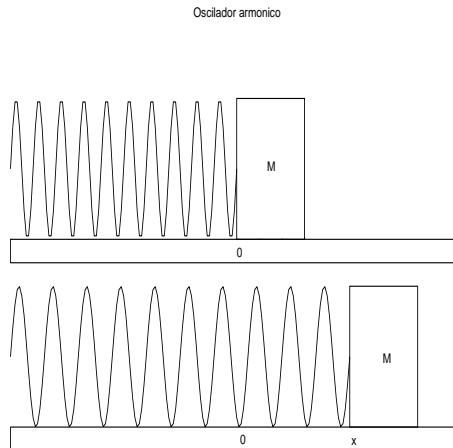


Figura 6

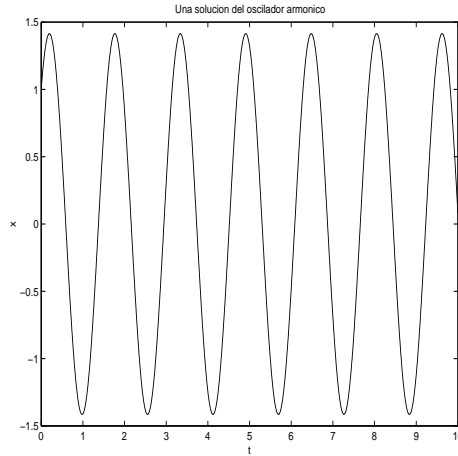


Figura 7

*Ejercicio 4.1.* Estudie el efecto de considerar diferentes valores de  $\omega$ . Prediga las consecuencias de utilizar resortes más rígidos ( $K$  grande) para una masa fija, o masas menores para una misma rigidez del resorte.

*Observación 4.1.* La ley de Hooke establece que en los materiales *elásticos* (o sea: que recuperan su forma después de una deformación) la fuerza restauradora es proporcional a la deformación sufrida por el material. La constante de proporcionalidad se denomina constante de rigidez. Esta ley es válida para cierto rango de deformaciones, traspasado el umbral de *linealidad* el material puede manifestar deformaciones permanentes (deformaciones plásticas) y la ley de Hooke deja de ser válida.

*Ejemplo 4.2. Oscilador amortiguado* Se propone estudiar la ecuación del movimiento del mismo experimento anterior pero agregando un amortiguador en *paralelo* con el resorte (ver Figura 8).

Oscilador amortiguado

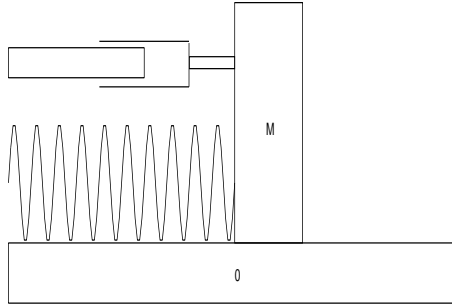


Figura 8

En este caso, a la fuerza que produce el resorte  $F_r$  se le suma la fuerza producida por el amortiguador  $F_a$ . Debido a la viscosidad del fluido encerrado en el amortiguador éste presenta una resistencia proporcional a la velocidad del desplazamiento, es decir

$$F_a = \delta v = \delta x'(t),$$

donde  $\delta > 0$  es un coeficiente relacionado con la viscosidad del fluido. La suma de las fuerzas actuantes sobre el cuerpo  $M$  es ahora

$$F_a + F_r = -Kx - \delta x'(t).$$

Usando de nuevo la ley de Newton (4.5) resulta que el desplazamiento resultante  $x(t)$  verifica la ecuación

$$mx''(t) + \delta x'(t) + Kx(t) = 0.$$

Su polinomio característico es

$$P(x) = mx^2 + \delta x + K.$$

El tipo de raíces de este polinomio dependerá desde luego de su discriminante:

$$D = \delta^2 - 4mK \tag{4.6}$$

Estudiamos cómo afecta a las soluciones el signo del discriminante.

**Caso  $D < 0$ :** Esto ocurre por ejemplo si hay poca viscosidad.  $P(x)$  tiene dos raíces complejas conjugadas

$$r = -\frac{\delta}{2m} + i\sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{\delta}{2m}\right)^2} \quad \text{y} \quad \bar{r} = -\frac{\delta}{2m} - i\sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{\delta}{2m}\right)^2}$$

Llamando  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{\delta}{2m}\right)^2}$  la solución general de ecuación diferencial es

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{\delta}{2m}t} \text{sen}(\omega t) + C_2 e^{-\frac{\delta}{2m}t} \text{cos}(\omega t).$$

En la Figura 9 se ve el comportamiento de una solución particular. La amplitud de la oscilaciones alrededor de  $x = 0$  disminuye (pero la frecuencia es constante!).

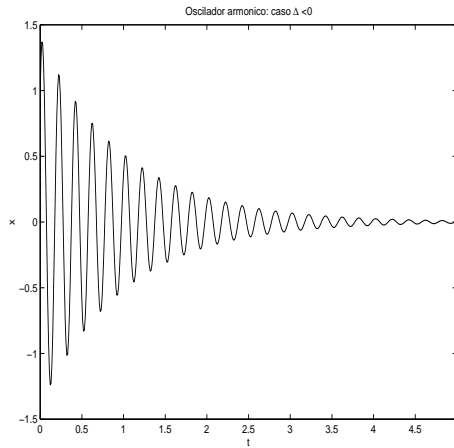


Figura 9

**Caso  $D > 0$ :** Caso con viscosidad grande.  $P(x)$  tiene dos raíces reales distintas

$$r_1 = -\frac{\delta}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\delta}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} \quad \text{y} \quad r_2 = -\frac{\delta}{2m} - \sqrt{\left(\frac{\delta}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}},$$

ambas negativas. La solución general es

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

En la Figura 10 se observa una solución particular para este caso. En el ejemplo de la figura no ocurre ninguna oscilación y el movimiento es rápidamente amortiguado.

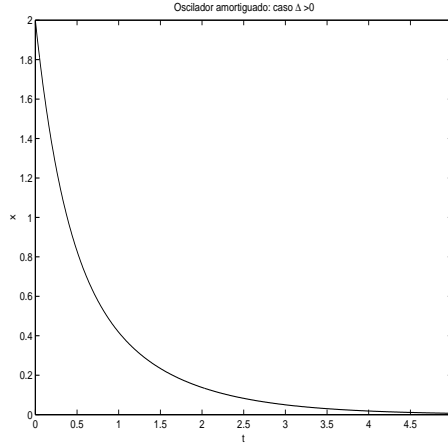


Figura 10

- Ejercicio 4.2.* 1. Estudie para el ejemplo anterior el caso  $D = 0$ .
2. En el caso  $D > 0$  halle alguna solución particular donde exista por lo menos una oscilación. Una vez hallada esa solución encuentre la posición y la velocidad del cuerpo  $M$  en  $t = 0$  ( $x(0)$  y  $x'(0)$ ) e interprete los resultados.

*Ejemplo 4.3.* Para el experimento del oscilador amortiguado se consideran las siguientes constantes físicas:  $K = 1$ ,  $\delta = 1$  y  $m = 1$ . Suponiendo que en el tiempo inicial  $t = 0$  el cuerpo  $M$  se encuentra en la posición  $x(0) = -1$  y su velocidad inicial es de  $v(0) = x'(0) = -1$ , se quiere hallar la solución del PVI. Primero buscamos la solución general, y para ello calculamos el discriminante del polinomio característico

$$D = -3 < 0.$$

Por ende

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{cos}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)$$

es la solución general. Viendo los “datos de iniciales” tenemos que

$$-1 = x(0) = C_2$$

$$-1 = x'(0) = \sqrt{\frac{3}{4}}C_1 - \frac{1}{2}C_2$$

O sea  $C_1 = -\sqrt{3}$  y  $C_2 = -1$ . Luego, la solución particular obtenida con estas constantes

$$x(t) = -\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right) - e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{cos}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)$$

resuelve el PVI.

## 5. Resolución de ecuaciones lineales no homogéneas

Veamos que pasa si la ecuación es **no homogénea**. Sea

$$\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)}(t) = f(t) \quad (5.7)$$

El método más general para resolver estos problemas se llama **variación de las constantes o de los parámetros**. Sin embargo cuando  $f(t)$  tiene cierta forma especial y el operador  $L$  tiene coeficientes constantes suele utilizarse otro método conocido como de **coeficientes indeterminados**.

### 5.1. Método de coeficientes indeterminados

El método de coeficientes indeterminados se basa en el hecho que derivar un polinomio da como resultado un polinomio con un grado menos, derivar una exponencial da una exponencial, y senos y cosenos dan cosenos y senos respectivamente. En tal caso si  $f(t)$  está construida con funciones de este tipo, parece razonable buscar una solución del mismo tipo.

*Ejemplo 5.1.* Busquemos una solución particular de la ecuación

$$x'' + x' - 2x = e^{3t}.$$

Es razonable suponer que tal solución particular tiene la forma  $x_p(t) = ae^{3t}$ , con  $a \in \mathbb{R}$  una constante que debemos determinar de modo que se verifique la ecuación diferencial. Derivando y reemplazando en la ecuación obtenemos que  $a = \frac{1}{10}$  y, por lo tanto,  $x_p(t) = \frac{1}{10}e^{3t}$  es una solución particular.

*Ejemplo 5.2.* Busquemos ahora una solución particular de la ecuación

$$x'' + x' - 2x = e^{-2t}.$$

Siguiendo la idea del ejemplo anterior, proponemos como solución particular de la ecuación  $x_p(t) = ae^{-2t}$ . Ahora, al derivar y reemplazar en la ecuación, tenemos que

$$0 = e^{-2t}.$$

Luego, la función que propusimos no es solución de la ecuación. Observemos que es solución de la ecuación homogénea asociada. En este caso, lo que

podemos hacer es proponer como solución particular  $x_p(t) = ate^{-2t}$ . Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos que  $a = -\frac{1}{3}$  y, en consecuencia,  $x_p(t) = -\frac{1}{3}te^{-2t}$  es la solución particular que estamos buscando.

En general, veamos el siguiente

*Teorema 5.1.* Considere un operador lineal a coeficientes constantes y reales  $L$ , y la ecuación diferencial

$$L(x(t)) = f(t), \tag{5.8}$$

donde  $f$  tiene la forma

$$f(t) = e^{at}(P_n(t)\cos(bt) + Q_m(t)\sen(bt))$$

con  $P_n(t)$  y  $Q_m(t)$  polinomios de grado  $n$  y  $m$  respectivamente. Entonces:

1. Si  $a + ib$  es raíz del polinomio característico de multiplicidad  $s$ , una solución **particular** del problema no homogéneo (5.8)  $x_{pnh}$ , tiene la forma

$$x_{pnh}(t) = t^s e^{at}(\hat{P}_k(t)\cos(bt) + \hat{Q}_k(t)\sen(bt))$$

donde  $k = \max\{m, n\}$ , y  $\hat{P}_k, \hat{Q}_k$ , son polinomios de grado  $k$ .

2. Si  $a + ib$  **no** es raíz del polinomio característico, una solución **particular** del problema no homogéneo (5.8)  $x_{pnh}$ , tiene la forma

$$x_{pnh}(t) = e^{at}(\hat{P}_k(t)\cos(bt) + \hat{Q}_k(t)\sen(bt))$$

donde  $k, \hat{P}_k$ , y  $\hat{Q}_k$ , son como en el item previo.

El teorema anterior nos va a permitir hallar soluciones particulares de problemas no homogéneos  $x_{pnh}$ . Si queremos una **solución general del no homogéneo**  $x_{gnh}$ , buscamos una solución general del homogéneo  $x_{gh}$  y entonces

$$x_{gnh} = x_{pnh} + x_{gh},$$

como hemos visto.

*Observación 5.1.* En el ejemplo 5.2,  $a + bi = -2$  es raíz simple del polinomio característico, por eso debimos multiplicar por  $t$  a la solución particular que habíamos propuesto originalmente.

Veamos en un par de ejemplos cómo se utiliza el teorema:

*Ejemplo 5.3.* Resolvamos la ecuación no homogénea

$$x''' - x'' + x' - x = t^2 + t.$$

Evidentemente si elegimos  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $P_2(t) = t^2 + t$ ,  $Q_0 = 1$  se tiene que el segundo miembro de la ecuación diferencial tiene la forma

$$t^2 + t = e^{at}(P_n(t)\cos(bt) + Q_m(t)\sen(bt))$$

Además  $a + ib = 0 + i0 = 0$  no es raíz del polinomio característico. Entonces por el Teorema 5.1 se tiene que una solución particular  $x_{pnh}(t)$  es de la forma

$$x_{pnh}(t) = \hat{P}_2(t).$$

Proponemos ciertos coeficientes indeterminados  $a_2, a_1, a_0$

$$\hat{P}_2(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$$

Reemplazando en la ecuación diferencial resulta que los coeficientes deben verificar

$$\begin{aligned} -1 &= a_2 \\ 1 &= 2a_2 - a_1 \\ 0 &= -2a_2 + a_1 - a_0 \end{aligned}$$

O sea  $a_2 = -1$ ,  $a_1 = -3$ ,  $a_0 = -1$ . Una solución particular es, entonces, de la forma

$$x_{pnh}(t) = -t^2 - 3t - 1. \tag{5.9}$$

Por su parte la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$x_{gh}(t) = C_1e^t + C_2\cos(t) + C_3\sen(t). \tag{5.10}$$

Entonces la solución general de la ecuación no homogénea es

$$x_{gnh}(t) = x_{pnh}(t) + x_{gh}(t) = -t^2 - 3t - 1 + C_1e^t + C_2\cos(t) + C_3\sen(t).$$

*Ejemplo 5.4.* Resolvamos la ecuación

$$x''' - 4x'' + 5x' - 2x = (t + 1)e^t$$

Si elegimos  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $P_1(t) = t + 1$  y  $Q_0(t) = 0$ , el segundo miembro de la ecuación se puede escribir como

$$(t + 1)e^t = e^{at}(P_1(t)\cos(bt) + Q_0(t)\sen(bt))$$



Como  $a + bi = 1$  es raíz doble del polinomio característico, proponemos como solución particular

$$x_{pnh}(t) = t^2(a_1t + a_0)e^t,$$

donde  $a_0, a_1$  son los coeficientes que debemos determinar. Reemplazando en la ecuación y simplificando obtenemos que

$$(-6a_1t + 6a_1 - 2a_0)e^t = (t + 1)e^t.$$

Luego,  $a_0, a_1$  deben verificar

$$\begin{cases} -6a_1 & = & 1 \\ 6a_1 - 2a_0 & = & 1 \end{cases}$$

Despejando tenemos que  $a_0 = -1$  y  $a_1 = -\frac{1}{6}$ . Luego, una solución particular es  $x_p(t) = t^2(-\frac{1}{6}t - 1)e^t$  y la solución general de la ecuación es

$$x_{gnh}(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t} + t^2(-\frac{1}{6}t - 1)e^t.$$

*Ejercicio 5.1.* Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales o problemas de valores iniciales no homogéneos, por el método de coeficientes indeterminados.

(i)  $y'' - y' - 6y = \cos 3x$

(ii)  $y'' + 2y' + 2y = x^3 - 1$

(iii)  $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$

(iv)  $y'' - 7y' + 12y = \operatorname{sen}x - \operatorname{cos}x$

(v)  $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

(vi)  $y'' - 2y' + 5y = x + \operatorname{sen}3x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

(vii)  $y'' - 3y' + 2y = 2x - e^{-2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

*Ejemplo 5.5. Oscilador forzado I* Volvamos al oscilador armónico, pero agreguemos en esta ocasión una fuerza externa  $F_e$  actuando sobre el cuerpo. Supongamos que  $m = 1, K = 1,$  y  $F_e = \operatorname{sen}(wt)$  con  $w \geq 0$  una constante,  $w \neq 1$ . La ecuación diferencial resulta

$$x'' + x = \operatorname{sen}(wt).$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$x_{gh} = C_1\operatorname{cos}(t) + C_2\operatorname{sen}(t).$$

Hay que hallar una solución particular de la ecuación no homogénea. Está claro que eligiendo  $a = 0$ ,  $b = w$ ,  $P_0 = 0$ ,  $Q_0 = 1$  se tiene

$$\text{sen}(wt) = e^{at}(P_n(t)\cos(bt) + Q_m(t)\text{sen}(bt)).$$

Además, como  $w \neq 1$ ,  $a + ib = iw$  no es raíz del polinomio característico y una solución particular tiene por ende la forma

$$x_{pnh}(t) = \hat{Q}_0\text{sen}(wt) + \hat{P}_0\cos(wt).$$

Proponemos coeficientes indeterminados  $a_0 = \hat{Q}_0$  y  $b_0 = \hat{P}_0$ . Reemplazando en la ecuación diferencial resulta

$$a_0 = \frac{1}{(1 - w^2)} \quad y \quad b_0 = 0.$$

Entonces

$$x_{pnh}(t) = \frac{1}{(1 - w^2)}\text{sen}(wt).$$

Luego, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$x_{gnh}(t) = \frac{1}{(1 - w^2)}\text{sen}(wt) + C_1\cos(t) + C_2\text{sen}(t).$$

*Ejercicio 5.2.* Estudie, para el problema propuesto en el ejemplo anterior, qué sucede cuando  $w \rightarrow 1$ . Observe, en particular, que la amplitud de las oscilaciones tiende a infinito. Este fenómeno se denomina resonancia.

*Ejercicio 5.3.* Estudie una vez más el problema del oscilador forzado, pero agregue un *amortiguador* en paralelo con el resorte. Vuelva a estudiar el problema de la resonancia en este contexto.

## 5.2. Variación de las constantes

Cuando el segundo miembro  $f(t)$  de la ecuación no homogénea no tiene la forma descrita anteriormente se puede utilizar el método de **variación de las constantes**. En la sección 3 usamos este método para resolver ecuaciones lineales de primer orden, veamos ahora como funciona en ecuaciones de segundo orden. Sea

$$a_2x'' + a_1x' + a_0x = f(t) \tag{5.11}$$

y suponga conocida la solución general de la ecuación homogénea

$$x_{gh}(t) = C_1x_{ph1}(t) + C_2x_{ph2}(t).$$

Busquemos la solución general de la ecuación no homogénea haciendo variar las constantes

$$x_{gnh}(t) = C_1(t)x_{ph1}(t) + C_2(t)x_{ph2}(t).$$

Por ende

$$\begin{aligned} x'_{gnh}(t) &= C'_1(t)x_{ph1}(t) + C_1(t)x'_{ph1}(t) + C'_2(t)x_{ph2}(t) + C_2(t)x'_{ph2}(t) \\ x''_{gnh}(t) &= C''_1(t)x_{ph1}(t) + 2C'_1(t)x'_{ph1}(t) + C_1(t)x''_{ph1}(t) \\ &+ C''_2(t)x_{ph2}(t) + 2C'_2(t)x'_{ph2}(t) + C_2(t)x''_{ph2}(t). \end{aligned}$$

Reemplazando estas derivadas en (5.11) y usando que  $x_{ph1}$  y  $x_{ph2}$  resuelven la ecuación homogénea resulta

$$\begin{aligned} f(t) &= a_2(C''_1(t)x_{ph1}(t) + 2C'_1(t)x'_{ph1}(t) + 2C'_2(t)x'_{ph2}(t)) \quad (5.12) \\ &+ C''_2(t)x_{ph2}(t) + a_1(C'_1(t)x_{ph1}(t) + C'_2(t)x_{ph2}(t)). \end{aligned}$$

La idea es ahora elegir  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$  de tal modo que la última igualdad resulte válida. Para lograr este fin se proponen  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$  tales que

$$C'_1(t)x_{ph1}(t) + C'_2(t)x_{ph2}(t) = 0. \quad (5.13)$$

Derivando esta ecuación resulta

$$C'''_1(t)x_{ph1}(t) + C''_1(t)x'_{ph1}(t) + C''_2(t)x'_{ph2}(t) + C'''_2(t)x_{ph2}(t) = 0.$$

Usando esta ecuación y (5.13), se tiene que (5.12) toma la forma

$$f(t) = a_2(C'_1(t)x'_{ph1}(t) + C'_2(t)x'_{ph2}(t)). \quad (5.14)$$

Por ende, si hallamos  $C'_1(t)$  y  $C'_2(t)$  de modo tal que verifiquen (5.13) y (5.14) simultáneamente, e integrándolos posteriormente, habremos hallado una solución general del problema (5.11).

Resumamos: se halla una solución general de la ecuación homogénea

$$x_{gh}(t) = C_1x_{ph1}(t) + C_2x_{ph2}(t)$$

y se busca  $C'_1(t)$  y  $C'_2(t)$  de modo tal que

$$\begin{pmatrix} x_{ph1}(t) & x_{ph2}(t) \\ x'_{ph1}(t) & x'_{ph2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(t) \\ C'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{a_2} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Una vez halladas las expresiones de  $C'_1(t)$  y  $C'_2(t)$  se las integra y aparecen dos constantes de integración  $K_1$  y  $K_2$ . Finalmente la solución buscada tiene la forma

$$x(t) = C_1(t)x_{ph1}(t) + C_2(t)x_{ph2}(t)$$

*Observación 5.2.* Como  $W(x_{ph1}, x_{ph2}) \neq 0$ , el sistema 5.15 tiene única solución.

*Ejemplo 5.6.* Resolvamos la ecuación

$$x'' + x' - 6x = \frac{e^{2t}}{1 + e^t}$$

Primero hallamos la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$x'' + x' - 6x = 0$$

Una base de soluciones es  $\{e^{2t}, e^{3t}\}$ . Entonces una solución particular es

$$x_p(t) = C_1(t)e^{2t} + C_2(t)e^{3t},$$

donde  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$  verifican:

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{2t}}{1+e^t} \end{pmatrix}$$

Esto es,

$$C_2'(t) = \frac{1}{(1 + e^t)e^t} \quad y \quad C_1'(t) = -\frac{1}{1 + e^t}$$

Integrando obtenemos

$$C_1(t) = t - \ln(1 + e^t) + k_1 \quad y \quad C_2(t) = \ln(1 + e^t) - t - e^{-t} + k_2.$$

Luego, la solución general es:

$$x_{gnh}(t) = (t - \ln(1 + e^t) + k_1)e^{2t} + (\ln(1 + e^t) - t - e^{-t} + k_2)e^{3t}.$$

*Ejercicio 5.4.* Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas por el método de variación de las constantes.

(i)  $y'' + y = \sec x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(ii)  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

(iii)  $y'' - y = e^{-x}$

(iv)  $y'' + 3y' + 2y = \text{sen}(e^x)$

*Ejemplo 5.7. Oscilador forzado II* Volvamos al oscilador armónico con las constantes dadas en el ejemplo (5.5) , pero modificando la fuerza externa  $F_e$  actuando sobre el cuerpo  $F_e = \frac{1}{\cos(t)}$ . La ecuación diferencial resulta

$$x'' + x = \frac{1}{\cos(t)}.$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es

$$x_{gh} = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) = C_1 x_{ph1}(t) + C_2 x_{ph2}(t).$$

Hay que hallar  $C_1'(t), C_2'(t)$  de modo que

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(t)} \end{pmatrix}$$

De donde

$$C_1'(t) = -t g(t)$$

$$C_2'(t) = 1$$

Integrando obtenemos

$$C_1 = \ln(|\cos(t)|) + K_1$$

$$C_2 = t + K_2$$

La solución general de la ecuación no homogénea es entonces

$$x_{gnh}(t) = K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t) + \cos(t) \ln(|\cos(t)|) + t \sin(t)$$

*Ejercicio 5.5.* Generalize el método de variación de las constantes para los casos de mayor orden.



# Capítulo 5

## Nociones de Álgebra Lineal

### 1. Espacios vectoriales

Supongamos que  $k = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

**Definición 1.0.1.** Un  $k$ -espacio vectorial es un conjunto  $V$  con operaciones **suma**  $+: V \times V \rightarrow V$  y **producto por escalares**  $\cdot: k \times V \rightarrow V$  que verifican las siguientes propiedades:

1. La suma es asociativa:  $(v + w) + u = v + (w + u), \forall v, w, u \in V$ .
2. La suma es conmutativa:  $v + w = w + v, \forall v, w \in V$ .
3. Existe  $0 \in V$ , tal que  $0 + v = v + 0 = v, \forall v \in V$ .
4. Para cada  $v \in V$ , existe  $w \in V$ , tal que  $v + w = 0$ . A este elemento lo denotaremos  $-v$ .
5. Para todos  $v \in V$ , y  $a, b \in k$ , tenemos  $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$ .
6. Para todo  $v \in V$ ,  $1 \cdot v = v$ .
7. Se verifican las propiedades distributivas:  $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$ ,  
 $\forall a \in k, v, w \in V$  y  $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v, \forall a, b \in k, v \in V$ .

*Ejemplo 1.1.*  $\mathbb{R}^n$  con la suma y el producto por escalares definidos por:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \forall x_i, y_i \in \mathbb{R} \quad y$$

$$a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n), \quad \forall a, x_i \in \mathbb{R}$$

es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

*Ejemplo 1.2.* El conjunto de matrices de tamaño  $n \times m$ , que notamos  $\mathbb{R}^{n \times m}$ , es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, con las operaciones dadas por:

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times m}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Con  $A_{ij}$  notamos al coeficiente que se encuentra en la fila  $i$  y en la columna  $j$  de la matriz  $A$ )

*Ejemplo 1.3.* El conjunto de las funciones  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , con las operaciones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad y \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para  $x \in [a, b]$ , es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. A este espacio vectorial lo llamamos  $\mathcal{F}[a, b]$

A los elementos de un espacio vectorial los llamamos vectores en forma genérica.

**Definición 1.0.2.** Dado un  $k$ -espacio vectorial  $V$ , un subespacio  $S$  es un subconjunto de  $V$  que verifica:

1.  $S \neq \emptyset$ .
2. Dados  $u, v \in S$ , se verifica que  $u + v \in S$ .
3. Dados  $a \in k, v \in S$ , se verifica que  $a \cdot v \in S$ .

*Observación 1.1.* El elemento  $0_V$  pertenece a  $S$ , para todo subespacio  $S$  de  $V$ .

*Ejemplo 1.4.*  $\{0_V\}$  y  $V$  son subespacios de  $V$ . Son llamados los subespacios triviales de  $V$ .

*Ejemplo 1.5.* Los únicos subespacios no triviales de  $\mathbb{R}^2$  son las rectas que pasan por el origen de coordenadas. Los subespacios no triviales de  $\mathbb{R}^3$  son las rectas y los planos que pasan por el origen de coordenadas.

*Ejemplo 1.6.* El conjunto de las funciones continuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es un subespacio de  $\mathcal{F}[a, b]$ . Lo notamos  $\mathcal{C}[a, b]$ . Las funciones polinómicas forman un subespacio de  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ .



## 2. Sistemas de generadores e independencia lineal

**Definición 2.0.3.** Decimos que el vector  $v \in V$  es una combinación lineal de  $v_1, \dots, v_n$  si existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$  tales que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n.$$

*Ejemplo 2.1.* Por ejemplo, el vector  $v = (2, 9)$  es combinación lineal de los vectores  $v_1 = (3, 1), v_2 = (-1, 2), v_3 = (0, 1)$  pues

$$(2, 9) = 2(3, 1) + 4(-1, 2) - (0, 1).$$

*Observación 2.1.* Dados vectores  $v_1, \dots, v_r$  de  $V$ , el conjunto de combinaciones lineales de estos vectores

$$S = \{v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_r, \lambda_i \in k\}$$

es un subespacio de  $V$ . Lo notaremos  $S = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ .

*Ejemplo 2.2.*  $S = \langle (1, 3, -1), (2, 0, 1) \rangle$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ . Geométricamente es un plano de direcciones  $(1, 3, -1)$  y  $(2, 0, 1)$ .

**Definición 2.0.4.** Un conjunto de vectores  $\{v_1, \dots, v_r\} \subset V$  es un sistema de generadores del subespacio vectorial  $S \subset V$  si todo vector  $v \in S$  es combinación lineal de  $v_1, \dots, v_r$ .

*Ejemplo 2.3.* El conjunto  $\{(1, 3, -1), (2, 0, 1)\}$  no es un sistema de generadores de  $\mathbb{R}^3$  ya que dado un vector  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  existen  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tales que

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 3, -1) + \lambda_2(2, 0, 1)$$

si y sólo si

$$-x + y + 2z = 0.$$

Por ejemplo, el vector  $(1, 1, 1)$  no es combinación lineal de  $(1, 3, -1), (2, 0, 1)$ . Si bien el conjunto  $\{(1, 3, -1), (2, 0, 1)\}$  no es un sistema de generadores de  $\mathbb{R}^3$ , es un sistema de generadores del plano de ecuación  $-x + y + 2z = 0$ .

*Ejemplo 2.4.* Veamos que el conjunto  $\{(3, 1), (-1, 2), (0, 1)\}$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{R}^2$ . Para ello veamos que, dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , existen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  tales que

$$(x, y) = \lambda_1(3, 1) + \lambda_2(-1, 2) + \lambda_3(0, 1).$$

Los valores de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - \lambda_2 & = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = y \end{cases}$$

Tomando

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_2 = -x + 3\lambda_1, \quad \lambda_3 = 2x + y - 7\lambda_1,$$

se tiene que todo vector  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  es combinación lineal de los vectores del conjunto considerado. Observemos que tenemos infinitas formas de escribir al vector  $(x, y)$  como combinación lineal de estos vectores. Esto sucede porque alguno de los vectores de este conjunto es combinación lineal de los restantes. En este caso, tenemos que

$$(3, 1) = -3(-1, 2) + 7(0, 1), \quad (-1, 2) = -\frac{1}{3}(3, 1) + \frac{7}{3}(0, 1)$$

y

$$(0, 1) = \frac{1}{7}(3, 1) + \frac{3}{7}(-1, 2).$$

Esto es, cada uno de los vectores es combinación lineal de los demás vectores del conjunto, pero no siempre ésto sucede.

**Definición 2.0.5.** (Compare con la Definición 1.0.2) Un conjunto  $v_1, \dots, v_r$  de vectores de  $V$  se dice linealmente dependiente (LD) si existe  $v_i$  tal que

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n,$$

con  $\lambda_i \in k$ . Equivalentemente, existen coeficientes  $a_1, \dots, a_r$  no todos nulos (ie, alguno es distinto de 0) tales que

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0.$$

*Ejemplo 2.5.* En el ejemplo (2.1) vimos que el conjunto  $\{(3, 1), (-1, 2), (0, 1)\}$  es LD.

**Definición 2.0.6.** (Compare con la Definición 1.0.3) Un conjunto  $v_1, \dots, v_r$  que no es linealmente dependiente se llama linealmente independiente (LI). Esto es, un conjunto  $v_1, \dots, v_r$  es LI si, y sólo si,

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_r = 0.$$

*Ejemplo 2.6.* Veamos que el conjunto  $\{(1, 2, -2)(-1, 0, 1)(1, 4, 0)\}$  es LI. Planteamos

$$\lambda_1(1, 2, 2) + \lambda_2(-1, 0, 1) + \lambda_3(1, 4, 0) = (0, 0, 0).$$

Esto nos da un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$

cuya única solución es  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

*Observación 2.2.* Dado un conjunto de **sólo dos vectores**  $\{v, w\}$ , el conjunto es LI si, y sólo si,  $v$  y  $w$  no son múltiplos.

*Ejercicio 2.1.* Analizar la independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

1.  $\{(-1, 1), (2, 3)\}$
2.  $\{(1, 0, -2), (1, 3, 1)\}$
3.  $\{(0, 0), (4, 5)\}$
4.  $\{(1, 1, 0), (0, 1, -1), (2, 1, 1)\}$
5.  $\{e^{3t}, e^{-t}\}$
6.  $\{e^{2t}, te^{2t}\}$
7.  $\{\cos t, \sin t\}$

*Ejercicio 2.2.* Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son sistemas de generadores de los espacios vectoriales  $V$  dados:

1.  $\{(1, 4), (2, 1), (1, -3)\}$ ,  $V = \mathbb{R}^2$
2.  $\{(1, 2, 1), (3, -2, 1)\}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$
3.  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 2), (1, 0, 3)\}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$

### 3. Bases

**Definición 3.0.7.** Un conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  es una base de  $V$  si y sólo si:

1.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es un sistema de generadores de  $V$ .
2.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es LI.

Se tiene el siguiente

*Teorema 3.1.* Todo espacio vectorial  $V$  tiene una base y toda base de  $V$  tiene el mismo número de elementos. Si  $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$  es un subconjunto linealmente independiente que no es una base, se pueden agregar vectores adecuados  $v_{r+1}, \dots, v_n$  de forma tal que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sea una base del espacio vectorial  $V$ .

Gracias a este teorema tiene sentido hacer la siguiente

**Definición 3.0.8.** *El número de elementos de una base de  $V$  se llama la dimensión de  $V$  y se denota  $\dim(V)$ .*

Antes de demostrar este teorema haremos unas observaciones, daremos ejemplos y probaremos resultados necesarios para la demostración.

*Observación 3.1.* Los espacios vectoriales  $\mathbb{R}^n$  tienen bases destacadas, llamadas bases canónicas, cuyos elementos son los vectores  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Los vectores  $e_i$  tienen un 1 en la coordenada  $i$  y ceros en las demás coordenadas. Luego, la dimensión de  $\mathbb{R}^n$  es  $n$ .

*Ejemplo 3.1.* La base canónica de  $\mathbb{R}^2$  es  $\{(1,0)(0,1)\}$  y la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  es  $\{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$ .

*Ejemplo 3.2.* El conjunto  $\{(3,1), (-1,2), (0,1)\}$  no es una base de  $\mathbb{R}^2$  porque no es LI.

*Ejemplo 3.3.* El conjunto  $\{(1,3,-1)(2,0,1)\}$  no es una base de  $\mathbb{R}^3$  porque no es un sistema de generadores de  $\mathbb{R}^3$ .

*Ejemplo 3.4.* El conjunto  $\{(1,2,-2)(-1,0,1)(1,4,0)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ .

Ya vimos que el conjunto es LI. Veamos que es un sistema de generadores. Dado  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  queremos ver que existen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  tales que

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 2, -2) + \lambda_2(-1, 0, 1) + \lambda_3(1, 4, 0)$$

Esta relación nos da un sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = & x \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_3 & = & y \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 & = & z \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y - \frac{2}{3}z \\ \lambda_2 & = & -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ \lambda_3 & = & \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}z \end{cases}$$

Luego, este conjunto es una base de  $\mathbb{R}^3$ .

*Lema 3.1.* Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  y  $\{w_1, \dots, w_m\}$  es un conjunto LI de  $V$ , entonces  $m \leq n$ .

**Dem:** Supongamos que  $m > n$ . Como  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ , cada uno de los vectores  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , se puede escribir como combinación lineal de los vectores  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ &\vdots \\ w_m &= a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{aligned}$$

Veamos que  $\{w_1, \dots, w_m\}$  es un conjunto LD. Sean  $x_1, \dots, x_m \in k$  tales que

$$x_1w_1 + \dots + x_mw_m = 0$$

Distribuyendo y agrupando tenemos que

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{m1}x_m)v_1 + \dots + (a_{1n}x_1 + \dots + a_{mn}x_m)v_n = 0$$

Como  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es LI, resulta que  $x_1, \dots, x_m$  son solución del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{1n}x_1 + \dots + a_{mn}x_m = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene soluciones no triviales ya que  $m > n$ . Luego  $\{w_1, \dots, w_m\}$  es LD.  $\square$

*Corolario 3.1.* Dos bases tienen la misma cantidad de elementos.

**Definición 3.0.9.** Decimos que un conjunto  $S = \{v_1, \dots, v_m\}$  de elementos LI de  $V$  es maximal si para todo  $v \in V$ ,  $v \notin S$ , el conjunto  $\{v_1, \dots, v_m, v\}$  es LD.

*Lema 3.2.* Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  un conjunto maximal de vectores LI. Entonces  $B$  es una base de  $V$ .

**Dem:** Hay que probar que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  generan  $V$ . Sea  $v \in V$ . Como el conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es maximal, tenemos que  $\{v_1, \dots, v_n, v\}$  es LD. Es decir, existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in k$  no todos nulos tales que

$$\lambda_1v_1 + \dots + \lambda_nv_n + \lambda v = 0$$

Notemos que  $\lambda \neq 0$ , pues si  $\lambda = 0$  y algún  $\lambda_i \neq 0$  entonces  $\{v_1, \dots, v_n\}$  no sería LI, contradiciendo la hipótesis. Luego  $\lambda \neq 0$  y  $v$  se puede escribir como combinación lineal de  $v_1, \dots, v_n$   $\square$

Ahora podemos demostrar el teorema 3.1. Para ello consideremos  $\{v_1\} \subseteq V$ . Si es una base de  $V$ , listo. Si no es una base de  $V$ , tomamos  $v_2 \in V$  tal que  $\{v_1, v_2\}$  sea un conjunto LI. Si este conjunto es maximal, por el lema anterior es una base. Si no es maximal, tomamos  $v_3 \in V$  tal que  $\{v_1, v_2, v_3\}$  sea LI y repetimos el argumento. En una cantidad finita de pasos obtendremos una base de  $V$ .  $\square$

*Corolario 3.2.* Un conjunto de  $n$  vectores LI de  $\mathbb{R}^n$  es una base de  $\mathbb{R}^n$ .

*Ejercicio 3.1.* Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son base del espacio vectorial  $V$ :

1.  $\{(2, 1, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 2), (1, 2, 5)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$
2.  $\{(-1, 4)\}, \quad V = \mathbb{R}^2$
3.  $\{(1, 3, -1), (2, 1, 0), (1, -2, 2)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$
4.  $\{(3, 1), (-1, -3)\}, \quad V = \mathbb{R}^2$

## 4. Coordenadas

*Proposición 4.1.* Sean  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  y  $v \in V$ . Existen únicos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$  tales que  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ .

**Dem:** Dado  $v \in V$ , existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \tag{4.1}$$

porque  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es un sistema de generadores de  $V$ . Supongamos que existen  $\mu_1, \dots, \mu_n$  tales que

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n. \tag{4.2}$$

Veamos que  $\lambda_i = \mu_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Igualando 4.1 y 4.2, obtenemos

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n. \tag{4.3}$$

Esta ecuación es equivalente a

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0. \tag{4.4}$$

Como  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es un conjunto LI, tenemos que  $\lambda_i - \mu_i = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Luego,  $\lambda_i = \mu_i$  para  $i = 1, \dots, n$ , que es lo que se quería demostrar.  $\square$

En esta proposición se basa la siguiente

**Definición 4.0.10.** Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y sea  $v \in V$  tal que

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Al vector  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n$  se lo llama coordenadas de  $v$  en la base  $B$  y se lo nota  $[v]_B$ .

*Ejemplo 4.1.* Si consideramos la base  $\{(1, 2, -2)(-1, 0, 1)(1, 4, 0)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  tenemos que  $[(-2, -2, 4)]_B = (1, 2, -1)$ , ya que

$$(-2, -2, 4) = (1, 2, 2) + 2(-1, 0, 1) - (1, 4, 0).$$

Para calcular sistemáticamente las coordenadas de vectores en una cierta base  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $k^n$  vamos a considerar una matriz  $C_{EB}$ , llamada matriz de cambio de base, que verifica la siguiente propiedad:

$$C_{EB}x = [x]_B, \forall x \in k^n.$$

Se puede verificar fácilmente que una matriz  $C_{EB}$ , definida por la propiedad anterior, existe, es única e inversible. A la matriz inversa de  $C_{EB}$ , la llamamos  $C_{BE}$  y verifica la propiedad:

$$C_{BE}[x]_B = x, \forall x \in k^n.$$

En particular, tomando  $x = v_i$ , obtenemos que la columna  $i$  de la matriz  $C_{BE}$  es el vector  $v_i^t$ .

*Ejemplo 4.2.* Consideremos la base de  $\mathbb{R}^2$   $B = \{(2, 3)(-1, 4)\}$ . Tenemos que

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad C_{EB} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si queremos obtener  $[(4, -1)]_B$ , calculamos

$$[(4, -1)]_B = C_{EB}(4, -1)^t = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 15 \\ -14 \end{pmatrix}$$

*Ejercicio 4.1.* Hallar la matriz de cambio de base  $C_{EB}$  y usarla para calcular las coordenadas de los vectores dados:

1.  $E$  = base canónica de  $\mathbb{R}^2$ ,  $B = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ ,  $u = (-4, -1)$ ,  
 $v = (2, 7)$ ,  $w = (0, 3)$ .
2.  $E$  = base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B = \{(1, -1, 2), (3, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$ ,  
 $u = (2, 1, 3)$ ,  $v = (-5, -1, 2)$ .

*Ejercicio 4.2.* Hallar las coordenadas de los vectores  $v$  en la base  $B$ .

1.  $v = (2, 5), B = \{(2, -1), (-1, 4)\}$
2.  $v = (3, 2, 3), B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
3.  $v = (1, 0, 0), B = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$

*Ejercicio 4.3.* Dadas las coordenadas de  $v$  en la base  $B$  ( $[v]_B$ ), dar las coordenadas de  $v$  en la base canónica.

1.  $[v]_B = (0, 2, -1), B = \{(1, 0, 3), (0, 2, 1), (0, 0, -1)\}$
2.  $[v]_B = (2, 5), B = \{(1, -1), (1, 2)\}$
3.  $[v]_B = (3, 4, -5), B = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$

## 5. Transformaciones lineales

**Definición 5.0.11.** Sean  $V$  y  $W$  dos  $k$ -espacios vectoriales. Una transformación lineal es una aplicación  $f : V \rightarrow W$  que verifica:

1.  $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in V$  y
2.  $f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall \lambda \in k$  y  $x \in V$ .

Nosotros sólo vamos a estudiar las transformaciones lineales en el caso  $V = k^n$  y  $W = k^m$ . Para toda transformación lineal  $f : k^n \rightarrow k^m$  existe una matriz  $M \in k^{m \times n}$ , tal que  $f(x) = Mx, \forall x \in k^n$ . Es fácil ver que  $M$  es la matriz cuyas columnas son las imágenes de los vectores de la base canónica, ésto es

$$M = (f(e_1)^t | f(e_2)^t | \dots | f(e_n)^t) \quad (5.5)$$

*Observación 5.1.* Hablaremos indistintamente de transformaciones lineales y matrices, entendiendo que dada una transformación lineal podemos hallar su matriz asociada por la fórmula 5.5 y dada una matriz  $M \in k^{n \times n}$  su transformación lineal asociada es  $f : k^n \rightarrow k^n$  dada por  $f(x) = Mx$ .

En lo que sigue vamos a trabajar con transformaciones  $f : k^n \rightarrow k^n$ , por lo cual, la matriz  $M$  será una matriz cuadrada de tamaño  $n \times n$ .

En algunas oportunidades, nos conviene trabajar con coordenadas en una base  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $k^n$ .



Dada una transformación lineal  $f : k^n \rightarrow k^n$ , existe una única matriz  $M_{BB}$  que verifica:

$$M_{BB}[x]_B = [f(x)]_B, \forall x \in k^n.$$

La columna  $i$  de esta matriz es el vector  $[f(v_i)]_B$ . Es fácil ver que se verifica la siguiente relación entre  $M$  y  $M_{BB}$ :

$$M_{BB} = C_{EB}MC_{BE}.$$

*Ejemplo 5.1.* Consideremos la transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = Mx$ , con  $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Consideremos la base  $B = \{(4, 1), (7, 2)\}$ . En esta base la matriz de la transformación lineal es

$$\begin{aligned} M_{BB} &= C_{EB}MC_{BE} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 29 & 45 \\ -15 & -23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vemos que considerar la matriz de la transformación lineal en esta base no nos ayuda para entenderla y trabajar con ella. Pero veamos que si consideramos la base  $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$  entonces

$$\begin{aligned} M_{B'B'} &= C_{EB'}MC_{B'E} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Trabajar con  $M_{B'B'}$  es mucho más sencillo y además podemos dar la siguiente interpretación geométrica de la transformación  $f(x) = Mx$ . Si consideramos  $\mathbb{R}^2$  con los ejes  $x', y'$  determinados por los vectores  $(1, 1)$  y  $(1, -1)$ , respectivamente, tenemos que  $f$  transforma en su duplo a los vectores del eje  $x'$  y a los vectores del eje  $y'$  los multiplica por 4.

Dada una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = Mx$  o simplemente una matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , es natural preguntarse si existe una base  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $M_{BB}$  sea diagonal. Lamentablemente la respuesta a esta pregunta es que existen matrices (o transformaciones lineales) para las que no existe una

base  $B$  con esta propiedad. Las matrices (o transformaciones lineales) para las cuales existe tal base se llaman diagonalizables.

En la próxima sección estudiaremos qué condiciones deben verificar las matrices para ser diagonalizables. Para las matrices que no son diagonalizables hallaremos bases  $B'$  donde la matriz tiene una forma muy particular y en las cuales la matriz es fácil de manipular y entender geoméricamente.

La matriz  $M_{BB}$  en el caso en que  $M$  sea diagonalizable o la matriz  $M_{B'B'}$  en el caso en que  $M$  no sea diagonalizable se llama la forma canónica o forma de Jordan de la matriz  $M$ .

## 6. Diagonalización

Veremos primero cuándo una matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es diagonalizable. Para ello comencemos dando algunas definiciones y precisando algunos conceptos introducidos en la sección anterior.

**Definición 6.0.12.** *Un valor  $\lambda \in \mathbb{R}$  se llama un autovalor de  $M$  si existe un vector  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , que verifica*

$$Mv = \lambda v.$$

*A tal vector  $v$  se lo llama un autovector de  $M$  asociado al autovalor  $\lambda$ .*

Observemos que cualquier múltiplo de  $v$  es también un autovector de  $M$  de autovalor  $\lambda$ . Más aún, el conjunto

$$S_\lambda = \{v \in V, Mv = \lambda v\}$$

es un subespacio de  $V$ , llamado autoespacio asociado al autovalor  $\lambda$ .

Veamos qué condición debe verificar  $\lambda$  para ser autovalor de  $M$ .

El sistema  $Mv = \lambda v$  tiene solución no nula si, y sólo si, el sistema  $(M - \lambda I)v = 0$  admite alguna solución no nula. Ésto sucede si, y sólo, si  $\det(M - \lambda I) = 0$ . Observemos que  $\det(M - \lambda I)$  es un polinomio en  $\lambda$ , llamado polinomio característico de  $M$ . Lo notamos  $P_M(\lambda)$ . Los autovalores de  $M$  son, entonces, las raíces de  $P_M(\lambda)$ .

Veamos en un ejemplo cómo se hallan los autovalores y autovectores de una matriz  $M$ .

*Ejemplo 6.1.* Consideremos la matriz  $M = \begin{pmatrix} -12 & 15 \\ -10 & 13 \end{pmatrix}$ .

Su polinomio característico es:

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -12 - \lambda & 15 \\ -10 & 13 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6,$$

cuyas raíces son  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = -2$ .

Los autovectores asociados a  $\lambda_1 = 3$  se obtienen al resolver el sistema  $(M - 3I)v = 0$ . Si llamamos  $v = (a, b)$ , tenemos que resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} -15 & 15 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es  $v = k(1, 1)$ .

Para encontrar los autovectores asociados al autovalor  $\lambda_2 = -2$ , debemos resolver el sistema  $(M + 2I)v = 0$ , ésto es,

$$\begin{pmatrix} -10 & 15 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es  $v = k(3, 2)$ .

Observemos que en este ejemplo los autovectores  $(1, 1)$  y  $(3, 2)$  son LI. Esto no es un hecho casual pues se verifica el siguiente resultado:

*Teorema 6.1.* Autovectores asociados a autovalores distintos son LI.

**Dem:** Hagamos la demostración para el caso de dos autovectores. Sean  $v_1, v_2$  tales que  $Mv_1 = \lambda_1 v_1$  y  $Mv_2 = \lambda_2 v_2$ , con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Planteamos

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \tag{6.6}$$

y veamos que  $a_1 = a_2 = 0$ . Multiplicando 6.6 por  $M$  tenemos:

$$a_1 Mv_1 + a_2 Mv_2 = 0. \tag{6.7}$$

Como  $v_1, v_2$  son autovectores, esta ecuación es equivalente a

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0. \tag{6.8}$$

Ahora multiplicando 6.6 por  $\lambda_1$  obtenemos:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 = 0. \tag{6.9}$$

Al restar 6.8 y 6.9 queda:

$$a_2(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 = 0.$$

Como  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$  y  $v_2 \neq 0$ , tenemos que  $a_2 = 0$ . Luego  $a_1 = 0$  y los autovectores  $v_1, v_2$  son LI.  $\square$

**Definición 6.0.13.** Una matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se dice diagonalizable si existe una base  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores de  $M$ . En este caso  $M_{BB}$  es una matriz diagonal:

$$M_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda_i$  es el autovalor correspondiente al autovector  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Un importante criterio para determinar si una matriz es diagonalizable es el siguiente:

*Teorema 6.2.* Sea  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si el polinomio característico de  $M$  tiene  $n$  raíces reales distintas, entonces  $M$  es diagonalizable.

*Ejemplo 6.2.* Considerar la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es  $P_M(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ . Por lo tanto, los autovalores de  $M$  son 1, 2 y 3. Por el teorema anterior,  $M$  es diagonalizable. Encontremos en este caso una base de  $\mathbb{R}^3$  formada por autovectores de  $M$ . Para hallar los autovectores asociados al autovalor  $\lambda = 1$  debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es  $(x, y, z) = t(0, 1, 2)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Luego, el subespacio de autovectores de autovalor 1 es  $S_1 = \langle (0, 1, 2) \rangle$

Para hallar los autovectores asociados al autovalor  $\lambda = 2$  resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es  $(x, y, z) = t(1, 2, 0)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Tenemos entonces que  $S_2 = \langle (1, 2, 0) \rangle$

Para el autovalor  $\lambda = 3$ , los autovectores asociados son solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es  $(x, y, z) = t(2, 3, 0)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Luego,  $S_3 = \langle (2, 3, 0) \rangle$

La base  $B = \{(0, 1, 2)(1, 2, 0)(2, 3, 0)\}$  es una base formada por autovectores de  $M$  y en esa base la matriz es diagonal:

$$M_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*Ejemplo 6.3.* Veamos qué sucede si tenemos autovalores dobles.

Supongamos que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de  $M$  es  $P_M(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 6)$ . Luego  $\lambda = -1$  es autovalor doble y  $\lambda = 6$  es autovalor simple. En este caso debemos calcular los autovectores de  $M$  para saber si podemos formar una base de  $\mathbb{R}^3$  con ellos. Para hallar los autovectores asociados al autovalor  $\lambda = -1$  debemos resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es  $(x, y, z) = t(1, 0, -1) + \lambda(0, 1, 0)$ , con  $t, \lambda \in \mathbb{R}$ . Luego,  $S_{-1} = \langle (1, 0, -1)(0, 1, 0) \rangle$

Para hallar los autovectores asociados al autovalor  $\lambda = 6$  resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es  $(x, y, z) = t(2, 0, 5)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Tenemos entonces que  $S_6 = \langle (2, 0, 5) \rangle$

En este caso existe una base de  $\mathbb{R}^3$  formada por autovectores de  $M$ , por ejemplo:  $B = \{(1, 0, -1)(0, 1, 0)(2, 0, 5)\}$ . Por lo tanto  $M$  es una matriz diagonalizable y

$$M_{BB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

*Ejemplo 6.4.* Supongamos ahora que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de esta matriz es  $P_M(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$  y por lo tanto  $\lambda = 1$  es autovalor doble y  $\lambda = -1$  es un autovalor simple. Nuevamente no podemos asegurar de antemano si  $M$  es diagonalizable o no, para ello debemos calcular primero los autovectores de  $M$ .

Para hallar los autovectores asociados al autovalor  $\lambda = 1$  debemos resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es  $(x, y, z) = t(1, 0, -1)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Luego,  $S_1 = \langle (1, 0, -1) \rangle$

Los autovectores asociados al autovalor  $\lambda = -1$  se hallan al resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es  $(x, y, z) = t(1, -2, 1)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Luego,  $S_{-1} = \langle (1, -2, 1) \rangle$

En este caso no existe una base de  $\mathbb{R}^3$  formada por autovectores de  $M$ . Por lo tanto,  $M$  no es diagonalizable.

*Ejemplo 6.5.* Consideremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es  $P_M(\lambda) = \lambda^2 + 1$ . Este polinomio no tiene raíces reales, por lo tanto no existen autovalores reales de  $M$  y  $M$  resulta una matriz no diagonalizable.

De estos ejemplos podemos concluir que las condiciones que debe cumplir una matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para que sea diagonalizable son las siguientes:

1. Todos sus autovalores deben ser reales.
2. La dimensión de  $S_\lambda$  debe ser igual a la multiplicidad de  $\lambda$  como raíz del polinomio característico  $P_M(\lambda)$ .

*Ejercicio 6.1.* 1. Verificar que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$  es diagonalizable.

2. Verificar que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  no es diagonalizable.

## 7. Formas canónicas de matrices de tamaño $2 \times 2$

Sea  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Calculemos su polinomio característico  $P_M(\lambda)$  y sus raíces. Ocurre una de estas posibilidades:

1. El polinomio característico tiene 2 raíces reales distintas.
2. El polinomio característico tiene una raíz real doble.
3. El polinomio característico tiene dos raíces complejas conjugadas.

Analicemos qué sucede en cada uno de estos casos en las siguientes secciones.

### 7.1. $P_M(\lambda)$ tiene dos raíces reales distintas

En este caso  $M$  tiene dos autovalores reales distintos es diagonalizable y vimos en la sección anterior cómo calcular los autovalores y autovectores de  $M$ .

### 7.2. $P_M(\lambda)$ tiene una raíz real doble $\lambda_0$ .

Veamos en qué caso  $M$  es diagonalizable y tiene una raíz real doble. Si existe una base  $B$  tal que  $M_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 Id_{2 \times 2}$ , entonces

$$M = C_{BE}(\lambda_0 Id_{2 \times 2})C_{EB} = \lambda_0 Id_{2 \times 2}.$$

Luego, en el único caso en que una matriz de tamaño  $2 \times 2$  tiene un autovalor doble y es diagonalizable es cuando la matriz ya es diagonal y los elementos de la diagonal son iguales.

Supongamos ahora que  $M \neq \lambda_0 Id_{2 \times 2}$ . Veamos que en este caso se puede hallar una base  $B = \{v, w\}$  tal que  $M_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ . La demostración de la existencia se basa en el siguiente:

*Teorema 7.1.* (Cayley-Hamilton) Sea  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $P_M(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$  su polinomio característico. Entonces

$$P_M(M) = 0_{n \times n},$$

donde  $P_M(M) = \sum_{i=0}^n a_i M^i$ ,  $M^0 = Id_{n \times n}$  y  $0_{n \times n}$  es la matriz nula de tamaño  $n \times n$ .

Haremos la demostración en el caso  $n = 2$  pues es una verificación sencilla. Para demostrar este teorema en el caso general se necesitan resultados teóricos más sofisticados que no veremos en este libro.

**Dem:** (caso  $n = 2$ ) Sea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Su polinomio característico es

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

Evaluando en la matriz  $M$  obtenemos:

$$\begin{aligned} P_M(M) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bc \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + db \\ ac + dc & ad + d^2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

*Observación 7.1.* En el caso en que  $P_M(\lambda)$  tenga una raíz real doble  $\lambda_0$ , se tiene  $P_M(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$ . Luego, el teorema de Cayley-Hamilton se traduce en la siguiente igualdad:

$$(M - \lambda_0 Id_{2 \times 2})^2 = 0_{2 \times 2}.$$

Estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado:

*Teorema 7.2.* Sea  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $M \neq \lambda Id_{2 \times 2}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $M$  tiene un único autovalor real doble  $\lambda_0$ . Entonces existe una base  $B = \{v, w\}$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$M_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

**Dem:** Para simplificar la notación, a la matriz identidad de tamaño  $2 \times 2$  la notaremos simplemente  $Id$ , sin indicar el tamaño.

Sea  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que  $(M - \lambda_0 Id)v \neq 0$  y llamemos

$$w = (M - \lambda_0 Id)v.$$

Veamos que  $B = \{v, w\}$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ . Alcanza con probar que  $\{v, w\}$  es un conjunto LI. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que

$$av + bw = 0 \tag{7.10}$$



Veamos que  $a = b = 0$ . Si multiplicamos 7.10 por  $(M - \lambda_0 Id)$  tenemos

$$0 = a(M - \lambda_0 Id)v + b(M - \lambda_0 Id)w \quad (7.11)$$

$$= aw + b(M - \lambda_0)^2 v = aw \quad (7.12)$$

Como  $w \neq 0$ , tenemos que  $a = 0$  y, por lo tanto,  $b = 0$ .

Probemos que  $M_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ . Para ello calculemos  $Mv$  y  $Mw$ .

Tenemos que:

$$Mv = Mv - \lambda_0 v + \lambda_0 v = (M - \lambda_0 Id)v + \lambda_0 v = w + \lambda_0 v,$$

$$Mw = Mw - \lambda_0 w + \lambda_0 w = (M - \lambda_0 Id)w + \lambda_0 w$$

$$= (M - \lambda_0 Id)^2 v + \lambda_0 w = \lambda_0 w.$$

Ésto es,

$$Mv = w + \lambda_0 v \quad y \quad Mw = \lambda_0 w.$$

Luego si escribimos  $C_{BE} = (v|w)$ , es decir,  $C_{BE}$  es la matriz cuyas columnas son los elementos de la base  $B$ , tenemos

$$\begin{aligned} M_{BB} &= C_{EB}M(v|w) = C_{EB}(Mv|Mw) \\ &= C_{EB}(\lambda_0 v + w|\lambda_0 w) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

*Ejemplo 7.1.* Consideremos la matriz  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$ . Su polinomio característico es  $P_M(\lambda) = (\lambda - 5)^2$ . Luego,  $M$  tiene un único autovalor real  $\lambda_0 = 5$  y no es diagonalizable porque no es múltiplo de la matriz identidad.

Tomemos  $v = (1, 0)$  y observemos que

$$(M - 5Id)v = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por el teorema anterior, tomando la base  $B = \{(1, 0)(-3, -9)\}$  se tiene

$$M_{BB} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

### 7.3. $P_M(\lambda)$ con dos raíces complejas conjugadas

Consideremos una matriz  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $P_M(\lambda)$  tiene raíces complejas conjugadas  $a + bi$  y  $a - bi$ .

Hasta ahora a la matriz  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la pensamos como la matriz asociada a una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Pero nos convendrá en este momento pensarla como la matriz asociada a una transformación lineal

$$g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2.$$

Una transformación lineal  $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  se dice diagonalizable si existe una base  $B$  de  $\mathbb{C}^2$  formada por autovectores de  $g$ . Un teorema análogo al teorema 6.2 vale en el caso complejo:

*Teorema 7.3.* Sea  $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  una transformación lineal con  $n$  autovalores distintos, entonces  $g$  es diagonalizable.

En el caso que estamos considerando  $g$  tiene 2 autovalores distintos  $a + bi$  y  $a - bi$ . Cada uno de estos autovalores tiene asociado un espacio de autovectores complejos de dimensión 1. Supongamos que

$$Mv = (a + bi)v \quad y \quad Mw = (a - bi)w,$$

con  $v, w \in \mathbb{C}^2$ .

Estos vectores se pueden descomponer en su parte real e imaginaria:

$$v = Re(v) + iIm(v) \quad y \quad w = Re(w) + iIm(w),$$

con  $Re(v), Im(v), Re(w), Im(w) \in \mathbb{R}^2$ .

Notemos que  $w = Re(v) - iIm(v)$ .

Reemplazando  $v = Re(v) + iIm(v)$  en la igualdad  $Mv = (a + bi)v$ , obtenemos:

$$MRe(v) + iMIm(v) = (aRe(v) - bIm(v)) + i(bRe(v) + aIm(v))$$

Igualando las componentes reales por un lado y las imaginarias por otro tenemos que:

$$MRe(v) = aRe(v) - bIm(v) \quad y \quad MIm(v) = bRe(v) + aIm(v) \quad (7.13)$$

Estas igualdades nos sugieren el siguiente resultado:

*Teorema 7.4.* Sea  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $P_M(\lambda)$  tiene raíces complejas conjugadas  $a + bi$  y  $a - bi$ . Entonces existe una base  $B = \{v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$M_{BB} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

**Dem:** Llamemos  $v_1 = Re(v)$  y  $v_2 = Im(v)$ , donde  $v$  es un autovector complejo de autovalor  $a + bi$ , es decir,  $Mv = (a + bi)v$  y  $v \in \mathbb{C}^2$ .

Veamos que  $\{v_1, v_2\}$  es un conjunto LI. Como observamos anteriormente, si  $v = v_1 + iv_2$  es un autovector de autovalor  $a + bi$ , se tiene que  $w = v_1 - iv_2$  es un autovector de autovalor  $a - bi$ .

La misma demostración del hecho que dos autovectores asociados a distintos autovalores son LI que se hizo en el caso de autovalores reales se adapta al caso de autovectores complejos. Luego  $\{v, w\}$  es LI.

Es fácil probar que si  $\{v, w\}$  es LI, entonces  $\left\{ \frac{v+w}{2}, \frac{v-w}{2} \right\}$  es LI. Pero, en este caso,  $v_1 = \frac{v+w}{2}$  y  $v_2 = \frac{v-w}{2}$ . Luego  $\{v_1, v_2\}$  es LI y, por lo tanto, una base de  $\mathbb{R}^2$ .

Veamos que  $M_{BB} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ . Reemplazando las expresiones 7.13 en la igualdad  $M_{BB} = C_{EB}MC_{BE}$  tenemos

$$\begin{aligned} M_{BB} &= C_{EB}M(v_1|v_2) = C_{EB}(Mv_1|Mv_2) = C_{EB}((av_1 - bv_2)|(bv_1 + av_2)) \\ &= (C_{EB}(av_1 - bv_2)|C_{EB}(bv_1 + av_2)) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.  $\square$

*Ejemplo 7.2.* Sea  $M = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ . El polinomio característico de esta matriz es  $P_M(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10$ , cuyas raíces son  $3 + i$  y  $3 - i$ .

Para la raíz  $3 + i$ , calculamos los autovalores complejos de  $M$  resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7 - i & 10 \\ -5 & -7 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuyas soluciones son de la forma  $t(10, -7 + i)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ .

Por ejemplo, tomando  $(10, -7 + i) = (10, -7) + i(0, 1)$ , tenemos que  $v_1 = (10, -7)$  y  $v_2 = (0, 1)$ .

Luego, tomando la base  $B = \{(10, -7)(0, 1)\}$ , queda  $M_{BB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

## 8. Exponencial de una matriz

Análogamente a la definición de la exponencial de un número real, se puede definir la exponencial de una matriz cuadrada:

**Definición 8.0.1.** Sea  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Se define la exponencial de  $M$ , y se nota  $e^M$ , de la siguiente manera:

$$e^M = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

*Observación 8.1.*  $e^M$  está bien definida ya que la serie que la define converge.

Veamos algunas propiedades de la exponencial de una matriz.

*Lema 8.1.* Si  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y además  $AB = BA$ , entonces

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

**Dem:** Las cuentas que vamos a hacer habría que justificarlas con cuidado, sin embargo en ellas está la idea de la demostración.

Por un lado

$$e^A e^B = (I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 \dots)(I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 \dots)$$

Distribuyendo

$$\begin{aligned} e^A e^B &= I + (A + B) + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2) & (8.14) \\ &+ \frac{1}{3!}(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) \dots \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

que **no** coincide en general con el segundo término de (8.14) a menos que  $A$  y  $B$  conmuten. En efecto, en tal caso

$$AB + BA = 2AB$$

y ambas expresiones son iguales. Lo mismo ocurre con los demás términos. Veamos por ejemplo

$$\begin{aligned} (A + B)^3 &= (A + B)(A + B)(A + B) \\ &= A^3 + AB^2 + A^2B + ABA + BAB + BA^2 + B^2A + B^3. \end{aligned}$$

Como  $A$  y  $B$  conmutan (o sea  $AB = BA$ )

$$A^3 + AB^2 + A^2B + ABA + BAB + BA^2 + B^2A + B^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3,$$

que en este caso sí coincide con el tercer término de (8.14). Entonces

$$e^A e^B = I + (A + B) + \frac{1}{2}(A + B)^2 + \frac{1}{3!}(A + B)^3 \dots = e^{A+B}$$

como queríamos probar.  $\square$

De ahora en más, y por cuestiones de simplicidad, nos vamos a restringir a matrices de  $2 \times 2$ . Ahora bien, para calcular la exponencial de una matriz cualquiera  $M$  se empiezan estudiando algunos casos particulares que están resumidos en el siguiente

*Teorema 8.1.* Las exponenciales de las formas canónicas están dadas por:

1. Sea  $M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , entonces

$$e^{(t-t_0)M_1} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

2. Sea  $M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces

$$e^{(t-t_0)M_2} = e^{a(t-t_0)} \begin{pmatrix} \cos(b(t-t_0)) & \text{sen}(b(t-t_0)) \\ -\text{sen}(b(t-t_0)) & \cos(b(t-t_0)) \end{pmatrix}$$

3. Sea  $M_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces

$$e^{(t-t_0)M_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (t-t_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)\lambda} & 0 \\ 0 & e^{(t-t_0)\lambda} \end{pmatrix} = e^{(t-t_0)\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (t-t_0) & 1 \end{pmatrix}$$

**Dem:**

1. Por la forma que posee  $M_1$  se ve que

$$(M_1)^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$e^{(t-t_0)M_1} = I + (t-t_0)M_1 + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 M_1^2 + \dots$$

puede escribirse

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda_1(t-t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 \lambda_1^2 + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2(t-t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 \lambda_2^2 + \dots \end{pmatrix},$$

que es a su vez

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{pmatrix},$$

lo que demuestra este caso.

2. En este caso conviene hacer la siguiente identificación. Dado un número complejo  $z = a + ib$  le asociamos una matriz como sigue

$$a + ib \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Esta identificación es más profunda de lo que parece a primera vista. Nosotros vamos a usar la propiedad que a través de dicha identificación resulta que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha z \leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

y para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$z^n \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n$$

Por ende, como la identificación "funciona" para producto por escalares y para potencias quiere decir que para cualquier polinomio  $P(x)$  debe ser

$$P(z) \leftrightarrow P\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right)$$

Entonces observando la serie de Taylor de  $e^{(t-t_0)}$  también debe ser

$$e^{(t-t_0)z} \leftrightarrow e^{\left((t-t_0)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right)} \quad (8.15)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} e^{(t-t_0)z} &= e^{(t-t_0)(a+ib)} & (8.16) \\ &= e^{(t-t_0)a+i(t-t_0)b} \\ &= e^{(t-t_0)a}(\cos((t-t_0)b) + i\text{sen}((t-t_0)b)). \end{aligned}$$

Usando la identificación entre complejos y matrices obtenemos que

$$\cos((t-t_0)b) + i\text{sen}((t-t_0)b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos((t-t_0)b) & \text{sen}((t-t_0)b) \\ -\text{sen}((t-t_0)b) & \cos((t-t_0)b) \end{pmatrix}$$

De esta igualdad, de (8.15), y de (8.16) resulta demostrado este caso.

3. Para probar este caso observemos que podemos escribir

$$M_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = A + B ,$$

donde  $A$  y  $B$  conmutan. Entonces por el Lema 8.1 tenemos que

$$e^{(t-t_0)M_3} = e^{(t-t_0)A}e^{(t-t_0)B}. \quad (8.17)$$

Pero

$$e^{(t-t_0)A} = I + (t-t_0)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (t-t_0) & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.18)$$

pues  $A^2 = 0$  y

$$e^{(t-t_0)B} = \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)\lambda} & 0 \\ 0 & e^{(t-t_0)\lambda} \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

ya que este caso es como el de  $M_1$  con  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . De (8.17), (8.18) y (8.19) se termina la demostración.  $\square$

Ahora vamos a ver que, sabiendo calcular la exponencial de estos tres tipos de matrices, podemos calcular la exponencial de cualquier matriz  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Para ello veamos el siguiente resultado:

*Proposición 8.1.* Sean  $C, J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que  $C$  es inversible y sea  $M = CJC^{-1}$ . Entonces

$$e^M = Ce^JC^{-1}.$$

**Dem:** Es fácil ver que se verifican las siguientes fórmulas

$$C(A+B)C^{-1} = CAC^{-1} + CBC^{-1} \quad y \quad (CAC^{-1})^k = CA^kC^{-1}.$$

Entonces tenemos que

$$\sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{CJ^kC^{-1}}{k!} = C \left( \sum_{k=0}^n \frac{J^k}{k!} \right) C^{-1}.$$

Tomando límites obtenemos

$$e^M = Ce^JC^{-1}.$$

□

Como vimos en la sección anterior, para toda matriz  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  se puede hallar una base  $B$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $M_{BB}$  tenga la forma de alguna de las matrices enunciadas en el teorema 8.1. En ese caso

$$M = C_{BE}M_{BB}C_{EB}$$

Por la proposición anterior, tenemos que

$$e^{Mt} = C_{BE}e^{M_{BB}t}C_{EB}.$$

Utilizando los resultados del teorema 8.1, podemos calcular la exponencial de cualquier matriz.

**Definición 8.0.2.** *De ahora en más llamaremos a las formas canónicas de las matrices, **forma de Jordan**, y a la base que lleva la matriz a esa forma **base de Jordan**. Esto no es del todo correcto ya que usualmente la forma*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

*no se denomina de Jordan (ver [8]), sin embargo permite referirnos con mas facilidad a las formas canónicas y a las respectivas bases en el texto.*

*Ejemplo 8.1.* Calculemos  $e^{Mt}$ , para  $M = \begin{pmatrix} -12 & 15 \\ -10 & 13 \end{pmatrix}$  Como vimos en el ejercicio 6.1, tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} -12 & 15 \\ -10 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} e^{Mt} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2e^{3t} + 3e^{-2t} & 3e^{3t} - 3e^{-2t} \\ -2e^{3t} + 2e^{-2t} & 3e^{3t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Ejercicio 8.1.*



Dadas las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Hallar la forma canónica de Jordan de cada matriz y escribir a la matriz  $A$  como  $A = C_{BE} J C_{EB}$ , donde  $B$  es la base de Jordan asociada a la matriz  $A$  y  $J$  es la forma de Jordan de  $A$ .
2. Calcular  $e^{At}$  para cada una de las matrices dadas.



# Capítulo 6

## Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

### 1. Sistemas de ecuaciones diferenciales

En este capítulo estudiaremos sistemas de ecuaciones diferenciales. Nos vamos a restringir a sistemas de primer orden aunque como veremos ésto no representa una pérdida de generalidad.

**Definición 1.0.3.** *Un sistema de n ecuaciones ordinarias de primer orden es una expresión del tipo*

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot = \dots\dots\dots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.1)$$

Si las  $f_i$  no dependen explícitamente de  $t$  diremos que el sistema es **autónomo**. Si por otro lado las  $f_i$  pueden escribirse

$$f_i = a_{i1}(t)x_1 + \dots + a_{in}(t)x_n + g_i(t)$$

diremos que el sistema es **lineal**. En tal caso puede representarse del siguiente modo

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

Si los coeficientes  $a_{ij}$  son independientes de  $t$ , o sea  $a_{ij}(t) = a_{ij} = \text{ctes}$ , diremos que el sistema es a **coeficientes constantes**. Si  $g_i(t) = 0$  diremos que el sistema es **homogéneo**.

Ejemplo 1.1. Ejemplos de sistemas son:

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1x_2 \\ x'_2 &= x_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 &= 2x_1 - x_2 \\ x'_2 &= x_1 + x_2 \end{cases}$$

En este último caso el sistema es lineal homogéneo a coeficientes constantes.

Resolver un sistema implica hallar las funciones  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  que lo satisfacen. Observemos que, a medida que el tiempo cambia, la función vectorial  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  define una curva en  $\mathbb{R}^n$ . Debido a que  $X(t)' = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$  representa un vector tangente a la curva mencionada, los sistemas de primer orden tienen una interpretación geométrica idéntica a la dada para ecuaciones de primer orden. Es decir, el sistema queda resuelto si hallamos una curva tangente a los vectores definidos por las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Teniendo en cuenta la interpretación geométrica del sistema, se intuye que no habrá solución única a menos que se impongan ciertas restricciones. De hecho, en una **solución general** de un sistema de  $n$  ecuaciones deben aparecer  $n$  constantes de integración. Veamos ésto resolviendo algunos sistemas.

Un método natural para resolver un sistema de  $n$  ecuaciones consiste en transformarlo en **una** ecuación equivalente de **orden**  $n$ . Apliquemos este método a sistemas lineales a coeficientes constantes de 2 ecuaciones.

Supongamos que se debe resolver

$$\begin{cases} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \end{cases}$$

En tal caso se despeja, por ejemplo,  $x_2(t)$  de la primer ecuación (asumiendo que  $a_{12} \neq 0$ , si  $a_{12} = 0$  se despeja  $x_1(t)$  de la segunda ecuación, asumiendo  $a_{21} \neq 0$ , si tanto  $a_{12}$  como  $a_{21}$  fueran cero el sistema esta desacoplado y se puede integrar cada incógnita por separado)

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}}(x'_1 - a_{11}x_1 - g_1)$$

y se la reemplaza en la segunda resultando entonces una sola ecuación con incógnita  $x_1(t)$ .

*Ejemplo 1.2.* Resolvamos

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 + 1 \\ x_2' &= x_1 + 1 \end{cases}$$

Se tiene por un lado

$$x_2 = x_1' - 1, \tag{1.2}$$

entonces

$$x_2' = x_1''.$$

Reemplazando en la segunda ecuación del sistema resulta

$$x_1'' = x_1 + 1,$$

que tiene por solución general

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1.$$

Ahora de (1.2) tenemos

$$x_2(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1.$$

Observemos que la solución puede escribirse vectorialmente del modo

$$(x_1(t), x_2(t)) = C_1(e^t, e^t) + C_2(e^{-t}, -e^{-t}) + (-1, -1).$$

Así como un sistema de  $n$  ecuaciones puede escribirse como una ecuación de orden  $n$  vale también la recíproca, ésto es

*Teorema 1.1. (Reducción del orden)* La ecuación diferencial de la forma

$$x^{(n)}(t) = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \tag{1.3}$$

puede escribirse como un sistema de primer orden de  $n$  ecuaciones del tipo (1.1).

**Dem:** Llamemos  $x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$ . Entonces la ecuación (1.3) se puede escribir

$$\begin{cases} x_1'(t) &= & x_2(t) \\ x_2'(t) &= & x_3(t) \\ \cdot &= & \dots\dots\dots \\ x_n'(t) &= & F(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t)), \end{cases} \tag{1.4}$$

lo que demuestra el Teorema.  $\square$

*Ejemplo 1.3.* Consideremos una vez más el oscilador armónico con las constantes del Ejemplo 4.3. O sea  $K = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $m = 1$ . La ecuación es

$$x''(t) + x'(t) + x(t) = 0.$$

Llamemos  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = x'(t) = v(t)$  para obtener el sistema equivalente, pero conservemos los nombres  $x(t)$  y  $v(t)$  ya que poseen sentido físico. El sistema resulta

$$\begin{cases} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -x(t) - v(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

La solución obtenida para  $x(t)$  (vea el Ejemplo 4.3) es

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left( C_1 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{3}{4}}t \right) + C_2 \operatorname{cos} \left( \sqrt{\frac{3}{4}}t \right) \right),$$

por ende

$$v(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left( K_1 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{3}{4}}t \right) + K_2 \operatorname{cos} \left( \sqrt{\frac{3}{4}}t \right) \right),$$

con  $K_1 = -\sqrt{\frac{3}{4}}C_2 - \frac{1}{2}C_1$  y  $K_2 = \sqrt{\frac{3}{4}}C_1 - \frac{1}{2}C_2$ .

En el contexto de los sistemas también el modo natural de obtener solución única es fijando condiciones iniciales para determinar luego el valor de las constantes.

**Definición 1.0.4.** *Un problema de valores iniciales (PVI), consiste en un sistema (1.1) sujeto a las condiciones iniciales*

$$x_1(t_0) = x_1, \dots, x_n(t_0) = x_n,$$

donde  $t, x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  son valores dados.

*Observación 1.1.* El Teorema 5.1 se extiende a sistemas.

Supongamos ahora que estamos considerando un **sistema autónomo**. En tal caso si

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

resuelve (1.1) entonces para cualquier real  $\hat{t}$  **fijo**, la función

$$\hat{X}(t) = X(t - \hat{t}) = (x_1(t - \hat{t}), \dots, x_n(t - \hat{t}))$$

también resuelve (1.1). Esta función  $\hat{X}(t)$  es obviamente una traslación de  $X(t)$  en el tiempo, y al ser soluciones las traslaciones vemos que, de algún

modo, el tiempo que fijamos para dar las condiciones iniciales cumple un rol secundario. Clarifiquemos este punto. Imaginemos que conocemos el valor de las variables o funciones  $x_1(\tilde{t}), \dots, x_n(\tilde{t})$  en un tiempo  $\tilde{t}$  dado y supongamos que estos valores son  $(x_0, \dots, x_n)$ . ¿Qué podemos decir de la evolución de estos valores? La respuesta es que se puede predecir que sucederá a partir de  $\tilde{t}$  si resolvemos (1.1) con dato inicial  $X(\tilde{t}) = (x_0, \dots, x_n)$ . Pero, por otro lado, si resolviéramos nuevamente (1.1) con dato inicial  $X(0) = (x_0, \dots, x_n)$ , entonces las dos soluciones serían iguales salvo una traslación temporal. De este modo el conocimiento de los datos  $(x_0, \dots, x_n)$  es lo que determina unívocamente el “futuro” del sistema. Por ello, en los **sistemas autónomos**, las variables que representan  $x_1, \dots, x_n$  se llaman variables de estado, ya que podemos imaginar que el sistema evoluciona pasando de un estado a otro unívocamente determinado por los estados anteriores sin importar el momento del tiempo en que ello sucede. Claramente si el sistema no es autónomo ésto deja de ser cierto. El gráfico generado por las curvas  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  que resuelven (1.1) cuando es autónomo se denomina **diagrama de fases o estados** y potencialmente contiene toda la información relevante acerca de las soluciones del sistema aunque el tiempo no intervenga explícitamente. En la Figura 14 vemos un ejemplo del diagrama de fases para el problema del Ejemplo 1.3. Las flechas indican el “sentido” en que evolucionan los estados (dando una dirección para el tiempo). Siempre que las variables de estado sean como en este ejemplo la velocidad y la posición, entonces las flechas tendrán ese sentido, ya que si observamos un estado en el semiplano superior (o sea  $v > 0$ ) el sistema evoluciona hacia la derecha porque  $x$  debe crecer ( $v$  es su derivada y es positiva). Por otro lado, en el semiplano inferior las trayectorias evolucionan hacia la izquierda.

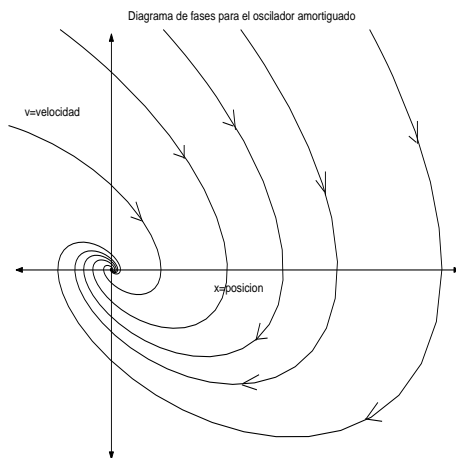


Figura 14: Diagrama de fases para el oscilador amortiguado

Veamos ahora otro ejemplo más de sistemas.

*Ejemplo 1.4. Un modelo matemático de ecología* Consideremos un modelo biológico de predadores y presas, como pueden ser zorros y conejos. Denotemos con  $f(t)$  y  $r(t)$  la cantidad individuos de cada especie en función del tiempo y propongamos el siguiente modelo, llamado de Lotka-Volterra,

$$\begin{cases} r'(t) &= ar(t) - br(t)f(t) \\ f'(t) &= -cf(t) + dr(t)f(t), \end{cases} \quad (1.6)$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son constantes positivas. Para entender la naturaleza del modelo conviene escribirlo como

$$\begin{cases} r'(t) &= (a - bf(t))r(t) \\ f'(t) &= (-c + dr(t))f(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

Escrito de este modo descubrimos que es una variante “Malthusiana” en la cual la tasa de crecimiento de la población de cada especie es proporcional a ciertas funciones que dependen de los individuos presentes en la otra especie. Según puede verse si  $(a - bf(t)) > 0$  (caso de “pocos” zorros) los conejos tenderán a crecer exponencialmente. Sin embargo de la ecuación de los zorros, vemos que en ese caso el término  $(-c + dr(t))$  llegará a ser positivo en algún momento y entonces también los zorros crecerán exponencialmente hasta que  $(a - bf(t)) < 0$ , lo que producirá un decrecimiento de conejos y así sucesivamente. Para integrar el sistema escribimos

$$\frac{df}{dr} = \frac{\frac{df}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{-cf + drf}{ar - brf} = \frac{f(-c + dr)}{r(a - bf)},$$

que es una ecuación de variable separadas. Integrándola resulta

$$f^a e^{-bf} = Kr^{-c} e^{dr},$$

con  $K$  una constante arbitraria. En esta ecuación no puede despejarse explícitamente ninguna variable en términos de la otra. En la Figura 15 se ve el diagrama de fases para este problema para una sola solución.



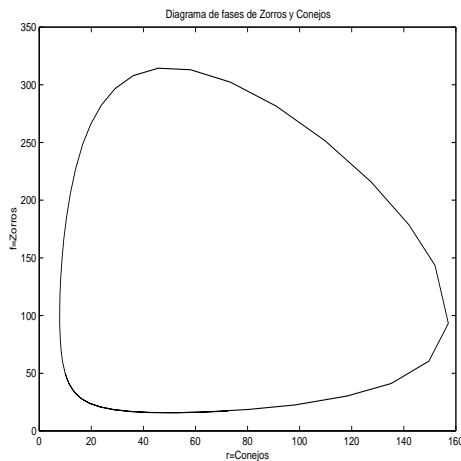


Figura 15 Diagrama de fases para Lotka-Volterra

*Ejercicio 1.1.* Dibuje las “flechas” en el diagrama de fases de la Figura 15.

*Ejercicio 1.2.* Hallar la solución general de cada uno de los siguientes sistemas, resolviendo la ecuación de segundo orden asociada. En ii. y iv. resolver además el problema de valores iniciales.

$$\text{i. } \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x' = 2x - y & x(0) = 2 \\ y' = x + 2y & y(0) = -1 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y \end{cases} \quad \text{iv. } \begin{cases} x' = -2y & x(0) = 3 \\ y' = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} x' = y + e^{2t} \\ y' = -4x + 4y + 1 \end{cases}$$

*Ejercicio 1.3.* Para cada una de las ecuaciones siguientes, halle un sistema lineal de primer orden de ecuaciones diferenciales, que permita resolver dicha ecuación.

i.  $y'' - 8y' + 16y = 0$

ii.  $x'' - 4x' + 10x = t^2$

iii.  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

iv.  $y^{(v)} + 3y''' - 2y' + 6y = xe^{x^2}$

*Ejercicio 1.4.* Resolver la ecuación diferencial en  $\mathbb{R}^3$   $x' = Ax$  en los siguientes casos:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x(0) = (1, 2, 1)$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x(0) = (2, 1, 1)$$

## 2. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes.

Ahora vamos a dar un enfoque diferente al problema de resolver un **sistema lineal**. Por simplicidad nos vamos a restringir al caso homogéneo a coeficientes constantes y por ello escribiremos el sistema del modo

$$X'(t) = MX(t)$$

donde  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Para comprender la idea involucrada en la resolución del sistema pensaremos que ocurre en el caso escalar, o sea una sola ecuación diferencial lineal:

$$x'(t) = ax(t) \quad \text{con dato inicial} \quad x(t_0) = x_0.$$

Esta ecuación tiene solución  $x(t)$  derivable. Entonces, como existe  $x'(t)$ , se tiene que también existe  $x''(t)$ . En efecto

$$x''(t) = (ax(t))' = ax'(t).$$

Más aún

$$x''(t) = ax'(t) = a^2x(t),$$

y análogamente, se ve que  $x(t)$  tiene infinitas derivadas.

Consideremos el desarrollo de Taylor de  $x(t)$

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 \dots$$

Reemplazando por los valores de las derivadas obtenidos tenemos que

$$x(t) = x(t_0) + ax(t_0)(t - t_0) + \frac{a^2x(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 \dots$$

Luego

$$x(t) = x_0 \left( 1 + a(t - t_0) + \frac{(a(t - t_0))^2}{2!} + \dots \right)$$

Finalmente obtenemos que la solución de la ecuación es

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Notemos que, si  $t_0 = 0$ ,

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

Aunque ya conocíamos que la solución tendría esta apariencia el hecho de expresarla como una serie nos va a permitir generalizar esta idea a sistemas.

Repitamos la idea anterior para un sistema

$$X'(t) = MX(t)$$

con dato inicial

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = X_0.$$

Si hacemos Taylor coordenada a coordenada resulta que para cada función  $x_i$  se tiene

$$x_i(t) = x_i(t_0) + (t - t_0)x'_i(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2x''_i(t_0) + \dots,$$

o escrito vectorialmente,

$$X(t) = X(t_0) + (t - t_0)X'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2X''(t_0) + \dots$$

Es fácil demostrar que

$$(MX(t))' = MX'(t).$$

Por lo tanto,

$$X(t) = X(t_0) + MX(t_0) + \frac{1}{2}M^2X(t_0) + \dots,$$

o sea,

$$X(t) = (I + (t - t_0)M + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 M^2 + \dots)X(t_0).$$

Es decir, la solución puede expresarse también como una serie pero de términos matriciales. Como vimos anteriormente

$$e^{(t-t_0)M} = I + (t - t_0)M + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 M^2 + \dots$$

Entonces la solución del sistema se escribe

$$X(t) = e^{M(t-t_0)} X_0,$$

como en el caso escalar. Si además  $t_0 = 0$ , se tiene obviamente

$$X(t) = e^{Mt} X_0.$$

La conclusión de la cuenta que acabamos de hacer indica que, si sabemos calcular la exponencial de una matriz, podemos resolver sistemas lineales homogéneos sin tener que reducirlo a una ecuación de orden  $n$ .

*Ejemplo 2.1.* Resolvamos

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X$$

con dato inicial

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por el razonamiento realizado anteriormente sabemos que la solución es

$$X(t) = e^{Mt} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 + 2t & -t \\ 4t & -2t + 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es

$$X(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 + 3t \\ 6t + 1 \end{pmatrix}.$$

*Observación 2.1.* Supongamos que se quiere resolver

$$X' = MX \quad X(0) = (x_0^1, x_0^2). \quad (2.8)$$

Observemos que este sistema puede resolverse haciendo un cambio de base. Sea  $B = \{v_1, v_2\}$  la base de Jordan y sea  $J$  la matriz de Jordan asociada a  $M$ . Podemos escribir entonces

$$M = C_{BE}JC_{EB}$$

y equivalentemente,

$$J = C_{EB}MC_{BE}.$$

Si cambiamos a la variable  $Y$  definida como

$$Y = C_{EB}X, \quad (2.9)$$

entonces  $Y$  satisface un sistema cuya matriz asociada estará en la forma de Jordan. En efecto, llamando  $Y(0) = C_{EB}X(0)$ , y multiplicando a izquierda ambos miembros de (2.8) por  $C_{EB}$  resulta

$$C_{EB}X' = C_{EB}MX.$$

Como  $Y' = (C_{EB}X)' = C_{EB}X'$  y además  $C_{BE}C_{EB} = Id$ , se tiene

$$Y' = C_{EB}MIdX = C_{EB}MC_{BE}C_{EB}X = JY.$$

O sea que  $Y$  satisface

$$Y' = JY \quad Y(0) = C_{EB}X(0).$$

La idea ahora consiste en resolver esta ecuación y una vez conocida  $Y$ , se obtiene  $X$  despejando de (2.9), o sea

$$X = C_{BE}Y$$

*Ejemplo 2.2.* Resolvamos el sistema del ejemplo 2.1 realizando el cambio de variables  $Y = C_{EB}X$ . En este caso debemos resolver

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y$$

con la condición inicial

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es

$$Y(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Ahora,  $X = C_{BE}Y$ . En consecuencia,

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 + 3t \\ 6t + 1 \end{pmatrix},$$

que es la solución que habíamos hallado anteriormente.

### 3. Diagramas de fase

Vamos a estudiar los diagramas de fases generados por los sistemas de ecuaciones diferenciales que estamos estudiando. Comenzaremos realizando el diagrama de fase de un sistema de ecuaciones diferenciales lineal de primer orden  $X' = MX$  para el caso que  $M$  tenga alguna de estas formas:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ o } M_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

es decir, en el caso en que  $M$  coincide con su forma de Jordan y después veremos el caso general.

**Caso  $M_1$ :** Si resolvemos el sistema

$$X' = M_1 X$$

con  $X(0) = (x_0^1, x_0^2)$ , resulta que

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (x_0^1 e^{\lambda_1 t}, x_0^2 e^{\lambda_2 t}) \tag{3.10}$$

Esta expresión puede pensarse como una curva parametrizada por  $t$ . Sin embargo, ya que en el diagrama de fases aparecen sólo las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$ , podemos tratar de eliminar el parámetro  $t$  para darnos una idea de cómo es la curva descrita por la solución. Si  $\lambda_1 \neq 0$ ,

$$x_2 = x_0^2 e^{\lambda_2 t} = x_0^2 \left( e^{\lambda_1 t} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \frac{x_0^2}{|x_0^1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} |x_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

En la parte derecha de la última igualdad vemos que el parámetro  $t$  ha sido eliminado, y hemos puesto a  $x_2$  en función de  $x_1$ . Notemos además que  $x_0^1, x_0^2, \lambda_1, \lambda_2$  son todas **constantes**, o sea que si llamamos

$$K_1 = \frac{x_0^2}{|x_0^1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} \quad y \quad K_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

resulta

$$x_2 = K_1 |x_1|^{K_2}. \quad (3.11)$$

Por ende la curva descripta depende de como sean  $K_1$  y  $K_2$ , lo que a su vez depende de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen el mismo signo entonces  $K_2 > 0$  y de (3.11) vemos que  $x_2$  es una potencia positiva de  $x_1$ . En las Figuras 15 y 16 aparecen los diagramas de los casos  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  y  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , respectivamente, con  $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ .

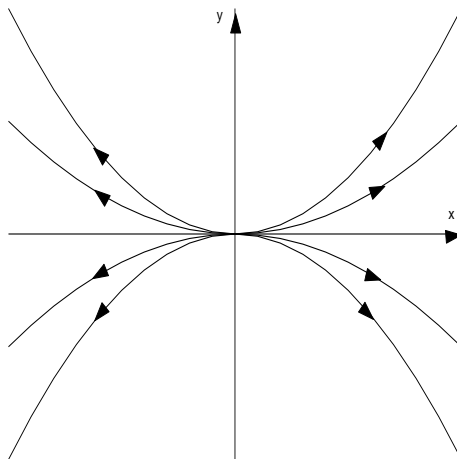


Figura 15

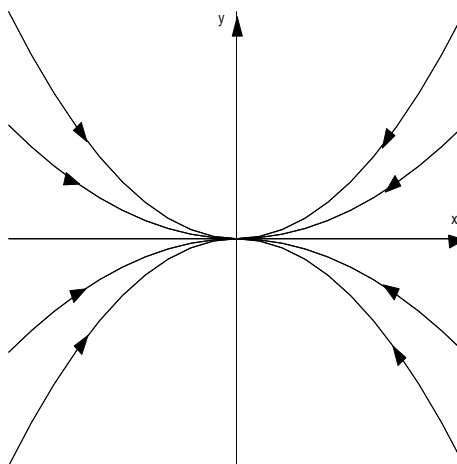


Figura 16

El sentido de las flechas se obtiene fácilmente de 3.10, pues se ve que ambas componentes de  $X(t)$  tienden a  $\infty$  o a 0 si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , o  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , respecti-

vamente, cuando  $t \rightarrow \infty$ . En las figuras 17 y 18 aparecen los diagramas de los casos  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  y  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , respectivamente, con  $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ .

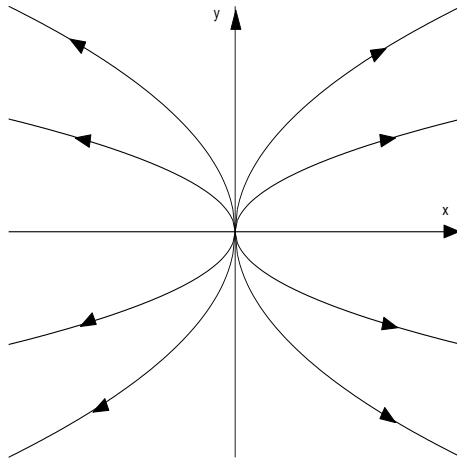


Figura 17

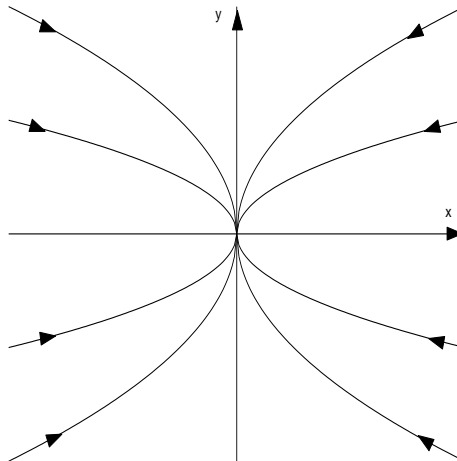


Figura 18

Si por otro lado, los signos de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  no son iguales, entonces  $x_2$  ya no es una potencia positiva de  $x_1$  y las curvas son del tipo "hipérbolas" (serían exactamente hipérbolas si  $K_2 = -1$ ), como se ve en la Figura 19.



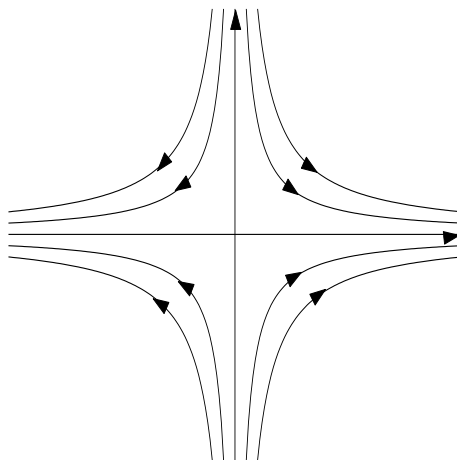


Figura 19

Las flechas se obtienen una vez más de (3.11), y se ha graficado el caso  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , que da  $x_1 \rightarrow \infty$  y  $x_2 \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ .

En el caso en que  $\lambda_1 = \lambda_2$  tenemos que

$$x_2 = \frac{x_0^2}{x_0^1} x_1.$$

En la figura 20 vemos el diagrama de fases correspondiente al caso  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  y en la figura 21, el diagrama correspondiente a  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ .

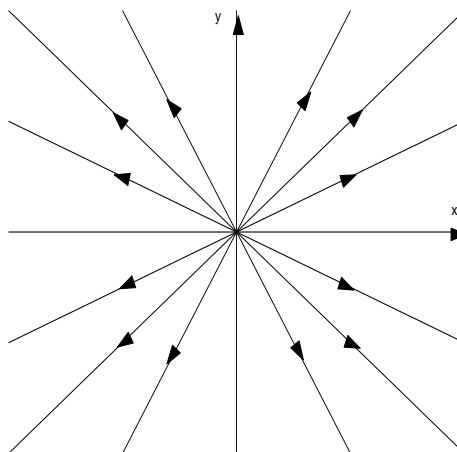


Figura 20

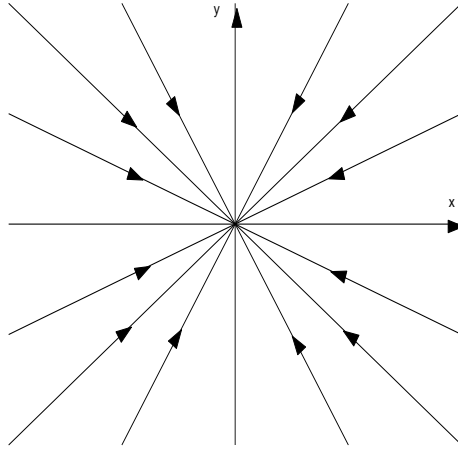


Figura 21

Si  $\lambda_1 = 0$ , tenemos que

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (x_0^1, x_0^2 e^{\lambda_2 t})$$

Entonces las soluciones son semirrectas verticales. Las flechas apuntan al punto  $(x_0^1, 0)$  si  $\lambda_2 < 0$  (ver figura 22) y tienden a  $\infty$  si  $\lambda_2 > 0$  (ver figura 23).

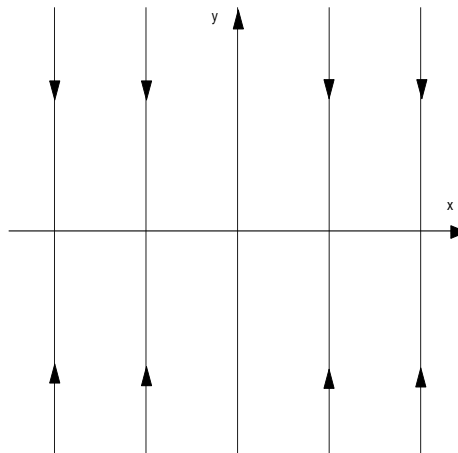


Figura 22

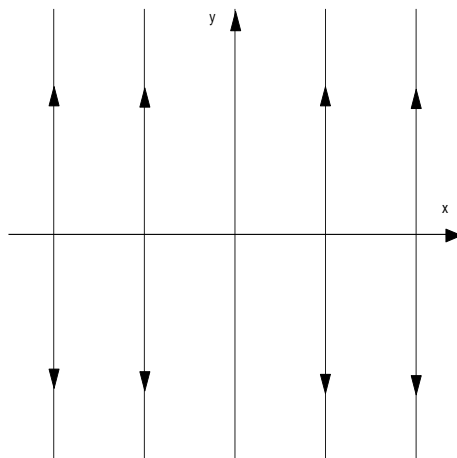


Figura 23

Análogamente, si  $\lambda_2 = 0$ , tenemos que

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (x_0^1 e^{\lambda_1 t}, x_0^2)$$

Las soluciones son semirrectas horizontales. Las flechas apuntan al punto  $(0, x_0^2)$  si  $\lambda_1 < 0$  y tienden a  $\infty$  si  $\lambda_1 > 0$ .

Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , la solución es constante  $X(t) = (x_0^1, x_0^2)$ .

**Caso  $M_2$ :** Si resolvemos el sistema

$$X' = M_2 X$$

con  $X(0) = (x_0^1, x_0^2)$ , resulta por el Teorema 8.1

$$\begin{aligned} X(t) &= (x_1(t), x_2(t)) & (3.12) \\ &= e^{at}(x_0^1 \cos(bt) + x_0^2 \text{sen}(bt), -x_0^1 \text{sen}(bt) + x_0^2 \cos(bt)) \\ &= e^{at} r(t), \end{aligned}$$

donde

$$r(t) = (x_0^1 \cos(bt) + x_0^2 \text{sen}(bt), -x_0^1 \text{sen}(bt) + x_0^2 \cos(bt)).$$

Resulta que

$$\|r(t)\| = \|(x_0^1, x_0^2)\|$$

y por ende, la norma de  $r(t)$  es constante, lo que indica que los puntos que describe se mueven en una circunferencia. De hecho, si escribimos el dato inicial como

$$(x_0^1, x_0^2) = r_0(\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)),$$

resulta que

$$r(t) = r_0(\cos(\alpha)\cos(bt) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(bt), -\cos(\alpha)\text{sen}(bt) + \text{sen}(\alpha)\cos(bt)),$$

o sea,

$$r(t) = r_0(\cos(\alpha - bt), \text{sen}(\alpha - bt)).$$

Ésto nos dice más precisamente que los puntos que describe  $r(t)$  rotan en el sentido de las agujas del reloj si  $b > 0$ , y en sentido antihorario si  $b < 0$ . De (3.12) vemos que el comportamiento de  $X(t)$  es éste esencialmente, salvo que debido al factor  $e^{at}$ , la trayectoria final será una espiral creciente, si  $a > 0$  o decreciente si  $a < 0$ . En la Figura 24 se ve una solución con  $a > 0$ ,  $b > 0$ , y en la Figura 25 con  $a < 0$ ,  $b > 0$ . Si  $a = 0$  las soluciones describen circunferencias centradas en el origen (ver figura 26).

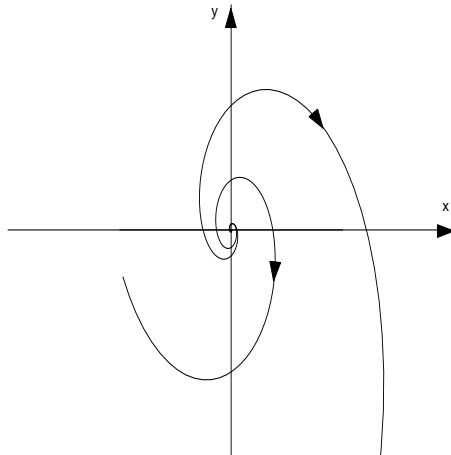


Figura 24

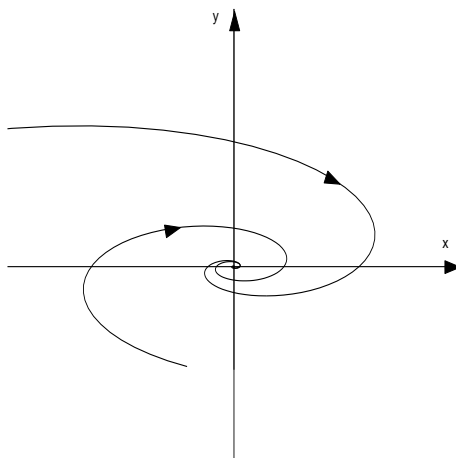


Figura 25

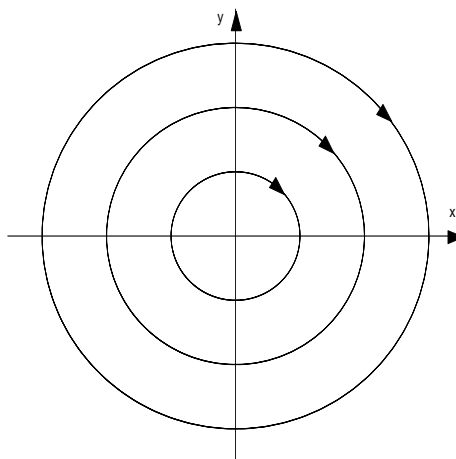


Figura 26

**Caso  $M_3$ :** Si resolvemos el sistema

$$X' = M_3 X$$

con  $X(0) = (x_0^1, x_0^2)$ , resulta por el Teorema (8.1)

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (x_0^1 e^{\lambda t}, x_0^1 e^{\lambda t} t + x_0^2 e^{\lambda t})$$

Para comprender qué tipo de curva describe esta función eliminamos el parámetro  $t$ . Resulta

$$x_2 = x_1 \left( t + \frac{x_0^2}{x_0^1} \right),$$

con

$$t = \frac{\ln(|x_1|) - \ln(|x_0^1|)}{\lambda}.$$

Entonces

$$x_2 = x_1 \left( \frac{\ln(|x_1|) - \ln(|x_0^1|)}{\lambda} + \frac{x_0^2}{x_0^1} \right) = x_1 \left( \frac{\ln(|x_1|)}{\lambda} + K \right),$$

donde  $K$  es una constante que depende de los datos iniciales y de  $\lambda$

$$K = -\frac{\ln(|x_0^1|)}{\lambda} + \frac{x_0^2}{x_0^1}.$$

Ahora que ya eliminamos el parámetro  $t$  y pusimos a  $x_2$  en términos de  $x_1$  podemos graficar la función resultante

$$x_2 = x_1 \left( \frac{\ln(|x_1|)}{\lambda} + K \right)$$

En la Figura 27, mostramos el caso  $\lambda > 0$ .

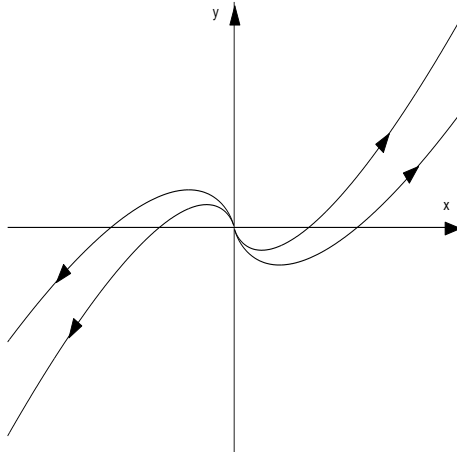


Figura 27

En la figura 28 vemos el caso  $\lambda < 0$ .

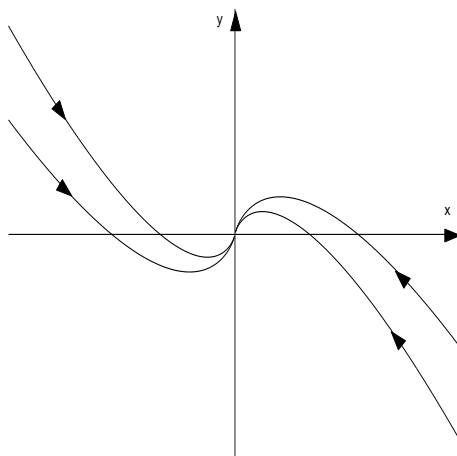


Figura 28

El sentido de las flechas se obtiene fácilmente, pues si  $\lambda > 0$  se ve de (3.13) que las trayectorias no están acotadas y si  $\lambda < 0$  que las trayectorias tienden a 0.

Si  $\lambda = 0$  tenemos que

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (x_0^1, x_0^1 t + x_0^2)$$

Las trayectorias son semirrectas verticales contenidas en las rectas  $x = x_0^1$ . Las segundas coordenadas tienden a  $+\infty$  si  $x_0^1 > 0$  y a  $-\infty$  si  $x_0^1 < 0$  (Ver figura 29). Si  $x_0^1 = 0$ , las soluciones son constantes.

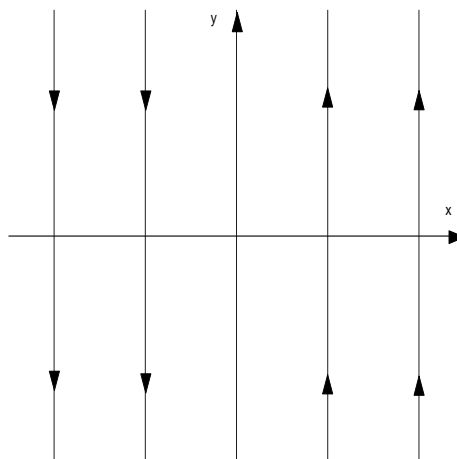


Figura 29

**Caso general:** En el caso general el diagrama de fase del sistema  $X' = MX$  se obtiene a partir del diagrama de fase correspondiente al sistema cuya matriz es la forma de Jordan de la matriz  $M$ . Esto es, para obtener el diagrama de fase correspondiente al sistema  $X' = MX$ , debemos realizar el diagrama de fase correspondiente a  $Y' = M_{BB}Y$  y, observando que los puntos que aparecen en este diagrama son las coordenadas de los puntos que aparecen en el diagrama “real”, realizar el diagrama teniendo en cuenta los nuevos ejes dados por los vectores de la base  $B$ .

*Ejemplo 3.1.* Consideremos el sistema  $X' = MX$  con

$$M = \begin{pmatrix} -12 & 15 \\ -10 & 13 \end{pmatrix}$$

Como vimos en el ejemplo 6.1,  $M$  tiene autovalores 3 y  $-2$ . Una base de autovectores es  $B = \{(1, 1)(3, 2)\}$  y

$$M_{BB} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El diagrama de fases correspondiente al sistema  $Y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} Y$  es el de la Figura 30.

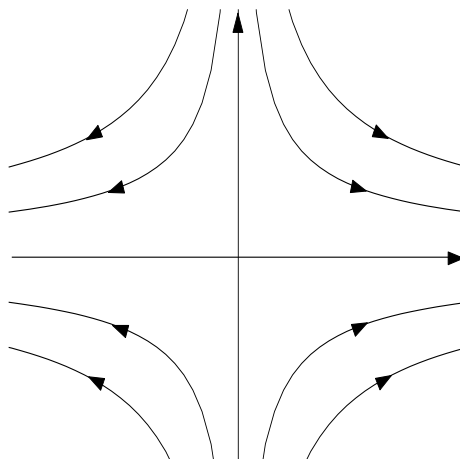


Figura 30

Cada punto de este diagrama corresponde a las coordenadas de un punto del diagrama de fase de  $X' = \begin{pmatrix} -12 & 15 \\ -10 & 13 \end{pmatrix} X$ . Por ejemplo, los puntos del eje  $x$



son las coordenadas de los puntos  $k(1, 1)$ , con  $k \in \mathbb{R}$  y los puntos del eje  $y$  son las coordenadas de los puntos  $t(3, 2)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Las rectas  $k(1, 1)$  y  $t(3, 2)$  son los ejes de coordenadas del diagrama de fases “real”. Traduciendo los puntos del diagrama de fase “en coordenadas” obtenemos el diagrama de fase “real” que puede verse en la Figura 31.

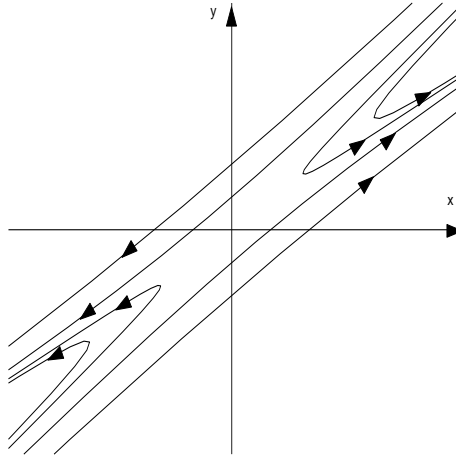


Figura 31

*Ejercicio 3.1.* Halle la solución general del sistema lineal  $x' = Ax$  para cada una de las matrices  $A$  dadas a continuación. En cada caso esbozar el diagrama de fases.

$$\text{i. } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ii. } A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{iv. } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{v. } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{vi. } A = \begin{pmatrix} 33 & -58 \\ 20 & -35 \end{pmatrix}$$

$$\text{vii. } A = \begin{pmatrix} -28 & 40 \\ -20 & 28 \end{pmatrix} \quad \text{viii. } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{ix. } A = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{x. } A = \begin{pmatrix} 16 & -30 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$$

*Ejercicio 3.2.* Graficar el diagrama de fases de un sistema bidimensional

$$x' = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

estudiando la forma de Jordan asociada a la matriz  $A$ , en los siguientes casos:

- a)  $A$  tiene autovalores reales de distinto signo
  - b)  $A$  tiene dos autovalores reales negativos y distintos
  - c)  $A$  tiene un autovalor negativo pero no es diagonalizable
  - d)  $A$  tiene autovalores complejos conjugados  $a \pm bi$  con  $a < 0$
  - e) Idem (iv) con  $a = 0$
  - f) Idem (iv) con  $a > 0$
  - g) Idem (ii) con autovalores positivos
  - h) Idem (iii) con autovalor positivo
  - i)  $A$  tiene un autovalor nulo
1. ¿En cuáles de los items anteriores se verifica  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  con cualquier condición inicial? ¿En cuáles se verifica  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = \infty$ ?

## 4. Estabilidad de puntos de equilibrio

Sea

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases} \quad (4.13)$$

un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo.

**Definición 4.0.5.** *Un punto  $(x_e, y_e) \in \mathbb{R}^2$  se dice un punto de equilibrio del sistema si verifica que* 
$$\begin{cases} f_1(x_e, y_e) = 0 \\ f_2(x_e, y_e) = 0 \end{cases}$$

El nombre de punto de equilibrio proviene del hecho que la única solución del sistema 4.13 con dato inicial  $x(0) = x_e, y(0) = y_e$  es  $x(t) \equiv x_e, y(t) \equiv y_e$ , ésto es, si el dato inicial es  $(x_e, y_e)$  entonces la solución es constante e igual a  $(x_e, y_e)$ .

*Ejemplo 4.1.* Dado el sistema lineal  $X' = MX$ , con  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , se tiene que siempre  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio. Además, si  $M$  es inversible ése es el único punto de equilibrio del sistema.

*Ejemplo 4.2.* Consideremos el siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = x - x^2 - xy \\ y' = 3y - y^2 - 2xy \end{cases} \quad (4.14)$$

Los puntos de equilibrio del sistema son los puntos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que verifican

$$\begin{cases} x - x^2 - xy = 0 \\ 3y - y^2 - 2xy = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

De la primer ecuación tenemos que

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 1 - x - y = 0,$$

y de la segunda ecuación tenemos que

$$y = 0 \quad \text{o} \quad 3 - y - 2x = 0.$$

Combinando estas condiciones quedan los siguientes casos:

1.  $x = 0$  e  $y = 0$ . Luego  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema.
2.  $x = 0$  y  $3 - y - 2x = 0$ . Despejando “y” obtenemos que  $(0, 3)$  es un punto de equilibrio del sistema.
3.  $1 - x - y = 0$  e  $y = 0$ . En este caso  $x = 1$  y el punto  $(1, 0)$  es un punto de equilibrio.
4.  $1 - x - y = 0$  y  $3 - y - 2x = 0$ . Resolviendo el sistema obtenemos que  $(2, -1)$  es un punto de equilibrio.

Luego, los puntos de equilibrio del sistema son  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(1, 0)$  y  $(2, -1)$ .

Una cuestión de suma importancia es determinar si el punto de equilibrio es estable o no, es decir, si las soluciones que comienzan cerca del punto de equilibrio se mantendrán cerca del equilibrio con el correr del tiempo o no. Daremos una definición más precisa de lo que entendemos por estabilidad de un punto de equilibrio.

**Definición 4.0.6.** *Supongamos que  $(x_e, y_e)$  es un punto de equilibrio del sistema 4.13.*

1. *El punto  $(x_e, y_e)$  es un punto de equilibrio estable si para todo entorno  $U$  de  $(x_e, y_e)$  existe un entorno  $U_1$  de  $(x_e, y_e)$ ,  $U_1 \subset U$ , tal que toda solución  $(x(t), y(t))$  con  $(x(0), y(0)) \in U_1$  verifica que  $(x(t), y(t)) \in U$  para  $t > 0$ .*
2. *El punto  $(x_e, y_e)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable si es estable y además todas las soluciones que verifican  $(x(0), y(0)) \in U_1$ , verifican también  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (x_e, y_e)$ .*

3. *Un punto de equilibrio que no es estable se dice inestable.*

Dicho en forma coloquial, un punto de equilibrio se dice estable si las soluciones cuyo dato inicial está cerca del equilibrio permanecen cerca del equilibrio a lo largo del tiempo. El equilibrio es asintóticamente estable si las soluciones que comienzan cerca del equilibrio tienden al equilibrio cuando  $t$  tiende a  $+\infty$ . Por último, el equilibrio es inestable si alguna de las soluciones que comienzan cerca del punto de equilibrio no se mantiene cerca del equilibrio con el correr del tiempo.

#### 4.1. Estabilidad del punto de equilibrio de un sistema lineal

La estabilidad del punto de equilibrio  $(0, 0)$  para un sistema lineal

$$X' = MX$$

se puede establecer analizando los autovalores de la matriz  $M$  y observando los diagramas de fase correspondientes.

Si los autovalores de  $M$  son reales  $\lambda_1, \lambda_2$  (distintos o no) tenemos los siguientes casos:

1. Si  $M$  tiene por lo menos un autovalor real positivo, esto es,  $\lambda_1 > 0$  o  $\lambda_2 > 0$ , entonces  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio inestable.
2. Si  $M$  tiene dos autovalores negativos, esto es  $\lambda_1 < 0$  y  $\lambda_2 < 0$ , entonces  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.
3. Si  $M$  tiene un autovalor negativo  $\lambda_1 < 0$  y un autovalor  $\lambda_2 = 0$ , el punto de equilibrio es estable.
4. Si  $M$  tiene un autovalor doble  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , el equilibrio es inestable, salvo que la matriz  $M$  sea nula en cuyo caso es estable.

Si los autovalores de  $M$  son complejos conjugados  $a + bi$  y  $a - bi$ , tenemos las siguientes posibilidades:

1. Si  $a > 0$ , el equilibrio es inestable.
2. Si  $a < 0$ , el equilibrio es asintóticamente estable.
3. Si  $a = 0$ , el equilibrio es estable.

*Ejemplo 4.3.* Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' &= \alpha x + (25 - \alpha^2)y \\ y' &= -x + \alpha y, \end{cases}$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Observemos que  $(0, 0)$  es punto de equilibrio del sistema para cualquier valor de  $\alpha$ . Analicemos la estabilidad de este punto de equilibrio para cada valor de  $\alpha$ . Para ello calcularemos los autovalores de la matriz asociada al sistema y clasificaremos la estabilidad del sistema de acuerdo al criterio dado.

Sea  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 25 - \alpha^2 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$  la matriz asociada al sistema. El polinomio característico asociado a la matriz  $A$  es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + 25,$$

cuyas raíces son

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 25} \quad y \quad \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 25}.$$

Observemos que los autovalores serán números reales si, y sólo si,  $|\alpha| \geq 5$  y serán complejos en el caso que  $|\alpha| < 5$ .

Analicemos qué sucede en cada caso.

1. Si  $|\alpha| < 5$ , la matriz del sistema tiene autovalores complejos y la estabilidad del punto de equilibrio depende del signo de la parte real de los autovalores. En este caso:
  - a) Si  $-5 < \alpha < 0$ , los autovalores tienen parte real negativa. Luego  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.
  - b) Si  $\alpha = 0$ , los autovalores tienen parte real nula. Por lo tanto  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio estable.
  - c) Si  $0 < \alpha < 5$ , los autovalores tienen parte real positiva. En consecuencia  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio inestable.
2. Si  $|\alpha| = 5$ , los autovalores de la matriz asociada al sistema son reales y dobles. En este caso:
  - a) Si  $\alpha = 5$ , la matriz tiene un autovalor doble positivo. Luego  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio inestable.
  - b) Si  $\alpha = -5$ , la matriz tiene un autovalor doble negativo. Por lo tanto  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

3. Si  $|\alpha| > 5$ , los autovalores correspondientes a la matriz del sistema son reales y distintos.

En este caso, si alguno de estos autovalores es positivo, el punto de equilibrio será inestable. Si ambos autovalores son negativos y distintos de cero, el punto de equilibrio será asintóticamente estable. Si uno de los autovalores es negativo y el otro es 0, el punto de equilibrio será estable.

En este ejemplo se dan los siguientes casos:

- a) Si  $\alpha > 5$ , tenemos que

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 25} > 0$$

porque estamos sumando dos números positivos y

$$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 25} > 0$$

ya que

$$\alpha^2 - 25 < \alpha^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - 25} < \sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = \alpha \Rightarrow \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 25} > 0$$

Luego,  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio inestable.

- b) Si  $\alpha < -5$ , se ve claramente que

$$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 25} < 0.$$

Además

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 25} < 0$$

ya que

$$\alpha^2 - 25 < \alpha^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - 25} < \sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = -\alpha \Rightarrow \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 25} < 0$$

Observemos que ninguno de los dos autovalores puede ser 0. Luego,  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

*Ejercicio 4.1.* ¿Para cuáles de las siguientes matrices  $A$ , el origen es un equilibrio estable para el sistema  $x' = Ax$ ?

i.  $A = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$       ii.  $A = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$       iii.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

iv.  $A = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$       v.  $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$       ii.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

*Ejercicio 4.2.* Halle (si es posible) los valores del parámetro  $k \in \mathbb{R}$  en las siguientes matrices que hacen que el origen sea un *sumidero* (ésto es,  $A$  tiene dos autovalores reales y negativos) para el sistema  $x' = Ax$ .

$$\text{i. } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ k & -4 \end{pmatrix} \quad \text{ii. } A = \begin{pmatrix} k^2 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\text{iii. } A = \begin{pmatrix} -2 & k-1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{iv. } A = \begin{pmatrix} -5 & -k \\ k & 2 \end{pmatrix}$$

*Ejercicio 4.3.* Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} x' &= (\alpha + 1)x - 3y \\ y' &= x + (1 - \alpha)y \end{cases}$$

1. Verifique que el origen no es estable para ningún valor de  $\alpha$ .
2. Realice un diagrama de fases alrededor del  $(0, 0)$  para  $\alpha = \sqrt{2}$ .

## 4.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal

En general ya no hay métodos para hallar las soluciones de un sistema no lineal, pero es importante analizar el comportamiento de las soluciones cerca de los puntos de equilibrio.

Analicemos la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases} \quad (4.16)$$

Sea  $(x_e, y_e)$  un punto de equilibrio del sistema. Cerca del punto  $(x_e, y_e)$  podemos aproximar la función  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  de la siguiente manera:

$$F(x, y) \approx DF(x_e, y_e)(x - x_e, y - y_e)^t,$$

donde

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Si llamamos  $Y(t) = (x(t) - x_e, y(t) - y_e)^t$ , tenemos que

$$Y'(t) = (x'(t), y'(t))^t = F(x, y) \approx DF(x_e, y_e)(x - x_e, y - y_e)^t = DF(x_e, y_e)Y$$

para  $Y \approx 0$ .

Diremos que el sistema

$$Y'(t) = DF(x_e, y_e)Y \quad (4.17)$$

es una linealización del sistema 4.16 cerca del punto  $(x_e, y_e)$ .

Resulta razonable pensar que la estabilidad del punto de equilibrio  $(x_e, y_e)$  del sistema no lineal coincidirá con la estabilidad  $(x_e, y_e)$  como punto de equilibrio del sistema linealizado. Esto no siempre sucede, pero tenemos el siguiente resultado que enunciaremos sin demostración.

*Teorema 4.1.* Sea  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  una función continuamente diferenciable y  $(x_e, y_e)$  un punto de equilibrio del sistema 4.16. Si los autovalores de la matriz  $DF(x_e, y_e)$  tienen parte real distinta de cero, entonces se verifica que:

1. Si  $(x_e, y_e)$  es un punto de equilibrio inestable del sistema linealizado 4.17, entonces es un punto de equilibrio inestable del sistema no lineal 4.16.
2. Si  $(x_e, y_e)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema linealizado 4.17, entonces es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema no lineal 4.16.

Veamos cómo se aplica este teorema para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal analizando el siguiente ejemplo:

*Ejemplo 4.4.* Consideremos el sistema de ecuaciones no lineal del ejemplo 4.2. Analicemos la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio de este sistema.

Consideremos la función

$$F(x, y) = (x - x^2 - xy, 3y - y^2 - 2xy),$$

cuya matriz diferencial es

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -2y & 3 - 2y - 2x \end{pmatrix}$$

Analicemos la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio.

1. Para analizar la estabilidad del punto de equilibrio  $(0, 0)$  se calculan los autovalores de la matriz  $DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  Como los autovalores son  $\lambda_1 = 1 > 0$  y  $\lambda_2 = 3 > 0$ , el punto  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio inestable.



2. Consideremos la matriz  $DF(0, 3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$  Sus autovalores son  $\lambda_1 = -2 < 0$  y  $\lambda_2 = -4 < 0$ , luego el punto  $(0, 3)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.
3. El punto  $(1, 0)$  es un punto de equilibrio inestable ya que la matriz  $DF(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  tiene autovalores  $\lambda_1 = -1 < 0$  y  $\lambda_2 = 1 > 0$ .
4. Por último, el punto  $(2, -1)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable ya que los autovalores de la matriz  $DF(2, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  son  $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$ , cuya parte real es negativa.

*Ejemplo 4.5.* Consideremos el siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} x' &= \alpha x + (\alpha - 5)y - x^3 + y^5 \\ y' &= x + \alpha y - y^3, \end{cases}$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Observemos que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio de sistema para todo valor de  $\alpha$ . Analicemos la estabilidad de este punto de equilibrio.

Consideramos

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 5 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz son

$$\alpha + \sqrt{\alpha - 5} \quad y \quad \alpha - \sqrt{\alpha - 5}$$

Analicemos la naturaleza de los autovalores dependiendo del valor de  $\alpha$ . Se tienen los siguientes casos:

1. Si  $\alpha > 5$ , los autovalores son reales. Además, por lo menos uno de los autovalores es positivo ya que  $\alpha + \sqrt{\alpha - 5} > 0$ . Luego  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio inestable.
2. Si  $\alpha = 5$ , el autovalor doble es positivo. Luego  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio inestable.
3. Si  $\alpha < 5$ , los autovalores son complejos y la estabilidad del punto de equilibrio depende de la parte real de los autovalores.

- a) Si  $\alpha < 0$ , la parte real de los autovalores es negativa y por lo tanto el punto de equilibrio es asintóticamente estable.
- b) Si  $\alpha = 0$ , la parte real de los autovalores es 0 y no podemos decidir acerca de la estabilidad del punto de equilibrio ya que el teorema no contempla este caso. Para ver si este punto de equilibrio es estable o no deberemos estudiar otro criterio de estabilidad que analizaremos en la próxima sección.
- c) Si  $0 < \alpha < 5$ , la parte real de los autovalores es positiva y en consecuencia  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio inestable.

*Ejercicio 4.4.* Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio indicados en cada uno de los siguientes sistemas.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x' = ye^{-3(x-1)} - 1 \\ y' = -(x-1)y \end{cases} & (1, 1) & \text{b) } \begin{cases} x' = \text{sen}(1-x) + e^y - 1 \\ y' = -\text{sen}2y \end{cases} & (1, 0) \\ \text{c) } \begin{cases} x' = e^{3x} - y^4 \\ y' = (x+1)^2y - y^4 \end{cases} & (0, 1) & \text{d) } \begin{cases} x' = -\log x + x(y+1)^2 \\ y' = -xy + e^{-2(y+1)} - 2 \end{cases} & (1, -1) \\ & & \text{e) } \begin{cases} x' = 1 + y - x^2 - y^2 \\ y' = 1 - x - x^2 - y^2 \end{cases} & (-1, 1) \end{aligned}$$

*Ejercicio 4.5.* Analizar la estabilidad del punto de equilibrio  $(0, 0)$  para los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x' = -x - \frac{1}{3}x^3 - 2\text{sen}y \\ y' = -y - \frac{1}{3}y^3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = -x + 3y + xy \\ y' = x + y + x^4 \end{cases}$$

*Ejercicio 4.6.* Consideremos el siguiente modelo para especies en competencia, en el que se asume que la interacción entre las especies es desfavorable para ambas. Tenemos:

$$\begin{cases} x' = x - x^2 - axy, & x \geq 0 \\ y' = y - y^2 - axy, & y \geq 0 \end{cases}$$

donde  $a$  es una constante positiva y  $a \neq 1$ .

1. Determine la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema.
2. Esboce el diagrama de fases para  $a = \frac{1}{2}$  y  $a = 2$ .
3. Determine las condiciones de extinción (cuando  $t \rightarrow \infty$ ) de una de las especies, de las dos especies y coexistencia de ambas especies.

### 4.3. Método de Lyapunov

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases} \quad (4.18)$$

donde  $F : W \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  es una función continuamente diferenciable en  $W$  y sea  $(x_e, y_e)$  un punto de equilibrio del sistema.

Hemos visto que si los autovalores de  $DF(x_e, y_e)$  tienen parte real distinta de cero, entonces la estabilidad de  $(x_e, y_e)$  se puede determinar analizando la estabilidad de  $(x_e, y_e)$  como punto de equilibrio del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = DF(x_e, y_e) \begin{pmatrix} x - x_e \\ y - y_e \end{pmatrix}$$

Pero, ¿qué se puede decir de la estabilidad del punto de equilibrio cuando la matriz  $DF(x_e, y_e)$  tiene autovalores con parte real igual a cero?.

En esta sección estudiaremos un importante criterio de estabilidad debido a Lyapunov que nos ayudará a responder esta pregunta pero que también puede ser aplicado en algunos de los casos vistos anteriormente.

Consideremos una función diferenciable  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un entorno  $U \subset W$  de  $(x_e, y_e)$ . Llamemos  $\phi(t) = (x(t), y(t))$  a una solución del sistema 4.18 tal que  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in U$ .

La composición  $V \circ \phi(t)$  es una función de una variable cuya derivada en  $t = 0$  es

$$\begin{aligned} (V \circ \phi)'(0) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0)x'(0) + \frac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0)y'(0) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0)f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0)f_2(x_0, y_0) \\ &= \langle \nabla V(x_0, y_0), (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) \rangle \end{aligned}$$

Luego, si  $\langle \nabla V(x_0, y_0), (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) \rangle \leq 0$ , para cualquier  $(x_0, y_0)$  que pertenezca a  $U$ , vemos que  $V$  decrece sobre las soluciones de 4.18 con el correr del tiempo.

Teniendo en cuenta esta observación enunciaremos el teorema de estabilidad de Lyapunov:

*Teorema 4.2.* Sea  $(x_e, y_e) \in W$  un punto de equilibrio del sistema 4.18. Sea  $V : U \subseteq W \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida en un entorno  $U \subseteq W$  de  $(x_e, y_e)$ , derivable en  $U - \{(x_e, y_e)\}$  tal que:

1.  $V(x_e, y_e) = 0$  y  $V(x, y) > 0$  si  $(x, y) \in U - \{(x_e, y_e)\}$ .
2.  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle \leq 0$  para  $(x, y) \in U - \{(x_e, y_e)\}$ .

Entonces  $(x_e, y_e)$  es un punto de equilibrio estable.

Si además

3.  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle < 0$  para  $(x, y) \in U - \{(x_e, y_e)\}$ , entonces  $(x_e, y_e)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

**Definición 4.3.1.** Una función que verifica 1. y 2. se llama una función de Lyapunov para  $(x_e, y_e)$ .

**Dem:** Sea  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(x_e, y_e) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (x_e, y_e)\| < \delta\}$ . esté contenida en  $U$ .

Sea  $\alpha$  el valor mínimo de  $V$  sobre el conjunto

$$S_\delta(x_e, y_e) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (x_e, y_e)\| = \delta\}$$

Notemos que el conjunto  $S_\delta(x_e, y_e)$  es la frontera de  $B_\delta(x_e, y_e)$ . Por la condición 1., debe ser  $\alpha > 0$ .

Consideremos el conjunto

$$U_1 = \{(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) / V(x, y) < \alpha\}.$$

Ninguna solución que comience en  $U_1$  puede pasar por  $S_\delta(x_e, y_e)$  ya que  $V$  es decreciente sobre las soluciones de 4.18. Luego toda solución que comienza en  $U_1$  permanece en  $B_\delta(x_e, y_e)$  y esto dice que  $(x_e, y_e)$  es un punto de equilibrio estable.

Veamos que, con la condición adicional

$$\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle < 0$$

para  $(x, y) \in U - \{(x_e, y_e)\}$ , resulta que

$$\phi(t) = (x(t), y(t)) \rightarrow (x_e, y_e)$$

cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Vamos a probar que  $V(\phi(t)) \rightarrow 0$ . Luego, como  $V(x_e, y_e) = 0$  y  $V(x, y) > 0$  para todo  $(x, y) \in U - \{(x_e, y_e)\}$ , se puede concluir el resultado anunciado.

Como  $V(\phi(t))$  es una función decreciente y  $V(\phi(t)) \geq 0$ , existe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\phi(t)) = l \geq 0.$$

Supongamos que  $l > 0$ . Sea  $r > 0$  tal que

$$V(x, y) < l \text{ para todo } (x, y) \in B_r(x_e, y_e) \subseteq U_1.$$

Como  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle$  es una función continua y estrictamente negativa, existe  $M < 0$  tal que

$$(V(\phi(t)))' = \langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle \leq M$$

para  $(x, y) \in \{(x, y) \mid r \leq \|(x, y) - (x_e, y_e)\| \leq \delta\}$ .

Escribiendo

$$V(\phi(t)) = V(\phi(0)) + \int_0^t V(\phi(t))' dt$$

y acotando  $V(\phi(t))'$ , tenemos que

$$V(\phi(t)) \leq V(\phi(0)) + Mt.$$

Luego

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\phi(t)) = -\infty,$$

lo cual es un absurdo ya que  $V(\phi(t)) \geq 0$ .  $\square$

El teorema de Lyapunov tiene una interpretación gráfica muy sencilla. Supongamos que hemos construido una función  $V(x, y)$  que verifica las condiciones del teorema. Si graficamos algunas curvas de nivel y el campo  $\nabla V$  entonces, como es sabido, los vectores dados por el campo se orientarán en la dirección de mayor crecimiento de  $V$  y serán perpendiculares a las curvas de nivel. Por otro lado, si graficamos una solución de la ecuación diferencial, entonces los vectores tangentes al gráfico de la solución deberán formar un ángulo mayor o igual a  $\frac{\pi}{2}$  con los del campo  $\nabla V$  debido a que  $\langle \nabla V, (x', y') \rangle \leq 0$ . En la siguiente figura vemos la situación con un ejemplo. Allí aparecen las curvas de nivel 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1 y 1.5, para una función de Lyapunov considerando que el punto de equilibrio es el  $(0, 0)$ . También puede verse el campo de gradientes y una solución particular de la ecuación diferencial graficada con sus vectores tangentes:

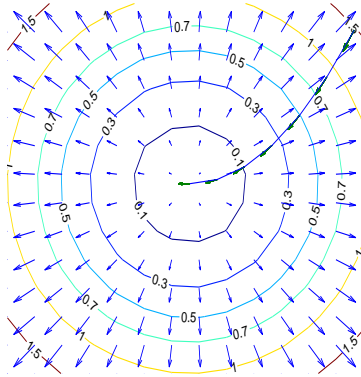


Figura 32

Como se ve, la condición  $V > 0$  fuera del equilibrio y  $V = 0$  en el equilibrio fuerza a las curvas de nivel a rodear el punto de equilibrio. Por otro lado  $\langle \nabla V, (x', y') \rangle < 0$  indica que las soluciones de la ecuación diferencial tienen que “entrar” a las curvas de nivel, aproximándose entonces al equilibrio.

El teorema nos asegura la estabilidad del punto de equilibrio en el caso en que exista una función de Lyapunov. Lamentablemente no hay métodos generales para hallar funciones de Lyapunov. Hay que proponer una función y ver si verifica las condiciones del teorema todas las veces que sea necesario hasta hallar una función de Lyapunov. En el caso de sistemas mecánicos o eléctricos, la energía suele ser una función de Lyapunov. Veremos varios ejemplos que ilustran los casos que pueden presentarse en la práctica.

*Ejemplo 4.6.* Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x' &= & -xy^2 - x^5 \\ y' &= & -y^3 - 2x^4y + (\text{sen}x)y^3 \end{cases}$$

El punto  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema. En este caso

$$f_1(x, y) = -xy^2 - x^5 \quad y \quad f_2(x, y) = -y^3 - 2x^4y + (\text{sen}x)y^3.$$

Veamos que  $V(x, y) = x^2 + y^2$  es una función de Lyapunov para  $(0, 0)$ . Esta función verifica:

1.  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x, y) > 0$  si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

2.

$$\begin{aligned} & \langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle \\ &= \langle (2x, 2y), (-xy^2 - x^5, -y^3 - 2x^4y + (\text{sen}x)y^3) \rangle \\ &= -2x^2y^2 - 2x^6 - 2y^4 - 4x^4y^2 + 2(\text{sen}x)y^4 \\ &= -2x^2y^2(1 + 2x^2) - 2x^6 - 2y^4(1 - \text{sen}x) \leq 0 \end{aligned}$$

ya que  $1 - \text{sen}x \geq 0$ .

Veamos si se verifica la condición 3. Para ello, calculemos para qué puntos  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle = 0$ , ésto es,

$$\begin{aligned} -2x^2y^2(1 + 2x^2) - 2x^6 - 2y^4(1 - \text{sen}x) = 0 &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} 2x^2y^2(1 + 2x^2) = 0 \\ 2x^6 = 0 \\ 2y^4(1 - \text{sen}x) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Luego  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle < 0$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$  y  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

*Ejemplo 4.7.* Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' &= -3xy \\ y' &= x^2 - y^5 \end{cases}$$

El punto  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema. En este caso

$$f_1(x, y) = -2xy \quad y \quad f_2(x, y) = x^2 - y^3.$$

Propongamos una función de Lyapunov de la forma  $V(x, y) = ax^2 + by^2$  con  $a, b > 0$ . Es claro que verifica la condición 1. del teorema. Hallemos  $a$  y  $b$  de manera tal que  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle \leq 0$ . Vemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle &= \langle (2ax, 2by), (-3xy, x^2 - y^5) \rangle \\ &= (-6a + 2b)x^2y - 2by^6 \end{aligned}$$

Como el signo de  $x^2y$  depende del cuadrante al cual pertenezca el punto  $(x, y)$ , nos conviene elegir  $a$  y  $b$  de modo tal que  $-6a + 2b = 0$ , ésto es  $b = 3a$ . Por ejemplo, podemos tomar  $a = 1$  y  $b = 3$ . En este caso, la función  $V(x, y) = x^2 + 3y^2$  verifica que:

1.  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x, y) > 0$  si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

$$2. \langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle = -6y^6 \leq 0 \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Veamos si verifica la condición 3. del teorema. Nuevamente planteamos  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle = 0$ , es decir,  $-6y^6 = 0$ . Ésto se verifica si y sólo  $y = 0$ . Entonces para todos los puntos de la forma  $(x, 0)$  tenemos que

$$\langle \nabla V(x, 0), (f_1(x, 0), f_2(x, 0)) \rangle = 0.$$

Luego, no se verifica la tercer condición y lo único que podemos asegurar es que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio estable.

*Ejemplo 4.8.* Sea

$$\begin{cases} x' &= -3x^3 - y \\ y' &= x^5 - 2y^3 \end{cases}$$

El punto  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema. En este caso

$$f_1(x, y) = -3x^3 - y \quad y \quad f_2(x, y) = x^5 - 2y^3.$$

En este caso proponemos una función de Lyapunov de la forma

$$V(x, y) = ax^6 + by^2,$$

con  $a, b > 0$ . Esta función verifica la primer condición para cualquier elección de  $a$  y  $b$ . Debemos elegir estas constantes de manera tal que se verifique la segunda condición:

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle &= \langle (2ax^5, 2by), (-3x^3 - y, x^5 - 2y^3) \rangle \\ &= -18ax^8 + (-6a + 2b)x^5y - 4by^4. \end{aligned}$$

Como  $x^5y$  no tiene un signo definido, pedimos que  $-6a + 2b = 0$ , ésto es,  $b = 3a$ . Tomemos  $a = 1$  y  $b = 3$ . La función  $V(x, y) = x^6 + 3y^2$  verifica:

1.  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x, y) > 0$  si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .
2.  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle = -18x^8 - 12y^4 \leq 0$

Veamos si se verifica  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle = -18x^8 - 12y^4 = 0$  para algún punto  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Pero tenemos que

$$-18x^8 - 12y^4 = 0 \Leftrightarrow 18x^8 = 0 \text{ y } 12y^4 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Luego  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle < 0$  si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  y por lo tanto, el punto  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.



*Ejemplo 4.9.* Consideremos el siguiente sistema no lineal que corresponde al caso  $\alpha = 0$  del ejemplo 4.5:

$$\begin{cases} x' &= -5y - x^3 + y^5 \\ y' &= x - y^3 \end{cases}$$

El punto  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema. En este caso

$$f_1(x, y) = -5y - x^3 + y^5 \quad y \quad f_2(x, y) = x - y^3.$$

Propongamos una función de Lyapunov de la forma  $V(x, y) = ax^2 + by^2$  con  $a, b > 0$ . Hallemos  $a$  y  $b$  de manera tal que

$$\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle \leq 0.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle &= \langle (2ax, 2by), (-5y - x^3 + y^5, x - y^3) \rangle \\ &= 2xy(-5a + b) - 2ax^4 - 2y^4(b - axy) \end{aligned}$$

Elegimos  $a$  y  $b$  de modo tal que  $-5a + b = 0$ , esto es  $b = 5a$ . Por ejemplo, podemos tomar  $a = 1$  y  $b = 5$ . La función  $V(x, y) = x^2 + 5y^2$  verifica:

1.  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x, y) > 0$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
2.  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle = -2x^4 - 2y^4(5 - xy) \leq 0$  si  $(x, y) \in U$ , donde  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy < 5\}$

Observemos que  $U$  es un entorno abierto de  $(0, 0)$ .

Veamos si se verifica  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle = 0$  para algún punto  $(x, y) \in U$ . Tenemos que

$$-2x^4 - 2y^4(5 - xy) = 0 \Leftrightarrow x^4 = 0 \text{ y } 2y^4(5 - xy) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Luego  $\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle < 0$  si  $(x, y) \in U$  y por lo tanto, el punto  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

*Ejemplo 4.10.* Una generalización de la ecuación del péndulo no amortiguado es

$$x'' + g(x) = 0,$$

donde  $g(x)$  es una función continua que verifica las siguientes condiciones:  $g(0) = 0$ ,  $g(x) > 0$  para  $0 < x < k$  y  $g(x) < 0$  para  $-k < x < 0$ , para

algún  $k \in (0, +\infty)$ . Notemos que  $g(x) = \text{sen}(x)$  verifica estas condiciones para  $k = \frac{\pi}{2}$ .

Si consideramos  $y = x'$ , podemos transformar la ecuación en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -g(x) \end{cases}$$

Notemos que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema. Veamos que este punto de equilibrio es estable. Para ello demostraremos que la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)ds, \quad -k < x < k.$$

es una función de Lyapunov en  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -k < x < k\}$ . Llamemos  $f_1(x, y) = y$  y  $f_2(x, y) = -g(x)$  y veamos las condiciones que debe satisfacer  $V(x, y)$  para ser una función de Lyapunov:

1. Claramente  $V(0, 0) = 0$ .

Veamos que  $V(x, y) > 0$  en  $U$ . Para ello debemos ver que  $\int_0^x g(s)ds > 0$  para  $-k < x < k$ .

Si  $0 < x < k$ , sabemos que  $g(x) > 0$ . Luego  $\int_0^x g(s)ds$  es el área de la región encerrada entre el gráfico de  $g(x)$  y el eje  $x$  entre  $0$  y  $x$  y por lo tanto es un número positivo.

Si  $-k < x < 0$ , sabemos que  $g(x) < 0$ . Luego

$$\int_0^x g(s)ds = - \int_x^0 g(s)ds = \int_x^0 |g(s)|ds$$

es el área de la región encerrada entre el gráfico de  $|g(x)|$  y el eje  $x$  entre  $x$  y  $0$  y en consecuencia es un número positivo.

Aún nos falta ver que si  $V(x, y) = 0$ , para  $(x, y) \in U$ , entonces  $(x, y) = (0, 0)$ .

Tenemos que

$$V(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = 0 \quad y \quad \int_0^x g(s)ds = 0$$

Notemos que

$$\frac{1}{2}y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad y \quad \int_0^x g(s)ds = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

ya que, por lo visto anteriormente, si  $x \neq 0$ , tenemos que

$$\int_0^x g(s)ds > 0.$$

2. Notemos que, por el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^x g(s)ds \right) = g(x).$$

Luego,

$$\langle \nabla V(x, y), (f_1(x, y), f_2(x, y)) \rangle = \langle (g(x), y)(y, -g(x)) \rangle = 0 \leq 0$$

para todo  $(x, y) \in U$ .

Además, con esta función de Lyapunov, no se verifica la condición 3 del teorema. Por lo tanto, sólo podemos asegurar que el punto de equilibrio es estable. Observemos que esta función de Lyapunov corresponde a la función de energía  $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos(x))$  para el caso  $g(x) = \text{sen}(x)$ .

*Ejercicio 4.7.* Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' = 2y(z - 1) \\ y' = -x(z - 1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

- Hallar los puntos de equilibrio. ¿Se puede analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio a partir de la parte lineal del sistema?
- Demostrar que el origen es un equilibrio estable. Sugerencia: Buscar una función de Liapunov de la forma  $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$  con  $a, b, c > 0$ .

*Ejercicio 4.8.* Mostrar que el origen es estable para los siguientes sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} x' = -x + 2x(x + y)^2 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x + y)^2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' = -y - xy^2 \\ y' = x^3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x' = -2x - y^2 \\ y' = -y - x^2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x' = 2y^3 \\ y' = -x \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x' = -2x^3 + 2y + x^3 \text{sen}(x) \\ y' = -x - y^3 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x' = -xy^2 - x^3 + y^4 \\ y' = -y^3 - x^2y^2 - x^3y \end{cases}$$

*Ejercicio 4.9.* Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Considerar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = 2y + 2x^4 - x^3 \\ y' = -2x + \alpha y - y^3 \end{cases}$$

y notar que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema.

1. Clasificar el sistema cuando  $\alpha \neq 0$ .
2. Para  $\alpha = 5$ , hacer un diagrama de fases.
3. Para  $\alpha = 0$ , verificar que el  $(0, 0)$  es asintóticamente estable.

*Ejercicio 4.10.* Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Verificar que el  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema:

$$f(x) = \begin{cases} x' = -xy + 3\alpha y \\ y' = x^2 - y^3 + \alpha x \end{cases}$$

Mostrar que si  $\alpha \neq 0$ , entonces  $(0, 0)$  es inestable, pero si  $\alpha = 0$ , es estable.

*Ejercicio 4.11.* Dado el sistema:

$$f(x) = \begin{cases} x' = 3x - y + \alpha(e^y - 1) \\ y' = -2\operatorname{sen}x + 4y \end{cases}$$

Demostrar que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio inestable para todo valor de  $\alpha$ .

*Ejercicio 4.12.* Considerar la ecuación de Lienard

$$(L) \begin{cases} x' = y - f(x) \\ y' = -x \end{cases}$$

- a) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio de (L)?
- b) Si  $f'(0) \neq 0$ , determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio de (L) en función de  $f'(0)$ .
- c) Esbozar un gráfico de fase.

*Ejercicio 4.13.* En el ejercicio 4.12 se estudió la ecuación de Lienard (L) bajo cierta hipótesis sobre  $f$ . Supongamos ahora que  $xf(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ . Probar que el origen es un punto de equilibrio estable.

*Ejercicio 4.14.* Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = y - xf(x, y) \\ y' = -x - yf(x, y) \end{cases}$$

en donde  $f(x, y)$  es una función continua con primeras derivadas continuas. Demostrar que si  $f(x, y) > 0$  en algún entorno del origen, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

*Ejercicio 4.15.* Considerar un péndulo con una masa  $m$  oscilando en el extremo de un hilo de longitud  $l$ . Supongamos que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad del péndulo, siendo  $k$  la constante de proporcionalidad. El sistema que describe el movimiento del péndulo es

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{1}{l}\text{sen}x - \frac{k}{m}y \end{cases}$$

donde  $x$  es el ángulo formado por el eje vertical y la recta que contiene al hilo.

- a) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio del sistema? Interpretar desde el punto de vista físico.
- b) Analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio y realizar un diagrama de fases.

*Ejercicio 4.16.* Una partícula se mueve sobre la recta  $\mathbb{R}$  bajo la influencia de una fuerza Newtoniana dependiendo sólo de la posición de la partícula. Si la fuerza es siempre dirigida hacia  $0 \in \mathbb{R}$ , y se anula en 0, entonces probar que 0 es un equilibrio estable. Sugerencia: Una vez obtenido el sistema de ecuaciones, verificar que la energía total (energía cinética + energía potencial) resulta ser una función de Liapunov.

*Ejercicio 4.17.* En el ejercicio previo supongamos que hay una fuerza de fricción opuesta al movimiento de la forma  $-f(x)v$ ,  $f(x) \geq 0$ , donde  $v$  es la velocidad, y  $x$  la posición de la partícula. Si  $f(x) \neq 0$  para  $x \neq 0$ , probar que el punto  $(0, 0)$  (en el espacio  $x, v$ ) es asintóticamente estable.



# Capítulo 7

## Series de Fourier

A principios del siglo XIX Fourier estudió el problema de la difusión del calor dentro de los cuerpos sólidos. Notablemente encontró la forma de modelizar el proceso a través de una ecuación en derivadas parciales y desarrolló además una técnica nueva para poder resolverla. Como veremos más adelante esta cuestión condujo al problema de saber bajo qué condiciones una función  $f$  puede expresarse en términos de funciones trigonométricas de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx). \quad (0.1)$$

Hoy en día decimos que el miembro derecho de (0.1) es la serie de Fourier de  $f$  y los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  se denominan **coeficientes de Fourier** (el factor  $\frac{1}{2}$  multiplicando a  $a_0$  es arbitrario, pero tiene un sentido que quedará claro más adelante).

### 1. Coeficientes de Fourier

Comencemos suponiendo que (0.1) es efectivamente posible para cierta  $f$ . En tal caso  $f$  debe tener el mismo período que las funciones trigonométricas involucradas (en este caso  $2\pi$ ). Recordemos entonces la siguiente

**Definición 1.0.2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ). Diremos que  $f$  es periódica, de período  $L$ , si  $f(x) = f(x + L) \forall x \in \mathbb{R}$ .

Si  $f$  tiene período  $2\pi$  entonces la validez de (0.1) para el intervalo  $(-\pi, \pi]$  implicaría la validez en todo  $\mathbb{R}$ . Con esta idea vamos a empezar suponiendo que nuestra  $f$  está definida en el intervalo  $(-\pi, \pi]$  (o a veces sólo en el abierto

$(-\pi, \pi)$ ) y que queremos hallar los coeficientes  $a_n, b_n$ . Para simplificar la exposición supondremos por ahora que además (0.1) involucra una suma finita, es decir

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx). \quad (1.2)$$

Se verifican las siguientes igualdades, que son de demostración elemental y que establecemos en la siguiente

*Proposición 1.1.* Valen las siguientes identidades:

1.  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2$
2.  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) dx = 0$
3.  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0$
4.  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$
5.  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$
6.  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = 0$

para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ .

**Dem:** 1,2 y 3 son inmediatas. Demostraremos sólo 4 ya que las afirmaciones 5 y 6 se demuestran de forma análoga. Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx &= -\frac{\cos(nx)}{n} \operatorname{sen}(mx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx \\ &= \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el método de integración por partes resulta

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx &= \frac{m}{n} \left[ \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \cos(mx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx \right] \end{aligned}$$

En definitiva,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{m^2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx.$$



Esto es,

$$\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx)dx = 0.$$

Luego,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx)dx = 0 \quad \text{si } n \neq m.$$

En el caso  $n = m$  tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \text{sen}^2(nx))dx.$$

Luego

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx)dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi,$$

y por lo tanto,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx)dx = 1,$$

como quería demostrarse.  $\square$

Veamos cómo podemos calcular los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  a partir de estos resultados. Multiplicando ambos miembros de (1.2) por  $\cos(mx)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , obtenemos

$$f(x)\cos(mx) = \frac{1}{2}a_0\cos(mx) + \sum_{n=1}^N a_n\cos(nx)\cos(mx) + b_n\text{sen}(nx)\cos(mx)$$

Integrando y usando la proposición anterior obtenemos

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx. \tag{1.3}$$

Análogamente, multiplicando por  $\text{sen}(mx)$ , tenemos

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen}(mx)dx. \tag{1.4}$$

Para obtener  $a_0$  integramos la igualdad (1.2) y resulta

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{1.5}$$

Observemos que el factor arbitrario  $1/2$  se introdujo para que la constante delante del integrando en el cálculo de  $a_0$  vuelva a dar  $\frac{1}{\pi}$ .

Otra forma de expresar la serie (1.2), de hecho muy común en las aplicaciones, es a través de funciones exponenciales. En efecto, supongamos que existen  $c_i \in \mathbb{C}$ ,  $-N \leq i \leq N$ , (notemos que los índices pueden ser negativos) tales que

$$f(x) = \sum_{-N}^N c_n e^{inx} \tag{1.6}$$

Entonces, notando que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{1.7}$$

se obtiene, luego de multiplicar por  $e^{-imx}$  e integrar, la siguiente expresión para  $c_m$  :

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx. \tag{1.8}$$

La relación entre los coeficientes  $a_m$ ,  $b_m$  y  $c_m$  puede obtenerse fácilmente notando que para  $m \geq 0$ , se tiene

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

$$c_{-m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

Estas ecuaciones pueden expresarse gracias a (1.3), (1.4) y (1.5), como

$$c_m = \frac{a_m - ib_m}{2} \quad c_{-m} = \frac{a_m + ib_m}{2},$$

lo cual indica que

$$\begin{aligned} a_m &= c_m + c_{-m} \\ b_m &= i(c_m - c_{-m}) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Es importante destacar que hemos asumido el hecho de que las sumas eran finitas. En realidad gracias a eso pudimos usar la propiedad de que la integral distribuye respecto de la suma. En el caso de que la suma presente infinitos términos este aspecto es delicado (aunque de hecho vale en contextos muy generales) y vamos a comentarlo en más detalle en la sección 5. En principio vamos a suponer que la integración término a término es posible y que los coeficientes pueden calcularse según las relaciones (1.3), (1.4), (1.5) o bien

(1.8) para el desarrollo exponencial. Por otro lado, hasta clarificar la igualdad (0.1), vamos a escribir

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx),$$

y usaremos la notación  $S_N(f)$  para las sumas parciales de la serie de Fourier

$$S_N(f) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx).$$

Más en general notaremos  $S_N$  o  $S_N(x)$  cuando no haya ambigüedad acerca de la función  $f$ .

*Observación 1.1.* Fourier pensaba que el símbolo  $\sim$  en la expresión previa representaba una igualdad, o sea, una identidad puntual para cualquier función  $f(x)$  (la noción de función en los tiempos de Fourier no se hallaba formalizada como en la actualidad). En la sección 5 diremos en qué sentido entendemos esta igualdad y qué condiciones deben verificar las funciones para que valga esta igualdad.

*Observación 1.2.* Observe que para la definición de los coeficientes de Fourier solo necesitamos que las funciones  $f(x)$ ,  $f(x)\cos(nx)$  y  $f(x)\operatorname{sen}(nx)$  sean integrables. Esto sugiere que es poco lo que debe pedirse a la función  $f$  para definir su serie de Fourier. Por otro lado, si para cierta  $f$  sus coeficientes de Fourier pueden definirse entonces también pueden definirse para otra  $\tilde{f}$  que difiera de la anterior en solo un punto. En consecuencia, la misma serie no puede representar ambas funciones en ese punto.

Analicemos algunos ejemplos de cálculo de series,

*Ejemplo 1.1.* Consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{\pi}(x - \pi)^2 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

En este caso

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (x + \pi) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 dx \right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (x + \pi) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 \cos(nx) dx \right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (x + \pi) \operatorname{sen}(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 \operatorname{sen}(nx) dx \right)$$

Integrando por partes obtenemos

$$a_n = \frac{3 - \cos(n\pi)}{\pi n^2} = \frac{3 - (-1)^n}{\pi n^2}$$

donde hemos utilizado la representación  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ . Análogamente,

$$b_n = \frac{2(-1 + (-1)^n)}{\pi^2 n^3}.$$

En definitiva

$$f(x) \sim \frac{5\pi}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3 - (-1)^n}{\pi n^2} \right) \cos(nx) + \frac{2(-1 + (-1)^n)}{\pi^2 n^3} \operatorname{sen}(nx).$$

En la figura siguiente pueden verse las sumas parciales  $S_2$ ,  $S_4$ ,  $S_{10}$  y la propia función  $f$ :

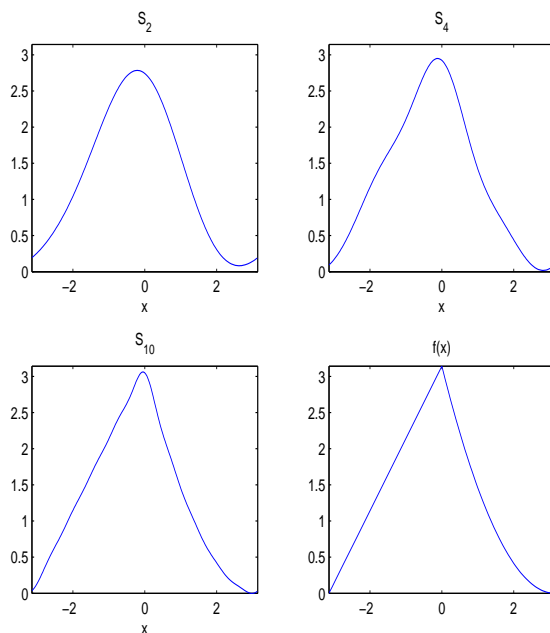


Figura 1

*Observación 1.3.* En ocasiones las series obtenidas poseen términos nulos y es más elegante eliminarlos de la expresión. Precisamente en el ejemplo previo notemos que

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{4}{\pi^2 n^3} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

de donde la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1 + (-1)^n)}{\pi^2 n^3} \text{sen}(nx) = -\frac{4}{\pi^2} \text{sen}(x) - \frac{4}{\pi^2 3^3} \text{sen}(3x) - \frac{4}{\pi^2 5^3} \text{sen}(5x) \dots$$

podría escribirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi^2 (2n+1)^3} \text{sen}((2n+1)x).$$

Por lo tanto

$$f(x) \sim \frac{5\pi}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3 - (-1)^n}{\pi n^2} \right) \cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-4}{\pi^2 (2n+1)^3} \right) \text{sen}((2n+1)x).$$

*Ejercicio 1.1.* Hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones definidas en el intervalo  $[-\pi, \pi]$

1.  $f(x) = \pi$
2.  $f(x) = \text{sen}(x)$
3.  $f(x) = \cos(x)$
4.  $f(x) = \pi + \text{sen}(x) + \cos(x)$

*Ejercicio 1.2.* Encontrar la serie de Fourier para las siguientes funciones definidas en el intervalo  $(-\pi, \pi]$ :

1.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0, \\ \cos(x) & \text{para } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{para } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

3.  $f(x) = x^2$

Recordemos ahora las siguientes definiciones:

**Definición 1.0.3.** Sea  $f$  una función definida en un intervalo simétrico con respecto al origen  $[-L, L]$ . Decimos que  $f$  es una función par si

$$f(-x) = f(x), \forall x \in [-L, L]$$

y que  $f$  es una función impar si

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in [-L, L].$$

Por ejemplo,  $x^{2n}, n \in \mathbb{N}$ ,  $\cos(x)$ ,  $|x|$  y cualquier combinación lineal de estas funciones son funciones pares.

Las funciones  $x^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$ ,  $\sin(x)$  y cualquier combinación lineal de estas funciones son funciones impares.

En el siguiente lema estableceremos las propiedades del producto de funciones pares e impares. La demostración es elemental y se deja de ejercicio para el lector.

*Lema 1.1.* 1. Si  $f$  y  $g$  son dos funciones pares, entonces el producto  $fg$  es una función par.

2. Si  $f$  y  $g$  son dos funciones impares, entonces el producto  $fg$  es una función par.

3. Si  $f$  es una función par y  $g$  es una función impar, entonces el producto  $fg$  es una función impar.

*Ejercicio 1.3.* Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos tipos:

$$a) x^3 - 2x \quad b) \operatorname{tg}(2x) \quad c) e^{-x} \quad d) (x + x^3)^4 \quad e) \ln(x^2 + 1)$$

*Ejercicio 1.4.* Demostrar que cualquier función puede expresarse como la suma de otras dos funciones, una que es par y la otra impar. Es decir, para cualquier función  $f$ , cuyo dominio contiene a  $-x$  siempre que contenga a  $x$ , demuestre que existen una función par  $g$  y una función impar  $h$  tales que  $f(x) = g(x) + h(x)$ .

*Ejercicio 1.5.* Demostrar que la derivada de una función par es impar y que la derivada de una función impar es par.

*Observación 1.4.* Notemos que si  $h$  es una función par, entonces

$$\int_{-L}^L h(x)dx = 2 \int_0^L h(x)dx$$

y si  $h$  es una función impar

$$\int_{-L}^L h(x)dx = 0.$$

Combinando el lema y la observación anteriores podemos establecer las siguientes propiedades sobre los coeficientes de las series de Fourier de funciones pares e impares.

*Lema 1.2.* 1. Si  $f$  es una función par,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$$

y

$$b_m = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

2. Si  $f$  es una función impar,

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sen(mx)dx$$

y

$$a_m = 0, \quad \forall m \geq 0.$$

Veamos algunos ejemplos

*Ejemplo 1.2.* Consideremos la función:

$$f(x) = x$$

definida en el  $(-\pi, \pi]$  Como la función es impar, se tiene para  $n = 0, 1, \dots$  que  $a_n = 0$ . Por otro lado, escribiendo

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\sen(nx)dx$$

e integrando por partes obtenemos

$$b_n = -\frac{2(-\sen(\pi n) + \pi n\cos(\pi n))}{n^2}.$$

Como  $\text{sen}(n\pi) = 0$  y  $\text{cos}(n\pi) = (-1)^n$  resulta

$$b_n = -\frac{2(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Entonces

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx).$$

Examinemos varias sumas parciales así como la función original:

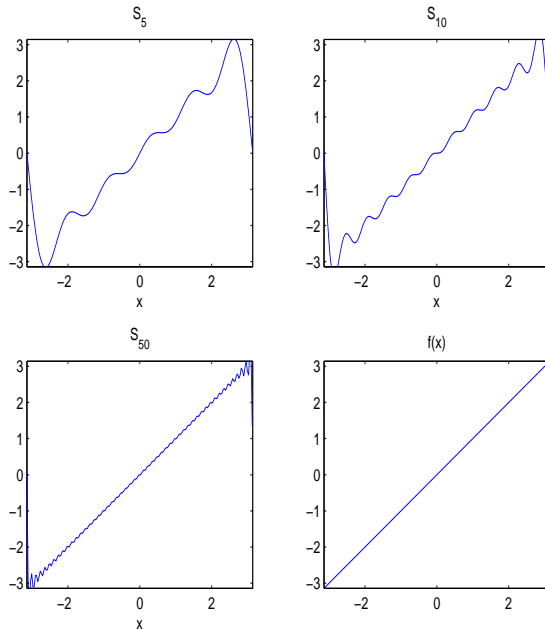


Figura 2

Observe que la suma  $S_{10}$  da todavía una aproximación bastante pobre debido a las fuertes oscilaciones (compare con la suma  $S_{10}$  del ejemplo anterior). Aún en  $S_{50}$  se nota la presencia de oscilaciones, más pronunciadas en los extremos del intervalo. Más adelante comentaremos un poco más sobre este fenómeno. Observe que  $S_N$  es necesariamente continua en todos los reales (es combinación



lineal de senos y cosenos) además de ser periódica de período  $2\pi$ . Sin embargo, al extender nuestra  $f(x)$  por periodicidad, la función resultante **no** es continua en los puntos de la forma  $\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Ejemplo 1.3.* Sea

$$f(x) = |x|$$

definida en el  $(-\pi, \pi]$

Esta vez la función es par y se tiene  $b_n = 0$ . Por otro lado

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$$

Integrando por partes obtenemos

$$a_n = \frac{2(\cos(n\pi) - 1 + \pi n \operatorname{sen}(n\pi))}{\pi n^2},$$

o sea

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}.$$

Por ende

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nx).$$

Observemos que

$$2((-1)^n - 1) = \begin{cases} -4 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Así que puede escribirse

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x).$$

Veamos sucesivas aproximaciones,

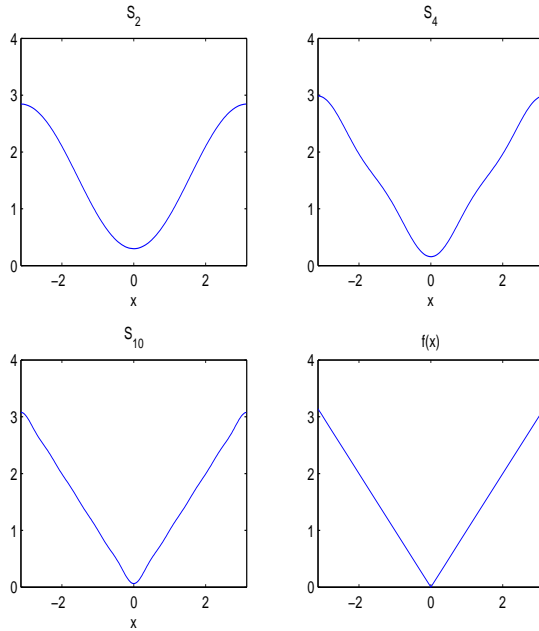


Figura 3

## 2. Cálculo de coeficientes para funciones de período arbitrario

En las dos secciones anteriores hemos obtenido los coeficientes de la serie de Fourier bajo la hipótesis de que la función  $f(x)$  tiene período  $2\pi$ . Supongamos ahora que intentamos reproducir lo hecho para cierta función  $g(x)$  de período  $T$ . Por conveniencia escribamos  $T = 2L$  y notemos que la función

$$f(t) = g\left(\frac{tL}{\pi}\right)$$

tiene período  $2\pi$ . En efecto

$$f(t + 2\pi) = g\left(\frac{(t + 2\pi)L}{\pi}\right) = g\left(\frac{tL}{\pi} + 2L\right) = g\left(\frac{tL}{\pi}\right) = f(t),$$

donde hemos utilizado en la anteúltima igualdad el hecho de que  $g$  tiene período  $2L$ . Ahora bien, para  $f$  sabemos que

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt),$$

donde los coeficientes se calculan según (1.3),(1.4) y (1.5). Luego podemos escribir, llamando  $x = \frac{tL}{\pi}$

$$g(x) = f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

O sea

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.10)$$

donde los coeficientes pueden calcularse directamente a través de  $g$ . En efecto, cambiando de variables en (1.3),(1.4) y (1.5), se tiene por ejemplo

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\pi}{L} dx,$$

o sea,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Análogamente

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$y \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) dx.$$

Observemos que en ocasiones se expresan estas igualdades utilizando el período  $T$  lo que resulta

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx,$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) dx.$$

*Ejemplo 2.1.* Calcular la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ \text{sen}(\pi x) & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

definida en el intervalo  $(-1, 1]$  y extendida por periodicidad.

En este caso  $T = 2$  o  $L = 1$ , luego los coeficientes se calculan mediante las fórmulas:

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 \text{sen}(\pi x) dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 \text{sen}(\pi x) \cos(n\pi x) dx \\ &= \begin{cases} 0 & n = 1 \\ \frac{-1}{n^2 - 1} ((-1)^n + 1) & n > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \text{sen}(n\pi x) dx = \int_0^1 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(n\pi x) dx \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ \frac{1}{2} & n = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego,

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{n^2 - 1} ((-1)^n + 1) \cos(n\pi x) + \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x)$$

Veamos en la figura 4 el gráfico de algunas sumas parciales y de la función  $f$ .

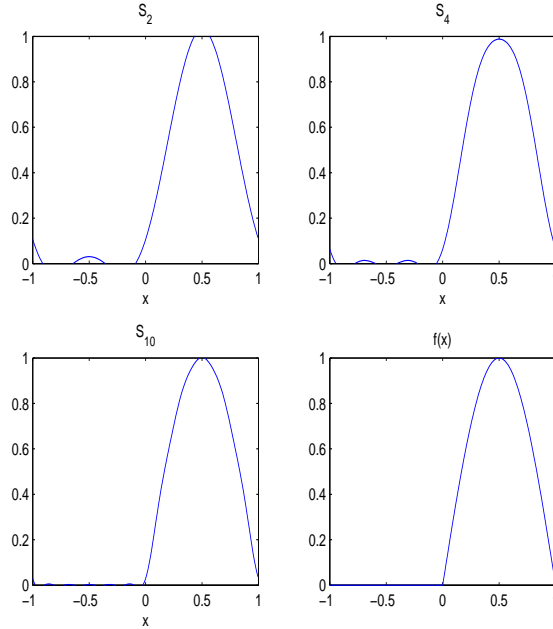


Figura 4

*Ejercicio 2.1.* Hallar la serie de Fourier para las siguientes funciones

1.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{para } -1 < x < 0, \\ 1 - x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde  $f$  es una función de período  $T = 2$ .

2.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -2 < x < -1, \\ x & \text{para } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{para } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

donde  $f$  es una función de período  $T = 4$ .

3.  $f(x) = 1 - x^2$ ,  $-3 < x \leq 3$ , donde  $f$  es una función de período  $T = 6$ .

*Ejercicio 2.2.* 1. Hallar la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde  $f$  es una función de período  $T = 2$ .

- Utilizar el desarrollo encontrado en el ítem anterior para demostrar la siguiente igualdad

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

### 3. Series de Fourier de senos y de cosenos

Como hemos visto en la sección anterior, si la función  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  a desarrollar en serie de Fourier es par, su serie contendrá sólo los términos correspondientes a los cosenos, mientras que, si la función es impar, su serie contendrá sólo senos.

Como veremos más adelante en ocasiones es de interés desarrollar una función  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  utilizando sólo senos o cosenos aún cuando dicha función no sea impar o par. Ese desarrollo es posible y se llama desarrollo en serie de senos o cosenos.

Supongamos entonces que dada una función  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , deseamos obtener su serie de cosenos. En este caso, lo que hacemos es extender la función por paridad al intervalo  $[-\pi, \pi]$  y por periodicidad, la definimos en  $\mathbb{R}$ . La función extendida  $\tilde{f}$  es una función par en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y los coeficientes del desarrollo de Fourier se obtienen mediante las fórmulas dadas en el lema 1.2. Observemos que los desarrollos de  $f$  y  $\tilde{f}$  coinciden en el intervalo  $[0, \pi]$ , y así obtenemos el desarrollo en serie de cosenos deseado.

En forma análoga, si deseamos obtener el desarrollo en serie de senos de una función  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(0) = 0$ , extendemos esta función por imparidad y calculamos el desarrollo de Fourier de la función extendida  $\tilde{f}$  mediante las fórmulas dadas en el lema 1.2. Nuevamente, obtendremos una serie de Fourier que coincidirá con la serie de Fourier de senos de  $f$  en el intervalo  $[0, \pi]$ .

Ilustremos estas ideas con un ejemplo:

*Ejemplo 3.1.* Calculemos la serie de Fourier de cosenos de

$$f(x) = x(x - \pi)$$

definida en  $[0, \pi]$ . Como extendemos a la función por paridad sólo hace falta calcular  $a_n$ . Notemos que no es necesario escribir la función extendida, ya que por las fórmulas dadas en el lema 1.2, sólo necesitamos conocer la definición de la función en el intervalo  $[0, \pi]$ .

Tenemos que

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(x - \pi) dx = -\frac{\pi^2}{3} \quad y$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(x - \pi) \cos(nx) dx = \frac{2}{n^2}((-1)^n + 1).$$

Luego, la serie de Fourier de cosenos es

$$f(x) \sim -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}((-1)^n + 1)\cos(nx).$$

Eliminando los términos nulos queda

$$f(x) \sim -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}.$$

*Ejemplo 3.2.* Calculemos la serie de Fourier de senos de

$$f(x) = x(x - \pi)$$

definida en  $[0, \pi]$ . Como extendemos a la función por imparidad sólo hace falta calcular  $b_n$ . Recordemos que no es necesario escribir la función extendida.

Tenemos que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(x - \pi) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)$$

Luego, la serie de Fourier de senos es

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\operatorname{sen}(nx).$$

Eliminando los términos nulos queda

$$f(x) \sim \frac{-8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

*Ejercicio 3.1.* 1. Desarrollar la función  $f(x) = x$ ,  $0 \leq x < 2$ , en serie de cosenos.

2. Utilizar el desarrollo obtenido para demostrar la siguiente igualdad:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

*Ejercicio 3.2.* Desarrollar en serie de senos la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < \pi, \\ 1 & \text{para } \pi \leq t \leq 2\pi, \\ 2 & \text{para } 2\pi < t \leq 3\pi \end{cases}$$

donde el período de  $f$  es  $T = 6\pi$ .

*Ejercicio 3.3.* Desarrolle la función  $f(x) = \text{sen}(x)$  definida en  $[0, \pi]$ , en serie de cosenos. Y la función  $f(x) = \text{cos}(x)$  definida en  $[0, \pi]$ , en serie de senos.

*Ejercicio 3.4.* Desarrolle la función  $f(x) = x^2 + \pi$  definida en  $[0, \pi]$ , en serie de senos.

## 4. Interpretación geométrica.

Las sumas parciales de Fourier admiten una interpretación geométrica sencilla, sin embargo para comprenderla hace falta introducir ciertos conceptos.

**Definición 4.0.4.** *Un producto interno en un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $V$  es una aplicación  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface:*

1.  $\langle av + bw, u \rangle = a\langle v, u \rangle + b\langle w, u \rangle$ , para todo  $u, v, w \in V$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ .
2.  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ , para todo  $v, w \in V$ .
3.  $\langle v, v \rangle \geq 0$ , para todo  $v \in V$  y  $\langle v, v \rangle = 0$  si y sólo si  $v = 0$ .

*Ejemplo 4.1.* En  $\mathbb{R}^n$  podemos definir un producto interno de la siguiente manera. Dados  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , escribimos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Evidentemente con esa definición

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

Por otro lado se tiene, llamando  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ,

$$\begin{aligned} \langle ax + by, z \rangle &= \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i)z_i = a \sum_{i=1}^n x_i z_i + b \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ &= a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle. \end{aligned}$$



Por último,

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0,$$

y además si  $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$  entonces, como  $x_i^2 \geq 0$ , deben ser todos los  $x_i = 0$ .

*Ejemplo 4.2.* Si  $f$  y  $g$  son dos funciones periódicas, entonces  $af + bg$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , resulta periódica. Por lo tanto el conjunto de todas las funciones periódicas forman un espacio vectorial real. Las funciones periódicas continuas forman un subespacio, al que notaremos, cuando el período sea  $2\pi$ ,  $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ . En este subespacio se puede definir el siguiente producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Notemos que esta definición puede pensarse como una generalización de la dada para  $\mathbb{R}^n$  en el ejemplo anterior si uno aproxima las integrales por sumas de Riemman (el factor  $\frac{1}{\pi}$  es un factor de normalización como se verá más adelante).

Para probar que lo anterior define un producto interno se deben verificar las propiedades de la Definición 4.0.4. En efecto, para funciones  $f, g$ , y  $h$  continuas se tiene:

$$\begin{aligned} \langle af + bg, h \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (af + bg)hdx = a \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fhdx + b \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ghdx \\ &= a \langle f, h \rangle + b \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado es evidente la identidad  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ , por lo que sólo resta ver la última propiedad, la cual sólo requiere cuidado a la hora de probar que

$$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0.$$

En efecto si

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 0$$

debe ser  $f = 0$ , ya que, de otro modo, existiría  $x_0 \in (-\pi, \pi)$  tal que  $f(x_0) \neq 0$  y por ende  $f^2(x_0) > 0$ . Pero, por ser  $f^2$  una función continua (en virtud de que  $f$  lo es), resulta que existe un entorno  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset (-\pi, \pi)$  en el cual  $f^2(x) > f^2(x_0)/2$ . Entonces

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f^2(x)dx > \epsilon f^2(x_0) > 0,$$

absurdo que provino de suponer que  $f(x_0) \neq 0$ .

Otro concepto que necesitamos es el de norma de un elemento de un espacio vectorial. Las normas sirven en particular para "medir" distancias. Esto es, para darnos información acerca de cuan cerca o lejos están los elementos de un espacio vectorial entre sí.

Para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  se estila definir la norma del siguiente modo

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Naturalmente esta definición tiene un fuerte contenido geométrico, ya que el número obtenido de ese modo nos da la distancia euclídea del punto  $x$  al origen. Y desde luego aplicado a una diferencia de vectores  $\|x - y\|$ , nos da la distancia entre ellos.

Lo cierto es que ese concepto originado en  $\mathbb{R}^n$  puede generalizarse a otros espacios vectoriales más abstractos. El modo de hacerlo es a través de la siguiente definición.

**Definición 4.0.5.** *Dado un espacio vectorial real  $V$  decimos que la aplicación*

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

*es una norma, si verifica:*

1.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V$
2.  $\|v\| \geq 0$  y  $\|v\| = 0$  si, y sólo si,  $v = 0$ ,
3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ , para todo  $v, w \in V$ .

Dado un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , éste siempre define una norma del siguiente modo:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Para demostrar esa afirmación es necesario verificar que esa definición satisface las tres propiedades de la norma. Dejamos las dos primeras como ejercicio para el lector que son inmediatas desde la definición de producto interno. Para probar la tercer propiedad vamos a precisar la siguiente desigualdad:

*Teorema 4.1.* (Desigualdad de Schwartz) Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto interno sobre un  $\mathbb{R}$  espacio vectorial  $V$ , entonces para todo  $u, v \in V$  se tiene

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

**Dem:** Podemos suponer que  $v \neq 0$  de otro modo la desigualdad es evidente. Consideremos  $t \in \mathbb{R}$  y escribamos

$$0 \leq \langle u - tv, u - tv \rangle = \langle u, u \rangle - 2t\langle u, v \rangle + t^2\langle v, v \rangle,$$

donde la primer desigualdad se sigue de la definición de producto interno. Como  $v \neq 0$  entonces  $\langle v, v \rangle \neq 0$  y la ecuación anterior nos dice que la función

$$h(t) = \langle u, u \rangle - 2t\langle u, v \rangle + t^2\langle v, v \rangle$$

es una función cuadrática que, por ser mayor o igual a cero para todo  $t$ , no puede tener raíces reales distintas y por ello su discriminante debe ser menor o igual a cero. Entonces

$$4\langle u, v \rangle^2 - 4\langle u, u \rangle\langle v, v \rangle \leq 0,$$

o sea,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle}\sqrt{\langle v, v \rangle} = \|u\|\|v\|.$$

□

Veamos ahora que definiendo  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  se verifica la desigualdad triangular. En efecto,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Pero, por la desigualdad de Schwartz, tenemos

$$\langle u, v \rangle \leq |\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

De donde

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

y entonces vale la desigualdad triangular

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Gracias a la desigualdad de Schwartz se tiene que

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

Esta desigualdad permite definir ángulo entre vectores no nulos de  $\mathbb{R}^n$  del siguiente modo

$$\text{ang}(u, v) = \arccos \left( \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right).$$

En particular si ninguno de los vectores es nulo y  $\langle u, v \rangle = 0$ , los vectores son perpendiculares. En esta idea se basa la interpretación geométrica de Fourier, así que la definimos para elementos de un espacio vectorial cualquiera.

**Definición 4.0.6.** Sean  $v, w \in V$  no nulos. Decimos que  $v$  y  $w$  son ortogonales o perpendiculares si  $\langle v, w \rangle = 0$ .

**Definición 4.0.7.** Sea  $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$  un conjunto de vectores de  $V$ . Decimos que este conjunto es ortogonal si sus vectores son ortogonales dos a dos, esto es,  $\langle v_n, v_m \rangle = 0$ , para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq m$ . Si además,  $\langle v_n, v_n \rangle = 1$ , el conjunto se llama ortonormal.

Observemos que los resultados de la proposición 1.1 se pueden reescribir de la siguiente manera:

1.  $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = 1$
2.  $\left\langle \text{sen}(nx), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = 0$  y  $\left\langle \text{cos}(nx), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = 0$ , para todo  $n \geq 1$ .
3.  $\langle \text{sen}(nx), \text{sen}(mx) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$
4.  $\langle \text{cos}(nx), \text{cos}(mx) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$
5.  $\langle \text{sen}(nx), \text{cos}(mx) \rangle = 0$ , para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Es decir, el conjunto  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{sen}(nx), \text{cos}(mx), n, m \in \mathbb{N} \right\}$  es un conjunto ortonormal.

Notemos también que los coeficientes de Fourier se pueden calcular mediante las fórmulas

$$a_0 = \langle f(x), 1 \rangle, \quad a_n = \langle f(x), \text{cos}(nx) \rangle, \quad b_n = \langle f(x), \text{sen}(nx) \rangle$$

*Observación 4.1.* Para  $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , definimos

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

que resulta una norma en  $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , por lo visto anteriormente.

Sea  $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  el espacio vectorial de todas las funciones periódicas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , integrables Riemann en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Como todas las funciones continuas en  $[-\pi, \pi]$  son integrables,  $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  es un subespacio de  $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ . La norma  $\|\cdot\|_2$  se puede extender a  $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , pero no verifica la propiedad 2 enunciada en la definición. En efecto, considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Evidentemente  $\|f\|_2 = 0$ , pero  $f \neq 0$ . A pesar de ésto queremos mencionar que esta extensión de la norma puede hacerse coherentemente redefiniendo la noción habitual de función y de integral pero utilizando técnicas que escapan al alcance de estas notas.

Ahora para presentar la interpretación geométrica de las sumas parciales de las series de Fourier, precisamos sólo el último ingrediente.

**Definición 4.0.8.** *Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial que cuenta con un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y sea  $T$  un subespacio de  $V$ . Para todo  $v \in V$  definimos la proyección ortogonal de  $v$  sobre  $T$ , que denotaremos  $P_T(v)$ , del siguiente modo:*

$$P_T(v) \in T \quad \text{y} \quad \langle v - P_T(v), w \rangle = 0 \quad \text{para todo } w \in T,$$

*o sea que la diferencia  $v - P_T(v)$  es ortogonal a todo vector de  $T$  (ver la Figura 5).*

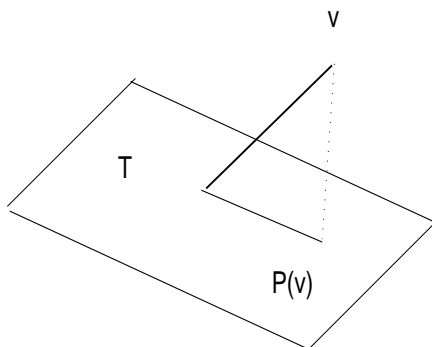


Figura 5

Veamos que se trata de una buena definición, es decir que  $P_T(v)$  está unívocamente definido: en efecto, supongamos que  $u, z \in T$  verifican

$$\langle v - u, w \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad w \in T, \quad (4.11)$$

y

$$\langle v - z, w \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad w \in T. \quad (4.12)$$

Tenemos, sumando y restando  $v$ ,

$$\|u - z\|^2 = \langle u - z, u - z \rangle = \langle (v - z) - (v - u), u - z \rangle = \langle v - z, u - z \rangle - \langle v - u, u - z \rangle.$$

Como  $u$  y  $z$  pertenecen a  $T$  y éste es un subespacio, llamando  $w = u - z$ , se tiene que  $w \in T$ . Usando ahora 4.11 y 4.12

$$\|u - z\|^2 = \langle v - z, w \rangle - \langle v - u, w \rangle = 0$$

y entonces  $u = z$ . Por lo tanto la proyección, en caso de existir, es única. Naturalmente ésto nos lleva al punto de la existencia, lo cual puede responderse,

en general, fácilmente para subespacios  $T$  de dimensión finita. Sin embargo, para no extender la exposición, vamos a concentrarnos en las series de Fourier. Sea entonces  $f$  una función continua y de período  $2\pi$ , o sea  $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , consideremos las funciones de  $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  del siguiente conjunto

$$B_n = \{1, \cos(x), \operatorname{sen}(x), \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \dots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx)\}.$$

Si llamamos  $T_n$  al subespacio generado por esas funciones

$$T_n = \langle 1, \cos(x), \operatorname{sen}(x), \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \dots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx) \rangle,$$

vemos que  $T_n$  tiene dimensión finita y además el conjunto  $B_n$  es una base ortonormal de  $T_n$ .

Si miramos la suma parcial

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \operatorname{sen}(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$$

tenemos que  $S_n(f) \in T_n$  por ser combinación lineal de los elementos de su base. Además si examinamos la diferencia  $f - S_n(f)$  vemos que

$$\langle f - S_n(f), 1 \rangle = 0,$$

$$\langle f - S_n(f), \operatorname{sen}(jx) \rangle = 0 \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n,$$

$$\langle f - S_n(f), \cos(jx) \rangle = 0 \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n.$$

O sea que  $f - S_n(f)$  es ortogonal a todos los elementos de la base de  $T_n$ , pero eso indica que  $f - S_n(f)$  es ortogonal a todo  $T_n$ . En efecto, si  $w \in T_n$  entonces

$$w = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \tilde{a}_1 \cos(x) + \tilde{b}_1 \operatorname{sen}(x) + \dots + \tilde{a}_n \cos(nx) + \tilde{b}_n \operatorname{sen}(nx).$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle f - S_n(f), w \rangle &= \frac{\tilde{a}_0}{2} \langle f - S_n(f), 1 \rangle + \tilde{a}_1 \langle f - S_n(f), \cos(x) \rangle + \\ &\quad \tilde{b}_1 \langle f - S_n(f), \operatorname{sen}(x) \rangle + \dots = 0. \end{aligned}$$

Es decir, para una  $f$  dada, las sumas parciales de Fourier  $S_n(f)$  son las proyecciones ortogonales sobre los subespacios  $T_n$ .

*Proposición 4.1.* (Pitágoras) Sean  $v$  y  $w$  dos vectores ortogonales en un espacio vectorial con producto interno, entonces

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

**Dem:** Se tiene

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

pues  $\langle u, v \rangle = 0$ .  $\square$

Observemos que, por Pitágoras y el hecho de que la suma parcial de Fourier  $S_N(f)$  es la proyección ortogonal sobre  $T_N$ , se tiene que  $f - S_N(f)$  es ortogonal a  $S_N(f)$ , pues  $S_N(f) \in T_N$ . Luego, como

$$f = (f - S_N(f)) + S_N(f),$$

aplicando Pitágoras, obtenemos

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2.$$

El siguiente lema explota esta identidad pero la escribe en términos de los coeficientes de Fourier de  $f$ .

*Lema 4.1.* Sea  $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  y sean  $a_0 = \langle f(x), 1 \rangle$ ,  $a_n = \langle f(x), \cos(nx) \rangle$ ,  $b_n = \langle f(x), \sin(nx) \rangle$  los coeficientes de Fourier. Sea

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Entonces

$$\|f - S_N\|^2 = \|f\|^2 - \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right)$$

para todo  $N \in \mathbb{N}$ .

**Dem:** De la igualdad obtenida anteriormente tenemos que

$$\|f - S_N(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_N(f)\|^2 \tag{4.13}$$

Observemos además que

$$\|S_N(f)\|^2 = \langle S_N, S_N \rangle = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \tag{4.14}$$

Reemplazando 4.14 en 4.13 obtenemos la igualdad enunciada en el lema.  $\square$

*Teorema 4.2. (Desigualdad de Bessel)* Sea  $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  con coeficientes de Fourier  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$



**Dem:** Por el lema 4.1 tenemos

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \leq \|f\|_2^2$$

para todo  $N \in \mathbb{N}$ . Luego, tomando límite cuando  $N$  tiende a infinito, tenemos el resultado que enunciamos.  $\square$

## 5. Nociones de Convergencia.

En esta sección vamos a comentar en qué sentido vale la igualdad

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Para ello definimos dos diferentes tipos de convergencia, la convergencia en norma  $\|\cdot\|_2$  y la convergencia puntual. Existen otros tipos de convergencia pero no serán tratadas en este libro.

**Definición 5.0.9.** Sea  $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  y  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ . Decimos que  $f_n$  converge a  $f$  en norma  $\|\cdot\|_2$  si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

**Definición 5.0.10.** Sea  $f$  una función definida en un intervalo  $I$  y  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones definidas en  $I$ . Decimos que  $f_n$  converge a  $f$  puntualmente si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x),$$

para todo  $x \in I$ .

Note que la convergencia en norma  $\|\cdot\|_2$  dice que las diferencias  $f - f_n$  tienden a cero si las mido a través de la integral

$$\int (f - f_n)^2 dx$$

y la convergencia puntual, dice a su vez que para cada  $x$  fijo la sucesión numérica  $f_n(x)$  tiende al número  $f(x)$ .

El siguiente teorema lo enunciamos sin demostración (puede verse en el libro [4])

*Teorema 5.1.* Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función periódica e integrable Riemann en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  en norma  $\|\cdot\|_2$ . Esto es, llamando

$$S_N(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx),$$

se verifica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$$

Un corolario inmediato del teorema previo y del lemma 4.1 es la siguiente identidad

*Teorema 5.2. (Identidad de Parseval)* Sea  $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  con coeficientes de Fourier  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Veamos ahora un resultado clásico sobre convergencia puntual de la serie de Fourier

**Definición 5.0.11.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica, de período  $2\pi$ . Decimos que  $f$  es continuamente diferenciable a trozos si existen números reales

$$-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_r = \pi$$

tales que para todo  $1 \leq j \leq r$ , la función  $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$  es continuamente diferenciable.

*Observación 5.1.* Note que  $f$  puede ser continuamente diferenciable a trozos pero discontinua en alguno o en todos los  $x_k$  de la definición previa.

*Teorema 5.3.* Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$  periódica y continuamente diferenciable a trozos. Consideremos los intervalos  $I_k = (x_k, x_{k+1})$ , con

$$-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_r = \pi,$$

tales que  $f|_{I_k}$  es continuamente diferenciable. Se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = f(x)$$

para todo  $x \in \bigcup_{k=0}^{r-1} I_k$  y para los puntos  $x_k$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_k) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x)}{2}.$$

Note que si la  $f$  es continua en los  $x_k$  entonces sus límites laterales coinciden con  $f(x_k)$  y entonces allí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_k) = f(x_k).$$

*Ejemplo 5.1.* Consideremos el dado en el Ejemplo 1.3. Allí desarrollamos la función  $f(x) = |x|$ . Observe que es diferenciable con continuidad a trozos. En efecto,  $f$  es diferenciable en  $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ . Luego para cualquier  $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$  debe ser

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

(hecho que se visualiza en los gráficos que reproducimos una vez más debajo)

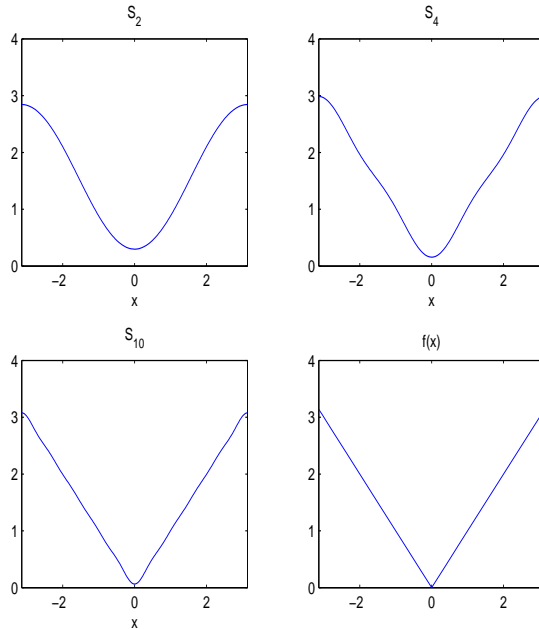


Figura 6

Pero además  $|x|$  es continua en 0 luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = f(0) = 0,$$

lo cual también es visible en los gráficos.

Ejemplo 5.2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (-\pi, 0) \\ 1 & \text{si } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Evidentemente  $f$  es diferenciable con continuidad a trozos en los intervalos  $(-\pi, 0)$  y  $(0, \pi)$ , sin embargo es discontinua en  $x = 0$ . Por lo tanto las sumas parciales deben converger puntualmente en los  $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ . Pero en  $x = 0$ , según el Teorema anterior, deben converger a

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)}{2} = 0.$$

Los gráficos siguientes confirman ésto

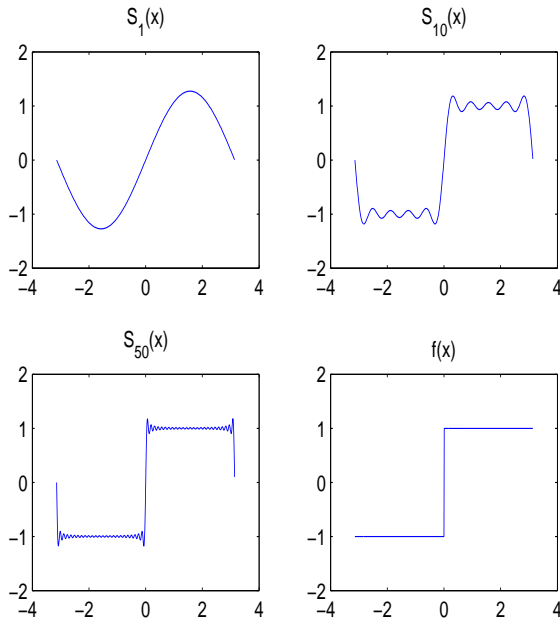


Figura 7

Como última observación notemos que las aproximaciones tienen oscilaciones. Esto se llama fenómeno de Gibbs y se produce, informalmente hablando, debido a que la discontinuidad introduce aportes significativos en frecuencias altas que generan las oscilaciones.

## Capítulo 8

# Aplicaciones de las Series de Fourier

### 1. Introducción

Las series de Fourier aparecen en una gran cantidad de aplicaciones. Una de ellas es en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales a la que dedicaremos este capítulo.

### 2. Ecuación del calor

Consideremos el problema de conducción del calor para una barra recta de sección transversal uniforme y material homogéneo. Se elige como eje  $x$  el eje de la barra y como  $x = 0$  y  $x = \ell$  a los extremos de la barra. Suponemos que los lados de la barra están perfectamente aislados, de modo que no hay transferencia de calor a través de ellos. Consideramos que las dimensiones de la sección transversal son tan pequeñas que la temperatura puede considerarse constante en cualquier sección transversal. Esto es, la función, que llamaremos  $u$ , que describe la temperatura en cada punto de la barra puede considerarse una función de  $x$  y de  $t$ . Así,  $u(x, t)$  es la temperatura en el punto  $x$  en el tiempo  $t$ .

La variación de la temperatura en la barra está regida por la siguiente ecuación obtenida por Fourier, y llamada comunmente ecuación de conducción del calor, o simplemente ecuación del calor. Esta ecuación tiene la forma

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

en donde  $\alpha^2$  se llama constante de difusión térmica. Esta constante depende sólo del material del que está hecha la barra en términos de variables físicas tales como la conductividad térmica, la densidad y el calor específico del material de la barra.

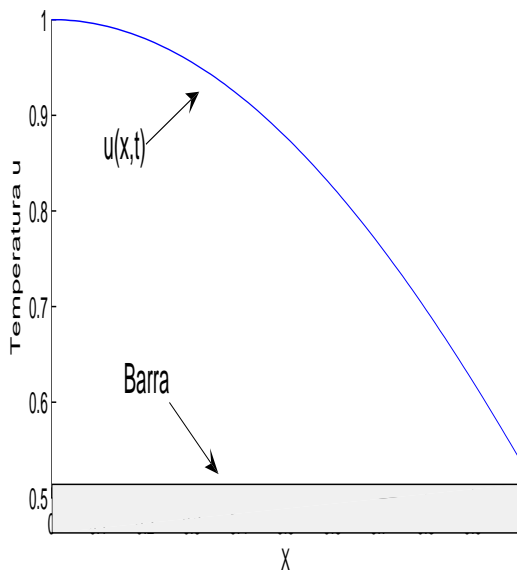


Figura 1

Debido a la presencia de la derivada primera en la variable temporal  $u_t$  es necesario proveer a la ecuación de *datos iniciales* (en cierto tiempo inicial). Supondremos entonces que se da por conocida la distribución inicial de la temperatura en la barra, ésto es

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

donde  $u_0(x)$  es una función dada. Además y debido a la presencia de derivadas segundas en la variable  $x$  ( $u_{xx}$ ) debemos dar dos condiciones conocidas para esa variable. Esas condiciones las llamaremos *condiciones de contorno*. Usualmente se supone dada la temperatura en ambos extremos de la barra. Para

ejemplificar supondremos que la temperatura siempre es 0 en dichos extremos, ésto es,

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.2)$$

El problema fundamental de la ecuación del calor es hallar una función  $u(x, t)$  que satisfaga la ecuación del calor sujeta a la condición dada y a las condiciones de contorno.

Para hallar la función  $u(x, t)$  vamos a utilizar el método conocido como separación de variables. Este método consiste en suponer que  $u$  puede escribirse como un producto de funciones, una de las cuales sólo depende de  $x$  y la otra sólo depende de  $t$ , ésto es,

$$u(x, t) = f(x)g(t),$$

donde suponemos que  $f(x) \neq 0$  y  $g(t) \neq 0$ .

Reemplazando en la ecuación 2.1 tenemos que

$$\alpha^2 f''(x)g(t) = f(x)g'(t).$$

O equivalentemente,

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{\alpha^2 g(t)}.$$

Para que estos cocientes sean iguales deben ser constantes, es decir

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{\alpha^2 g(t)} = k,$$

con  $k \in \mathbb{R}$ . Por otro lado, las condiciones 2.2 implican que  $f(0) = 0$  y  $f(\ell) = 0$ . Entonces, debemos hallar funciones no nulas  $f(x)$  y  $g(t)$  tales que

$$\begin{cases} f''(x) - kf(x) = 0 \\ f(0) = 0, f(\ell) = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} g'(t) - k\alpha^2 g(t) = 0. \end{cases}$$

Comencemos buscando  $f(x)$ . El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial que define a  $f$  es  $x^2 - k$ , cuyas raíces serán reales distintas, reales iguales o complejas según  $k$  sea positivo, cero o negativo, respectivamente. Analicemos cada uno de estos casos:

1. Si  $k > 0$ , las raíces son  $\sqrt{k}$  y  $-\sqrt{k}$ . En este caso,

$$f(x) = ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x}.$$

Para que se verifiquen las condiciones  $f(0) = 0$  y  $f(\ell) = 0$ , las constantes  $a$  y  $b$  deben ser 0 y por lo tanto  $f(x) = 0$ , por lo que debemos descartar este caso.

2. Si  $k = 0$ , el polinomio característico tiene a 0 como raíz doble y entonces  $f(x) = a + bx$ . Nuevamente, para que se verifiquen las condiciones de borde,  $a$  y  $b$  deben ser 0 y obtenemos la función nula. Por esta razón descartamos este caso.
3. Si  $k < 0$ , las raíces del polinomio característico son  $\sqrt{-k}i$  y  $-\sqrt{-k}i$ . Luego,

$$f(x) = a\cos(\sqrt{-k}x) + b\sen(\sqrt{-k}x).$$

Para que  $f(0) = 0$ , se debe verificar que  $a = 0$  ya que  $f(0) = a$ . Para que  $f(\ell) = 0$ , se debe verificar que

$$b\sen(\sqrt{-k}\ell) = 0.$$

Como buscamos una solución no nula, debemos pedir que  $b \neq 0$  y por lo tanto,

$$\sen(\sqrt{-k}\ell) = 0.$$

Esto se cumple si  $\sqrt{-k}\ell = n\pi$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir,

$$k = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2.$$

Resumiendo, hemos obtenido que  $k$  puede tomar infinitos valores de la forma  $k = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$  y por lo tanto, para cada valor de  $n \in \mathbb{N}$  obtenemos una función

$$f_n(x) = b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

que verifica lo pedido.

Ahora hallemos  $g(t)$  para los valores de  $k$  encontrados anteriormente. La función  $g$  debe verificar la ecuación

$$g'(t) + \left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 g(t) = 0.$$

Luego,

$$g_n(t) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 t}$$

Hemos obtenido una familia de funciones

$$u_n(x, t) = b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 t}$$

que verifican la ecuación del calor y las condiciones de borde. Observemos que hemos renombrado las constantes y que estas funciones, en general, no



verifican la condición inicial, por lo que no hemos resuelto aún el problema. La idea para construir la solución que verifique además las condiciones iniciales se basa en que sumas arbitrarias de cualesquiera de las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación del calor que respetan las condiciones de contorno (todas ellas se anulan en los extremos de la barra y por ende lo hará una suma cualquiera de ellas). Un hecho mas difícil de probar, pero que es válido y haremos uso de él, es que una suma infinita de estas funciones

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 t}$$

define una nueva función que verifica la ecuación del calor y las condiciones de borde para cualquier elección de los coeficientes  $b_n$ . Veamos cómo se calculan los coeficientes  $b_n$  para que  $u(x, t)$  verifique la condición inicial. Si evaluamos  $u(x, t)$  en  $t = 0$  obtenemos

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) = u_0(x)$$

Luego, los coeficientes  $b_n$  son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de senos de la función  $u_0(x)$ .

*Ejemplo 2.1.* Hallar la solución del siguiente problema de conducción del calor:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 4u_t, & 0 < x < 2, \quad t < 0 \\ u(0, t) &= 0, \quad u(2, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= 2\operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{2} \right) - \operatorname{sen}(\pi x) + 4\operatorname{sen} \left( \frac{5\pi x}{2} \right), & 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Como hemos visto en el desarrollo realizado anteriormente, tomando  $\alpha^2 = \frac{1}{4}$  y  $\ell = 2$ , la solución del problema del calor es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{2} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t},$$

donde los coeficientes  $b_n$  son los coeficientes del desarrollo de Fourier de senos de la función

$$f(x) = 2\operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{2} \right) - \operatorname{sen}(\pi x) + 4\operatorname{sen} \left( \frac{5\pi x}{2} \right).$$

Observemos que esta función ya está desarrollada en serie de Fourier de senos, donde

$$b_1 = 2, \quad b_2 = -1, \quad b_5 = 4, \quad y \quad b_n = 0 \quad \text{para } n \neq 1, 2, 5.$$

Luego,

$$u(x, t) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)e^{-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 t} - \operatorname{sen}(\pi x)e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 t} + 4\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right)e^{-\left(\frac{5\pi}{4}\right)^2 t}.$$

*Ejercicio 2.1.* Encuentre la solución del problema de conducción del calor:

$$100u_{xx} = u_t \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen}(2\pi x) - 2\operatorname{sen}(5\pi x)$$

*Ejercicio 2.2.* Considere la conducción del calor en una varilla de 100 cm de longitud, con coeficiente de difusión 1, y cuyos extremos se mantienen a 0 grados, para todo  $t > 0$ . Halle una expresión para la temperatura  $u(x, t)$ , si la distribución inicial de temperaturas en la varilla se expresa por:

1.

$$u(x, 0) = 50, \quad 0 \leq x \leq 100.$$

2.

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 50 \\ 100 - x & 50 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

### 3. Ecuación de ondas

La ecuación en derivadas parciales

$$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0,$$

se llama ecuación de ondas. En ese contexto  $u(x, t)$  representa el desplazamiento transversal de una cuerda en un punto  $x$  en el tiempo  $t$ .

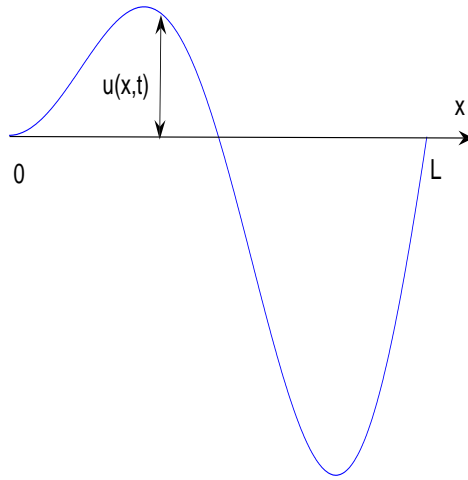


Figura 2

Una vez más  $\alpha^2$  involucra ciertos parámetros físicos que dependen únicamente de propiedades de la cuerda. Para resolver la ecuación de ondas vamos a dar nuevamente dos condiciones de borde:

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

que en este caso indican que la cuerda tiene los extremos sujetos y por ello el desplazamiento es nulo. La diferencia fundamental con la ecuación del calor, es que ahora aparece una derivada segunda temporal por lo que debemos dar además dos condiciones iniciales:

1. Posición inicial de la cuerda:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \ell$$

2. Velocidad inicial de la cuerda:

$$u_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

donde  $u_0(x)$  y  $v_0(x)$  son funciones conocidas.

Para que los datos iniciales sean compatibles con las condiciones de contorno pediremos que  $u_0(0) = u_0(\ell) = 0$  y  $v_0(0) = v_0(\ell) = 0$  es decir que inicialmente la cuerda esta sujeta a los extremos y su velocidad es cero en esos puntos.

Análogamente a lo que hicimos para resolver la ecuación del calor, proponemos como solución una función producto de una función de  $x$  y otra función de  $t$

$$u(x, t) = f(x)g(t),$$

con  $f(x) \neq 0$  y  $g(t) \neq 0$ . Reemplazando en la ecuación de ondas tenemos que

$$\alpha^2 f''(x)g(t) = f(x)g''(t).$$

Luego

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{\alpha^2 g(t)}.$$

Como el primer miembro depende sólo de la variable  $x$  y el segundo depende exclusivamente de la variable  $t$ , ambos cocientes deben ser constantes, ésto es

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{\alpha^2 g(t)} = k,$$

con  $k \in \mathbb{R}$ . Las condiciones  $u(0, t) = 0$  y  $u(\ell, t) = 0$  para  $t \geq 0$  implican que  $f(0) = 0$  y  $f(\ell) = 0$ . Luego, las funciones  $f$  y  $g$  deben satisfacer lo siguiente:

$$\begin{cases} f''(x) - kf(x) = 0 \\ f(0) = 0, f(\ell) = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} g''(t) - k\alpha^2 g(t) = 0. \end{cases}$$

Primero buscamos  $f(x)$ . Con el mismo razonamiento realizado en la deducción de la solución del problema de la conducción del calor podemos concluir que  $k = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, para cada valor de  $n \in \mathbb{N}$  obtenemos una función

$$f_n(x) = c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

que verifica lo pedido. Busquemos ahora las funciones  $g_n(t)$ . Estas funciones son solución de la ecuación

$$g''(t) + \left( \frac{n\pi\alpha}{\ell} \right)^2 g(t) = 0$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Luego,

$$g_n(t) = a_n \cos \left( \frac{n\pi\alpha t}{\ell} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\alpha t}{\ell} \right).$$

Obtenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la función

$$u_n(x, t) = \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi \alpha t}{\ell} \right) + b_n \text{sen} \left( \frac{n\pi \alpha t}{\ell} \right) \right)$$

es solución de la ecuación de ondas y verifica las condiciones de borde. Notemos que, en general, estas funciones no verifican las condiciones iniciales.

La suma infinita de estas funciones define una nueva función

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi \alpha t}{\ell} \right) + b_n \text{sen} \left( \frac{n\pi \alpha t}{\ell} \right) \right)$$

que verifica la ecuación de ondas y las condiciones de borde para cualquier elección de coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ . Vamos a ver qué condiciones deben verificar estos coeficientes para que la función  $u(x, t)$  cumpla las condiciones iniciales.

Reemplazando  $t = 0$  en  $u(x, t)$  tenemos que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) = u_0(x).$$

Luego, los coeficientes  $a_n$  son los coeficientes del desarrollo de Fourier de senos de  $u_0(x)$  en el intervalo  $[0, \ell]$ .

Derivando  $u(x, t)$  con respecto a  $t$  obtenemos

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \left( -a_n \frac{n\pi \alpha}{\ell} \text{sen} \left( \frac{n\pi \alpha t}{\ell} \right) + b_n \frac{n\pi \alpha}{\ell} \cos \left( \frac{n\pi \alpha t}{\ell} \right) \right).$$

Luego, evaluando en  $t = 0$  tenemos que

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi \alpha}{\ell} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) = v_0(x).$$

Luego, si el desarrollo de  $v_0(x)$  en serie de Fourier de senos es

$$v_0(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right),$$

los coeficientes  $b_n$  verifican la siguiente relación

$$b_n = \frac{\ell}{n\pi \alpha} \bar{b}_n.$$

*Ejemplo 3.1.* Hallar la solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 4, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & u(4, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Según lo que vimos, la solución de este problema es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{4} \right) \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi t}{2} \right) + b_n \text{sen} \left( \frac{n\pi t}{2} \right) \right)$$

Los coeficientes  $a_n$  son los coeficientes del desarrollo de Fourier de senos de  $u_0(x)$  en el intervalo  $[0, 4]$  y los coeficientes  $b_n$  verifican

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \bar{b}_n,$$

donde los coeficientes  $\bar{b}_n$  son los coeficientes del desarrollo de Fourier de senos de  $u(x) = 0$ . En este caso,  $\bar{b}_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego,  $b_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

El desarrollo en serie de Fourier de  $u_0(x)$  es

$$u_0(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \text{sen} \left( \frac{(2k+1)\pi x}{4} \right).$$

Luego se verifica:

$$a_n = \begin{cases} \frac{16(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} & \text{si } n = 2k+1 \\ 0 & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

Por lo tanto la solución de este problema es:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \text{sen} \left( \frac{(2k+1)\pi x}{4} \right) \cos \left( \frac{(2k+1)\pi t}{2} \right).$$

*Ejemplo 3.2.* Hallar la solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

La solución de este problema es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(nx)(a_n \cos(nt) + b_n \text{sen}(nt)).$$

En este caso, los coeficientes  $a_n$  son nulos ya que son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de senos de  $u_0(x) = 0$ . Para calcular los coeficientes  $b_n$  debemos conocer el desarrollo en serie de Fourier de senos de  $v_0(x) = x(\pi - x)$ . Tenemos que

$$v_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \text{sen}((2k+1)x).$$

Luego

$$b_n = \begin{cases} \frac{8}{\pi n^4} & \text{si } n = 2k + 1 \\ 0 & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

Por lo tanto la solución del problema es

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^4} \text{sen}((2k+1)x) \text{sen}((2k+1)t).$$

*Ejercicio 3.1.* Hallar el desplazamiento  $u(x, t)$  en una cuerda elástica, de longitud  $\pi$ , fija en los dos extremos, que se pone en movimiento sin velocidad inicial ( $u_t(x, 0) = 0$ ) a partir de la posición inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , donde:

1.

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ \pi - x & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

*Ejercicio 3.2.* Encuentre el desplazamiento  $u(x, t)$  en una cuerda elástica, de longitud  $\pi$ , fija en los dos extremos, que se pone en movimiento a partir de su posición de equilibrio  $u(x, 0) = 0$ , con una velocidad inicial  $u_t(x, 0) = g(x)$ , donde:

$$g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

## 4. Ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace o del potencial es

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación se llaman funciones armónicas, y también pueden pensarse como soluciones estacionarias de la ecuación del calor en dimensión 2.

Nosotros vamos a estudiar la solución del problema de Dirichlet para un rectángulo. Este problema consiste en hallar una función  $u(x, y)$  que satisfaga la ecuación de Laplace en el rectángulo  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  y que satisfaga las condiciones en la frontera:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0 & \quad u(x, b) = h(x) & 0 \leq x \leq a \\ u(0, y) = 0 & \quad u(a, y) = 0 & 0 < y < b, \end{aligned}$$

donde  $h(x)$  es una función dada sobre  $0 \leq x \leq a$ .

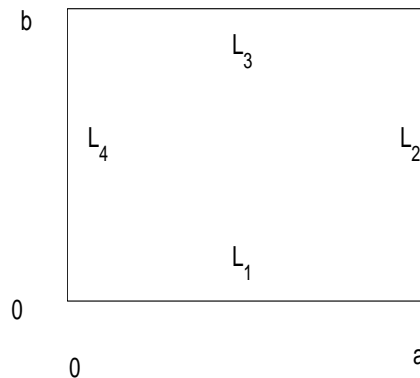


Figura 3



A veces, y para simplificar, llamaremos  $L_1, L_2, L_3$  y  $L_4$  a los lados del rectángulo y escribiremos, por ejemplo en las condiciones de contorno anteriores,  $u = 0$  en  $L_1, L_2$  y  $L_4$  y  $u = h$  en  $L_3$ .

Como para las ecuaciones del calor y de ondas, proponemos como solución de este problema una función del tipo

$$u(x, y) = f(x)g(y),$$

con  $f(x) \neq 0$  y  $g(y) \neq 0$ . Reemplazando en la ecuación de Laplace tenemos que

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0.$$

Luego

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)}.$$

Nuevamente, la única posibilidad para que estos cocientes sean iguales es que sean constantes, es decir

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = k.$$

Además, las condiciones  $u(0, y) = 0$ ,  $u(a, y) = 0$  y  $u(x, 0) = 0$  implican que  $f(0) = 0$ ,  $f(a) = 0$  y  $g(0) = 0$ . Luego las funciones  $f(x)$  y  $g(y)$  satisfacen:

$$\begin{cases} f''(x) - kf(x) = 0 \\ f(0) = 0, f(a) = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} g''(y) + kg(y) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Como hemos visto en los casos anteriores, resulta que

$$k = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad y \quad f_n(x) = \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Tenemos entonces que  $g(y)$  debe verificar la ecuación

$$g''(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 g(y) = 0.$$

Luego,

$$g(y) = \alpha_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + \gamma_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para que se verifique la condición inicial  $g(0) = 0$ , es necesario que

$$\gamma_n = -\alpha_n.$$

Por lo tanto

$$g_n(y) = \alpha_n \left( e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right)$$

y

$$u_n(x, y) = \beta_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \left( e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right)$$

es solución de la ecuación de Laplace para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Vamos a proponer entonces que la suma infinita de estas funciones

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \left( e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right)$$

también sea solución de la ecuación de Laplace.

Supongamos que el desarrollo en serie de senos de la función  $h(x)$  en el intervalo  $[0, a]$  es

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right)$$

Para que la función  $u(x, y)$  verifique la condición  $u(x, b) = h(x)$ , esto es,

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \left( e^{\frac{n\pi b}{a}} - e^{-\frac{n\pi b}{a}} \right) = h(x),$$

los coeficientes  $\beta_n$  deben verificar la siguiente relación:

$$\beta_n = \left( e^{\frac{n\pi b}{a}} - e^{-\frac{n\pi b}{a}} \right)^{-1} b_n$$

*Ejemplo 4.1.* Resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u(x, 0) = 0 \quad u(x, 1) &= 7\operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(7x) \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, y) = 0 \quad u(\pi, y) &= 0 \quad 0 < y < 1, \end{aligned}$$

Por lo visto anteriormente tenemos que la solución del problema es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}(nx) (e^{ny} - e^{-ny}),$$

donde los coeficientes  $\beta_n$  verifican

$$\beta_n = (e^n - e^{-n})^{-1} b_n$$

y los coeficientes  $b_n$  son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de senos de  $h(x) = 7\operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(7x)$  en el intervalo  $[0, \pi]$ . En este caso tenemos que:

$$b_2 = 7, \quad b_7 = -3 \quad y \quad b_n = 0 \quad \text{si } n \neq 2, 7.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\beta_2 = 7(e^2 - e^{-2})^{-1}, \quad \beta_7 = -3(e^7 - e^{-7})^{-1} \quad y \quad \beta_n = 0 \quad \text{si } n \neq 2, 7.$$

Luego la solución del problema es

$$u(x, y) = 7(e^2 - e^{-2})^{-1} \text{sen}(2x)(e^{2y} - e^{-2y}) - 3(e^7 - e^{-7})^{-1} \text{sen}(7x)(e^{7y} - e^{-7y}).$$

Para finalizar observemos que con las mismas técnicas se pueden resolver problemas similares en los que la solución se anula en tres lados arbitrarios del rectángulo  $[0, a] \times [0, b]$ .

Usando la notación de la Figura 3, vemos que es posible resolver

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

con las condiciones

$$u = h_1 \text{ en } L_1 \text{ y } u = 0 \text{ en } L_2, L_3, L_4$$

o cualquier otra combinación.

Así que resolver el problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u(x, 0) &= h_1(x) \quad u(x, b) = h_2(x) \quad 0 \leq x \leq a \\ u(0, y) &= h_3(y) \quad u(a, y) = h_4(y) \quad 0 \leq y \leq b, \end{aligned}$$

es también posible, buscando primero las soluciones  $u_i$  que verifican  $u_i = h_i$  en  $L_i$  y cero en los otros lados y luego considerando  $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ , que verifica evidentemente

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

pues cada  $u_i$  lo verifica y, por construcción, cumple además las cuatro condiciones de contorno requeridas.

*Ejercicio 4.1.* Encuentre la solución  $u(x, y)$  de la ecuación de Laplace en el rectángulo

$0 < x < 2, 0 < y < 1$  que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, \quad u(2, y) = 0, \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(x, 1) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 2, \end{aligned}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$



Parte II

**Variable Compleja**

Por Juan Pablo Pinasco



# Capítulo 9

## Números Complejos

### 1. Operaciones con números complejos

En este capítulo recordaremos las propiedades principales de los números complejos. Recordemos también que al conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$  lo llamamos el plano complejo. Un número complejo  $z$  puede representarse de dos maneras, en forma binomial o en forma polar, y cada una de ellas tiene sus ventajas y sus desventajas respecto a las operaciones. Repasaremos brevemente las operaciones básicas con números complejos en cada una de las representaciones, y como pasar de una a otra.

#### 1.1. Representación binomial

Un número complejo  $z \in \mathbb{C}$  se representa en el plano  $\mathbb{R}^2$  en forma binomial o cartesiana como  $z = a + ib$ . Aquí, distinguimos la primera coordenada, que llamaremos la parte real de  $z$ ,  $Re(z) = a$ , y la segunda coordenada, su parte imaginaria  $Im(z) = b$ .

Esta expresión es muy conveniente para la suma y resta de números complejos, ya que se efectúan por separado las operaciones de la parte real y la imaginaria. Si tenemos  $z_1 = a_1 + ib_1$  y  $z_2 = a_2 + ib_2$ , entonces

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

Multiplicar un número complejo  $z$  por un número real  $c$  se hará multiplicando la parte real y la imaginaria por  $c$ ,

$$c \cdot z = c \cdot (a + ib) = c \cdot a + ic \cdot b.$$

Del mismo modo, dividir un número complejo por un real se hará dividiendo la parte real y la parte imaginaria:

$$\frac{z}{c} = \frac{a + ib}{c} = \frac{a}{c} + i\frac{b}{c}.$$

Esta representación nos permite además efectuar el producto de dos números complejos utilizando la propiedad distributiva usual de los números reales, recordando que  $i^2 = -1$ . Tenemos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 \cdot a_2 + ia_1 \cdot b_2 + ib_2 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 \cdot b_2 + b_2 \cdot a_2). \end{aligned}$$

La división (o cociente) de números complejos es ligeramente más complicada, y se efectúa utilizando el **complejo conjugado** de  $z$ , que notaremos  $\bar{z}$  y se define cambiando el signo de la parte imaginaria. Esto es, si  $z = a + ib$ , entonces

$$\bar{z} = a - ib.$$

Por ejemplo, si  $z = 3 + 4i$ , entonces  $\bar{z} = 3 - 4i$ . Si  $w = 1 - i$ , entonces  $\bar{w} = 1 + i$ .

Para dividir números complejos multiplicaremos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, y luego efectuamos las operaciones. Si tenemos  $z_1 = a_1 + ib_1$  y  $z_2 = a_2 + ib_2$ , entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2) \cdot (a_2 - ib_2)}.$$

Observemos que el producto en el denominador no presenta mayores dificultades, y en el denominador tenemos un número real, ya que

$$(a_2 + ib_2) \cdot (a_2 - ib_2) = a_2^2 + ia_2 \cdot b_2 - ia_2 \cdot b_2 + b_2^2 = a_2^2 + b_2^2.$$

Veamos algunos ejemplos numéricos.

*Ejemplo 1.1.* Sean  $z_1 = 3 + 4i$ ,  $z_2 = 1 - i$ .

Entonces, la suma es

$$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (1 - i) = (3 + 1) + (4 - 1)i = 4 + 3i$$

y la resta

$$z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (1 - i) = (3 - 1) + (4 + 1)i = 2 + 5i.$$



*Ejemplo 1.2.* Sean  $z_1 = 4 - 3i$  y  $z_2 = 1 + i$ . Entonces,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (4 - 3i) \cdot (1 + i) \\ &= 4 \cdot 1 + 4 \cdot i - 3i \cdot 1 - 3i \cdot i \\ &= 4 + 4i - 3i + 3 \\ &= 7 + i. \end{aligned}$$

*Ejemplo 1.3.* Sean  $z_1 = -1 + 2i$  y  $z_2 = 4 - 3i$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-1 + 2i}{4 - 3i} \\ &= \frac{-1 + 2i}{4 - 3i} \frac{4 + 3i}{4 + 3i} \\ &= \frac{(-1 + 2i)(4 + 3i)}{25} \\ &= \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i. \end{aligned}$$

## 1.2. Representación polar

En este caso, privilegiamos la información geométrica del número complejo. Pensando el número complejo  $z = a + ib$  como un vector  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , lo describimos mediante el *módulo* del número complejo (su longitud) y el *ángulo*  $\theta$  que forma con el eje  $x$ .

La longitud del complejo (o la distancia del complejo al origen  $0 = 0 + i0$ ) se obtiene con la generalización del módulo.

Utilizando Pitágoras es

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

El módulo posee las siguientes propiedades

1.  $|z| \geq 0$ , y  $|z| = 0 \iff z = 0 + i0$ .
2. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha z| = |\alpha||z|$
3. Si  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $|wz| = |w||z|$
4. Desigualdad triangular:  $|z + w| \leq |z| + |w|$

*Ejercicio 1.1.* Pruebe las tres primeras propiedades del módulo.

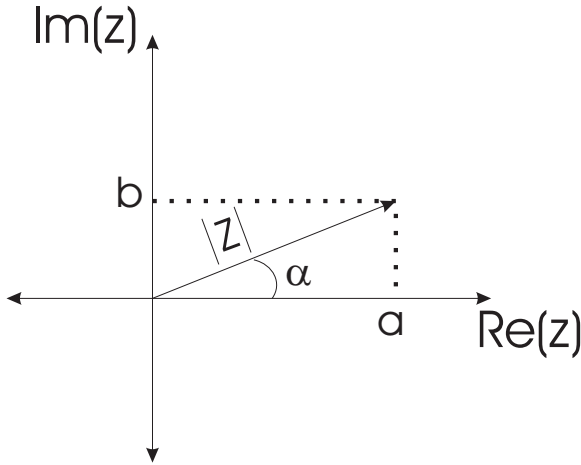


Figura 9.1: Representación binomial y polar

Dado un complejo  $z$  definimos el **argumento** de  $z$  como el ángulo que forma el complejo respecto del eje real positivo o de las  $x$  positivas. Naturalmente ésta es una definición geométrica y por ende el argumento de un complejo  $z$  posee infinidad de respuestas posibles (ya que dos ángulos que difieren en un múltiplo de  $2\pi$  se grafican del mismo modo). Veamos un ejemplo: Si  $z = 1 + i$  entonces

$$\arg(z) = \{\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

O sea que el argumento de un complejo es un **conjunto** y no un solo ángulo. Debido a esta ambigüedad se define con precisión el **argumento principal** de un complejo  $z$  como el único ángulo  $\alpha \in \arg(z)$  tal que  $\alpha \in (-\pi, \pi]$ . Utilizamos la palabra  $\text{Arg}$  para designar el argumento principal. En el ejemplo previo (o sea  $z = 1 + i$ ) se tiene

$$\text{Arg}(z) = \pi/4.$$

*Ejercicio 1.2.* Pruebe las siguientes propiedades (recuerde que dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  la suma se define como:  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ):

1.  $\arg(z + w) = \arg(z) + \arg(w)$ .
2. Halle un ejemplo donde  $\text{Arg}(z + w) \neq \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$ .
3. Si  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\text{Arg}(\alpha z) = \text{Arg}(z)$ .
4.  $-\text{Arg}(z) = \text{Arg}(\bar{z})$

$$5. \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Arg}(\bar{z})$$

*Ejercicio 1.3.* Calcular el argumento y el argumento principal de los siguientes complejos:

$$1 + \sqrt{3}i \quad \frac{-10}{2 + \sqrt{6}i} \quad \frac{i}{1 + i}$$

Escribiremos al número como

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)),$$

donde  $|z|$  es el módulo del número complejo, que se define como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Esta expresión es conveniente para el producto, el cociente, y la exponenciación de números complejos, gracias a las fórmulas de De Moivre: si tenemos

$$z_1 = |z_1|(\cos(\theta_1) + i\operatorname{sen}(\theta_1)),$$

$$z_2 = |z_2|(\cos(\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_2)),$$

entonces

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

$$z_1^k = |z_1|^k(\cos(k\theta_1) + i\operatorname{sen}(k\theta_1)).$$

*Observación 1.1.* Recordemos, finalmente, que en estos tres casos, hay que reducir el argumento al intervalo  $[-\pi, \pi)$  sumando o restando múltiplos de  $2\pi$ , ya que al hacer  $(\theta_1 + \theta_2)$ ,  $(\theta_1 - \theta_2)$ , ó  $(k\theta_1)$  podemos caer fuera de este intervalo.

*Ejemplo 1.4.* Sean  $z_1 = 2(\cos(\pi/4) + i\operatorname{sen}(\pi/4))$ ,  $z_2 = 4(\cos(5\pi/6) + i\operatorname{sen}(5\pi/6))$ .

Entonces:

- Para calcular el producto de  $z_1$  y  $z_2$  tenemos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2 \cdot 4(\cos(\pi/4 + 5\pi/6) + i\operatorname{sen}(\pi/4 + 5\pi/6)) \\ &= 8(\cos(13\pi/12) + i\operatorname{sen}(13\pi/12)), \end{aligned}$$

pero éste no es el resultado definitivo ya que  $13\pi/12$  no está en el intervalo  $[-\pi, \pi)$ . Como nos pasamos, restamos  $2\pi$  y ahora sí está en el intervalo, y nos queda

$$z_1 \cdot z_2 = 8(\cos(-11\pi/12) + i\operatorname{sen}(-11\pi/12)).$$

- Si dividimos  $z_1$  por  $z_2$  tenemos

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{4}(\cos(\pi/4 - 5\pi/6) + i\text{sen}(\pi/4 - 5\pi/6)) \\ &= \frac{2}{4}(\cos(-7\pi/12) + i\text{sen}(-7\pi/12)),\end{aligned}$$

y es el resultado, sin necesidad de reducir el ángulo, porque  $-7\pi/12 \in [-\pi, \pi)$ .

- Si calculamos  $z_1^{10}$  tenemos:

$$z_1^{10} = 2^{10}(\cos(10\pi/4) + i\text{sen}(10\pi/4)).$$

En este caso, como  $2\pi < 10\pi/4$ , debemos reducir el ángulo. Restándole  $2\pi$  nos queda  $\pi/2$ , y el resultado es

$$2^{10}(\cos(\pi/2) + i\text{sen}(\pi/2)).$$

### 1.3. Pasaje de una forma a otra

Pasar de la forma polar a la forma binomial es sencillo:

Si  $z = |z|(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$ , se calculan  $\cos(\theta)$ ,  $\text{sen}(\theta)$  y se multiplican con  $|z|$ . Directamente,

$$\text{Re}(z) = |z|\cos(\theta) \quad \text{Im}(z) = |z|\text{sen}(\theta).$$

Para pasar de la forma binomial a la polar, hay que calcular el módulo del número complejo, y su argumento.

Si  $z = a + ib$ , su módulo se calcula haciendo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Para determinar el ángulo, observemos que

$$\begin{cases} a = \text{Re}(z) = |z|\cos(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta) \\ b = \text{Im}(z) = |z|\text{sen}(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

con lo cual

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \text{sen}(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

En particular, de estas últimas obtenemos

$$tg(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)} = \frac{b}{a},$$

y podemos calcular el argumento de  $z$  a partir de alguna de las tres expresiones anteriores utilizando las funciones inversas  $\text{arctg}(x)$ ,  $\text{arcsen}(x)$  o  $\text{arccos}(x)$  según nos convenga; y tomaremos el argumento siempre en  $[-\pi, \pi)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \text{arccos}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ \theta = \text{arcsen}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ \theta = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right). \end{array} \right.$$

*Ejemplo 1.5.* Si  $z = 2i$ , como su parte real es 0 y su parte imaginaria es 2, no podemos utilizar la expresión de la tangente. Sin embargo, tanto para el seno como para el coseno tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cos}(\theta) = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = 0 \\ \text{sen}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = 1 \end{array} \right.$$

Sabemos que  $\text{cos}(\theta)$  se anula en  $\pi/2 + k\pi$ , con  $k$  un número entero. A su vez,  $\text{sen}(\theta)$  vale 1 en  $\pi/2 + 2k\pi$ ,  $k$  un número entero,  $k \in \mathbb{Z}$ . Si tomamos  $\theta = \pi/2$  se cumplen ambas condiciones, y además  $\pi/2 \in [-\pi, \pi)$ .

Como ya calculamos su módulo,  $|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$ , la forma polar de  $z = 2i$  es

$$z = 2(\text{cos}(\pi/2) + i\text{sen}(\pi/2)).$$

*Ejemplo 1.6.* Si  $z = -1$ , su módulo es  $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$ , con lo cual para calcular su argumento tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cos}(\theta) = -1 \\ \text{sen}(\theta) = 0 \end{array} \right.$$

y debe ser  $\theta = \pi + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$  para la primera, y  $\theta = 0 + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$  para la segunda.

Observemos que  $\theta = \pi$  cumple ambas condiciones, pero no la de estar en el intervalo  $[-\pi, \pi)$ . En cambio,  $\theta = -\pi$  cumple todas las condiciones. Así,

$$z = (\text{cos}(-\pi) + i\text{sen}(-\pi))$$

## 2. El plano complejo

### 2.1. Complejo conjugado

Dado  $z \in \mathbb{C}$ , como adelantamos antes, el número complejo conjugado de  $z = a + ib$  es  $\bar{z} = a - ib$ . Geométricamente, la conjugación corresponde a una reflexión respecto al eje  $x$ . Esto sugiere una forma fácil para calcular el conjugado de  $z$  si está en forma polar y  $z \notin \mathbb{R}$ ,  $z = |z|(\cos(\theta) + i\sen(\theta))$ : hacemos  $\bar{z} = |z|(\cos(-\theta) + i\sen(-\theta))$ .

No es difícil demostrar que para todo número complejo se tiene

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

En efecto, si  $z \notin \mathbb{R}$ , por las fórmulas de De Moivre,

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= |z|(\cos(\theta) + i\sen(\theta))|z|(\cos(-\theta) + i\sen(-\theta)) \\ &= |z|^2(\cos(0) + i\sen(0)) \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

Si  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{z} = z$ , y  $z^2 = |z|^2$ .

La conjugación posee entre otras las siguientes propiedades:

1. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha$ .
2.  $\overline{\bar{z}} = z$ .
3. Si  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$
4. Si  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $\overline{wz} = \bar{w} \bar{z}$ .
5.  $\bar{z}z = |z|^2$ .
6.  $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$        $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$ .
7.  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

*Ejercicio 2.1.* Pruebe las propiedades indicadas de la conjugación.

### 2.2. Inverso

Todo número complejo  $z$  no nulo tiene un inverso multiplicativo, es decir, existe otro complejo que llamaremos  $z^{-1}$  tal que

$$z^{-1} \cdot z = z \cdot z^{-1} = 1.$$

Dado  $z$ , para calcular  $z^{-1}$  es suficiente efectuar el cociente  $\frac{1}{z}$ . Ahora, por las propiedades vistas anteriormente,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1 \bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

### 2.3. Módulo y distancia

Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  se tiene la siguiente propiedad del módulo:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

La demostración es sencilla, y se obtiene utilizando las fórmulas de De Moivre.

*Observación 2.1.* Para la suma y la resta, en cambio, no valdrá una igualdad semejante.

El módulo  $|z|$  de un número complejo  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  coincide con la distancia del punto  $(a, b)$  del plano  $\mathbb{R}^2$  al origen. Así, tenemos numerosas propiedades geométricas que se expresarán fácilmente en términos del módulo de números complejos.

Una propiedad importante que ya vimos es la **desigualdad triangular**: dados  $z, w \in \mathbb{C}$  tenemos:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Recordando la suma de números complejos (o de vectores en  $\mathbb{R}^2$ ), estamos diciendo que en el triángulo de vértices  $0, z$  y  $z + w$ , la longitud del lado que une los vértices  $0$  y  $z + w$  es menor que la suma de las longitudes de los lados que unen  $0$  con  $z$ , y  $z$  con  $z + w$ .

Otra propiedad importante es que

$$|z - w| \geq ||z| - |w||.$$

Vamos a demostrarla porque es importante y la necesitaremos más adelante para acotar el módulo de fracciones con números complejos en el denominador.

*Proposición 2.1.* Dados  $z, w \in \mathbb{C}$ , se tiene:

$$|z - w| \geq ||z| - |w||.$$

Para demostrarla, observemos que

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$$

(en la última utilizamos la desigualdad triangular), con lo cual tenemos que

$$|z| - |w| \leq |z - w|.$$

Si repetimos esta cuenta comenzando con  $w$ ,

$$|w| = |w - z + z| \leq |w - z| + |z| \leq |z - w| + |z|$$

(ya que  $|a| = |-a|$ ), y ahora nos queda

$$|w| - |z| \leq |z - w|.$$

Juntando las dos desigualdades, obtenemos

$$|z| - |w| \leq |z - w|, \quad |w| - |z| \leq |z - w|,$$

o lo que es lo mismo,

$$||z| - |w|| \leq |z - w|,$$

y esto termina la demostración.

Muchas veces nos convendrá recordar que  $|z - w|$  se puede interpretar como la distancia entre  $z$  y  $w$ .

*Ejemplo 2.1.* Hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $|z| < |z - 2i|$ .

Observemos que  $|z|$  es lo mismo que  $|z - 0|$ , y se puede pensar como la distancia de  $z$  al origen. Por otra parte, podemos pensar  $|z - 2i|$  como la distancia de un complejo  $z$  al  $2i$ . Entonces, la desigualdad nos pide los  $z \in \mathbb{C}$  que están más cerca del 0 que del  $2i$ .

Para hallarlos, determinemos los que están a igual distancia de ambos números complejos. No es difícil ver que los puntos de la recta paralela al eje  $x$  que pasa por  $i$  equidistan de 0 y  $2i$ . Vemos entonces que los números complejos que están debajo de la misma cumplen la desigualdad, y podemos describir entonces la solución como

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 1\}.$$

Conviene representar gráficamente la situación a medida que se lee el párrafo anterior: si no lo hizo, hágalo: busque un papel, trace los ejes, marque los puntos 0 y  $2i$ , y la recta paralela al eje  $x$  que pasa por  $i$ . Ahora, elija un punto cualquiera del plano y observe que si está por encima de la recta, está más cerca del  $2i$  que del 0 (y si está por debajo de la recta, está más cerca del 0 que del  $2i$ ).

Esta noción de distancia nos permite describir una circunferencia en el plano complejo de manera muy sencilla.



**Definición 2.3.1.** La circunferencia  $C_r(z_0)$  centrada en  $z_0$  de radio  $r$  es el conjunto

$$C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

De la misma manera, podemos definir otros objetos geométricos:

**Definición 2.3.2.** Un disco abierto  $D_r(z_0)$  centrado en  $z_0$  de radio  $r$  es el conjunto:

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Si a un disco abierto de radio  $R$  le quitamos un disco cerrado con el mismo centro pero de radio  $r < R$ , nos queda un **anillo** que lo podemos describir como

$$A_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

*Observación 2.2.* Es posible definir discos cerrados, tomando  $|z - z_0| \leq r$ , y también anillos cerrados (o semi cerrados) cambiando las desigualdades, por ejemplo

$$\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\},$$

$$\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| < R\},$$

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| \leq R\}.$$

### 3. Nociones de topología del plano complejo

Para estudiar funciones definidas en  $\mathbb{C}$  necesitaremos ciertos conceptos de tipo topológico, que vamos a introducir con las siguientes definiciones.

**Definición 3.0.3.** Un conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  se dice **abierto** si para cada  $z_0 \in A$  existe un número real  $r > 0$  tal que el disco abierto

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

está contenido en  $A$ .

*Ejemplo 3.1.* Los siguientes son conjuntos abiertos:

1. Un disco abierto de radio  $r > 0$ ,  $D_r(z)$ .
2. El plano complejo  $\mathbb{C}$ .
3. El plano complejo menos el origen,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

4. El plano complejo menos finitos puntos  $z_1, \dots, z_n, \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ .
5. El plano complejo menos el semieje  $\mathbb{R}_{\leq 0}, \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_{\leq 0}\}$ .
6. El semiplano  $Re(z) > 0$  (y los semiplanos  $Re(z) < 0, Im(z) > 0, Im(z) < 0$ ).
7. El rectángulo  $(a, b) \times (c, d)$ .
8. Un anillo abierto  $A_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ .
9. El cono  $\{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < arg(z) < \theta_2\}$  (si  $\theta_1 < 0$  excluyendo el número complejo  $z = 0$ ).

No vamos a demostrar analíticamente que estos conjuntos son abiertos, pero conviene dibujarlos y convencerse de que para cualquier punto del conjunto se puede dibujar un disco centrado en él que esté dentro del conjunto.

*Ejemplo 3.2.* Los siguientes conjuntos no son abiertos:

1. Un disco cerrado de radio  $r > 0$
2. El plano complejo  $\mathbb{C}$  menos un disco abierto de radio  $r > 0, \mathbb{C} \setminus \{D_r(z)\}$
3. El plano complejo menos el semieje  $\mathbb{R}_{< 0}, \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_{< 0}\}$
4. El semiplano  $Re(z) \geq 0$  (y los semiplanos  $Re(z) \leq 0, Im(z) \geq 0, Im(z) \leq 0$ )
5. El rectángulo cerrado  $[a, b] \times [c, d]$
6. El rectángulo semiabierto  $[a, b) \times [c, d)$
7. El complemento de un conjunto abierto  $A, \mathbb{C} \setminus A\}$
8. Un anillo cerrado  $A_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\}$
9. El cono  $\{z \in \mathbb{C} : \theta_1 \leq arg(z) \leq \theta_2\}$

Es conveniente comparar estos conjuntos con los anteriores, y observar las diferencias que tienen. Brevemente, si comparamos el disco abierto con el cerrado, vemos que el segundo incluye el *borde* del disco. Si tomamos un punto  $z$  del borde, cualquier disco centrado en el punto  $z$  tendrá una parte afuera del disco original, con lo cual no es abierto.

**Definición 3.0.4.** *Un conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  se dice **conexo por arcos** (o **arco conexo**) si dados dos puntos cualesquiera  $z_1, z_2 \in A$ , existe una curva continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  que los conecta. Es decir,  $\gamma(t) \in A$  para todo  $t$ ,  $\gamma(0) = z_1$ , y  $\gamma(1) = z_2$ .*

Nuestra definición de conjunto arcoconexo no requiere que el conjunto sea abierto, aunque en la mayoría de las veces que utilizaremos esta definición, deberá serlo.

*Ejemplo 3.3.* Todos los ejemplos de conjuntos abiertos anteriores son conjuntos arcoconexos.

*Ejemplo 3.4.* El complemento de un anillo  $A_{r,R}$  no es arcoconexo: no hay forma de conectar un punto en el interior del disco  $D_r$  con un punto en el exterior del disco  $D_R$ . Tampoco es un conjunto arcoconexo el plano complejo menos una recta.

Otra noción importante que vamos a utilizar es la de conjunto **simplemente conexo**. Como su definición es relativamente complicada, diremos informalmente que un conjunto arco conexo  $A \subset \mathbb{C}$  es simplemente conexo si no tiene huecos en su interior.

*Ejemplo 3.5.* El plano sin un punto  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  no es un conjunto simplemente conexo.

*Ejemplo 3.6.* Un anillo  $A_{r,R}$  no es simplemente conexo.

*Ejemplo 3.7.* Sí son conjuntos simplemente conexos el plano sin una semirrecta (por ejemplo  $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_{\leq 0}\}$ ), un disco abierto, o un semiplano.

La importancia de los conjuntos simplemente conexos se verá cuando estudiemos integrales de funciones complejas. También necesitaremos considerar curvas en conjuntos del plano complejo.

**Definición 3.0.5.** *Sea  $D \subset \mathbb{C}$  un abierto, una **curva**  $\gamma$  en  $D$  es la imagen de una función  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ .*

**Definición 3.0.6.** *Sea  $D \subset \mathbb{C}$  un abierto, una **curva cerrada**  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  es una curva tal que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .*

Habrà mucha diferencia al calcular integrales dependiendo de que el interior de la curva pertenezca o no a  $D$ . Veamos algunos ejemplos.

*Ejemplo 3.8.* Supongamos que  $D$  es el plano complejo sin el punto  $z = 0$  (no es simplemente conexo). La curva

$$\gamma_1(t) = 2 \cos(t) + i2 \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

es una circunferencia de radio 2 centrada en  $z = 0$ , con lo cual tiene en su interior al punto  $z = 0$  que no pertenece a  $D$ .

*Ejemplo 3.9.* La curva en el plano complejo sin el punto  $z = 0$

$$\gamma_2(t) = 3 + \cos(t) + i(5 + \operatorname{sen}(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

es una circunferencia de radio unitario centrada en  $z = 3 + 5i$ , con lo cual no tiene en su interior a 0.

La integral de una misma función compleja derivable en  $D$  cambia por completo según en cual de las dos curvas la integremos, como veremos en los próximos capítulos. El teorema más importante del análisis complejo afirma que la integral sobre una curva  $\gamma(t)$  de una función compleja derivable en  $D$  es nula si la región encerrada por la curva es simplemente conexa.

*Ejercicio 3.1.* Representar los conjuntos siguientes y determinar cuáles son abiertos y conexos.

a)  $|z - 2 + i| \leq 1$     b)  $|2z + 3| > 4$     c)  $\operatorname{Im} z > 1$

d)  $\operatorname{Im} z = 1$     e)  $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} (z \neq 0)$     f)  $|z - 4| \geq |z|$

g)  $|\operatorname{Re} z| < |z|$     h)  $\operatorname{Re} \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2}$     i)  $\operatorname{Im} z^2 > 0$

# Capítulo 10

## Funciones de variable compleja

En este capítulo estudiaremos funciones definidas en conjuntos del plano complejo  $\mathbb{C}$ . Veremos algunos ejemplos especiales, y también estudiaremos las nociones de límite, continuidad, y derivabilidad.

### 1. Definiciones básicas

**Definición 1.0.7.** Sea  $D \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto y conexo del plano complejo. Una función

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}$$

es una aplicación que a cada número complejo  $z = x + iy$  en  $D$  le asigna un único número complejo  $w = f(z)$ . Llamaremos a  $D$  el **dominio** de  $f$ .

*Ejemplo 1.1.* Definamos  $f(z) = f(x + iy) = -y + (2x - y)i$ , en el conjunto abierto  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$ .

Calculemos algunos valores de esta función:

$$\begin{aligned} f(1 + i) &= 1 + (2 - 1)i = 1 + i \\ f(2 - 2i) &= -(-2) + (4 - (-2))i = 2 + 6i; \end{aligned}$$

pero  $f(3 + 4i)$  no está definida, ya que  $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ , es decir,  $3 + 4i \notin D$ .

*Ejemplo 1.2.* Algunas funciones complejas ya las conocemos:

- $f(x + iy) = x$ , nos da la parte real de un complejo. Aquí,  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ .

- $f(x + iy) = y$ , nos da la parte imaginaria. En este caso,  $f(z) = \text{Im}(z)$ .
- $f(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , el módulo de un complejo;  $f(z) = |z|$ .
- $f(z) = \text{arg}(z)$ , la función que asigna a cada número complejo su argumento. Notemos que en principio esta función está definida en  $D = \mathbb{C} \setminus 0$ , pero la extendemos a todo  $\mathbb{C}$  definiendo  $\text{arg}(0) = 0$ .

### 1.1. Operaciones con funciones complejas

Podemos definir nuevas funciones complejas a partir de distintas operaciones entre dos funciones  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ :

- $h(z) = f(z) + g(z)$ , la **suma** de  $f$  y  $g$ .
- $h(z) = f(z) - g(z)$ , la **resta** de  $f$  y  $g$ .
- $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ , el **producto** de  $f$  y  $g$ .
- $h(z) = f(z)/g(z)$ , el **cociente** de  $f$  y  $g$ . Notemos que en principio esta función está definida en  $D \setminus \{w \in D : g(w) = 0\}$ , es decir, debemos excluir del dominio de  $h$  los puntos donde se anula el denominador.

Un caso importante es la **composición de funciones**. Igual que para funciones reales, podemos definir la composición de dos funciones  $f, g$ :

$$g \circ f(z) = g(f(z)),$$

siempre que la imagen de  $f$  pertenezca al dominio de  $g$ .

El **dominio** de una función compleja son aquellos puntos del plano complejo  $\mathbb{C}$  donde la función está definida, y se estudia de la misma manera que el dominio de funciones reales, si bien hay ciertas diferencias importantes.

*Ejemplo 1.3.* Determinar el dominio de la función

$$f(z) = \frac{z^2}{1 + z^2}.$$

En este caso, el cociente puede efectuarse toda vez que el denominador sea distinto de cero. Es decir, debemos considerar

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 1 + z^2 \neq 0\}.$$

Para funciones reales, todo número al cuadrado es positivo, y por lo tanto  $1 + x^2$  no se anula nunca. Sin embargo, en los complejos esto no es cierto:

recordemos que  $i^2 = -1$ . Es decir, la función  $1 + z^2$  del denominador tiene dos *ceros complejos*, que son  $i, -i$ . Tenemos entonces

$$D = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}.$$

*Ejercicio 1.1.* Describir el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad \text{b) } f(z) = \arg(z) \quad \text{c) } f(z) = \frac{z}{z + \bar{z}}$$

$$\text{d) } f(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

## 2. Partes real e imaginaria de $f$

Así como muchas veces es conveniente pensar a un número complejo  $z = x + iy$  como un punto  $(x, y)$  del plano, la imagen  $w = f(z)$  también se puede descomponer en parte real e imaginaria,  $w = u + iv$ , y pensarla como el punto  $(u, v)$  del plano. De esta manera, podemos descomponer la función  $f(z)$  en su parte real y su parte imaginaria,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Aquí,

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)),$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)).$$

Esto nos permite pensar a  $f$  como un campo vectorial  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

*Ejemplo 2.1.* Volviendo a la función del Ejemplo 1.1,  $f(z) = f(x + iy) = -y + (2x - y)i$ , podemos separar sus partes real e imaginaria:

$$u(x, y) = -y,$$

$$v(x, y) = 2x - y.$$

*Ejemplo 2.2.* En el caso de la función módulo,  $f(z) = |z|$  tenemos

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$v(x, y) = 0.$$

*Ejercicio 2.1.* Calcule las partes real e imaginaria de la función que asigna a cada complejo su conjugado,  $f(z) = \bar{z}$ .

### 3. Límite y continuidad

La noción de límite para funciones complejas es similar a la de funciones reales de varias variables:

**Definición 3.0.1.** Decimos que el límite de  $f(z)$  cuando  $z$  tiende a  $z_0$  es  $w$ , y escribimos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$$

si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(z) - w| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |z - z_0| < \delta.$$

Con la noción de límite, estamos en condiciones de introducir la definición de continuidad.

**Definición 3.0.2.** Decimos que  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en  $z_0 \in D$  si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Si es continua en todo punto  $z \in D$ , diremos que  $f$  es continua en  $D$ .

Una vez más, si pensamos  $z_0 = x_0 + iy_0 = (x_0, y_0)$ , podemos entender esta definición en términos de funciones reales de dos variables utilizando la descomposición  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Así, la condición de continuidad queda:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0),$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0),$$

*Ejemplo 3.1.* La función del ejemplo 1.1

$$f(z) = f(x + iy) = -y + (2x - y)i$$

es continua en todo  $\mathbb{C}$ , ya que las funciones

$$u(x, y) = -y, \quad v(x, y) = 2x - y$$

son continuas  $\mathbb{R}^2$ .

Esto nos permite extender a las funciones complejas las propiedades que ya concíamos de las funciones reales:

*Proposición 3.1.* Si  $f, g$  son funciones continuas, entonces:



- $f(z) + g(z)$  es continua;
- $f(z) \cdot g(z)$  es continua;
- $f(z)/g(z)$  es continua (si  $g$  no se anula);
- $g \circ f(z)$  es continua (si la imagen de  $f$  pertenece al dominio de  $g$ ).

Veamos un ejemplo importante.

*Ejemplo 3.2.* Analicemos la continuidad de  $f(z) = \text{Arg}(z)$ .

Recordemos que todo complejo  $z$  se podía escribir en forma polar como  $z = |z|e^{i\theta}$ , donde  $\theta$  era el argumento del número complejo. El argumento de un número complejo  $z$  era el ángulo respecto al eje  $x$ , medido entre  $-\pi$  y  $\pi$ :  $\theta \in [-\pi, \pi)$ .

Si descomponemos  $f(z)$  como  $u + iv$ , tenemos

$$u(x, y) = \theta, \quad v(x, y) = 0.$$

Como

$$x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)),$$

se debe cumplir

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{x^2 + y^2}\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

Es decir, si  $z \neq 0$ ,

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{sen}(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(y si  $z = 0$ ,  $\text{Arg}(0) = 0$ ).

La función  $\text{Arg}(z)$  es discontinua en el conjunto  $\{-a : a \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{C}$ , ya que en el semiplano  $x \leq 0$ , el argumento está muy próximo a  $-\pi$  si  $y$  está cerca de 0 pero es negativo; pero el argumento está muy próximo a  $\pi$  si  $y$  está cerca de 0 pero es positivo.

## 4. Algunas funciones especiales

En esta sección vamos a introducir varias funciones importantes, la exponencial, el logaritmo complejo, y las funciones trigonométricas. Estudiaremos su dominio, su continuidad, y algunas de sus propiedades.

## 4.1. Función exponencial

**Definición 4.1.1.** La exponencial de un número complejo  $z = x + iy$  es

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)).$$

Como las funciones  $e^x$ ,  $\cos(y)$ ,  $\operatorname{sen}(y)$  son continuas, las funciones

$$u(x, y) = e^x \cos(y), \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$$

son continuas y la exponencial compleja es una función continua.

La exponencial compleja tiene dos propiedades que conocemos de la exponencial real. Para todo  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  tenemos:

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}$$

$$(e^z)^a = e^{az}$$

*Observación 4.1.* Estamos acostumbrados a pensar en la exponencial como función real, y como tal no se anula y sólo toma valores positivos. La exponencial compleja tampoco se anula, pero puede tomar valores negativos. Por ejemplo:

$$e^{i\pi} = -1.$$

En efecto,  $e^{i\pi} = e^0(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)) = -1$ .

*Ejercicio 4.1.* Probar que:

$$\text{a) } \exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2; \quad \text{b) } \exp \frac{2 + \pi i}{4} = \sqrt{\frac{e}{2}}(1 + i);$$

## 4.2. Logaritmo Complejo

La función  $\operatorname{Log}(z)$  ocupa una posición central en el análisis complejo. Motivemos su definición tratando de resolver la ecuación

$$e^z = 1.$$

Supongamos que  $z = x + iy$ , con lo cual

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)) = 1.$$

Si tomamos módulo en ambos miembros, como  $\cos^2(y) + \operatorname{sen}^2(y) = 1$ , nos queda

$$e^x = 1$$

y por lo tanto debe ser  $x = 0$

Entonces, determinemos los valores de  $y$  tales que  $\cos(y) + i\operatorname{sen}(y) = 1$ . Separando en parte real y parte imaginaria,

$$\begin{cases} \cos(y) = 1 \\ \operatorname{sen}(y) = 0. \end{cases}$$

Una observación que podemos hacer y que será útil más adelante es que si un valor de  $y$  es solución, también lo será  $y + 2\pi$ ,  $y - 2\pi$ ,  $y + 4\pi$ , y en general,  $y + 2k\pi$  con  $k$  cualquier número entero, ya que las funciones seno y coseno (reales) tienen período  $2\pi$ .

La primera ecuación se cumple cuando  $y = 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , mientras que la segunda lo hace para  $y = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Nos interesan los valores de  $y$  que satisfacen ambas ecuaciones, y como toda solución de la primera es solución de la segunda, obtenemos  $y = 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Como  $x = 0$ , las soluciones son entonces

$$z = i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vemos que hay infinitas soluciones de  $e^z = 1$ , y que difieren en un múltiplo de  $2\pi i$ .

En general, dados dos números complejos distintos  $z_1 \neq z_2$  tales que

$$e^{z_1} = e^{z_2},$$

multiplicando ambos miembros por  $e^{-z_2}$  nos queda

$$e^{z_1 - z_2} = 1,$$

es decir,  $z_1 - z_2 = 2k\pi i$  por lo que calculamos antes.

Ahora, dado  $w \in \mathbb{C}$ , Si queremos encontrar los  $z \in \mathbb{C}$  tale que

$$e^z = w,$$

escribiendo  $z = x + iy$ ,  $w = |w|(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))$  obtenemos

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)) = |w|(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)),$$

y tomando  $x = \ln |w|$ ,  $y = \theta + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , encontramos todos los números complejos  $z$  que resuelven la ecuación.

Como  $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es biyectiva, para cada  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , tenemos que hay una única solución  $z = x + iy$  de  $e^z = w$  en cada conjunto del plano de la forma

$$\{x \in \mathbb{R}, \quad y \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)\}$$

Por ese motivo, no podemos considerar el logaritmo como una función de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  en  $\mathbb{C}$ , sino que debemos restringir la imagen, y será una función de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  en  $\{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \in [-\pi, \pi)\}$ .

*Ejercicio 4.2.* Hallar los valores de  $z$  para los cuales

a)  $e^z = -2$ ;    b)  $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ ;    c)  $e^{(2z-1)} = 1$

**Definición 4.2.1.** *El logaritmo complejo es la función  $\text{Log}(z)$ ,*

$$\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \in [-\pi, \pi)\}$$

$$\text{Log}(z) = \ln |z| + i \text{Arg}(z),$$

que llamaremos **rama principal del logaritmo**.

*Observación 4.2.* Esta función no es exactamente la inversa de la función exponencial. Al componer con la función exponencial  $e^{\text{Log}(z)}$  obtenemos nuevamente  $z$ :

$$\begin{aligned} e^{\text{Log}(z)} &= e^{\ln |z| + i \text{Arg}(z)} \\ &= e^{\ln |z|} e^{i \text{Arg}(z)} \\ &= |z| (\cos(\text{Arg}(z)) + i \text{sen}(\text{Arg}(z))) \\ &= z. \end{aligned}$$

Sin embargo, la composición  $\text{Log}(e^z)$  no siempre nos devuelve  $z$ : sea  $z = a + ib$  tal que  $\text{Im}(z) = b \in [2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$ . En ese caso,

$$\begin{aligned} \text{Log}(e^z) &= \text{Log}(e^a e^{ib}) \\ &= \text{Log}(e^a (\cos(b) + i \text{sen}(b))) \\ &= \ln(e^a) + i(b - 2k\pi) \\ &= a + i(b - 2k\pi). \end{aligned}$$

Es decir, nos devuelve la parte imaginaria reducida en múltiplos de  $2k\pi$ .

Por la observación anterior, es conveniente definir las ramas  $k$ -ésimas del logaritmo como

$$\text{Log}_k(z) = \ln |z| + i(\text{Arg}(z) + 2k\pi)$$

para cada  $k \in \mathbb{Z}$  fijo. En este caso,

$$\text{Log}_k : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)\}.$$

*Observación 4.3.* Notemos que el logaritmo está definido en los números negativos. Por ejemplo, tenemos

$$\text{Log}(-1) = |-1| + i(\text{Arg}(-1)) = 1 + i\pi.$$

Sin embargo, el logaritmo complejo es continuo en  $\mathbb{C} \setminus \{a : a \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ , es decir, no es una función continua en los números negativos. Esto es consecuencia de que la parte imaginaria del logaritmo, la función  $\text{Arg}(z)$  que analizamos en el Ejemplo 3.2, es continua sólo en este conjunto.

Obsevemos también que la parte real del logaritmo,  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , es continua en todo  $\mathbb{C}$ .

*Ejercicio 4.3.* Probar que  $e^{\log z} = z$ , si  $z \neq 0$ , independientemente de la rama de  $\log z$  seleccionada.

*Ejercicio 4.4.* Probar que

$$\text{a) } \text{Log}(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i \quad \text{b) } \text{Log}(1 - i) = \frac{1}{2}\text{Log}2 - \frac{\pi}{4}i$$

*Ejercicio 4.5.* Probar que

$$\text{Log}[(1 + i)^2] = 2\text{Log}(1 + i) \quad \text{pero} \quad \text{Log}[(-1 + i)^2] \neq 2\text{Log}(-1 + i)$$

*Ejercicio 4.6.* Probar que si  $\text{Re } z_1 > 0$  y  $\text{Re } z_2 > 0$  entonces

$$\text{Log}z_1z_2 = \text{Log}z_1 + \text{Log}z_2$$

*Ejercicio 4.7.* Probar que

$$\text{Log}z_1z_2 = \text{Log}z_1 + \text{Log}z_2 + 2N\pi i$$

siendo  $N$  uno de los valores  $0, \pm 1$ .

### 4.3. Funciones Trigonómicas Complejas

**Definición 4.3.1.** *Definimos las funciones seno y coseno complejos como*

$$\text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\text{cos}(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

*Observación 4.4.* Vamos a estudiar con cierto detalle  $\text{cos}(z)$ , y dejamos como ejercicio repetir el análisis para  $\text{sen}(z)$ .

En primer lugar, separemos su parte real e imaginaria. Si  $z = x + iy$ ,

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$$

Tras distribuir,

$$\cos(z) = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y}{2},$$

y nos queda

$$\frac{(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))e^{-y} + (\cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x))e^y}{2}.$$

Recordando que  $\cos(-x) = \cos(x)$ , y  $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ , agrupamos

$$\cos(z) = \cos(x)\frac{e^y + e^{-y}}{2} + i\operatorname{sen}(x)\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Luego, separamos en partes real e imaginaria,

$$u(x, y) = \cos(x)\frac{(e^y + e^{-y})}{2} = \cos(x)\cosh(y)$$

$$v(x, y) = \operatorname{sen}(x)\frac{(e^y - e^{-y})}{2} = \operatorname{sen}(x)\sinh(y)$$

La función  $\cos(z)$  es continua porque  $u, v$  lo son. Notemos además que si  $z = x \in \mathbb{R}$ , coincide con el  $\cos(x)$  que conocíamos.

*Observación 4.5.* Una diferencia muy importante con la función coseno definida sobre los reales es que  $|\cos(z)|$  no está acotada. Para comprobarlo, tomemos  $z = iy$  con  $y \geq 0$ :

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \geq \frac{e^y}{2}$$

(porque  $e^{-y} > 0$ ) y sabemos que cuando  $y \rightarrow +\infty$ ,  $e^y$  tiende a infinito, con lo cual podemos ver que el coseno no está acotado.

*Ejercicio 4.8.* Hallar todas las soluciones de la ecuación  $\cos z = 2$ .

## 5. Derivación

**Definición 5.0.2.** Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D$  un abierto conexo en  $\mathbb{C}$ , y un número complejo  $z_0 \in D$ . Decimos que  $f$  es derivable en  $z_0$  si existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

y a este límite lo llamaremos  $f'(z_0)$ , la derivada de  $f$  en  $z_0$ .

Si existe el límite, también podemos escribir

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

lo cual nos recuerda la definición de derivada de una variable real, con una diferencia: aquí  $h$  es un *número complejo*.

*Ejemplo 5.1.* Si  $f(z) = z^2$ , calcular  $f'(z)$  usando la definición.

Calculamos el límite directamente

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} z + z_0 = 2z_0. \end{aligned}$$

*Ejercicio 5.1.* Calcular la derivada por definición de  $f(z) = \frac{1}{z}$ , para  $z \neq 0$ .

*Observación 5.1.* Como  $h$  es un número complejo, también podemos considerar que estamos tomando un límite doble.

Nuestro objetivo es hallar una expresión para  $f'(z)$  en términos de las derivadas parciales respecto a  $x$  e  $y$  de la parte real y de la parte imaginaria de  $f$ , y condiciones para que una función compleja sea derivable.

Para eso, calculemos la derivada tomando en el límite solamente valores de  $h$  reales,

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Separando parte real e imaginaria de  $f$ , nos queda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{h},$$

esto es,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}.$$

El primer límite es la derivada parcial de  $u$  con respecto a  $x$ , mientras el segundo es la derivada parcial de  $v$  con respecto a  $x$ , lo cual nos da la siguiente expresión para  $f'(z_0)$ :

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \tag{5.1}$$

Ahora, veamos qué pasa si calculamos la derivada tomando en el límite solamente valores imaginarios. Supongamos que  $h \in \mathbb{R}$  y calculemos

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}.$$

Nuevamente, separamos parte real e imaginaria de  $f$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) + iv(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{ih},$$

esto es, separando  $u$  y  $v$  y sacando  $1/i$  de factor común,

$$\frac{1}{i} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h} \right).$$

En este caso, el primer límite es la derivada parcial de  $u$  con respecto a  $y$ , mientras que el segundo es la derivada parcial de  $v$  con respecto a  $y$ , y obtenemos la siguiente expresión para  $f'(z_0)$ :

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} (u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)).$$

Como  $1/i = -i$ , distribuyendo nos queda:

$$f'(z_0) = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0). \quad (5.2)$$

*Proposición 5.1.* Si  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es derivable en  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ , y  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , entonces las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  satisfacen

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) &= -u_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se conocen como las **condiciones de Cauchy-Riemann**.

*Demostración.* Igualando las dos expresiones 5.1 y 5.2 que obtuvimos para  $f'(z_0)$ ,

$$u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

vemos que si  $f$  es derivable en  $z_0$ , deben coincidir las partes reales e imaginarias, con lo cual:

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) &= -u_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

y obtenemos las condiciones de Cauchy-Riemann. □



*Proposición 5.2.* Si  $f = u + iv$  sea derivable en  $z_0 = (x_0, y_0)$ , entonces el campo vectorial  $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  es **diferenciable** en  $(x_0, y_0)$ . Esto es, existe un plano tangente al campo  $F$  en  $(x_0, y_0)$  que lo aproxima.

*Demostración.* Si llamamos  $z_0 + h = z$ , el límite puede escribirse

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Ahora, si pasamos restando la derivada,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)]}{z - z_0} = 0.$$

Llamando  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , y escribiendo  $f'(z_0) = p + iq$  tenemos que el siguiente límite es nulo:

$$\frac{u(x, y) + iv(x, y) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (p + iq)(x - x_0 + i(y - y_0))]}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

En particular, si un límite nos da 0, tomando módulo también será nulo, y escribiendo el campo asociado  $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  en lugar de  $f(z)$ , como  $|z| = \|(x, y)\|$ , es nulo el límite de:

$$\frac{\|(u(x, y), v(x, y)) - [(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) + D(u, v)(x - x_0, y - y_0)]\|}{\|x - x_0, y - y_0\|},$$

donde por Cauchy Riemann, hemos escrito la diferencial del campo  $F$  como

$$D(u, v) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix},$$

y vemos entonces que  $F$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ . □

*Observación 5.2.* Esto nos podría llevar a pensar que todo el análisis complejo se reduce entonces a estudiar campos diferenciables de  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pero no es así.

En particular, el campo  $F(x, y) = (x, -y)$  es diferenciable, pero la función compleja a la cual está asociado,  $f(z) = f(x + iy) = x - iy = \bar{z}$ , no es derivable porque no se verifican las condiciones de Cauchy Riemann en ningún punto. Observemos que tenemos  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = y$ , y ahora:

$$\begin{aligned} u_x &= 1 & v_y &= -1 \\ u_y &= 0 & v_x &= 0. \end{aligned}$$

Muchas funciones importantes del análisis complejo no son derivables. Hemos visto recién que  $f(z) = \bar{z}$  no lo es, y tampoco lo son  $Re(z)$ ,  $Im(z)$ ,  $|z|$ . Vamos a verlo en los siguientes ejemplos.

*Ejemplo 5.2.* La función  $f(z) = Re(z)$  no es derivable en ningún  $z$ .

Vamos a estudiarla de dos maneras, vía Cauchy-Riemann y directamente calculando la derivada por definición.

Primera forma: Veamos si se verifican las condiciones de Cauchy Riemann.

Si  $z = x + iy$ ,  $Re(z) = x$ . Escribimos

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = x + i \cdot 0,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x \\ v(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0 \\ v_x &= 0, & v_y &= 0 \end{aligned}$$

Como  $u_x = 1$  y  $v_y = 0$ , no se cumple la condición de Cauchy-Riemann para ningún  $(x, y)$ , es decir, en ningún  $z$ , con lo cual  $f$  no puede ser derivable en ningún  $z \in \mathbb{C}$ .

Segunda forma: Derivemos  $f$  por definición. Si  $f$  es derivable en algún  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ , debería existir el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

pero según consideremos un incremento real o imaginario puro, el límite nos da diferente:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h) - f(x_0 + iy_0)}{h} &= \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + ih) - f(x_0 + iy_0)}{ih} &= \frac{x_0 - x_0}{h} = 0 \end{aligned}$$

*Ejemplo 5.3.* La función  $f(z) = i|z|$  no es derivable en ningún  $z$ .

Vamos a ver primero si se verifica Cauchy Riemann.

Si  $z = x + iy$ ,  $i|z| = i\sqrt{x^2 + y^2}$ , es decir que

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = 0 + i\sqrt{x^2 + y^2},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0 \\ v(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Ahora,

$$u_x = 0, \quad v_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$u_y = 0, \quad v_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para que se cumpla Cauchy Riemann debería ser

$$u_x = v_y, \quad 0 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$u_y = -v_x, \quad 0 = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Observemos que si  $(x, y) \neq (0, 0)$ , no se verifica la condición de Cauchy Riemann. Por lo tanto, el único punto donde podría ser derivable es en  $z = 0$ , pero ahí tenemos que derivar  $v$  por definición.

Sin embargo, notemos que al calcular la derivada de  $v$  respecto a  $x$ , tenemos

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

y este límite no existe, ya que se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = -1$$

con lo cual  $f(z) = i|z|$  tampoco es diferenciable en  $z = 0$ .

*Ejercicio 5.2.* Utilizar la definición de derivada para ver que las funciones  $f(z) = \operatorname{Re} z$ ,  $g(z) = \bar{z}$ , y  $h(z) = \operatorname{Im} z$  no son derivables en ningún punto.

*Ejercicio 5.3.* Utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann, mostrar que las siguientes funciones no son derivables en ningún punto.

$$\text{a) } 2x + ixy \quad \text{b) } e^x e^{-iy}$$

## 5.1. Condiciones para derivabilidad

Las ecuaciones de Cauchy Riemann son necesarias para la derivabilidad, pero no son suficientes. Las partes real e imaginaria de una función compleja pueden cumplir esta condición, pero aún así la función puede no ser derivable. El siguiente teorema nos da condiciones para que una función sea derivable.

*Teorema 5.1.* Sean  $u, v$  definidas en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^2$ , tales que existen sus derivadas parciales en  $D$  y son continuas en  $(x_0, y_0)$ . Si además  $u$  y  $v$  cumplen las condiciones de Cauchy Riemann en  $(x_0, y_0)$ , entonces la función

$$f(z) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

es derivable en  $z_0 = (x_0, y_0)$ .

*Observación 5.3.* Hemos visto que si  $f$  es derivable en  $z_0$  se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en  $(x_0, y_0) = z_0$ . Este teorema nos dice que si se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en  $(x_0, y_0) = z_0$ , y además las funciones  $u_x, v_x, u_y, v_y$  son continuas, entonces  $f$  es derivable en  $z_0$ .

El siguiente ejemplo muestra que si sólo se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en  $(x_0, y_0) = z_0$  (pero las derivadas parciales no son continuas), la función  $f(z)$  puede no ser derivable en este punto.

*Ejemplo 5.4.* Consideremos la siguiente función:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Entonces,  $f(x)$  no es derivable.

En primer lugar, escribamos  $f(z)$  como  $u(x, y) + iv(x, y)$ . Tenemos

$$\frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{(x - iy)^2}{x + iy},$$

y racionalizando,

$$\frac{(x - iy)^2 (x - iy)}{x + iy (x - iy)} = \frac{(x - iy)^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^3 - 3ix^2y - 3xy^2 + iy^3}{x^2 + y^2}$$

con lo cual nos queda:

$$\frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + i \frac{-3x^2y + y^3}{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$$

para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , y como  $f(0) = 0$ , tenemos  $u(0, 0) = 0, v(0, 0) = 0$ .

Calculemos por definición las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  en  $(0, 0)$ :

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3/h^2 - 0}{h} = 1$$

$$v_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0, h) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3/h^2 - 0}{h} = 1$$

$$v_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(h, 0) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$u_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

vemos que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} u_x(0, 0) &= v_y(0, 0) \\ v_x(0, 0) &= -u_y(0, 0) \end{aligned}$$

Ahora, si calculamos  $u_x$  en un punto arbitrario,

$$u_x = \left( \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \right)_x = \frac{(3x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - 3y^4}{(x^2 + y^2)^2},$$

y tenemos que  $u_x$  no es continua en  $(0, 0)$ , ya que si calculamos el límite por el eje  $y$ , vemos que

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} u_x(x, y) = \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-3y^4}{y^4} = -3.$$

Veamos ahora que no existe la derivada de  $f$  en  $z = 0$ :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2/z - 0}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(x - iy)^2}{(x + iy)^2}$$

Si tomamos  $z = x + 0i$ , tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

en cambio, por  $z = x + ix$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - ix)^2}{(x + ix)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - i)^2}{x^2(1 + i)^2} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)^2} = -1.$$

*Ejercicio 5.4.* Probar que  $f'(z)$  y  $f''(z)$  existen en todos los puntos, y calcularlas, en los siguientes casos

$$\text{a) } f(z) = iz + 2 \quad \text{b) } f(z) = e^{-x} e^{-iy} \quad \text{c) } f(z) = z^3$$

*Ejercicio 5.5.* Para las siguientes funciones, decidir donde existe  $f'(z)$  y hallar su valor.

$$\text{a) } f(z) = \frac{1}{z} \quad \text{b) } f(z) = x^2 + iy^2 \quad \text{c) } f(z) = z \operatorname{Im} z$$

## 6. Funciones holomorfas

Una clase importante de funciones complejas son aquellas que son derivables en todo un abierto  $D \in \mathbb{C}$ . A estas funciones se las llama holomorfas, y tienen propiedades muy importantes.

**Definición 6.0.1.** Sea  $D \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto. Diremos que  $f$  es **holomorfa** o **analítica** en  $D$  si  $f$  es derivable en todo  $z \in D$ .

Veamos algunos ejemplos de funciones holomorfas.

*Ejemplo 6.1.* La función  $f(z) = z^2$  es holomorfa, calculemos  $f'(z)$ .

Haciendo  $z = x + iy$  tenemos

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Separamos la parte real  $u$  y la imaginaria  $v$ ,

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned}$$

y derivamos para ver si se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u_x &= 2x & v_x &= 2y \\ u_y &= -2y & v_y &= 2x \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tenemos que  $f(z)$  es derivable para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Además, como las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  son continuas, la función  $f$  es analítica en  $\mathbb{C}$ .

Calculemos ahora  $f'(z)$ . Usando que  $f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$ ,

$$f'(x + iy) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

*Ejemplo 6.2.* La función  $f(z) = e^{2iz}$  es holomorfa. Calcular  $f'(z)$ .

Si hacemos  $z = x + iy$  nos queda

$$f(x + iy) = e^{2i(x+iy)} = e^{2xi-2y} = e^{2xi}e^{-2y} = e^{-2y}(\cos(2x) + i\sen(2x)).$$

Separamos la parte real  $u$  y la imaginaria  $v$ ,

$$\begin{aligned} u &= e^{-2y}\cos(2x) \\ v &= e^{-2y}\sen(2x) \end{aligned}$$

y derivamos para ver si se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u_x &= -2e^{-2y} \operatorname{sen}(2x) & v_x &= 2e^{-2y} \operatorname{cos}(2x) \\ u_y &= -2e^{-2y} \operatorname{cos}(2x) & v_y &= -2e^{-2y} \operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tenemos que  $f(z)$  es derivable para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Además, como las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  son continuas, la función  $f$  es analítica en  $\mathbb{C}$ .

Calculemos ahora  $f'(z)$ . Sabemos que  $f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$ , con lo cual

$$f'(x + iy) = -2e^{-2y} \operatorname{sen}(2x) + i2e^{-2y} \operatorname{cos}(2x)$$

Si sacamos  $2e^{-2y}$  de factor común, y multiplicamos por  $-i^2 = 1$ , nos queda

$$\begin{aligned} 2e^{-2y}(-i \cdot i)(-\operatorname{sen}(2x) + i\operatorname{cos}(2x)) \\ = 2ie^{-2y}[(-i)(-\operatorname{sen}(2x) + (-i)\operatorname{cos}(2x))] \\ = 2ie^{-2y}(i\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{cos}(2x)). \end{aligned}$$

Es decir,  $f'(z) = 2ie^{2iz}$ .

*Ejercicio 6.1.* Decidir si las siguientes funciones son analíticas en algún punto, y en ese caso hallar el dominio de analiticidad.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= 3x + y + i(3y - x) & \text{b) } f(z) &= \frac{2z + 1}{z(z^2 + 1)} \\ \text{c) } f(z) &= xy + iy & \text{d) } f(z) &= \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y + i \operatorname{cos} x \operatorname{sinh} y \\ \text{e) } f(z) &= (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy} & \text{f) } f(z) &= \frac{z^3 + i}{z^2 - 3z + 2} \end{aligned}$$

## 7. Reglas de derivación

Los ejemplos y los ejercicios anteriores nos sugieren que valen las reglas de derivación que ya conocíamos para funciones de una variable real. En efecto, tenemos las siguientes derivadas de algunas funciones básicas:

$$\begin{aligned} z^n &' = nz^{n-1} \\ e^z &' = e^z \\ \operatorname{cos}(z) &' = -\operatorname{sen}(z) \\ \operatorname{sen}(z) &' = \operatorname{cos}(z) \\ \operatorname{Log}(z) &' = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

También son válidas las reglas de derivación para la suma, resta, producto, producto por un escalar (complejo), cociente, y composición de funciones holomorfas:

*Proposición 7.1.* Si  $f, g$  son funciones holomorfas, entonces

$$\begin{aligned} (f + g)' &= f' + g' \\ (f - g)' &= f' - g' \\ (w \cdot f)' &= w \cdot f' && \text{si } w \in \mathbb{C} \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} && \text{si } g \neq 0 \end{aligned}$$

Además, se tiene la regla de la cadena en aquellos puntos donde la composición esté definida:

$$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

No es difícil demostrar estas reglas de derivación. Tampoco lo es comprobar las derivadas de las funciones anteriores, exceptuando una: la derivada del logaritmo complejo. Para esta función conviene introducir las ecuaciones de Cauchy Riemann en coordenadas polares.

*Proposición 7.2.* Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = u + iv$  derivable en  $z \in D$  abierto. Las ecuaciones de Cauchy Riemann en coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

vienen dadas por

$$\begin{aligned} ru_r &= v_\theta \\ -rv_r &= u_\theta \end{aligned}$$

*Demostración.* Utilizando la regla de la cadena,

$$u_r = u_x \cdot \frac{dx}{dr} + u_y \cdot \frac{dy}{dr} = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta)$$

$$v_r = v_x \cdot \frac{dx}{dr} + v_y \cdot \frac{dy}{dr} = v_x \cos(\theta) + v_y \sin(\theta)$$

$$u_\theta = u_x \cdot \frac{dx}{d\theta} + u_y \cdot \frac{dy}{d\theta} = -u_x r \sin(\theta) + u_y r \cos(\theta)$$

$$v_\theta = v_x \cdot \frac{dx}{d\theta} + v_y \cdot \frac{dy}{d\theta} = -v_x r \sin(\theta) + v_y r \cos(\theta)$$



Si multiplicamos por  $r$  a  $u_r$ , obtenemos

$$ru_r = u_x r \cos(\theta) + u_y r \sin(\theta),$$

y como  $f$  era derivable, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann, con lo cual podemos cambiar  $u_x$  por  $v_y$ , y también  $u_y$  por  $-v_x$ , obteniendo

$$ru_r = v_y r \cos(\theta) - v_x r \sin(\theta),$$

que coincide con  $v_\theta$ .

La otra ecuación es similar y la dejamos como ejercicio para el lector.  $\square$

Veamos ahora que el logaritmo complejo  $Log(z) = \ln|z| + iArg(z)$  es derivable en  $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_{\leq 0}\}$ .

Para esto utilizaremos las coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Entonces,

$$Log(r, \theta) = \ln r + i\theta,$$

con lo cual

$$u(r, \theta) = \ln r, \quad v(r, \theta) = \theta$$

Derivando,

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r}, & v_r &= 0 \\ u_\theta &= 0, & v_\theta &= 1 \end{aligned}$$

y claramente se verifican las condiciones de Cauchy Riemann

$$u_\theta = -rv_r \quad v_\theta = ru_r$$

Por otra parte, como las funciones  $u_\theta, v_r, v_\theta$ , y  $u_r$  son continuas en

$$\{(r, \theta) : r > 0, -\pi < \theta < \pi\} = \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_{\leq 0}\}$$

tenemos que  $log(z)$  es derivable y también es analítica.

*Ejercicio 7.1.* Probar que la función  $Log(z - i)$  es holomorfa en todo el plano salvo sobre la semirrecta  $y = 1, x \leq 0$ .

*Ejercicio 7.2.* Hallar el dominio de holomorfa de la función

$$\frac{Log(z + 4)}{z^2 + i}$$

*Ejercicio 7.3.* La función  $g(z) = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$  con  $r > 0, -\pi < \theta < \pi$  es analítica en dicho dominio. Probar que la función compuesta  $g(z^2 + 1)$  es analítica en el cuadrante  $x > 0, y > 0$ .

Probar que la función  $g(z) = \log r + i\theta$  es analítica en el dominio  $r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Aquí  $r = |z|$  y  $\theta = \arg z$ . Probar que  $g'(z) = \frac{1}{z}$  en dicho dominio. Finalmente probar que la función compuesta  $g(2z - 2 + i)$  es analítica en el dominio  $x > 1$ .

## 8. Funciones armónicas

**Definición 8.0.2.** Una función  $u$  dos veces derivable se dice **armónica** en  $D \subset \mathbb{R}^2$  si

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

El operador Laplaciano  $\Delta$  se puede escribir en derivadas parciales como:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

La siguiente proposición nos dice que la parte real  $u$  y la parte imaginaria  $v$  de una función holomorfa  $f$  son funciones armónicas. Su demostración es directa a partir de las ecuaciones de Cauchy Riemann, y se utiliza una propiedad muy fuerte de las funciones holomorfas, y es que si  $f$  es holomorfa entonces  $u$  y  $v$  son derivables infinitas veces. Este resultado se demostrará más adelante.

*Proposición 8.1.* Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa,  $f = u + iv$ , y  $D$  un abierto conexo. Entonces,  $u$  y  $v$  son funciones armónicas.

*Demostración.* Observemos que

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x$$

porque se satisface Cauchy Riemann. Ahora, si  $u$  es  $C^2$  las derivadas parciales conmutan y tenemos

$$(v_y)_x = v_{yx} = (v_x)_y.$$

Nuevamente usamos la condición de Cauchy Riemann, y

$$(v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy}$$

Luego,

$$u_{xx} = -u_{yy}$$

o, lo que es lo mismo,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Queda como ejercicio comprobar que la parte imaginaria de una función holomorfa también es armónica.  $\square$

Los siguientes ejercicios se resuelven fácilmente aplicando la proposición anterior.

*Ejercicio 8.1.* Verificar que  $\text{Log}(x^2 + y^2)$  es armónica en todo dominio que no contenga al origen.

*Ejercicio 8.2.* Escribir  $\text{Re}(e^{\frac{1}{z}})$  en términos de  $x$  e  $y$ . ¿Por qué esta función es armónica en todo dominio que no contenga al origen?



# Capítulo 11

## Integración

### 1. Integración en el plano complejo

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subset \mathbb{C}$  abierto. Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  una curva en  $D$ . Nuestro objetivo será definir la integral de  $f$  a lo largo de esta curva,

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

El primer paso será ver cómo integrar una curva compleja, y luego extenderemos estas ideas para calcular la integral de una función compleja sobre una curva, lo cual no difiere mucho de las integrales de línea en  $\mathbb{R}^2$ .

#### 1.1. Integrales de curvas

**Definición 1.1.1.** Sea  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$  una curva en el plano complejo. Definimos la integral de la curva  $\varphi$  como

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi_1(t) dt + i \int_a^b \varphi_2(t) dt.$$

*Observación 1.1.* Podemos ver que se trata de dos integrales reales, que se calculan como integrales de funciones reales usuales.

*Observación 1.2.* Observemos, también, que la parte real de la integral es la integral de la parte real de la curva.

*Ejemplo 1.1.* Calcular la integral de  $\varphi(t) = t + it^2$ , con  $t \in [0, 1]$ .

Escribimos la integral y calculamos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t + it^2) dt &= \int_0^1 t dt + i \int_0^1 t^2 dt \\ &= \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + i \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + i \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La integral tiene propiedades de linealidad similares a las que vimos para funciones reales.

*Teorema 1.1.* Sea  $\varphi(t), \psi(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $r, s \in \mathbb{C}$ . Entonces,

$$\int_a^b r \cdot \varphi(t) + s \cdot \psi(t) dt = r \int_a^b \varphi(t) + s \int_a^b \psi(t) dt.$$

Omitiremos la demostración, que es una consecuencia directa de la linealidad de la integral para funciones reales.

*Teorema 1.2.* Si  $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ ,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es derivable,  $\varphi'(t) = \varphi'_1(t) + i\varphi'_2(t)$ , entonces

$$\int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Aquí, la demostración se obtiene separando la integral de  $\varphi$  en dos integrales reales y aplicando luego la Regla de Barrow.

*Teorema 1.3.* Sea  $\varphi(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

*Demostración.* Para demostrar esta desigualdad, observemos primero que si  $\int_a^b \varphi(t) dt = 0$ , la desigualdad vale directamente ya que el lado izquierdo de la desigualdad es cero.

Supongamos entonces que  $\int_a^b \varphi(t) dt \neq 0$ , y definamos

$$w = \frac{\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right|}{\int_a^b |\varphi(t)| dt},$$

con lo cual  $w \in \mathbb{C}$  satisface  $|w| = 1$ , ya que despejando tenemos

$$w \int_a^b \varphi(t) dt = \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right|,$$

y tomando módulo de ambos lados,

$$|w| \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| = \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right|,$$

y cancelando nos queda  $|w| = 1$ .

Ahora,

$$\int_a^b w \cdot \varphi(t) dt = w \int_a^b \varphi(t) dt = \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right|,$$

y es un número real y positivo, con lo cual coincide

$$\int_a^b w \cdot \varphi(t) dt = \operatorname{Re} \left( \int_a^b w \cdot \varphi(t) dt \right).$$

Por la definición de la integral, la parte real de la integral es la integral de la parte real de la función (ver Observación 1.2), con lo cual nos queda

$$\operatorname{Re} \left( \int_a^b w \cdot \varphi(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (w \cdot \varphi(t)) dt.$$

Pero ahora, como  $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ , y usando la propiedad de monotonía de las integrales reales (si  $f \leq g$  en  $[a, b]$ , entonces  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ ), obtenemos

$$\int_a^b \operatorname{Re} (w \cdot \varphi(t)) dt \leq \int_a^b |w \cdot \varphi(t)| dt = \int_a^b |w| \cdot |\varphi(t)| dt,$$

pero usando que  $|w| = 1$ , esta última integral es

$$\int_a^b |\varphi(t)| dt,$$

y hemos demostrado entonces que

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| = \int_a^b w \cdot \varphi(t) dt \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

□

Una curva compleja puede pensarse como una curva en el plano  $\mathbb{R}^2$ . En ambos casos, la longitud debería coincidir. Ese es el resultado de la siguiente proposición.

*Proposición 1.1.* Dada una curva  $(x(t), y(t))$  del plano definida para  $t \in [a, b]$ , definimos la curva compleja

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t),$$

y su longitud coincide con

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

De esta manera, recuperamos la fórmula para calcular la longitud de una curva que conocíamos.

## 1.2. Integrales curvilíneas

Ahora sí estamos en condiciones de definir la integral de una función compleja sobre una curva.

**Definición 1.2.1.** Sea  $D$  un abierto conexo en  $\mathbb{C}$ , y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva contenida en  $D$ , y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Definimos la integral de  $f$  en  $\gamma$  como

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

*Observación 1.3.* Observemos que  $f(\gamma(t))$  y  $\gamma'(t)$  son números complejos. Podemos considerar  $f(\gamma(t))\gamma'(t)$  como una función de la variable real  $t$  que toma valores complejos, y entonces la integramos como vimos antes.

Veamos algunos ejemplos:

*Ejemplo 1.2.* Integrar  $f(z) = e^z$ , donde  $\gamma$  es el segmento entre  $z_0 = 0$  y  $z_1 = i\pi$ .

En general, el segmento que conecta  $z_0$  y  $z_1$  se puede escribir como

$$\gamma(t) = (z_1 - z_0)t + z_0, \quad t \in [0, 1]$$

En este caso, nos queda  $\gamma(t) = (i\pi - 0)t + 0 = i\pi t$ , cuya derivada es  $\gamma'(t) = i\pi$  y la integral a calcular es

$$\int_{\gamma(t)} e^z dz = \int_0^1 e^{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^1 e^{i\pi t} i\pi dt = \int_0^1 i\pi (\cos(\pi t) + i \text{sen}(\pi t)) dt.$$

Utilizando las propiedades,

$$\int_{\gamma(t)} e^z dz = i\pi \left[ \int_0^1 \cos(\pi t) dt + i \int_0^1 \text{sen}(\pi t) dt \right]$$



$$\begin{aligned}
 &= i\pi \left[ \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi} \Big|_0^1 + i \frac{-\operatorname{cos}(\pi t)}{\pi} \Big|_0^1 \right] \\
 &= i\pi \cdot i \left[ \frac{-\operatorname{cos}(\pi)}{\pi} - \frac{-\operatorname{cos}(0)}{\pi} \right] \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

*Ejemplo 1.3.* Integrar  $f(z) = |z|^2$ , donde  $\gamma$  es el arco de círculo centrado en  $z = 0$  de radio  $r = 2$  que pertenece al semiplano  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ , recorrido en sentido antihorario.

Podemos parametrizar la curva como  $\gamma(t) = 2\cos(t) + i2\operatorname{sen}(t)$ , con  $t \in [0, \pi]$ , con lo cual  $\gamma'(t) = -2\operatorname{sen}(t) + i2\operatorname{cos}(t)$ . Ahora,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{\pi} |2\cos(t) + i2\operatorname{sen}(t)|^2 \cdot (-2\operatorname{sen}(t) + i2\operatorname{cos}(t)) dt$$

Como  $\operatorname{cos}^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , nos queda

$$8 \int_0^{\pi} -\operatorname{sen}(t) + i\operatorname{cos}(t) dt = -8 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t) dt + 8i \int_0^{\pi} \operatorname{cos}(t) dt$$

Integrando obtenemos

$$8\operatorname{cos}(t) \Big|_0^{\pi} + 8i\operatorname{sen}(t) \Big|_0^{\pi} = 8(-1 - 1) + 8i(0 - 0) = -16.$$

*Observación 1.4.* Podemos parametrizar también la curva  $\gamma$  de otra manera, como

$$\gamma(t) = 2e^{it},$$

queda como ejercicio ver que el resultado da igual.

*Ejercicio 1.1.* Para cada arco  $C$  y cada función  $f$ , hallar el valor de

$$\int_C f(z) dz.$$

1.  $f(z) = y - x - 3x^2i$ , y
  - a)  $C$  es el segmento de recta desde  $z = 0$  hasta  $z = 1 + i$ ;
  - b)  $C$  consiste en dos segmentos de recta, uno desde  $z = 0$  a  $z = i$  y otro desde  $z = i$  hasta  $z = 1 + i$ .

*Sol.* a)  $1 - i$ ; b)  $\frac{1-i}{2}$ .

2.  $f(z) = \frac{z+2}{z}$ , y

- a)  $C$  es el semicírculo  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ;
- b)  $C$  es el semicírculo  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ;
- c)  $C$  es el círculo  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;

*Sol.* a)  $-4 + 2\pi i$ ; b)  $4 + 2\pi i$ ; c)  $4\pi i$ .

3.  $f(z) = z - 1$ , y  $C$  es el arco que va desde  $z = 0$  a  $z = 2$  y está formado por:

- a) el semicírculo  $z = 1 + e^{i\theta}$ ,  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ;
- b) el segmento  $0 \leq x \leq 2$  del eje real.

*Sol.* a) 0; b) 0.

4.  $C$  es el arco de  $z = -1 - i$  a  $z = 1 + i$  sobre la curva  $y = x^3$ , mientras que

$$f(z) = \begin{cases} 4y & \text{para } y > 0 \\ 1 & \text{para } y < 0 \end{cases}$$

*Sol.*  $2 + 3i$ .

5.  $f(z) = e^z$  y  $C$  es el arco desde  $z = \pi i$  a  $z = 1$  formado por:

- a) el segmento de recta que une esos puntos;
- b) las partes de los ejes coordenados que unen esos puntos.

*Sol.* a) y b)  $1 + e$ .

*Ejercicio 1.2.* Sea  $C$  la frontera del cuadrado con vértices en los puntos  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = 1 + i$  y  $z = i$ .

1. Probar que, cualquiera sea la orientación de  $C$ , se tiene

$$\int_C (3z + 1) dz = 0.$$

2. Calcular

$$\int_C \pi \exp(\pi \bar{z}) dz.$$

*Sol.*  $4(e^\pi - 1)$ .

El siguiente ejemplo es particularmente importante, ya que esta integral es clave en el análisis complejo.

*Ejemplo 1.4.* Calculemos la integral

$$\int_C \frac{1}{z - z_0} dz$$

donde  $C$  es la circunferencia de radio  $r$  centrada en  $z_0$  recorrida en sentido antihorario.

Podemos parametrizar la circunferencia para  $0 \leq t \leq 2\pi$  como

$$\gamma(t) = r\cos(t) + i\sin(t) + z_0,$$

o también como

$$\gamma(t) = re^{it} + z_0.$$

En este caso utilizaremos la segunda, con lo cual tenemos

$$\gamma'(t) = ire^{it}.$$

Ahora,

$$\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it} + z_0 - z_0} ire^{it} dt$$

con lo cual nos queda

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = it \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

*Ejercicio 1.3.* Si  $C$  es la mitad superior del círculo  $|z| = 1$ , de  $z = -1$  a  $z = 1$ , calcular la integral

$$\int_C \bar{z} dz$$

usando dos parametrizaciones distintas de  $C$ .

*Sol.*  $-\pi i$ .

*Ejercicio 1.4.* Si  $C_0$  es el círculo  $|z - z_0| = R$  orientado positivamente, probar (calculando las integrales curvilíneas) que

$$\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

## 2. Integrales complejas y campos vectoriales

Vamos a reformular la integral de una función compleja como una integral de línea de campos vectoriales. Esto nos permitirá extender resultados que ya conocemos para integración de campos reales a funciones de variable compleja, y deducir algunas propiedades muy importantes del cálculo integral complejo.

## 2.1. Propiedades de la integral

*Proposición 2.1.* Sean  $\gamma_1, \gamma_2$  dos parametrizaciones de una misma trayectoria, es decir,  $\text{Imagen}(\gamma_1) = \text{Imagen}(\gamma_2)$ . Entonces:

- Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tienen el mismo sentido,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

- Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tienen sentidos opuestos,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = - \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

*Observación 2.1.* Estas propiedades son conocidas para integrales de campos reales sobre curvas. Luego, si podemos reformularlas de esa manera, no necesitamos demostrar esta Proposición.

Comencemos descomponiendo una función  $f(z)$  en su parte real e imaginaria, haciendo  $z = x + iy$ , con lo cual

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

y descompongamos la curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t),$$

con lo cual

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Tenemos entonces

$$f(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)),$$

y la integral se escribirá:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)]dt.$$

Distribuyendo, tras separar la parte real de la imaginaria queda:

$$\int_a^b [u(x, y)x'(t) - v(x, y)y'(t)]dt + i \int_a^b [v(x, y)x'(t) + u(x, y)y'(t)]dt$$

y podemos escribirlo utilizando los campos  $P = (u, -v)$ ,  $Q = (v, u)$  como

$$\int_{\gamma} P + i \int_{\gamma} Q.$$

Dado que la Proposición es cierta para las integrales reales  $\int_{\gamma} P$ ,  $\int_{\gamma} Q$ , lo es para la integral de la función compleja  $f$ .

*Observación 2.2.* Un resultado muy importante es el siguiente teorema, que nos ahorrará cuentas cuando podemos calcular una primitiva de la función que queremos integrar. Podemos considerarlo una generalización de la regla de Barrow para funciones complejas.

*Teorema 2.1.* Sea  $D \subset \mathbb{C}$  abierto,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en  $D$ , y  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  una curva continua que satisface  $\gamma(a) = z_0$ , y  $\gamma(b) = z_1$ . Entonces,

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(z_1) - f(z_0).$$

*Demostración.* Observemos primero que

$$f(\gamma(t))' = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Escribiendo  $f(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$ , si derivamos con respecto a  $t$  tenemos:

$$\begin{aligned} [u(x(t), y(t))]' &= (u_x, u_y) \cdot (x', y') \\ [v(x(t), y(t))]' &= (v_x, v_y) \cdot (x', y') \end{aligned}$$

con lo cual

$$f(\gamma(t))' = (u_x, u_y) \cdot (x', y') + i(v_x, v_y) \cdot (x', y')$$

y como  $f$  es holomorfa, se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann y podemos reemplazar  $u_y$  por  $-v_x$ , y  $v_y$  por  $u_x$ . Nos queda entonces

$$f(\gamma(t))' = (u_x, -v_x) \cdot (x', y') + i(v_x, u_x) \cdot (x', y').$$

Pero como vimos anteriormente, esta es la expresión que obtuvimos para  $f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$  utilizando los campos vectoriales.

Luego,

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b (f(\gamma(t)))' dt.$$

Ahora, utilizando las propiedades de la integral real,

$$\int_a^b (f(\gamma(t)))' dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(z_1) - f(z_0).$$

□

*Ejemplo 2.1.* Calcular  $f(z) = e^z$  donde  $\gamma$  una curva que une  $z_0 = -i\pi$  con  $z_1 = i\pi$ .

Como  $f'(z) = e^z$ , tenemos que

$$\int_{\gamma} e^z dz = e^z \Big|_{-i\pi}^{i\pi} = [\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)] - i[\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)] = -1 + i$$

*Observación 2.3.* Observemos que sólo hemos indicado los extremos de la curva. Aquí,  $\gamma$  podría ser el semicírculo que conecta estos puntos centrado en  $z = 0$ , o el segmento vertical que los une, o cualquier otra curva.

*Corolario 2.1.* Sea  $\gamma$  una curva cerrada en  $D$ , y  $f$  holomorfa en  $D$ . Entonces,

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = 0.$$

*Ejercicio 2.1.* Calcular las siguientes integrales, en las que el camino es un contorno arbitrario entre los límites de integración.

$$\text{a) } \int_i^{\frac{i}{2}} e^{\pi z} dz; \quad \text{b) } \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz; \quad \text{c) } \int_1^3 (z-2)^3 dz; \quad \text{d) } \int_{z_1}^{z_2} z^n dz$$

$$\text{Sol. a) } \frac{1+i}{\pi}; \quad \text{b) } e + \frac{1}{e}; \quad \text{c) } 0; \quad \text{d) } \frac{1}{n+1} (z_2^{n+1} - z_1^{n+1}).$$

*Ejercicio 2.2.* Demostrar que

$$\int_{z_1}^{z_2} dz = z_2 - z_1, \quad \int_{z_1}^{z_2} z dz = \frac{1}{2} (z_2^2 - z_1^2),$$

independientemente del camino regular desde  $z = z_1$  hasta  $z = z_2$ .

*Observación 2.4.* Vimos en el Ejemplo 1.4 que si  $C$  es el círculo centrado en el origen de radio  $r = 1$ , tenemos

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Como  $1/z$  es la derivada de  $\log(z)$ , podríamos pensar que

$$\int_C \log'(z) dz = 2\pi i$$

contradice el corolario, pero si recordamos que  $\log(z)$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_{\leq 0}\}$  vemos que no lo contradice, ya que  $f$  no es holomorfa en todo  $D$ .

*Ejercicio 2.3.* a) Usando el valor principal del logaritmo como una primitiva de  $\frac{1}{z}$ , probar que

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = \pi i$$

cuando el camino de integración es la mitad derecha del círculo  $|z| = 2$ .

- b) Calcular la integral  $\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z}$ , siendo ahora el camino de integración la mitad izquierda del círculo  $|z| = 2$ . *Sugerencia.* Usar otra determinación del logaritmo. También podría hacerse directamente, es decir parametrizando el contorno, pero es relativamente más trabajoso.
- c) Calcular  $\int_C \frac{dz}{z}$  siendo  $C$  el círculo  $|z| = 2$  orientado en sentido antihorario.

### 3. Acotación de integrales

Nuestro próximo resultado será de utilidad para demostrar las llamadas fórmulas integrales de Cauchy, que ocupan una posición central en el análisis complejo. Además, serán indispensables en la última parte del libro, cuando calculemos integrales reales.

*Proposición 3.1.* Sea  $D \subset \mathbb{C}$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Sea  $\gamma \subset D$  y

$$M = \max\{|f(\gamma(t))| : t \in [a, b]\}.$$

Entonces,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \text{long}(\gamma).$$

*Demostración.* Recordemos que el módulo de la integral es menor que la integral del módulo, con lo cual

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt.$$

Ahora, acotamos  $|f(\gamma(t))|$  por  $M$ , el máximo valor que pueda tomar:

$$\int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot \text{long}(\gamma)$$

y la última igualdad se tiene por la definición de longitud de curva. □

*Ejemplo 3.1.* Acotar  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$  sobre la curva que une los puntos  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 2+2i$  con la parametrización  $\gamma(t) = t + it$ ,  $0 \leq t \leq 2$ .

Según vimos,  $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq M \cdot \text{long}(\gamma)$ . Necesitamos entonces calcular  $M$  y la longitud de la curva.

Ahora,

$$M = \max_{|z \in \gamma|} \{|\bar{z}|\} = \max_{t \in [0,2]} \{t - it\} = \max_{t \in [0,2]} \{\sqrt{2t^2}\} = \sqrt{8}.$$

Nos falta calcular la longitud de la curva. Pero

$$\text{long}(\gamma) = \int_0^2 |\gamma'(t)| dt = \int_0^2 |1 + i| dt = \sqrt{2} \int_0^2 dt = 2\sqrt{2}.$$

Luego,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{8} = 2\sqrt{16} = 8.$$

*Ejemplo 3.2.* Acotar la siguiente integral

$$\int_C \cos(z) dz$$

donde  $C$  es el segmento que une los puntos  $z_1 = 1$  y  $z_2 = 1 + 2i$ .

Para integrar, primero parametrizamos este segmento con  $t \in [0, 2]$  como  $c(t) = 1 + it$ . Aquí,  $c(0) = 1 = z_1$  y  $c(2) = 1 + 2i = z_2$

Recordemos que si  $|f(z)| \leq M$ , entonces

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_0^2 |f(c(t))| |c'(t)| dt \leq M \int_0^2 |c'(t)| dt = M \text{long}(c(t)).$$

En este caso, es fácil ver que la longitud de la curva  $\int_0^2 |c'(t)| dt$  es 2 sin necesidad de integrar.

Sin embargo, un error que hay que evitar es tomar  $M = 1$ . El módulo de  $f(t) = \cos(z)$  no está acotado por 1, ya que en variable compleja, el coseno no es acotado (y el seno tampoco). Debemos entonces calcular  $M$ . Observemos que

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

con lo cual, como  $c(t) = 1 + it$ , tenemos

$$f(c(t)) = \frac{e^{ic(t)} + e^{-ic(t)}}{2} = \frac{e^{i-t} + e^{-i+t}}{2}.$$



Luego,

$$f(c(t)) = \frac{1}{2}(e^i e^{-t} + e^{-i} e^t).$$

Tomando módulo, y utilizando las propiedades del módulo (desigualdad triangular, y módulo de un producto) tenemos

$$|f(c(t))| \leq \frac{1}{2}|e^i e^{-t} + e^{-i} e^t| \leq \frac{1}{2}(|e^i e^{-t}| + |e^{-i} e^t|) \leq \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t),$$

ya que  $|e^i| = |e^{-i}| = 1$ .

Entonces, para acotar  $|f(t)|$  debemos acotar  $e^{-t}$  y  $e^t$ .

Como  $t \in [0, 2]$  podemos acotar  $e^{-t} \leq e^0 = 1$  (ya que  $e^{-x}$  es una función decreciente) y acotamos  $e^t \leq e^2$  ( $e^x$  es una función creciente).

Esto nos da

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2}(1 + e^2),$$

y este es el  $M$  que estamos buscando.

En definitiva,

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \text{long}(c(t)) = \frac{1}{2}(1 + e^2)2 = 1 + e^2.$$

*Ejemplo 3.3.* Acotar

$$\left| \int_{\gamma} \frac{z+1}{z^2+1} dz \right|,$$

donde  $\gamma$  es el segmento de recta que conecta el punto  $z_0 = 3$  con  $z_1 = 3 + 4i$ .

Este tiene una dificultad adicional, y es que si bien podemos acotar el numerador utilizando la desigualdad triangular, para acotar el denominador necesitaremos la desigualdad vista en la primer sección,  $|z+w| \leq |z| + |w|$ .

$$M = \max_{z \in \gamma} \frac{|z+1|}{|z^2+1|} \leq \max_{z \in \gamma} \frac{|z|+1}{|z|^2-1} \leq \frac{|3+4i|+1}{|3|^2-1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Calculamos ahora la longitud de la curva. Sin necesidad de integrar, el segmento que une  $z_0 = 3$  con  $z_1 = 3 + 4i$  tiene longitud 4, con lo que tenemos

$$\left| \int_{\gamma} \frac{z+1}{z^2+1} dz \right| \leq \frac{3}{4} \cdot 4 = 3.$$

*Ejercicio 3.1.* Sea  $C$  la frontera del círculo  $|z| = 2$  de  $z = 2$  a  $z = 2i$  que queda en el primer cuadrante. Sin calcular la integral, probar que

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2-1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

*Ejercicio 3.2.* Probar que si  $C$  es la frontera del triángulo con vértices en los puntos  $z = 0$ ,  $z = 3i$ , y  $z = -4$ , orientado en sentido antihorario, entonces:

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 60.$$

# Capítulo 12

## El Teorema de Cauchy

### 1. Teorema de Cauchy

Nuestro próximo objetivo es demostrar el Teorema de Cauchy, seguramente el más importante del análisis complejo. En primer lugar, recordemos brevemente el teorema de Green y un resultado sobre campos conservativos.

#### 1.1. Campos conservativos

Sean  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , y una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\gamma(a) = (x_0, y_0), \quad \gamma(b) = (x_1, y_1).$$

Recordemos que un campo  $(P, Q) \in C^1(D)$  se dice **conservativo** si la integral  $\int_{\gamma} (P, Q)$  depende sólo de los extremos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$  de  $\gamma$  y no de la curva que los conecta.

Equivalentemente,  $(P, Q)$  es un campo conservativo si es el gradiente de un potencial, es decir, existe  $f$  tal que  $\nabla f = (f_x, f_y) = (P, Q)$ .

*Teorema 1.1 (Green).* Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un abierto simplemente conexo,  $\gamma \subset D$  una curva cerrada recorrida en sentido antihorario, y  $A$  su interior. Dados  $P, Q$  dos campos diferenciables con continuidad en  $D$  tenemos:

$$\int_{\gamma} (P, Q) = \int \int_A Q_x - P_y dx dy.$$

La importancia de este Teorema viene del capítulo anterior. Cuando definimos la integral de una función compleja  $f$  en  $\gamma$ , vimos que era equivalente a integrar ciertos campos,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u, -v) + i \int_{\gamma} (v, u)$$

donde  $f = u + iv$ . El camino que seguiremos para demostrar el teorema de Cauchy será ver que estos campos son conservativos. De hecho, esta fue la demostración original de Cauchy, si bien en la actualidad se prefiere la demostración de Goursat y por ese motivo se lo suele llamar también Teorema de Cauchy-Goursat.

Vamos a necesitar el siguiente Lema, que enunciaremos sin demostración:

*Lema 1.1.* Si  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa, entonces  $f \in C^2(D)$ .

En realidad, vale aún un resultado más fuerte, ya que las funciones holomorfas tienen derivadas de cualquier orden.

## 1.2. Teorema de Cauchy

*Teorema 1.2 (Cauchy).* Sea  $D$  un abierto simplemente conexo,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en todo  $D$ . Entonces, para toda  $\gamma \subset D$ , curva continua cerrada, se tiene

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

*Demostración.* Utilizaremos los campos  $P = (u, -v)$ ,  $Q = (v, u)$  donde  $u$  y  $v$  son la parte real e imaginaria de  $f$  respectivamente. Tenemos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (u, -v) + i \int_{\gamma} (v, u),$$

y la demostración del teorema se reduce a ver que ambas integrales se anulan.

Por el Teorema de Green,

$$\int_{\gamma} (u, -v) = \int_A (-v_x - u_y) dx dy$$

$$\int_{\gamma} (v, u) = \int_A (u_x - v_y) dx dy$$

donde  $A$  es el interior de la curva, pero por las condiciones de Cauchy Riemann,

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} -v_x - u_y &= 0 \\ u_x - v_y &= 0 \end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado. □

*Ejemplo 1.1.* Calcular la integral  $\int_C z dz$ , donde  $C$  es la circunferencia  $|z - 1| = 1$ .

Esta curva podemos escribirla como

$$c(t) = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t) + 1,$$

o mejor, utilizando la exponencial compleja,

$$c(t) = 1 + e^{it}, \quad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c(t) \cdot c'(t) dt &= \int_0^{2\pi} (1 + e^{it}) i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i e^{it} + i e^{2it} dt \\ &= e^{it} + \frac{1}{2} e^{2it} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observemos que todas estas cuentas eran innecesarias si usamos el teorema de Cauchy: como  $f(z)$  es holomorfa en el interior de  $C$ , la integral debe ser nula.

*Ejercicio 1.1.* Hallar el dominio de analiticidad de la función  $f$  y aplicar el teorema de Cauchy para probar que  $\int_C f(z) dz = 0$  cuando el contorno cerrado  $C$  es el círculo  $|z| = 1$  y cuando:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(z) = \frac{z^2}{z-3}; & \text{b) } f(z) = z e^{-z}; & \text{c) } f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}; \\ \text{d) } f(z) = \frac{1}{\cosh z}; & \text{e) } f(z) = \operatorname{tanz}; & \text{f) } f(z) = \operatorname{Log}(z+2). \end{array}$$

*Ejercicio 1.2.* Denotemos por  $B$  la frontera del dominio entre el círculo  $|z| = 4$  y el cuadrado cuyos lados están sobre las rectas  $x = \pm 1, y = \pm 1$ . Suponiendo que  $B$  está orientado de modo que los puntos del dominio quedan a la izquierda de  $B$ , decir por qué  $\int_B f(z) dz = 0$  cuando:

$$\text{a) } f(z) = \frac{1}{3z^2 + 1}; \quad \text{b) } f(z) = \frac{z+2}{\operatorname{sen}(\frac{z}{2})}; \quad \text{c) } f(z) = \frac{z}{1-e^z}.$$

## 2. Funciones holomorfas

El Teorema de Cauchy nos permite demostrar propiedades muy importantes de las funciones holomorfas. En esta sección veremos además el recíproco del Teorema de Cauchy, que nos dice que si la integral de una función sobre toda curva cerrada es nula, entonces la función es holomorfa.

El siguiente resultado nos dice que si una función  $f$  tiene una primitiva, entonces es holomorfa.

*Proposición 2.1.* Sea  $D \subset \mathbb{C}$  abierto,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f = u + iv$  y  $u, v \in C^1(D)$ . Si existe  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F'(z) = f(z)$ , entonces la función  $f$  es holomorfa en  $D$ .

*Demostración.* Sea  $F$  una primitiva de  $f$ ,  $F' = f$ .

Separando parte real e imaginaria de  $F$ , tenemos

$$F(z) = F(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y),$$

con lo cual

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = U_x(x, y) + iV_x(x, y) \quad (2.1)$$

y también

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = V_y(x, y) - iU_y(x, y). \quad (2.2)$$

Por el lema previo al teorema de Cauchy, sabemos que  $U, V \in C^2(D)$ . Esto nos dice que  $u, v \in C^1(D)$ . Veamos ahora que  $u$  y  $v$  satisfacen las condiciones de Cauchy Riemann.

Tenemos que por la ecuación (2.2),  $u = V_y$ , y derivando en  $x$ ,

$$u_x = (V_y)_x = V_{xy}$$

A su vez, por la ecuación (2.1) tenemos  $v = V_x$ , y derivando en  $y$ ,

$$v_y = (V_x)_y = V_{xy}.$$

Esto nos dice que  $u_x = v_y$ . Veamos que se cumple también la otra condición.

Tenemos que, por la ecuación (2.2),  $v = -U_y$ , y derivando en  $x$ ,

$$v_x = -(U_y)_x = -U_{xy}$$

A su vez, por la ecuación (2.1) tenemos  $u = U_x$ , y derivando en  $y$ ,

$$u_y = (U_x)_y = U_{xy},$$

con lo cual  $v_x = -u_y$ .

Como  $u, v \in C^1(D)$  y satisfacen las condiciones de Cauchy Riemann,  $f$  es holomorfa en  $D$ .  $\square$

*Corolario 2.1.* Si  $F$  es holomorfa en  $D$ , entonces su derivada  $F'$  también es holomorfa en  $D$ .

*Demostración.* Si llamamos  $f$  a  $F'$ , vemos que cumple las condiciones de la proposición anterior, ya que  $f \in C^1(D)$ , pues

$$u = U_x, \quad v = V_x,$$

y habíamos visto que si  $F$  era holomorfa en  $D$ , entonces  $F \in C^2(D)$ , con lo cual  $U, V \in C^2(D)$ , y sus derivadas parciales respecto a  $x$   $U_x, V_x \in C^1(D)$ .

Además,  $f = F'$ , tiene primitiva (la función  $F$ ).

Luego, como  $f$  cumple ambas condiciones,  $f = F'$  es holomorfa.  $\square$

*Observación 2.1.* Este argumento se puede aplicar a las derivadas sucesivas de  $f$ , y obtener mayor regularidad. Sabemos que una función holomorfa  $f$  es  $C^2$  en  $D$ , y que su derivada es holomorfa. Como la derivada  $f'$  es holomorfa, es  $C^2$ , y esto nos dice que la función  $f$  es en realidad  $C^3$ . Repitiendo el argumento ( $f'$  es  $C^3$  por ser holomorfa, entonces  $f$  es  $C^4$ , etc.), vemos entonces que  $f \in C^\infty(D)$ .

Un resultado más fuerte es que  $f$  es *analítica*, esto es que puede representarse como una serie de potencias.

Veamos ahora que vale la recíproca del teorema de Cauchy.

*Teorema 2.1 (Morera).* Sea  $D$  abierto y conexo,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  continua tal que para toda curva cerrada  $\gamma \subset D$  se tiene

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Entonces,  $f$  es holomorfa en  $D$ .

*Demostración.* Observemos primero que si

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva cerrada, entonces la integral entre dos puntos no depende de la curva que los una.

Veamos entonces que  $f \in C^1(D)$ , y que tiene una primitiva  $F$ .

Fijamos un punto  $z_0$ , y para cada  $z \in D$  definimos

$$F(z) = \int_{\gamma} f(z) dz$$

donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  satisface  $\gamma(a) = z_0$ ,  $\gamma(b) = z$ , y esta integral no depende del camino elegido.

Escribimos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u, -v) + i \int_{\gamma} (v, u),$$

y los campos  $(u, -v)$ ,  $(v, u)$  son conservativos, ya que la integral no dependía del camino.

Entonces, existen funciones potenciales  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$  tales que

$$(u, -v) = \nabla U \quad (v, u) = \nabla V.$$

Veamos que la función  $F(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$  es holomorfa y que su derivada es  $f$ .

Como  $\nabla U = (u, -v)$ ,  $\nabla V = (v, u)$  tenemos

$$\begin{aligned} U_x &= u \\ U_y &= -v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_x &= v \\ V_y &= u \end{aligned}$$

de donde podemos comprobar fácilmente que

$$\begin{aligned} U_x &= V_y \\ U_y &= -V_x \end{aligned}$$

lo cual nos dice que es holomorfa.

Además,  $F' = U_x + iV_x = u + iv = f$ , con lo que hemos demostrado que la derivada de  $F$  es  $f$ . □

*Observación 2.2.* Un resumen de lo visto hasta ahora es el siguiente:

Si  $D \subset \mathbb{C}$  es un abierto conexo, son equivalentes:

1.  $f$  es holomorfa en  $D$
2.  $f$  tiene primitiva en  $D$



3. Si  $D$  es simplemente conexo, y  $\gamma \subset D$  cerrada se tiene

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

4. Si  $D$  es simplemente conexo, y  $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$  dos curvas que conectan los puntos  $z_1$  y  $z_2$ , tenemos

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

### 3. Fórmulas de Cauchy

En esta sección veremos una generalización del Teorema de Cauchy, las llamadas fórmulas de Cauchy. Necesitamos la siguiente definición:

**Definición 3.0.1.** Diremos que una curva cerrada  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  es simple si  $\gamma$  es inyectiva en  $[a, b)$ .

Esta definición nos dice que una curva es simple si no se corta a sí misma. Notemos que se ha excluido el punto  $b$  de la condición de inyectividad porque  $\gamma(a) = \gamma(b)$  al ser cerrada.

*Teorema 3.1* (Fórmulas de Cauchy). Sea  $D \subset \mathbb{C}$  abierto simplemente conexo,  $f$  holomorfa en  $D$ , y sea  $\gamma$  una curva cerrada simple recorrida en sentido antihorario. Si  $z_0$  está en el interior de  $\gamma$ ,

1.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} dw$$

2.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

*Demostración.* Veamos la demostración de la primera fórmula de Cauchy.

En primer lugar, trazamos una circunferencia  $C_r$  centrada en  $z_0$  de radio  $r$  suficientemente pequeño como para que la curva  $\gamma$  quede en su exterior. Esto es posible eligiendo

$$r < \text{dist}(\gamma, z_0).$$

El paso siguiente es mostrar que es igual integrar sobre  $C_r$  que sobre  $\gamma$

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

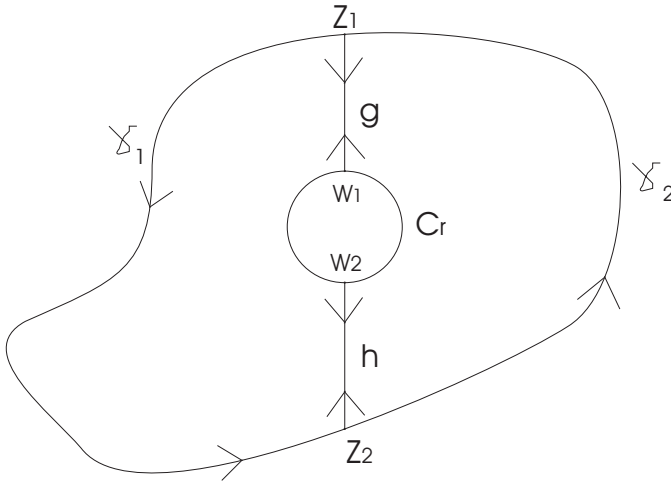


Figura 12.1: Curvas para la primera fórmula de Cauchy

Para esto, nos va a convenir fijar ideas con la figura 12.1. En el dominio  $D$  tenemos la curva  $\gamma$ , y la circunferencia  $C_r$ . Agregamos dos curvas conectando  $C_r$  y  $\gamma$ , una curva  $g$  y una curva  $h$ .

Llamemos  $\gamma_1$  a la curva que forman  $\gamma$  desde los puntos  $z_1$  hasta  $z_2$  recorrida en ese sentido, luego  $h$  de  $z_2$  a  $w_2$ , ahora  $C_r$  desde  $w_2$  a  $w_1$  (recorriendo el círculo en sentido horario) y finalmente  $g$  de  $w_1$  a  $z_1$ . Como  $f$  es holomorfa en el interior de  $\gamma_1$ , su integral es nula.

De la misma manera, recorriendo en sentido contrario las curvas  $h$  y  $g$ , y recorriendo  $\gamma$  desde  $z_2$  hasta  $z_1$ ,  $C_r$  desde  $w_1$  a  $w_2$  (en sentido antihorario), tenemos una nueva curva  $\gamma_2$ , y la integral de  $f$  se anula ya que es holomorfa en su interior.

Ahora,

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z_0} dw + \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = 0,$$

pero descomponiendo  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  nos queda

$$\left( \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} dw + \int_g \frac{f(w)}{w - z_0} dw + \int_h \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right) + \left( - \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw - \int_g \frac{f(w)}{w - z_0} dw - \int_h \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right),$$

y tras cancelar las integrales sobre  $h$  y  $g$ , demostramos que

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

Para demostrar la primera fórmula escribimos

$$\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \left( 2\pi i f(z_0) - \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right) \right|$$

donde hemos cambiado la integral en  $\gamma$  por la integral en  $C_r$ . Además, podemos escribir esto último como

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{C_r} \frac{1}{w - z_0} f(z_0) dw - \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right) \right|$$

y agrupando ambas integrales,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \right| \left| \int_{C_r} \frac{f(z_0) - f(w)}{w - z_0} dw \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_r} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} dw \right|$$

donde hemos cambiado el signo del numerador, ya que el módulo no cambia.

Ahora, acotamos la integral utilizando

$$\frac{1}{2\pi} \max_{|w-z_0|=r} \left| \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} \right| \text{long}(C_r) = r \max_{|w-z_0|=r} \left| \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} \right| \text{long}(C_r)$$

ya que  $\text{long}(C_r) = 2\pi r$ . Por otra parte, como  $|w - z_0| = r$ , tenemos la cota

$$\begin{aligned} \left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right| &\leq \\ &\leq r \max_{|w-z_0|=r} \left| \frac{f(w) - f(z_0)}{r} \right| = \\ &= \max_{|w-z_0|=r} |f(w) - f(z_0)| \end{aligned}$$

Observemos que no hemos dicho nada del valor de  $r$  hasta el momento, con lo cual si lo hacemos tender a cero, como  $f$  es continua, tenemos que

$$0 \leq \left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right| \leq \max_{|w-z_0|=r} |f(w) - f(z_0)| \rightarrow 0,$$

lo cual demuestra la primera fórmula de Cauchy.

Demostremos la segunda fórmula. Como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Si derivamos esta expresión con respecto a  $z$ , nos queda

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw.$$

Repitiendo el proceso, obtenemos:

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw$$

y, como

$$\left( \frac{1}{(w-z)^n} \right)' = n \left( \frac{1}{(w-z)^{n+1}} \right),$$

se tiene

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

□

*Ejemplo 3.1.* Calcular la integral

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z^5} dz$$

donde  $\gamma$  es el rombo de vértices  $1, -i, -1, i$  recorridos en ese mismo orden.

Si llamamos  $z_0 = 0$  y  $f(z) = \cos(z)$ , podemos reescribir la integral como

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{4+1}} dz,$$

y utilizando la fórmula de Cauchy tenemos

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{(z-0)^{4+1}} dz = -\frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(0).$$

Como la derivada cuarta de  $\cos(z)$  es nuevamente  $\cos(z)$ , y  $\cos(0) = 1$ , nos queda

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z^5} dz = -\frac{\pi i}{12}.$$

*Ejercicio 3.1.* Calcular las integrales

$$\int_C \frac{dz}{z-2-i}, \quad \int_C (z-2-i)^{n-1} dz \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

cuando  $C$  es la frontera del rectángulo  $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$ , descrito en sentido antihorario.

*Ejercicio 3.2.* Denotemos por  $C$  la frontera del cuadrado cuyos lados están sobre las rectas  $x = \pm 2$  e  $y = \pm 2$ , donde  $C$  se recorre en sentido positivo. Calcular:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_C \frac{e^{-z} dz}{z - \frac{\pi i}{2}}; & \text{b) } & \int_C \frac{\cos z dz}{z^2 + 8}; & \text{c) } & \int_C \frac{z dz}{2z + 1}; \\ \text{d) } & \int_C \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) dz}{(z - x_0)^2} \quad (-2 \leq x_0 \leq 2); & \text{e) } & \int_C \frac{\cosh z dz}{z^4}; \end{aligned}$$

*Sol.* a)  $2\pi$ ; b)  $0$ ; c)  $-\frac{\pi i}{2}$ ; d)  $i\pi \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$ ; e)  $0$ .

*Ejemplo 3.2.* Calcular la integral

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z^2 - 1)^2} dz$$

donde  $\gamma$  es la circunferencia de radio 1 centrada en  $z = 1$ .

Comencemos separando  $(z^2 - 1)^2$  como  $(z - 1)^2(z + 1)^2$ . Podemos reescribir la integral como

$$\int_{\gamma} \frac{z/(z + 1)^2}{(z - 1)^2} dz$$

Utilizando la segunda fórmula de Cauchy, con  $n = 1$ ,

$$f'(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - 1)^{1+1}} dw,$$

donde  $f(z) = z/(z + 1)^2$ .

Calculemos la derivada:

$$f'(z) = \frac{(z + 1)^2 - 2z(z + 1)}{(z + 1)^4} = \frac{1 - z}{(z + 1)^3},$$

con lo cual

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z^2 - 1)^2} dz = 2\pi i \frac{1 - 1}{(1 + 1)^3} = 0.$$

*Ejercicio 3.3.* Hallar el valor de la integral de  $g(z)$  sobre el círculo  $|z - i| = 2$  con la orientación positiva, cuando:

$$\text{a) } g(z) = \frac{1}{z^2 + 4}; \quad \text{b) } \frac{1}{(z^2 + 4)^2}.$$

*Sol.* a)  $\frac{\pi}{2}$ ; b)  $\frac{\pi}{16}$ .

*Ejercicio 3.4.* Sea  $C$  un contorno simple cerrado recorrido con sentido positivo y definimos

$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3} ds$$

para cada  $z \in \mathbb{C}$ . Probar que  $g(z) = 6\pi iz$  cuando  $z$  está dentro de  $C$  y que  $g(z) = 0$  si  $z$  está fuera de  $C$ .

*Ejemplo 3.3.* Calcular la siguiente integral:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz$$

donde  $\gamma$  es la circunferencia de radio 2 centrada en el origen.

Observemos que el denominador se anula en  $z = i$  y en  $z = -i$ . Entonces, si queremos calcular la integral, podemos repetir la idea de la demostración de la fórmula de Cauchy, y separar la región en dos:

- una curva  $\gamma_1$  recorrida desde  $-2$  hasta  $2$  por el eje  $x$ , cerrada por el semicírculo  $\gamma^+$  de radio 2, centrado en el origen, en el semiplano  $Im(z) \geq 0$ ; y
- una curva  $\gamma_2$  recorrida desde  $2$  hasta  $-2$  por el eje  $x$ , cerrada por el semicírculo  $\gamma^-$  de radio 2, centrado en el origen, en el semiplano  $Im(z) \leq 0$ .

Como

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_{\gamma^+} \frac{1}{z^2 + 1} dz + \int_{[-2,2]} \frac{1}{z^2 + 1} dz$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_{\gamma^-} \frac{1}{z^2 + 1} dz - \int_{[-2,2]} \frac{1}{z^2 + 1} dz$$

(ya que recorreremos en sentido contrario este intervalo), sumando nos queda

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^+} \frac{1}{z^2 + 1} dz + \int_{[-2,2]} \frac{1}{z^2 + 1} dz + \int_{\gamma^-} \frac{1}{z^2 + 1} dz - \int_{[-2,2]} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \\ = \int_{\gamma^+} \frac{1}{z^2 + 1} dz + \int_{\gamma^-} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz \end{aligned}$$

Luego, la integral en la curva  $\gamma$  se obtiene como la suma de las integrales en las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ .

Estas las escribimos como:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1/(z+i)}{z-i} dz = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_{\gamma_2} \frac{1/(z-i)}{z+i} dz = 2\pi i \frac{1}{-2i} = -\pi$$

con lo cual,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \pi - \pi = 0.$$

*Ejercicio 3.5.* Calcular todos los posibles valores de

$$\int_{\Gamma} \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 1)^2(z - i)^2} dz$$

donde  $\Gamma$  es una curva cerrada simple que no pasa por las raíces de  $P(z) = (z^2 + 1)^2(z - i)^2$ .

*Ejercicio 3.6.* Sea  $f(z)$  una función holomorfa.

1. Verifique que  $e^w \neq 0$  para todo  $w \in \mathbb{C}$  y use esa información para probar que  $f(z)e^{iz}$  es una función holomorfa.
2. Si  $\Gamma$  es una circunferencia de radio 1 centrada en  $2i$  y se sabe que

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)e^{-iz}}{(z^2 + 4)} dz = 4 \quad y \quad \int_{\Gamma} \frac{zf(z)}{(z^2 + 4)(z - 2i)} dz = 3i,$$

calcular  $f(2i)$  y  $f'(2i)$ .

*Ejercicio 3.7.* Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 2$$

donde  $P(z)$  es un polinomio de grado 2 y  $\Gamma$  es una curva cerrada que encierra a las raíces de  $P(z)$ .

Sugerencia: Escribir  $P(z) = a(z - z_0)(z - z_1)$  donde  $z_0$  y  $z_1$  son las raíces de  $P(z)$  y usar la fórmula de Cauchy.





# Capítulo 13

## Integrales reales

*El camino más corto entre dos puntos del eje real es una curva por el plano complejo.*

Jacques Hadamard

### 1. Integrales impropias

Dado  $a \in \mathbb{R}$ , y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos considerar las integrales

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Un primer problema es cómo definir las, ya que el dominio de integración no está acotado. En estos casos, las integrales se definen como un límite:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^a f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^R f(x)dx.$$

Si alguno de los límites no existen, diremos que la integral no existe o que la función no es integrable.

*Ejemplo 1.1.* Calcular

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

En este caso hacemos

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_1^R \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{-1}{R} + 1 \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

*Ejemplo 1.2.* Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Recordemos que una primitiva es  $\arctg(x)$ , con lo cual hacemos En este caso hacemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^R \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{S \rightarrow -\infty} \arctg(x) \Big|_S^R \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{S \rightarrow -\infty} (\arctg(R) - \arctg(S)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

*Observación 1.1.* Recordemos además que una función se dice *par* si  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . La función anterior,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

es par, ya que

$$f(-x) = \frac{1}{1 + (-x)^2} = \frac{1}{1 + x^2} = f(x)$$

Esto muchas veces nos ahorra cálculos, ya que si  $f$  es par, por simetría tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Por otra parte, una función se dice *impar* si  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Un ejemplo de función impar es  $f(x) = \text{sen}(x)$ . En general, si  $f$  es impar y existe la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

por las propiedades de la integral tiene que ser igual a cero.

Muchas veces nos interesará sólo el *valor principal* de una integral, que se define como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx.$$

Observemos que estamos tomando un solo límite, es decir, integramos sobre el intervalo simétrico  $[-R, R]$ . Para algunas funciones, la integral no existe pero sí su valor principal. Cuando la integral existe, entonces coincide con el valor principal.

*Ejemplo 1.3.* Sea  $f(x) = x$ , analizar el verdadero valor de la integral de  $f$  en toda la recta, y su valor principal.

Calculamos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} xdx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^R xdx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{S \rightarrow -\infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_S^R \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{S \rightarrow -\infty} \frac{R^2}{2} - \frac{S^2}{2} \end{aligned}$$

no existe, pero su valor principal nos da cero:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R x dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-R}^R \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

## 2. Cálculo de integrales

El objetivo de este capítulo es ver un método para calcular integrales reales como las anteriores utilizando las técnicas del análisis complejo.

Podemos resumir este método en cuatro pasos:

1. Se cambia la función real  $f(x)$  a integrar por una función  $f(z)$  compleja.
2. Se considera un intervalo de la forma  $[-R, R]$  y se traza un semicírculo centrado en el origen de radio  $R$ , llamémoslo  $C_R$ .
3. Se calcula la integral sobre la curva formada por el segmento  $[-R, R]$  y el semicírculo  $C_R$  (utilizando las fórmulas de Cauchy).
4. Se acota la integral sobre  $C_R$  y se demuestra que tiende a cero, con lo cual el valor calculado en el paso 3 tiene que coincidir con la integral sobre el segmento  $[-R, R]$ .

A continuación veremos tres clases de integrales a las cuales aplicamos este método. En cada uno habrá pequeñas modificaciones para realizarle al método anterior que las resaltaremos cuando aparezcan.

Observemos que con este método, al calcular

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx,$$

estamos calculando el valor principal de la integral. Si podemos demostrar que la integral existe, entonces coincide con el valor verdadero de la integral.

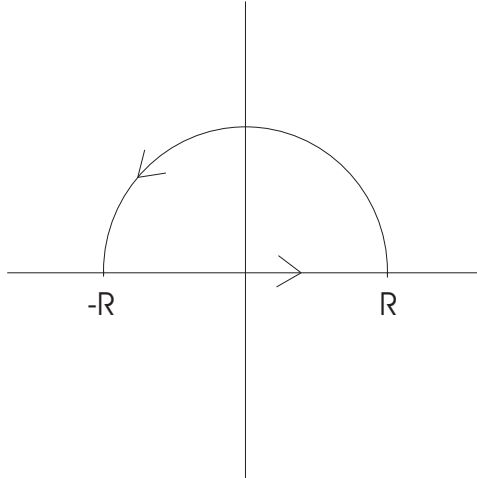


Figura 13.1: Región de integración

## 2.1. Integrales de la primera clase

Las integrales de este tipo son de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} dx,$$

donde  $P, Q$  son polinomios y el grado de los polinomios satisface

$$gr(P) \geq gr(Q) + 2.$$

Para explicar cómo funciona el método, veremos un ejemplo.

Consideremos la integral del Ejercicio 1.2:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

que ya habíamos calculado utilizando una primitiva,  $arctg(x)$ . Intentemos resolverla siguiendo los pasos indicados. Es decir, integraremos  $\frac{1}{1+z^2}$  en una curva conveniente.

Por el punto 2, vamos a considerar una curva  $\gamma_R$ , la unión del intervalo  $[-R, R]$  y el semicírculo de radio  $R$  centrado en  $z = 0$  en el semiplano  $Im(z) \geq 0$ ,  $C_R$ . Entonces,

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz$$

El tercer paso es integrar la función utilizando las fórmulas de Cauchy. Si buscamos las raíces del denominador vemos que son  $i$ ,  $-i$ , con lo cual  $i$  está en el interior de  $\gamma_R$ .

Por el teorema de Cauchy,

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{\gamma_R} \frac{1/(z+i)}{z-i} dz = 2\pi i \frac{1}{z+i} \Big|_{z=i} = \pi,$$

y ahora sólo nos resta el paso final.

El punto 4 consistía en acotar la integral sobre el semicírculo  $C_R$  y ver que tendía a cero cuando  $R \rightarrow \infty$ . Aquí,

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz \right| \leq \max_{|z|=R} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \cdot \text{long}(C_R),$$

y podemos acotar (usando que  $|z| = R$ ):

$$\left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{|z|^2 - 1} = \frac{1}{R^2 - 1}.$$

Por otra parte, como la longitud del semicírculo es  $\pi R$ , obtenemos

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} dz$$

y esta última expresión tiende a cero cuando  $R \rightarrow \infty$ .

Para concluir, juntamos la información que tenemos:

$$\pi = \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz,$$

y haciendo tender  $R \rightarrow \infty$ , nos queda:

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

que es la integral que queríamos calcular.

*Ejercicio 2.1.* Calcular las siguientes integrales, verificando el resultado.

1.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$
2.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{5\pi}{32}$
3.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

## 2.2. Integrales de la segunda clase

Estas integrales involucran las funciones  $\text{sen}(x)$ ,  $\text{cos}(x)$ . Consideremos la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x^2 + x + 2} dx.$$

En este caso, no podemos reemplazar directamente  $\text{sen}(x)$  por  $\text{sen}(z)$ . Recordemos que el módulo de  $\text{sen}(z)$  no está acotado, y no podríamos luego descartar la integral sobre el semicírculo en el plano superior como hicimos antes. Aquí, reemplazamos  $f(x)$  por una función  $g(z)$ :

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 2} = e^{-y} \left( \frac{\text{cos}(x)}{x^2 + x + 2} dx + i \frac{\text{sen}(x)}{x^2 + x + 2} dx \right).$$

Observemos que la integral que queríamos calcular es la parte imaginaria de  $g(x)$  sobre el eje real, ya que en éste  $y = 0$ , y tenemos  $e^{-y} = 1$ .

*Observación 2.1.* Es importante detenerse aquí hasta comprender cuál es la diferencia en el primer paso respecto al ejemplo anterior, y estar seguros de que la función  $g(z)$  coincide con  $f(x)$  cuando  $z = x + i \cdot 0$ , es decir, sobre el eje real.

El resto es igual que antes, introducimos la curva  $\gamma_R$  como la unión del intervalo  $[-R, R]$  y el semicírculo  $C_R$  de radio  $R$  centrado en  $z = 0$  del semiplano  $\text{Im}(z) \geq 0$ . Entonces,

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 2} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 2} dz$$

El próximo paso es calcular la integral sobre  $\gamma_R$ . Necesitamos los puntos donde se anula el denominador para aplicar la fórmula de Cauchy. Entonces,

$$z^2 + z + 2 = 0 \quad \text{para} \quad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Cuando  $R$  es grande, sólo uno de los puntos está dentro de  $\gamma_R$ ,  $(-1 + i\sqrt{7})/2$ , con lo cual, por la fórmula de Cauchy,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z - (-1 - i\sqrt{7})/2) (z - (-1 + i\sqrt{7})/2)} dz &= 2\pi i \frac{e^{-(\sqrt{7}+i)/2}}{i\sqrt{7}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}/2} (\text{cos}(-1/2) + i\text{sen}(-1/2)). \end{aligned}$$

Luego, la integral nos queda, si separamos en parte real e imaginaria,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}/2} \text{cos}(-1/2) + i \frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}/2} \text{sen}(-1/2).$$

Ya calculamos la integral, y el paso siguiente es acotar la integral sobre  $C_R$ . Veamos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 2} dz \right| = 0.$$

Para esto tenemos que calcular la longitud de  $C_R$ , que es  $\pi R$ , y acotar la función:

$$\left| \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 2} \right|$$

Para el numerador, haciendo  $z = x + iy$ , vemos que  $|e^{-z}| = |e^{-y}| \cdot |e^{ix}|$  Ahora,  $e^{-y} \leq 1$ , ya que  $y \geq 0$ . Por otra parte,

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$$

y tiene módulo 1, así que el numerador está acotado por 1.

Veamos ahora el denominador. Tenemos

$$|z^2 + z + 2| \geq |R^2| - |R| - |2|,$$

y como al dividir se invierte la desigualdad,

$$\left| \frac{1}{z^2 + z + 2} \right| \leq \frac{1}{|R^2| - |R| - 2},$$

tenemos la cota

$$\max_{z \in C_R} \left| \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 2} \right| \leq \frac{1}{|R^2| - |R| - 2}$$

Ahora, sabemos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi R}{|R^2| - |R| - 2} = 0.$$

Por último, juntamos toda la información y obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 2} dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 2} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 2} dz \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}/2} \cos(-1/2) + i \frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}/2} \operatorname{sen}(-1/2). \end{aligned}$$

Tomando límite cuando  $R \rightarrow \infty$ , nos queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + x + 2} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}/2} \cos(-1/2) + i \frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}/2} \operatorname{sen}(-1/2).$$



Separando la primer integral en parte real e imaginaria,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + x + 2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2 + x + 2} dx,$$

tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2 + x + 2} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}/2} \operatorname{sen}(-1/2).$$

*Ejercicio 2.2.* ¿Cuánto vale la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + x + 2} dx \quad ?$$

*Ejercicio 2.3.* Calcular las siguientes integrales, verificando el resultado.

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left( \frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right) \quad (a > b > 0)$
2.  $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi}{4b^3} (1 + ab)e^{-ab} \quad (a > 0, b > 0).$
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \operatorname{sen} a \quad (a > 0)$

### 2.3. Desigualdad de Jordan

Antes de estudiar la última clase de integrales que veremos, necesitamos demostrar una desigualdad que nos será de gran utilidad.

*Teorema 2.1.* Desigualdad de Jordan:

$$\int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen}(t)} dt \leq \frac{\pi}{R}.$$

*Demostración.* Para demostrarla, hay que considerar que se tiene la siguiente desigualdad en  $(0, \pi/2)$ :

$$\frac{2}{\pi} t \leq \operatorname{sen}(t)$$

y que entre  $(\pi/2, \pi)$  tenemos

$$\frac{2}{\pi} (\pi - t) \leq \operatorname{sen}(t).$$

Estas valen porque el coseno es cóncavo, y por lo tanto su gráfico está por encima de la recta que conecta el origen con  $(\pi/2, 1)$ , y de la recta que conecta  $(\pi/2, 1)$  con  $(\pi, 0)$ .

Ahora, se divide la integral en dos partes,

$$\int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen}(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\operatorname{sen}(t)} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-R\operatorname{sen}(t)} dt$$

y se usan las desigualdades anteriores en cada una:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\operatorname{sen}(t)} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-R\operatorname{sen}(t)} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-R\frac{2}{\pi}(\pi-t)} dt.$$

Estas integrales se calculan explícitamente,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}t} dt = -\frac{\pi}{2R} e^{-R\frac{2}{\pi}t} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2R} (e^{-R} - 1),$$

y

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-R\frac{2}{\pi}(\pi-t)} dt = \frac{\pi}{2R} e^{-R\frac{2}{\pi}(\pi-t)} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}),$$

y sumándolas se obtiene el resultado:

$$-\frac{\pi}{2R} (e^{-R} - 1) + \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) = \frac{\pi}{R} - \frac{\pi e^{-R}}{R} \leq \frac{\pi}{R}.$$

□

## 2.4. Integrales de la tercera clase

En la última clase de integrales que veremos, integramos un cociente de polinomios multiplicados por una función trigonométrica, donde el grado del polinomio del numerador tiene un grado menos que el del denominador, lo cual no permite acotar como en el caso anterior.

Resolvamos el siguiente ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x^2 + 1} dx.$$

Vamos a reemplazar la función por

$$\frac{ze^{iz}}{z^2 + 1},$$

y tomamos como curva  $\gamma_R$  la unión del segmento  $[-R, R]$  y el semicírculo en el semiplano  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$  de radio  $R$ ,  $C_R$ .

Observemos que el denominador se anula en  $\pm i$ , con lo cual la integral que queremos calcular, por el Teorema de Cauchy, es

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}/(z+i)}{z-i} = 2\pi i \frac{ie^{-1}}{2i} = i\pi e^{-1}.$$

El próximo paso es acotar la integral sobre  $C_R$ . Si parametrizamos la curva  $C_R$  como  $Re^{it}$  con  $0 \leq t \leq \pi$ , nos queda

$$\left| \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+1} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{Re^{it} e^{iRe^{it}} \cdot iRe^{it}}{R^2 e^{i2t} + 1} dt \right| \leq \frac{R^2}{R^2-1} \int_0^\pi |e^{iRe^{it}}| dt$$

(recordemos que  $|e^{it}| = 1$ ).

En la integral que falta calcular notemos que

$$e^{iRe^{it}} = e^{iR[\cos(t)+isen(t)]} = e^{iR\cos(t)} e^{-Rsen(t)}.$$

Tomando módulo,  $|e^{iR\cos(t)}| = 1$ , y queda por la desigualdad de Jordan

$$\frac{R^2}{R^2-1} \int_0^\pi e^{-Rsen(t)} dt \leq \frac{R^2}{R^2-1} \frac{\pi}{R},$$

que tiende a cero cuando  $R \rightarrow \infty$ .

Para terminar, observemos que

$$i\pi e^{-1} = \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}/(z+i)}{z-i} = \int_{-R}^R \frac{xe^{ix}}{x^2+1} + \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}.$$

Al tomar límite cuando  $R \rightarrow \infty$ ,

$$i\pi e^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1},$$

y observemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xsen(x)}{x^2+1} dx = Im \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1} dx \right),$$

con lo cual la integral que queríamos calcular es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xsen(x)}{x^2+1} dx = \pi e^{-1}.$$

*Observación 2.2.* Hay otras clases de integrales que pueden calcularse con este método, y cada una introducirá nuevas modificaciones. Si bien no serán estudiadas aquí, el procedimiento a emplear es el mismo que explicamos.

*Ejercicio 2.4.* Dado  $R > 0$  sea  $C_R = \{z = Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ , orientado desde  $z = R$  hasta  $z = -R$ . Sea  $f(z)$  una función analítica en todo el plano complejo tal que para cada  $R > 0$  existe una constante  $M_R > 0$  con  $|f(z)| < M_R, \forall z \in C_R$ , y supongamos que  $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$ . Usando la desigualdad de Jordan, probar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$$

siempre que  $a > 0$ .

*Ejercicio 2.5.* Utilizando el ejercicio anterior, verificar las siguientes identidades.

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} ax}{x^4 + 4} = \pi e^{-a} \cos a$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{6} (4e^{-2} - e^{-1})$$

# Bibliografía

- [1] Ahlfors, L.V. *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [2] Blanchard, Paul; Devaney, Robert; Hall, Glen. *Ecuaciones diferenciales*, 1º edición International Thomson; 1999.
- [3] Churchill, Ruel; Brown, James. *Variables complejas y aplicaciones*, 5º edición McGraw-Hill, 1991.
- [4] Deitmar A., *A first course in harmonic analysis*, Springer, 2005.
- [5] Eriksson K., Estep D., Johnson C., *Applied Mathematics: Body and Soul* Vol. 1,2 y 3, Springer, 2004.
- [6] Grossman, Stanley. *Algebra lineal*, 4º edición McGraw Hill, 1996.
- [7] Hirsch, Morris; Smale, Stephen. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, 1º edición Academic Press, 1990.
- [8] Hoffman, Kenneth; Kunze, Ray. *Algebra lineal*, 1º edición Prentice Hall.
- [9] Kincaid, D., Cheney W., *Análisis Numérico: Las matemáticas del cálculo científico*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.
- [10] Kreyszig, Erwin. *Matemáticas avanzadas para ingeniería (vol. II)*, 3º edición, Limusa, 2000.
- [11] Simmons, George. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, 2º edición McGraw Hill, 2000.



## Parte III

# Prácticas de Matemática IV





**MATEMATICA IV**  
**Práctica 0 – Ecuaciones Diferenciales**

## Ecuaciones Separables

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

(i)  $x^2y' + y = 0$

(ii)  $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = xy$

(iii)  $y' = 2t\sqrt{y-1}$

(iv)  $y'\cos(x) - y^2\operatorname{tg}(x) = 0$

2. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales

(i)  $y' = y^2 + 1, y(1) = 0$

(ii)  $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}, y(0) = 1$

(iii)  $y' = \frac{y\ln y}{x}, y(1) = e$

(iv)  $\frac{dy}{dt} = \frac{ty+3t}{t^2+1}, y(0) = 2$

## Ecuaciones Lineales de Primer Orden

3. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones

(i)  $y' - 3y = e^x$

(ii)  $y' - 2xy = x$

(iii)  $xy' + 2y = e^{x^2}$

(iv)  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}x + y\operatorname{tg}x$

(v)  $xy' + xy + y = e^{-x}$

4. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales.

(i)  $y' + y = x + e^x, y(0) = 0$

(ii)  $xy' - 3y = x^2, x > 0, y(1) = 0$

(iii)  $(1 + x^2)y' + 2xy = 3\sqrt{x}, y(0) = 2$

(iv)  $xy' - \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 0, x > 0$

## Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

(i)  $y'' - 3y' + 2y = 0$

(ii)  $y'' - y = 0$

(iii)  $y'' - 4y' + 13y = 0$

(iv)  $9y'' - 30y' + 25y = 0$

(v)  $y'' + 25y = 0$

(vi)  $25y'' - 20y' + 4y = 0$

6. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales

(i)  $y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

(ii)  $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

(iii)  $y'' + 4y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 4$

(iv)  $y'' + 9y = 0, \quad y(\frac{\pi}{3}) = 0, y'(\frac{\pi}{3}) = 1$

7. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales o problemas de valores iniciales no homogéneos, por el método de coeficientes indeterminados.

(i)  $y'' - y' - 6y = \cos 3x$

(ii)  $y'' + 2y' + 2y = x^3 - 1$

(iii)  $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$

(iv)  $y'' - 7y' + 12y = \operatorname{sen} x - \cos x$

(v)  $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

(vi)  $y'' - 2y' + 5y = x + \operatorname{sen} 3x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

(vii)  $y'' - 3y' + 2y = 2x - e^{-2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

8. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas por el método de variación de las constantes.

(i)  $y'' + y = \sec x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(ii)  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

(iii)  $y'' - y = e^{-x}$

(iv)  $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$

## Aplicaciones

9. Los psicólogos interesados en la teoría del aprendizaje estudian las **curvas de aprendizaje**. Una tal curva es la gráfica de una función  $P(t)$  que describe el desempeño de alguien que está aprendiendo alguna habilidad, como una función del tiempo de capacitación  $t$ . La derivada  $dP/dt$  representa la razón con la que el desempeño mejora. Si  $M$  es el nivel máximo de desempeño que puede tener un aprendiz, resulta razonable suponer  $dP/dt$  es proporcional a  $M - P(t)$ . Así, al principio el aprendizaje es rápido, y después, conforme el desempeño aumenta y se aproxima a su valor máximo, la razón de aprendizaje disminuye. En consecuencia

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P(t))$$

donde  $k$  es una constante positiva. Resolver la ecuación diferencial y dibujar la curva de aprendizaje.

10. Un objeto de masa  $m$  se lanza desde su estado de reposo y suponemos que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto. Si  $s(t)$  es la distancia recorrida después de  $t$  segundos, entonces la velocidad es  $v(t) = s'(t)$  y la aceleración es  $a(t) = v'(t)$ . Si  $g$  es la aceleración debida a la gravedad, entonces la fuerza de atracción sobre el objeto es  $mg - cv$ , donde  $c$  es una constante positiva. De la ley de Newton se deduce la ecuación del movimiento

$$m \frac{dv}{dt} = mg - cv$$

- (i) Resolver esta ecuación diferencial para determinar la velocidad en el tiempo  $t$
- (ii) ¿Cuál es la velocidad límite?
- (iii) Determinar la distancia del objeto en función del tiempo  $t$ .

**MATEMÁTICA IV**  
**Práctica 1 – Álgebra Lineal**

1. Analizar la independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

a)  $\{(-1, 1), (2, 3)\}$

b)  $\{(1, 0, -2), (1, 3, 1)\}$

c)  $\{(0, 0), (4, 5)\}$

d)  $\{(1, 1, 0), (0, 1, -1), (2, 1, 1)\}$

e)  $\{e^{3t}, e^{-t}\}$

f)  $\{e^{2t}, te^{2t}\}$

g)  $\{\cos t, \sin t\}$

2. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son sistemas de generadores de los espacios vectoriales  $V$  dados:

a)  $\{(1, 4), (2, 1), (1, -3)\}, \quad V = \mathbb{R}^2$

b)  $\{(1, 2, 1), (3, -2, 1)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

c)  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 2), (1, 0, 3)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

3. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son base del espacio vectorial  $V$ :

a)  $\{(2, 1, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 2), (1, 2, 5)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

b)  $\{(-1, 4)\}, \quad V = \mathbb{R}^2$

c)  $\{(1, 3, -1), (2, 1, 0), (1, -2, 2)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

d)  $\{(3, 1), (-1, -3)\}, \quad V = \mathbb{R}^2$

4. Hallar la matriz de cambio de base  $C_{EB}$  y usarla para calcular las coordenadas de los vectores dados:

a)  $E =$  base canónica de  $\mathbb{R}^2$ ,  $B = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ ,  $u = (-4, -1)$ ,  
 $v = (2, 7)$ ,  $w = (0, 3)$ .

b)  $E =$  base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B = \{(1, -1, 2), (3, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$ ,  $u =$   
 $(2, 1, 3)$ ,  $v = (-5, -1, 2)$ .

5. Hallar las coordenadas de los vectores  $v$  en la base  $B$ .

a)  $v = (2, 5)$ ,  $B = \{(2, -1), (-1, 4)\}$

b)  $v = (3, 2, 3), B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$

c)  $v = (1, 0, 0), B = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$

6. Dadas las coordenadas de  $v$  en la base  $B$  ( $[v]_B$ ), dar las coordenadas de  $v$  en la base canónica.

a)  $[v]_B = (0, 2, -1), B = \{(1, 0, 3), (0, 2, 1), (0, 0, -1)\}$

b)  $[v]_B = (2, 5), B = \{(1, -1), (1, 2)\}$

c)  $[v]_B = (3, 4, -5), B = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$

7. a) Verificar que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$  es diagonalizable.

b) Verificar que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  no es diagonalizable.

8. Dadas las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar la forma canónica de Jordan de cada matriz y escribir a la matriz  $A$  como  $A = C_{BE}A_{BB}C_{EB}$ , donde  $B$  es la base de Jordan asociada a la matriz  $A$  y  $A_{BB}$  es la forma de Jordan de  $A$ .

b) Calcular  $e^{At}$  para cada una de las matrices dadas.

**MATEMÁTICA IV**  
**Práctica 2 – Sistemas Lineales**

1. Hallar la solución general de cada uno de los siguientes sistemas, resolviendo la ecuación de segundo orden asociada. En ii. y iv. resolver además el problema de valores iniciales.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y \end{cases} & \text{ii. } \begin{cases} x' = 2x - y & x(0) = 2 \\ y' = x + 2y & y(0) = -1 \end{cases} \\ \text{iii. } \begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y \end{cases} & \text{iv. } \begin{cases} x' = -2y & x(0) = 3 \\ y' = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases} \\ & \text{v. } \begin{cases} x' = y + e^{(2t)} \\ y' = -4x + 4y + 1 \end{cases} \end{array}$$

2. Para cada una de las ecuaciones siguientes, halle un sistema lineal de primer orden de ecuaciones diferenciales, que permita resolver dicha ecuación.

$$\begin{array}{l} \text{i. } y'' - 8y' + 16y = 0 \\ \text{ii. } x'' - 4x' + 10x = t^2 \\ \text{iii. } y''' - y'' + 4y' - 4y = 0 \\ \text{iv. } y^{(v)} + 3y''' - 2y' + 6y = xe^{x^2} \end{array}$$

3. Halle la solución general del sistema lineal  $x' = Ax$  para cada una de las matrices  $A$  dadas a continuación. En cada caso esbozar el diagrama de fases y analizar la estabilidad del origen como punto de equilibrio.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{ii. } A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{iii. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} & \text{iv. } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{v. } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & \text{vi. } A = \begin{pmatrix} 33 & -58 \\ 20 & -35 \end{pmatrix} \\ \text{vii. } A = \begin{pmatrix} -28 & 40 \\ -20 & 28 \end{pmatrix} & \text{viii. } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} \\ \text{ix. } A = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} & \text{x. } A = \begin{pmatrix} 16 & -30 \\ 9 & -17 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. a) Graficar el diagrama de fases de un sistema bidimensional

$$x' = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

estudiando la forma de Jordan asociada a la matriz  $A$ , en los siguientes casos:

- 1)  $A$  tiene autovalores reales de distinto signo
  - 2)  $A$  tiene dos autovalores reales negativos y distintos
  - 3)  $A$  tiene un autovalor negativo pero no es diagonalizable
  - 4)  $A$  tiene autovalores complejos conjugados  $a \pm bi$  con  $a < 0$
  - 5) Idem (iv) con  $a = 0$
  - 6) Idem (iv) con  $a > 0$
  - 7) Idem (ii) con autovalores positivos
  - 8) Idem (iii) con autovalor positivo
  - 9)  $A$  tiene un autovalor nulo
- b) ¿En cuáles de los items anteriores se verifica  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  con cualquier condición inicial? ¿En cuáles se verifica  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = \infty$ ?

5. Halle (si es posible) los valores del parámetro  $k \in \mathbb{R}$  en las siguientes matrices que hacen que el origen sea un *sumidero* (dos autovalores reales y negativos) para el sistema  $x' = Ax$ .

$$\text{i. } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ k & -4 \end{pmatrix} \quad \text{ii. } A = \begin{pmatrix} k^2 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\text{iii. } A = \begin{pmatrix} -2 & k-1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{iv. } A = \begin{pmatrix} -5 & -k \\ k & 2 \end{pmatrix}$$

6. a) Resolver la ecuación diferencial en  $\mathbb{R}^3$  y analizar el comportamiento asintótico de las soluciones de  $x' = Ax$  en los siguientes casos:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x(0) = (1, 2, 1)$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x(0) = (2, 1, 1)$$

**MATEMATICA IV**

**Práctica 3 – Estabilidad de los puntos de equilibrio y sistemas no lineales.**

1. ¿Para cuáles de las siguientes matrices  $A$ , el origen es un equilibrio estable para el sistema  $x' = Ax$ ?

i.  $A = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$     ii.  $A = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$     iii.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

iv.  $A = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$     v.  $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$     ii.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

2. Analizar la estabilidad del punto de equilibrio  $(0, 0)$  del siguiente sistema para todo valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = 2x + (\alpha - \frac{25}{2})y \\ y' = 2x + \alpha y \end{cases}$$

3. Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} x' = (\alpha + 1)x - 3y \\ y' = x + (1 - \alpha)y \end{cases}$$

- a) Verifique que el origen no es estable para ningún valor de  $\alpha$ .  
 b) Realice un diagrama de fases alrededor del  $(0, 0)$  para  $\alpha = \sqrt{2}$ .
4. Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio indicados en cada uno de los siguientes sistemas.

a)  $\begin{cases} x' = ye^{-3(x-1)} - 1 \\ y' = -(x-1)y \end{cases} \quad (1, 1)$

b)  $\begin{cases} x' = \text{sen}(1-x) + e^y - 1 \\ y' = -\text{sen}2y \end{cases} \quad (1, 0)$

c)  $\begin{cases} x' = e^{3x} - y^4 \\ y' = (x+1)^2y - y^4 \end{cases} \quad (0, 1)$

d)  $\begin{cases} x' = -\log x + x(y+1)^2 \\ y' = -xy + e^{-2(y+1)} - 2 \end{cases} \quad (1, -1)$

e)  $\begin{cases} x' = 1 + y - x^2 - y^2 \\ y' = 1 - x - x^2 - y^2 \end{cases} \quad (-1, 1)$



5. Analizar la estabilidad del punto de equilibrio  $(0, 0)$  para los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x' = -x - \frac{1}{3}x^3 - 2\text{sen}y \\ y' = -y - \frac{1}{3}y^3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = -x + 3y + xy \\ y' = x + y + x^4 \end{cases}$$

6. Consideremos el siguiente modelo para especies en competencia, en el que se asume que la interacción entre las especies es desfavorable para ambas. Tenemos:

$$\begin{cases} x' = x - x^2 - axy, & x \geq 0 \\ y' = y - y^2 - axy, & y \geq 0 \end{cases}$$

donde  $a$  es una constante positiva y  $a \neq 1$ .

- Determine la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema.
- Esboce el diagrama de fases para  $a = \frac{1}{2}$  y  $a = 2$ .
- Determine las condiciones de extinción (cuando  $t \rightarrow \infty$ ) de una de las especies, de las dos especies y coexistencia de ambas especies.

7. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' = 2y(z - 1) \\ y' = -x(z - 1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

- Hallar los puntos de equilibrio. ¿Se puede analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio a partir de la parte lineal del sistema?
- Demstrar que el origen es un equilibrio estable. Sugerencia: Buscar una función de Liapunov de la forma  $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$  con  $a, b, c > 0$ .

8. Mostrar que el origen es estable para los siguientes sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} x' = -x + 2x(x + y)^2 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x + y)^2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = -y - xy^2 \\ y' = x^3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x' = -2x - y^2 \\ y' = -y - x^2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x' = 2y^3 \\ y' = -x \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x' = -2x^3 + 2y + x^3\text{sen}(x) \\ y' = -x - y^3 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x' = -xy^2 - x^3 + y^4 \\ y' = -y^3 - x^2y^2 - x^3y \end{cases}$$

9. Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = 2y + 2x^4 - x^3 \\ y' = -2x + \alpha y - y^3 \end{cases}$$

y note que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema.

- a) Clasifique el sistema cuando  $\alpha \neq 0$ .
  - b) Para  $\alpha = 5$ , haga un diagrama de fases.
  - c) Para  $\alpha = 0$ , verifique que el  $(0, 0)$  es asintóticamente estable.
10. Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Verifique que el  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema:

$$f(x) = \begin{cases} x' = -xy + 3\alpha y \\ y' = x^2 - y^3 + \alpha x \end{cases}$$

Muestre que si  $\alpha \neq 0$ , entonces  $(0, 0)$  es inestable, pero si  $\alpha = 0$ , es estable.

11. Dado el sistema:

$$f(x) = \begin{cases} x' = 3x - y + \alpha(e^y - 1) \\ y' = -2\operatorname{sen}x + 4y \end{cases}$$

Demostrar que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio inestable para todo valor de  $\alpha$ .

12. Considerar la ecuación de Lienard

$$(L) \begin{cases} x' = y - f(x) \\ y' = -x \end{cases}$$

- a) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio de (L)?
  - b) Si  $f'(0) \neq 0$ , determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio de (L) en función de  $f'(0)$ .
  - c) Esbozar un gráfico de fase.
13. En el ejercicio 12 se estudió la ecuación de Lienard (L) bajo cierta hipótesis sobre  $f$ . Supongamos ahora que  $xf(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ . Probar que el origen es un punto de equilibrio estable.

14. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = y - xf(x, y) \\ y' = -x - yf(x, y) \end{cases}$$

en donde  $f(x, y)$  es una función continua con primeras derivadas continuas. Demuestre que si  $f(x, y) > 0$  en algún entorno del origen, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

15. Considerar un péndulo con una masa  $m$  oscilando en el extremo de un hilo de longitud  $l$ . Supongamos que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad del péndulo, siendo  $k$  la constante de proporcionalidad. El sistema que describe el movimiento del péndulo es

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{1}{l} \operatorname{sen} x - \frac{k}{m} y \end{cases}$$

donde  $x$  es el ángulo formado por el eje vertical y la recta que contiene al hilo.

- ¿Cuáles son los puntos de equilibrio del sistema? Interpretar desde el punto de vista físico.
- Analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio y realizar un diagrama de fases.

16. Una generalización de la ecuación del péndulo no amortiguado es

$$\frac{d^2u}{dt^2} + g(u) = 0, \quad (2.1)$$

en donde  $g(0) = 0$ ,  $g(u) > 0$  para  $0 < u < k$ , y  $g(u) < 0$  para  $-k < u < 0$ ; es decir,  $ug(u) > 0$  para  $u \neq 0$ ,  $-k < u < k$ . Observar que  $g(u) = \operatorname{sen}(u)$  tiene esa propiedad sobre  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

- Tomar  $x = u$ ,  $y = \frac{du}{dt}$  y escribir la ecuación 2.1 como un sistema de dos ecuaciones. Demostrar que  $x = 0$ ,  $y = 0$  es un punto de equilibrio del sistema.
- Demostrar que

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)ds, \quad -k < x < k,$$

es una función de Lyapunov para el punto de equilibrio  $(0, 0)$ . Observar que esta función de Lyapunov corresponde a la función de energía  $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos(x))$  para el caso  $g(u) = \operatorname{sen}(u)$ .

17. Al introducir variables adimensionales adecuadas, el sistema de ecuaciones no lineales para el péndulo amortiguado puede escribirse como

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

- a) Demostrar que el origen es un punto de equilibrio.
- b) Demostrar que  $V(x, y) = x^2 + y^2$  no es una función de Lyapunov para  $(0, 0)$ . Sugerencia:  $x - \operatorname{sen}(x) > 0$  para  $x > 0$  y  $x - \operatorname{sen}(x) < 0$  para  $x < 0$ . Considere estos casos con  $y$  positiva, pero lo suficientemente pequeña para que pueda ignorarse  $y^2$  en comparación con  $y$ .
- c) Considerar la función  $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos(x))$  para demostrar que el origen es un punto de equilibrio estable. Sin embargo, observar que aunque haya rozamiento y pueda esperarse que el origen sea asintóticamente estable, no es posible llegar a esta conclusión si se utiliza esta función de Lyapunov.
18. Una partícula se mueve sobre la recta  $\mathbb{R}$  bajo la influencia de una fuerza Newtoniana dependiendo sólo de la posición de la partícula. Si la fuerza es siempre dirigida hacia  $0 \in \mathbb{R}$ , y se anula en 0, entonces probar que 0 es un equilibrio estable. Sugerencia: Una vez obtenido el sistema de ecuaciones, verificar que la energía total (energía cinética + energía potencial) resulta ser una función de Liapunov.
19. En el ejercicio 18 supongamos que hay una fuerza de fricción opuesta al movimiento de la forma  $-f(x)v$ ,  $f(x) \geq 0$ , donde  $v$  es la velocidad, y  $x$  la posición de la partícula. Si  $f(x) \neq 0$  para  $x \neq 0$ , probar que el punto  $(0, 0)$  (en el espacio  $x, v$ ) es asintóticamente estable.

**MATEMATICA IV**  
**Práctica 4 – Nociones de Variable Compleja**

1. Representar los conjuntos siguientes y determinar cuáles son abiertos y conexos.

a)  $|z - 2 + i| \leq 1$     b)  $|2z + 3| > 4$     c)  $\text{Im } z > 1$

d)  $\text{Im } z = 1$     e)  $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} (z \neq 0)$     f)  $|z - 4| \geq |z|$

g)  $|\text{Re } z| < |z|$     h)  $\text{Re } \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2}$     i)  $\text{Im } z^2 > 0$

2. Describir el dominio de las siguientes funciones:

a)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$     b)  $f(z) = \arg(z)$     c)  $f(z) = \frac{z}{z + \bar{z}}$

d)  $f(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$

3. Si  $f(z) = \frac{1}{z}$ , calcular  $f'(z)$  usando la definición, para  $z \neq 0$ .

4. Usando las propiedades de las derivadas probar que  $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$  cuando  $n$  es un entero.

5. Utilizar la definición de derivada para ver que si  $f(z) = \text{Re } z$  entonces  $f'(z)$  no existe en ningún punto.

6. Probar que la función  $f(z) = \bar{z}$  no es derivable en ningún punto.

7. Decir si la función  $f(z) = \text{Im } z$  tiene derivada en algún punto.

8. Usando las condiciones de Cauchy-Riemann, demostrar que las siguientes funciones no son derivables en ningún punto.

a)  $2x + ixy$     b)  $e^x e^{-iy}$

9. Probar que  $f'(z)$  y  $f''(z)$  existen en todos los puntos, y calcularlas, en los siguientes casos

a)  $f(z) = iz + 2$     b)  $f(z) = e^{-x} e^{-iy}$     c)  $f(z) = z^3$

10. Para las siguientes funciones, decidir donde existe  $f'(z)$  y hallar su valor.

$$\text{a) } f(z) = \frac{1}{z} \quad \text{b) } f(z) = x^2 + iy^2 \quad \text{c) } f(z) = z \operatorname{Im} z$$

11. Sea  $f(z) = \frac{(\bar{z})^2}{z}$  para  $z \neq 0$ . Probar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se verifican en el punto  $z = 0$ , pero  $f'(0)$  no existe.

12. Decidir si las siguientes funciones son analíticas en algún punto, y en ese caso hallar el dominio de analiticidad.

$$\text{a) } f(z) = 3x + y + i(3y - x) \quad \text{b) } f(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\text{c) } f(z) = xy + iy \quad \text{d) } f(z) = \frac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$$

$$\text{e) } f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy} \quad \text{f) } f(z) = \frac{z^3 + i}{z^2 - 3z + 2}$$

13. La función  $g(z) = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$  con  $r > 0$ ,  $-\pi < \theta < \pi$  es analítica en dicho dominio. Probar que la función compuesta  $g(z^2 + 1)$  es analítica en el cuadrante  $x > 0, y > 0$ .

14. Probar que la función  $g(z) = \log r + i\theta$  es analítica en el dominio  $r > 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Aquí  $r = |z|$  y  $\theta = \arg z$ . Probar que  $g'(z) = \frac{1}{z}$  en dicho dominio. Finalmente probar que la función compuesta  $g(2z - 2 + i)$  es analítica en el dominio  $x > 1$ .

15. Probar que si  $f(z)$  es una función analítica en un dominio  $D$  tal que  $\overline{f(z)}$  también es analítica en  $D$ , entonces  $f(z)$  es constante en  $D$ .

16. Probar que si  $f(z)$  es una función analítica en un dominio  $D$  y real en  $D$ , entonces  $f(z)$  es constante en  $D$ .

### Propiedades de funciones elementales

17. Probar que:

$$\text{a) } \exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2; \quad \text{b) } \exp \frac{2 + \pi i}{4} = \sqrt{\frac{e}{2}}(1 + i);$$

18. Hallar los valores de  $z$  para los cuales

$$\text{a) } e^z = -2; \quad \text{b) } e^z = 1 + \sqrt{3}i; \quad \text{c) } e^{(2z-1)} = 1$$

19. Hallar todas las soluciones de la ecuación  $\cos z = 2$
20. Probar que  $e^{\log z} = z$ , si  $z \neq 0$ , independientemente del valor de  $\log z$  seleccionado.

*Nota.* Con  $\text{Log}z$  denotamos el valor principal de  $\log z$ .

21. Probar que

$$\text{a) } \text{Log}(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i \quad \text{b) } \text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\text{Log}2 - \frac{\pi}{4}i$$

22. Probar que

$$\text{Log}[(1+i)^2] = 2\text{Log}(1+i) \quad \text{pero} \quad \text{Log}[(-1+i)^2] \neq 2\text{Log}(-1+i)$$

23. Probar que si  $\text{Re } z_1 > 0$  y  $\text{Re } z_2 > 0$  entonces

$$\text{Log}z_1z_2 = \text{Log}z_1 + \text{Log}z_2$$

24. Probar que

$$\text{Log}z_1z_2 = \text{Log}z_1 + \text{Log}z_2 + 2N\pi i$$

siendo  $N$  uno de los valores  $0, \pm 1$ .

25. Probar que la función  $\text{Log}(z-i)$  es holomorfa en todo el plano salvo sobre la semirrecta  $y = 1, x \leq 0$ .
26. Hallar el dominio de holomorfía de la función

$$\frac{\text{Log}(z+4)}{z^2+i}$$

27. Verificar que  $\text{Log}(x^2+y^2)$  es armónica en todo dominio que no contenga al origen.
28. Escribir  $\text{Re}(e^{\frac{1}{z}})$  en términos de  $x$  e  $y$ . ¿Por qué esta función es armónica en todo dominio que no contenga al origen?

**MATEMÁTICA IV**  
**Práctica 5 – Integrales Complejas**

**Integrales Curvilíneas**

Para cada arco  $C$  y cada función  $f$ , en los ejercicios 1 a 5, hallar el valor de

$$\int_C f(z) dz.$$

1.  $f(z) = y - x - 3x^2i$  y

- a)  $C$  es el segmento de recta desde  $z = 0$  hasta  $z = 1 + i$ ;
- b)  $C$  consiste en dos segmentos de recta, uno desde  $z = 0$  a  $z = i$  y otro desde  $z = i$  hasta  $z = 1 + i$ .

*Sol.* a)  $1 - i$ ; b)  $\frac{1-i}{2}$ .

2.  $f(z) = \frac{z+2}{z}$  y

- a)  $C$  es el semicírculo  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ;
- b)  $C$  es el semicírculo  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ;
- c)  $C$  es el círculo  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;

*Sol.* a)  $-4 + 2\pi i$ ; b)  $4 + 2\pi i$ ; c)  $4\pi i$ .

3.  $f(z) = z - 1$  y  $C$  es el arco que va desde  $z = 0$  a  $z = 2$  y está formado por:

- a) el semicírculo  $z = 1 + e^{i\theta}$ ,  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ;
- b) el segmento  $0 \leq x \leq 2$  del eje real.

*Sol.* a) 0; b) 0.

4.  $C$  es el arco de  $z = -1 - i$  a  $z = 1 + i$  sobre la curva  $y = x^3$ , mientras que

$$f(z) = \begin{cases} 4y & \text{para } y > 0 \\ 1 & \text{para } y < 0 \end{cases}$$

*Sol.*  $2 + 3i$ .

5.  $f(z) = e^z$  y  $C$  es el arco desde  $z = \pi i$  a  $z = 1$  formado por:

- a) el segmento de recta que une esos puntos;



b) las partes de los ejes coordenados que unen esos puntos.

*Sol.* a) y b)  $1 + e$ .

6. Probar que si  $C$  es la frontera del cuadrado con vértices en los puntos  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = 1 + i$  y  $z = i$ , entonces cualquiera sea la orientación de  $C$  se tiene

$$\int_C (3z + 1)dz = 0.$$

7. Sea  $C$  el contorno del ejercicio 6. Calcular

$$\int_C \pi \exp(\pi \bar{z})dz.$$

*Sol.*  $4(e^\pi - 1)$ .

8. Si  $C$  es la mitad superior del círculo  $|z| = 1$ , de  $z = -1$  a  $z = 1$ , calcular la integral

$$\int_C \bar{z}dz$$

usando dos parametrizaciones distintas de  $C$ .

*Sol.*  $-\pi i$ .

9. Sea  $C$  la frontera del círculo  $|z| = 2$  de  $z = 2$  a  $z = 2i$  que queda en el primer cuadrante. Sin calcular la integral, probar que

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

10. Probar que si  $C$  es la frontera del triángulo con vértices en los puntos  $z = 0$ ,  $z = 3i$ , y  $z = -4$ , orientado en sentido antihorario, entonces:

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z})dz \right| \leq 60.$$

11. Demostrar que

$$\int_{z_1}^{z_2} dz = z_2 - z_1, \quad \int_{z_1}^{z_2} z dz = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2),$$

independientemente del camino regular desde  $z = z_1$  hasta  $z = z_2$ .

12. Si  $C_0$  es el círculo  $|z - z_0| = R$  orientado positivamente, probar (calculando las integrales curvilíneas) que

$$\text{a) } \int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i; \quad \text{b) } \int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

### El Teorema de Cauchy-Goursat

13. Hallar el dominio de analiticidad de la función  $f$  y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para probar que  $\int_C f(z) dz = 0$  cuando el contorno cerrado  $C$  es el círculo  $|z| = 1$  y cuando:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \frac{z^2}{z-3}; & \text{b) } f(z) &= ze^{-z}; & \text{c) } f(z) &= \frac{1}{z^2 + 2z + 2}; \\ \text{d) } f(z) &= \frac{1}{\cosh z}; & \text{e) } f(z) &= \tan z; & \text{f) } f(z) &= \text{Log}(z + 2). \end{aligned}$$

14. Denotemos por  $B$  la frontera del dominio entre el círculo  $|z| = 4$  y el cuadrado cuyos lados están sobre las rectas  $x = \pm 1, y = \pm 1$ . Suponiendo que  $B$  está orientado de modo que los puntos del dominio quedan a la izquierda de  $B$ , decir por qué  $\int_B f(z) dz = 0$  cuando:

$$\text{a) } f(z) = \frac{1}{3z^2 + 1}; \quad \text{b) } f(z) = \frac{z + 2}{\text{sen}(\frac{z}{2})}; \quad \text{c) } f(z) = \frac{z}{1 - e^z}.$$

15. Usar el ejercicio 12 y el teorema de Cauchy-Goursat para calcular las integrales

$$\int_C \frac{dz}{z - 2 - i}, \quad \int_C (z - 2 - i)^{n-1} dz \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

cuando  $C$  es la frontera del rectángulo  $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$ , descrito en sentido antihorario.

16. Calcular las siguientes integrales, en las que el camino es un contorno arbitrario entre los límites de integración.

$$\text{a) } \int_i^{\frac{i}{2}} e^{\pi z} dz; \quad \text{b) } \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz; \quad \text{c) } \int_1^3 (z-2)^3 dz; \quad \text{d) } \int_{z_1}^{z_2} z^n dz.$$

$$\text{Sol. a) } \frac{1+i}{\pi}; \quad \text{b) } e + \frac{1}{e}; \quad \text{c) } 0; \quad \text{d) } \frac{1}{n+1} (z_2^{n+1} - z_1^{n+1}).$$

*Sugerencia.* Verificar que los integrandos admiten una primitiva en todo el plano complejo.

17. a) Usando el valor principal del logaritmo como una primitiva de  $\frac{1}{z}$ , probar que

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = \pi i$$

cuando el camino de integración es la mitad derecha del círculo  $|z| = 2$ .

- b) Calcular la integral  $\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z}$ , siendo ahora el camino de integración la mitad izquierda del círculo  $|z| = 2$ . *Sugerencia.* Usar otra determinación del logaritmo. También podría hacerse directamente, es decir parametrizando el contorno, pero es relativamente más trabajoso.
- c) Calcular  $\int_C \frac{dz}{z}$  siendo  $C$  el círculo  $|z| = 2$  orientado en sentido antihorario. Comparar con el ejercicio 12.

### La Fórmula integral de Cauchy

18. Denotemos por  $C$  la frontera del cuadrado cuyos lados están sobre las rectas  $x = \pm 2$  e  $y = \pm 2$ , donde  $C$  se recorre en sentido positivo. Calcular:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_C \frac{e^{-z} dz}{z - \frac{\pi i}{2}}; & \text{b) } & \int_C \frac{\cos z dz}{z^2 + 8}; & \text{c) } & \int_C \frac{z dz}{2z + 1}; \\ \text{d) } & \int_C \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) dz}{(z - x_0)^2} \quad (-2 \leq x_0 \leq 2); & \text{e) } & \int_C \frac{\cosh z dz}{z^4}; \end{aligned}$$

*Sol.* a)  $2\pi$ ; b) 0; c)  $-\frac{\pi i}{2}$ ; d)  $i\pi \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$ ; e) 0.

19. Hallar el valor de la integral de  $g(z)$  sobre el círculo  $|z - i| = 2$  con la orientación positiva, cuando:

$$\text{a) } g(z) = \frac{1}{z^2 + 4}; \quad \text{b) } \frac{1}{(z^2 + 4)^2}.$$

*Sol.* a)  $\frac{\pi}{2}$ ; b)  $\frac{\pi}{16}$ .

20. Sea  $C$  un contorno simple cerrado recorrido con sentido positivo y definimos

$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3} ds$$

para cada  $z \in \mathbb{C}$ . Probar que  $g(z) = 6\pi iz$  cuando  $z$  está dentro de  $C$  y que  $g(z) = 0$  si  $z$  está fuera de  $C$ .

21. Calcular todos los posibles valores de

$$\int_{\Gamma} \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 1)^2(z - i)^2} dz$$

donde  $\Gamma$  es una curva cerrada simple que no pasa por las raíces de  $P(z) = (z^2 + 1)^2(z - i)^2$ .

22. Sea  $f(z)$  una función holomorfa.

a) Verifique que  $e^w \neq 0$  para todo  $w \in \mathbb{C}$  y use esa información para probar que  $f(z)e^{iz}$  es una función holomorfa.

b) Si  $\Gamma$  es una circunferencia de radio 1 centrada en  $2i$  y se sabe que

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)e^{-iz}}{(z^2 + 4)} dz = 4 \quad y \quad \int_{\Gamma} \frac{zf(z)}{(z^2 + 4)(z - 2i)} dz = 3i,$$

calcular  $f(2i)$  y  $f'(2i)$ .

23. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 2$$

donde  $P(z)$  es un polinomio de grado 2 y  $\Gamma$  es una curva cerrada que encierra a las raíces de  $P(z)$ .

Sugerencia: Escribir  $P(z) = a(z - z_0)(z - z_1)$  donde  $z_0$  y  $z_1$  son las raíces de  $P(z)$  y usar la fórmula de Cauchy.

**MATEMATICA IV**  
**Práctica 6 – Integrales Reales**

1. Calcular las siguientes integrales, verificando el resultado.

$$a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4} = \frac{5\pi}{32}$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left( \frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right) \quad (a > b > 0)$$

$$e) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi}{4b^3} (1 + ab)e^{-ab} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \operatorname{sen} a \quad (a > 0)$$

**Desigualdad de Jordan.** Para cualquier  $R > 0$  se tiene

$$\int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta < \frac{\pi}{R}$$

2. Dado  $R > 0$  sea  $C_R = \{z = Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ , orientado desde  $z = R$  hasta  $z = -R$ . Sea  $f(z)$  una función analítica en todo el plano complejo tal que para cada  $R > 0$  existe una constante  $M_R > 0$  con  $|f(z)| < M_R, \forall z \in C_R$ , y supongamos que  $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$ . Usando la desigualdad de Jordan, probar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$$

siempre que  $a > 0$ .

3. Usando el ejercicio anterior, verificar las siguientes identidades.

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} ax}{x^4 + 4} = \pi e^{-a} \cos a$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{6} (4e^{-2} - e^{-1})$$

**MATEMATICA IV**

**Práctica 7 – Series de Fourier**

1. Hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones definidas en el intervalo  $[-\pi, \pi]$

a)  $f(x) = \pi$

b)  $f(x) = \text{sen}(x)$

c)  $f(x) = \text{cos}(x)$

d)  $f(x) = \pi + \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$

2. Encontrar la serie de Fourier para las siguientes funciones periódicas de período  $T = 2\pi$  definidas en el intervalo  $(-\pi, \pi]$ :

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0, \\ \cos(x) & \text{para } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{para } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

c)  $f(x) = x^2$

3. Hallar la serie de Fourier para las siguientes funciones

a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{para } -1 < x < 0, \\ 1 - x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde  $f$  es una función de período  $T = 2$ .

b)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -2 < x < -1, \\ x & \text{para } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{para } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

donde  $f$  es una función de período  $T = 4$ .

c)  $f(x) = 1 - x^2$ ,  $-3 < x \leq 3$ , donde  $f$  es una función de período  $T = 6$ .

4. a) Hallar la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde  $f$  es una función de período  $T = 2$ .

- b) Utilizar el desarrollo encontrado en el ítem anterior para demostrar la siguiente igualdad

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

5. Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos tipos:

$$a) x^3 - 2x \quad b) \operatorname{tg}(2x) \quad c) e^{-x} \quad d) (x + x^3)^4 \quad e) \ln(x^2 + 1)$$

6. Demostrar que cualquier función puede expresarse como la suma de otras dos funciones, una que es par y la otra impar. Es decir, para cualquier función  $f$ , cuyo dominio contiene a  $-x$  siempre que contenga a  $x$ , demuestre que existen una función par  $g$  y una función impar  $h$  tales que  $f(x) = g(x) + h(x)$ .

7. Demostrar que la derivada de una función par es impar y que la derivada de una función impar es par.

8. a) Desarrollar la función  $f(x) = x$ ,  $0 \leq x < 2$ , en serie de cosenos.  
b) Utilizar el desarrollo obtenido para demostrar la siguiente igualdad:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

9. Desarrollar en serie de senos la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < \pi, \\ 1 & \text{para } \pi \leq t \leq 2\pi, \\ 2 & \text{para } 2\pi < t \leq 3\pi \end{cases}$$

donde el período de  $f$  es  $T = 6\pi$ .

10. Sea  $F(x)$  una función periódica de período  $2\pi$  dada por la fórmula  $F(x) = x(\pi - x)$  para  $0 \leq x < \pi$ . Extendiendo la definición de forma par e impar, probar las siguientes igualdades:

$$a) \quad x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left( \frac{\cos(2x)}{1^2} + \frac{\cos(4x)}{2^2} + \frac{\cos(6x)}{3^2} + \dots \right).$$

$$b) \quad x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(x)}{1^3} + \frac{\text{sen}(3x)}{3^3} + \frac{\text{sen}(5x)}{5^3} + \dots \right).$$

11. Desarrolle la función  $f(x) = \text{sen}(x)$  definida en  $[0, \pi]$ , en serie de cosenos. Y la función  $f(x) = \text{cos}(x)$  definida en  $[0, \pi]$ , en serie de senos.
12. Desarrolle la función  $f(x) = x^2 + \pi$  definida en  $[0, \pi]$ , en serie de senos.



## MATEMÁTICA IV

### Práctica 8 – Aplicaciones de series de Fourier

1. Encuentre la solución del problema de conducción del calor:

$$100u_{xx} = u_t \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x) - 2\text{sen}(5\pi x)$$

2. Considere la conducción del calor en una varilla de 100 cm de longitud, con coeficiente de difusión 1, y cuyos extremos se mantienen a 0 grados, para todo  $t > 0$ . Halle una expresión para la temperatura  $u(x, t)$ , si la distribución inicial de temperaturas en la varilla se expresa por:

a)

$$u(x, 0) = 50, \quad 0 \leq x \leq 100.$$

b)

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 50 \\ 100 - x & 50 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

3. Hallar el desplazamiento  $u(x, t)$  en una cuerda elástica, de longitud  $\pi$ , fija en los dos extremos, que se pone en movimiento sin velocidad inicial ( $u_t(x, 0) = 0$ ) a partir de la posición inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , donde:

a)

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ \pi - x & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

4. Encuentre el desplazamiento  $u(x, t)$  en una cuerda elástica, de longitud  $\pi$ , fija en los dos extremos, que se pone en movimiento a partir de su posición de equilibrio  $u(x, 0) = 0$ , con una velocidad inicial  $u_t(x, 0) = g(x)$ , donde:

$$g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

5. Encuentre la solución  $u(x, y)$  de la ecuación de Laplace en el rectángulo  $0 < x < 2, 0 < y < 1$  que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 0, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 2,$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$