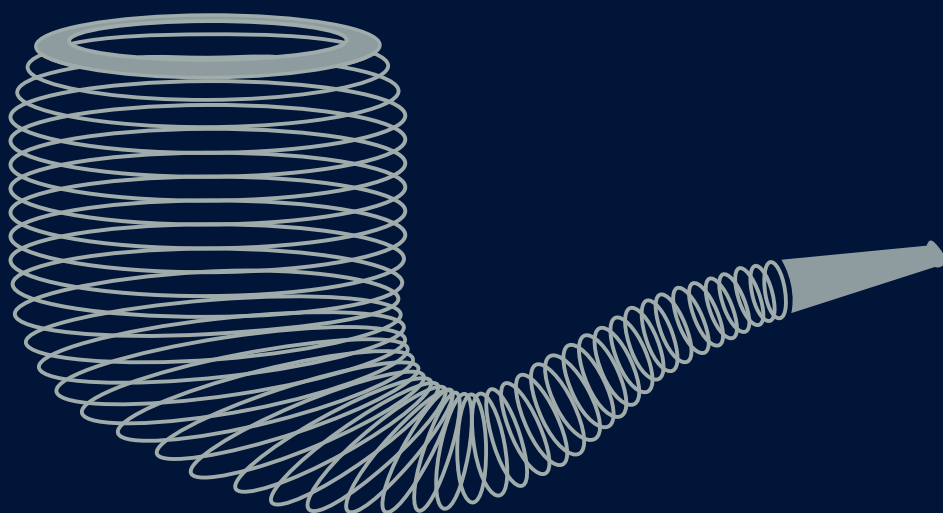


# Notas de mecánica elemental Parte I

Alejandro José Fendrik



David Hipólito Margarit  
Marcela Verónica Reale  
Ariel Fabricio Scagliotti  
**Compiladores**

TEXTOS BÁSICOS  
CIENCIAS EXACTAS

EDICIONES **UNGS**



Universidad  
Nacional de  
General  
Sarmiento



NOTAS DE MECÁNICA ELEMENTAL

PARTE I

---

Fendrik, Alejandro José

Notas de mecánica elemental : parte 1 / Alejandro José Fendrik ; Compilación de David Hipólito Margarit ; Marcela Verónica Reale ; Ariel Fabricio Scagliotti. - 1a ed - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2022.

Libro digital, PDF - (Textos básicos / 31)

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-630-626-3

1. Mecánica. 2. Física. 3. Cinemática. I. Margarit, David Hipólito, comp. II. Reale, Marcela Verónica, comp. III. Scagliotti, Ariel Fabricio, comp. IV. Título.

CDD 531.01

---

© Universidad Nacional de General Sarmiento, 2022

J. M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)

Prov. de Buenos Aires, Argentina

Tel.: (54 11) 4469-7507

ediciones@campus.ungs.edu.ar

ediciones.ungs.edu.ar

Diseño gráfico de interior y tapas: Daniel Vidable

Diagramación: Marcela Verónica Reale

Corrección: Gustavo Castaño

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.

Prohibida su reproducción total o parcial.

Derechos reservados.



Libro  
Universitario  
Argentino



TEXTOS BÁSICOS

---

CIENCIAS EXACTAS

# Notas de mecánica elemental

## Parte I

ALEJANDRO JOSÉ FENDRIK

DAVID HIPÓLITO MARGARIT, MARCELA VERONICA REALE,

Y ARIEL FABRICIO SCAGLIOTTI

(COMPILADORES)

EDICIONES **UNGS**



Universidad  
Nacional de  
General  
Sarmiento



# Índice

<b>I</b>	<b>13</b>
<b>1 Cinemática</b>	<b>15</b>
1.1 Sistemas o cuerpos puntuales . . . . .	16
1.2 Vector posición, vector velocidad, vector aceleración y trayectoria	19
1.3 Cinemática de sistemas unidimensionales . . . . .	29
1.4 ¿Movimiento acelerado o desacelerado? . . . . .	30
1.5 Gráficos de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo . . . . .	32
1.6 Integraciones y derivaciones . . . . .	34
1.6.1 Caso en el que se conoce $a = a(v)$ . . . . .	38
1.6.2 Caso en el que se conoce $a = a(x)$ . . . . .	44
1.6.3 ¿Cómo se obtiene $v = v(x)$ o $x = x(v)$ ? . . . . .	48
1.7 Movimiento relativo . . . . .	49
1.8 Ejercicios resueltos del capítulo . . . . .	53
<b>2 Cantidad de movimiento y dinámica</b>	<b>67</b>
2.1 Inercia - Masa inercial . . . . .	68
2.2 Cantidad de movimiento . . . . .	72
2.3 Choques . . . . .	78
2.4 Centro de masa . . . . .	80

2.5	Cantidad de movimiento total y muchos cuerpos . . . . .	81
2.6	Estudiando las interacciones . . . . .	84
2.7	Tipos de interacciones . . . . .	90
2.7.1	Interacciones “a distancia” . . . . .	90
2.7.2	Interacciones de vínculo . . . . .	95
2.8	Fuerzas Internas y Externas . . . . .	104
2.9	Unidades de Fuerza . . . . .	106
2.10	“Fuerza” de retropropulsión. Masa variable . . . . .	109
2.11	Generalización a más de una dimensión . . . . .	117
2.11.1	Posición, velocidad y aceleración del centro de masa . . . . .	120
2.11.2	Leyes de Newton . . . . .	121
2.11.3	Choques en más de una dimensión . . . . .	125
2.12	Fuerza de rozamiento . . . . .	125
2.13	Rozamiento Dinámico . . . . .	134
2.14	Ejercicios resueltos del capítulo . . . . .	139
<b>3</b>	<b>Dinámica circular</b>	<b>161</b>
3.1	Descomposición de la segunda ley de Newton utilizando otros versores . . . . .	162
3.2	Descomposición en versores intrínsecos . . . . .	163
3.3	Descomposición de la segunda ley de Newton en versores polares . . . . .	173
3.4	Ejercicios resueltos del capítulo . . . . .	193
<b>4</b>	<b>Trabajo y energía</b>	<b>201</b>
4.1	Trabajo y energía . . . . .	202
4.2	Potencia . . . . .	210
4.3	Fuerzas conservativas y no conservativas . . . . .	211
4.4	Energía Potencial . . . . .	216

4.4.1	Algunas fuerzas conservativas (además del peso) . . . . .	223
4.4.2	Una observación sobre la energía potencial . . . . .	230
4.5	Gráficos y diagramas de energía . . . . .	231
4.5.1	Aproximación armónica para el movimiento alrededor de un punto de equilibrio estable . . . . .	237
4.6	Energía cinética y choques . . . . .	238
4.7	Como cultura general . . . . .	241
4.8	Ejercicios resueltos del capítulo . . . . .	246
 <b>A Identidades trigonométricas</b>		 <b>257</b>
 <b>B Resumen de álgebra lineal</b>		 <b>259</b>
B.1	Vectores . . . . .	259
B.2	Operaciones . . . . .	261
B.2.1	Suma . . . . .	261
B.2.2	Producto por un escalar . . . . .	262
B.2.3	Propiedades . . . . .	263
B.3	Norma . . . . .	263
B.3.1	Propiedades . . . . .	264
B.3.2	Distancia entre dos puntos . . . . .	265
B.4	Producto interno . . . . .	266
B.4.1	Propiedades . . . . .	266
B.4.2	Ángulo entre vectores . . . . .	267
B.5	Producto vectorial . . . . .	268
B.5.1	Propiedades . . . . .	268
 <b>C Desarrollo de una función en serie de potencias</b>		 <b>271</b>
C.1	Series de potencias . . . . .	271
C.1.1	Propiedades . . . . .	272

C.2	Desarrollo de funciones en serie de potencia . . . . .	274
C.2.1	Serie de Taylor . . . . .	274
C.2.2	Desarrollo o Polinomio de Taylor de orden $n$ . . . . .	275
C.3	Algunos desarrollos útiles . . . . .	276
<b>Índice alfabético</b>		<b>277</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>279</b>

## Prólogo

Comienzo a escribir este prólogo sabiendo que las palabras serán insuficientes y, posiblemente, torpes para expresar todo lo que quisiera. Comienzo pensando que esto me pondrá triste, y sin embargo...

Porque claro, hablar de Alejandro Fendrik es también evocarlo, hacerlo presente. Y su presencia siempre estuvo asociada para mí a buenos momentos. Entonces, teniéndolo aquí, opto por hablarle, directamente, sin más vueltas:

Querido Ale:

No debiste irte. Todavía nos hacen falta tus sabias conversaciones, tu sonrisa pícaro mientras ensayabas esos floridos razonamientos. Y también tu seriedad cuando el tema se profundizaba. Nos hacés falta en síntesis. Me imagino volver a encontrarte cada vez que llego a la universidad, y te imagino con tu pipa (juiciosamente vacía y apagada) saludando con tu típico “¡Salve, Doctor!”.

No puedo evitarlo y está bien. Porque todos los que te conocemos (notarás que uso el tiempo presente, como corresponde), necesitamos que nos sigas acompañando. Aunque sea a predicar en el desierto.

Y aquí está una obra, un libro que son dos, y que es mucho más que dos libros: es un legado cariñoso y entrañable como solamente vos podías haber construido. Mientras todos renegábamos por la pandemia y las clases virtuales, vos hacías algo más: ibas preparando amorosamente un manuscrito con tus clases, haciendo tus gráficos, dándole forma a estas notas. Porque querías que los estudiantes lo tuvieran disponible; y por supuesto que fuera lo más perfecto posible.

Y te cuento (porque tal vez no lo sabés todavía) que el trabajo de “tus muchachxs”, David, Marcela y Ariel, tipeando todo para su edición formal, lo están haciendo posible. Y también el amor de Lili, que es tan generosa que me pide este prólogo. Y acá estamos. Porque no importa cuantas broncas te hayas aga-

rrado cuando la “burrocracia” trababa el fluir de las cosas, o cuántas ironías no te hayan entendido (tus dardos igual daban en el blanco de una u otra forma); no importa que la muerte enamorada (a quien no perdonaremos nosotros tampoco) te haya llamado antes de tiempo, porque aquí están las notas, para que otros aprendan, para que sigamos amando el sueño de educar, enseñar, estimular las inteligencias.

Y para que te sigamos teniendo un poco con nosotros, siempre.

Fernando R. Momo

Mayo de 2022



# Parte I



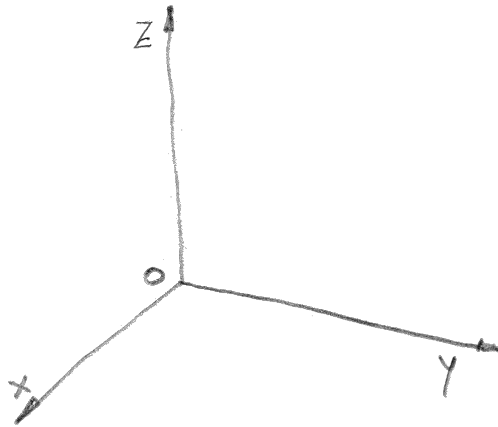
# **Capítulo 1**

## **Cinemática**

## 1.1. Sistemas o cuerpos puntuales

Los sistemas físicos más simples son los llamados “sistemas puntuales” o “cuerpos puntuales”. ¿En qué consisten?. Bueno, sabemos que el concepto de “punto” es un concepto matemático asociado a la ausencia de dimensiones. En la naturaleza (objeto de estudio de la física) *no existen puntos*. Entonces, ¿qué es un cuerpo puntual?. Para responder esta pregunta lo primero que debemos introducir es un sistema de referencia. El sistema de referencia indica en qué lugar estamos ubicados o desde dónde observamos el universo. Generalmente se grafica como:

**Figura 1.1:**

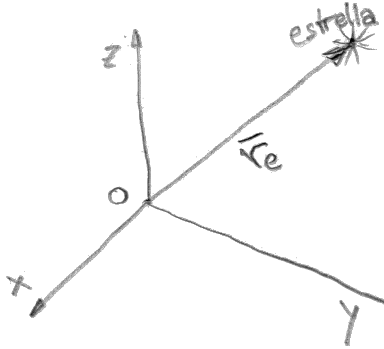


Esto es un sistema de coordenadas (en principio en 3 dimensiones dado que el espacio físico es 3D). Desde su origen, que representa un lugar donde está el observador (nosotros), intentamos descubrir todo lo que sucede. *No sirve ningún tipo de descripción o modelado para un fenómeno natural si no está indicado el sistema de referencia.*

Supongamos que el origen de nuestro sistema de referencia se encuentra en algún punto de la superficie terrestre y desde allí observamos una estrella. La posición de la estrella está determinada por un vector: el vector  $\vec{r}_e$ . Estamos ob-

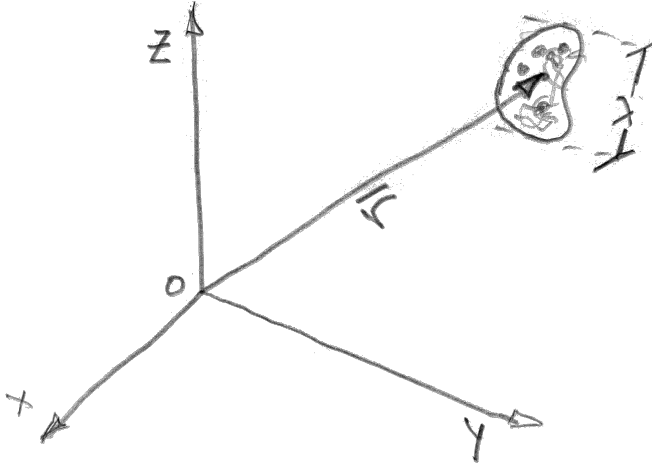
servando la estrella que está ubicada a una distancia  $d = |\vec{r}_e|$ . A esta altura del partido, sabemos que las estrellas consisten en sistemas esferoidales (con forma de esfera) de cierto radio  $a_e$ .

**Figura 1.2:**



Para dar un ejemplo, supongamos que estamos observando a *VY Canis Majoris* ( $d = 5$  años luz  $= 47.3 \times 10^{12} km$  y  $a_e = 98 \times 10^7 km$ , una de las estrellas más grandes que se conocen). Sin embargo, la vemos como “un puntito luminoso”. ¿Por qué? Porque la estamos viendo desde una distancia mucho mayor que su radio. Lo mismo podríamos decir para un avión que observamos volando en la lejanía: si está suficientemente lejos, lo veremos como un “un puntito que se mueve”. Sabemos perfectamente que un avión no es un “puntito”, es un objeto que tiene cierta forma y que además tiene cosas adentro que pueden estar moviéndose (pasajeros, pilotos, azafatas, carga, etcétera). Sin embargo, si estamos suficientemente lejos del avión, toda esa forma y estructura interna no la observamos. En suma, podemos decir que cualquier sistema físico es un sistema puntual cuando se lo describe desde una distancia mucho más grande que su radio (o longitud) típica.

Figura 1.3:



En el gráfico, donde  $d = |\vec{r}|$ : distancia de observación.  $\lambda$ : longitud típica. Si  $\frac{\lambda}{d} \ll 1$  el sistema será puntual. Si esto no se cumple estaremos en lo que “sucede” adentro: el sistema deja de ser puntual.

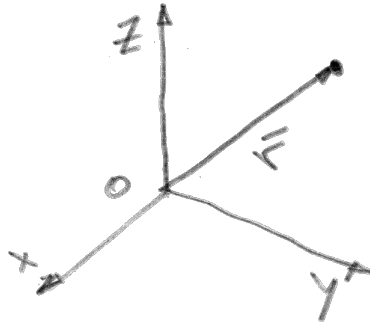
Estas observaciones están relacionadas con la validez de los modelos. Los físicos elaboran modelos que permiten describir los fenómenos que ocurren en los sistemas naturales, pero no debemos confundir los sistemas con sus modelos. Consideremos un automóvil: si queremos describir su movimiento por una ruta cuando va desde un pueblo a otros, el modelo puntual de automóvil es el adecuado. Pero si queremos describir el movimiento de los pistones dentro de los cilindros del motor, el modelo puntual no nos sirve.

Volviendo a los sistemas puntuales, al no tener ninguna estructura interna (ya sea porque no la tenga o porque no estamos en condiciones de observarla) el único fenómeno observable será su movimiento. Comenzaremos entonces a estudiar cómo describir el movimiento de los cuerpos, esto es lo que se conoce con el nombre de cinemática.

## 1.2. Vector posición, vector velocidad, vector aceleración y trayectoria

Como ya dijimos, la posición de un cuerpo puntual está determinada por un vector llamado posición  $\vec{r}$ . Si este vector permanece constante a medida que transcurre el tiempo, quiere decir que el cuerpo está en *reposo*.

Figura 1.4:

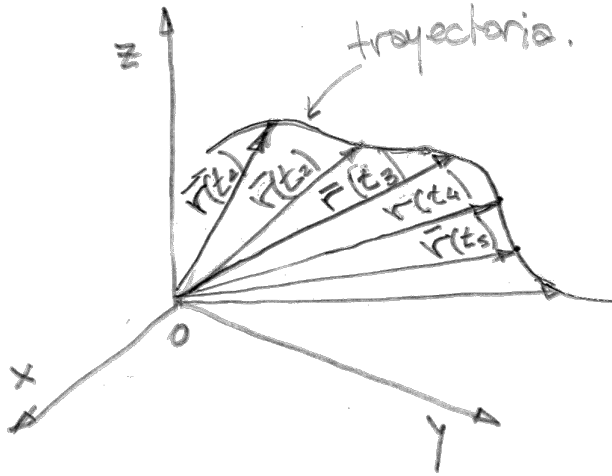


En general, tendremos que  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , es decir que la posición del cuerpo variará con el tiempo (el cuerpo se mueve). La expresión

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

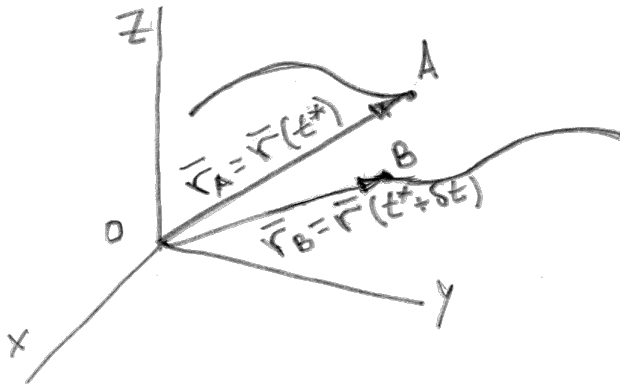
es conocida como posición en función del tiempo. Supongamos que la posición de nuestro punto varía con el tiempo. Esto quiere decir que a medida que transcurre el tiempo nuestro “punto” va describiendo en el espacio una curva formada por las sucesivas posiciones a distintos tiempos. Esta curva es la *trayectoria* del sistema. Una propiedad inmediata y evidente que tiene que tener cualquier trayectoria es que debe ser necesariamente *continua*.

Figura 1.5:



En efecto, supongamos que un sistema tiene una trayectoria como la siguiente:

Figura 1.6:



Para  $t \leq t^*$  la trayectoria es una curva continua que finaliza en  $\bar{r}_A$  (el punto A). Para  $t > t^*$  (es decir,  $t = t^* + \delta t$ ) la trayectoria es una curva continua que parte de  $\bar{r}_B$  (el punto B). Esto quiere decir que si bien  $\bar{r}(t^*) = \bar{r}_A$ , resulta que

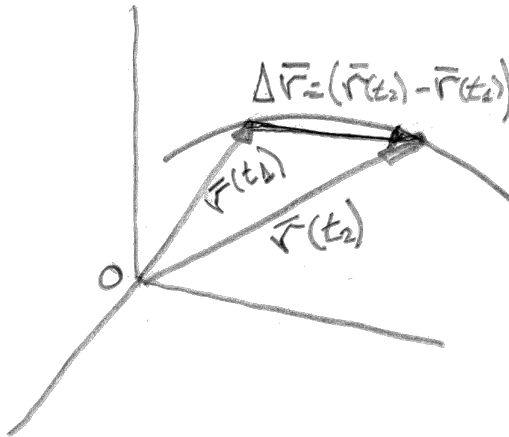
$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \bar{r}(t^* + \delta t) = \bar{r}_B$$



Esto implica que la posición del sistema en  $t^*$  no está definida. Esta posición es  $\vec{r}_A$  e instantáneamente pasa a  $\vec{r}_B$ . Esto significa que el sistema cuando llega a  $\vec{r}_A$  se esfuma y reaparece en ese mismo instante en  $\vec{r}_B \neq \vec{r}_A$ . A menos que estemos ante un fenómeno de teletransportación (no detectado aún por nadie, al menos para un objeto corriente), esto no puede ser. Imaginemos una mosca que en algún momento de su vuelo desaparece y aparece en otro punto del espacio. Si observamos tal cosa deberíamos publicarlo (no sin antes verificar que no anduvimos alucinando). En suma, no es posible que un sistema se traslade entre dos posiciones separadas sin pasar por posiciones intermedias (no hay “saltos”).

Otra magnitud fundamental para describir el movimiento está relacionada con la variación de la posición a medida que transcurre el tiempo. Supongamos que nuestro sistema en el tiempo  $t_1$  se encuentra en  $\vec{r}(t_1)$  y a tiempo  $t_2$  se encuentra en  $\vec{r}(t_2)$ . Decimos entonces que en un tiempo  $(t_2 - t_1)$  el cuerpo se desplazó de  $\vec{r}(t_1)$  a  $\vec{r}(t_2)$ .

**Figura 1.7:**



Al vector

$$\Delta \vec{r} \Big|_{t_1}^{t_2} = (\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1))$$

se lo conoce como vector desplazamiento. Este vector está contenido en la recta

secante a la trayectoria en los puntos correspondientes a  $\bar{r}(t_2)$  y  $\bar{r}(t_1)$ . Si hacemos el cociente

$$\frac{\Delta \bar{r} \Big|_{t_1}^{t_2}}{(t_2 - t_1)} = \frac{\bar{r}(t_2) - \bar{r}(t_1)}{(t_2 - t_1)} = \langle \bar{v} \rangle$$

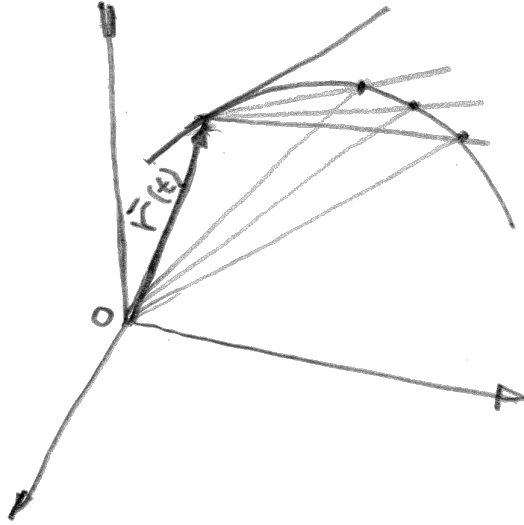
obtendremos un vector  $\langle \bar{v} \rangle$  conocido como *velocidad media*, que nos dará una idea de cuán rápido varía el vector posición. Su módulo está relacionado con cuán rápido se desplaza  $\left( \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado}} \right)$ , y su dirección y sentido, hacia dónde se desplaza. Sin embargo,  $\langle \bar{v} \rangle$  puede conducir a conclusiones engañosas. Veamos un ejemplo:

Supongamos que un día medimos la posición del Sol desde un balcón, y al día siguiente, a la misma hora, la medimos nuevamente desde el mismo balcón. Si calculamos la velocidad media en  $(t_2 - t_1) = 24 \text{ horas}$ , debido a que  $\Delta \bar{r} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$  (el Sol está en la misma posición) resulta que  $\langle \bar{v} \rangle = 0$ . Sin embargo, sabemos que el Sol se movió (y mucho) a través del cielo. Esto nos está indicando que  $\langle \bar{v} \rangle$  no es la cantidad adecuada, en general, para caracterizar el movimiento. Procederemos entonces a calcular cómo sigue si la posición a tiempo  $t$  es  $\bar{r}(t)$  y a tiempo  $(t + \Delta t)$  es  $\bar{r}(t + \Delta t)$ . Calculamos el cociente

$$\frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\bar{r}(t_2) - \bar{r}(t_1)}{(t_2 - t_1)} = \langle \bar{v} \rangle$$

Hasta aquí, esta es la velocidad media en el intervalo  $\Delta t$ . ¿Qué pasa si consideramos  $\Delta t$  cada vez más chicos? (Es decir,  $\Delta t \rightarrow 0$ , se ve en el gráfico que a medida que disminuye  $\Delta t$ , la secante (recta que contiene a  $\langle \bar{v} \rangle$ ) tiende a la tangente en  $\bar{r}(t)$  (dado que si  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\bar{r}(t + \Delta t) \rightarrow \bar{r}(t)$ ). Definimos entonces.

Figura 1.8:

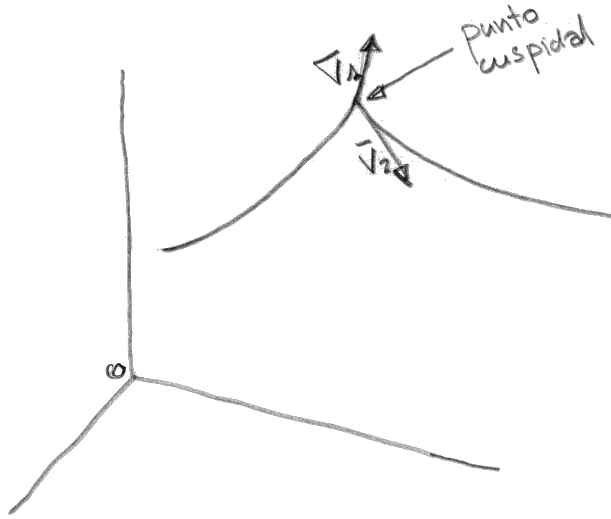


$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{v} \text{ (vector velocidad)}$$

o también  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  (la derivada respecto del tiempo del vector posición). Este vector describe la variación de la posición a cada instante. Notemos que su módulo nos dice cuán “rápido” se mueve nuestro sistema, y su dirección (tangente a la trayectoria) y sentido, hacia dónde lo hace.

La existencia del vector  $\vec{v}$  impone otra característica que tienen todas las curvas que son trayectorias. En efecto, si  $\vec{v}$  no se anula en ningún punto de la trayectoria, entonces esta no puede tener puntos cuspidales. Un punto cuspidal en una curva es lo que se muestra en la Fig. (1.9).

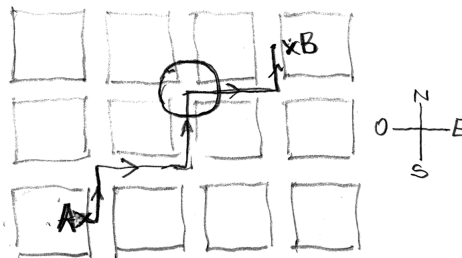
Figura 1.9:



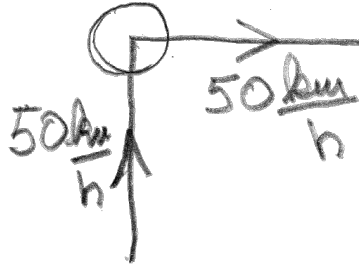
Si la trayectoria tuviese un punto cuspidal, en ese punto nuestro sistema tendría dos vectores velocidad (en ese punto hay dos tangentes a la trayectoria):  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$ . Esto solo puede suceder solo si  $|\bar{v}_1| = |\bar{v}_2| = 0$ , es decir,  $\bar{v} = 0$ . Así y todo, quizás nos crucemos con trayectorias que tienen puntos cuspidales sin que se anule la velocidad, pero esos casos se dan porque hemos realizado una aproximación.

Supongamos que un auto se mueve por las calles de una ciudad para ir de un sitio  $A$  a un sitio  $B$ . Podemos dibujar la trayectoria así: cada vez que el auto dobla, la trayectoria tiene un punto cuspidal, como el que está marcado con el círculo en el siguiente ejemplo:

Figura 1.10:

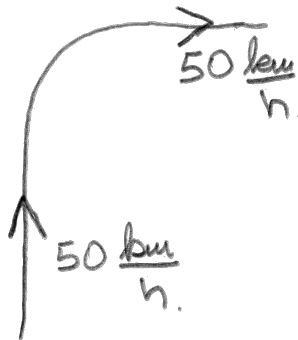


**Figura 1.11:**



Antes del punto cuspidal, el auto se mueve hacia el norte con una velocidad  $50 \frac{km}{h}$ . Después de doblar, se mueve hacia el este a  $50 \frac{km}{h}$ . Esto, por supuesto, es una aproximación. Si ampliáramos el gráfico en la región del supuesto punto cuspidal, veríamos en realidad que la trayectoria es:

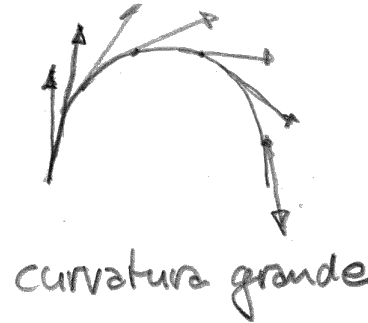
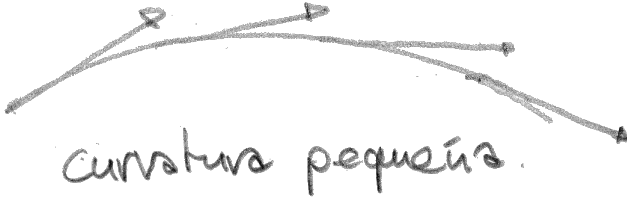
**Figura 1.12:**



Esto significa que la velocidad del auto pasa *de manera continua* por todas las direcciones comprendidas entre el norte y el este. Si este cambio continuo sucede en un “pedacito” muy pequeño de la trayectoria, lo podemos ignorar y suponer que hay un punto cuspidal (siempre teniendo presente que se trata de una aproximación).

La curvatura de las trayectorias está asociada a cuán bruscamente cambia la recta tangente (Fig (1.13)).

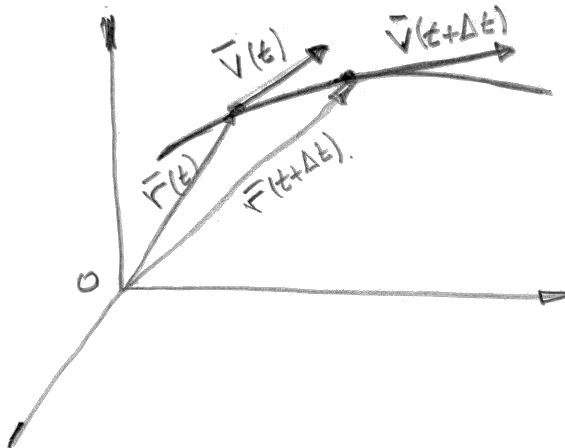
Figura 1.13:



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}$$

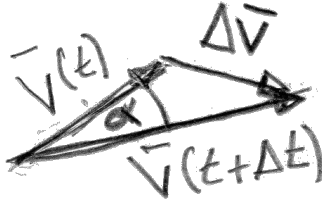
Como ya dijimos, el vector aceleración está asociado a la curvatura de la trayectoria (a través del cambio de la dirección de la velocidad). Como la velocidad también puede cambiar en módulo (nuestro sistema puede ir cada vez más rápido o más despacio), la aceleración contendrá también esta información.

Figura 1.14:



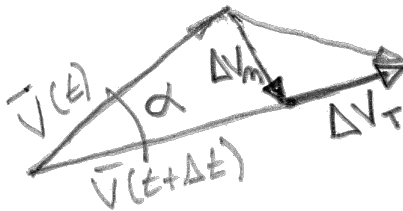
Para calcular la derivada del vector  $\vec{v}$  debemos hacer  $\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) = \Delta\vec{v}$ . Se grafica de la siguiente manera (haciendo un transporte paralelo):

**Figura 1.15:**



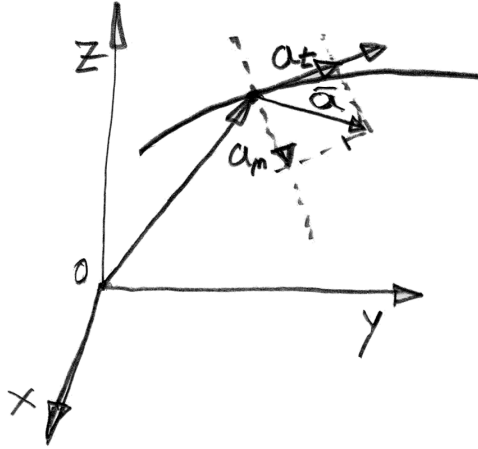
Vemos aquí que el vector  $\Delta\vec{v}$  (que es el que determina la dirección de  $\vec{a}$ ) cuando tomamos el límite de  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ), tiene una componente en la dirección de la trayectoria  $\Delta\vec{v}_t$  y otra,  $\Delta\vec{v}_n$ , normal a ella. En otra imagen:

**Figura 1.16:**



Esto significa que habrá una componente tangencial de la aceleración (asociada al cambio del módulo de la velocidad) y otra componente normal de la aceleración asociada al cambio de dirección de la velocidad y a la curvatura de la órbita. Notemos que la aceleración normal siempre apunta hacia donde se curva la trayectoria. Más adelante volveremos sobre este tema.

Figura 1.17:



Ya hemos presentado todas las magnitudes que describen el movimiento:

1. Vector posición  $\vec{r}$

2. Vector velocidad  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

3. Vector aceleración  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

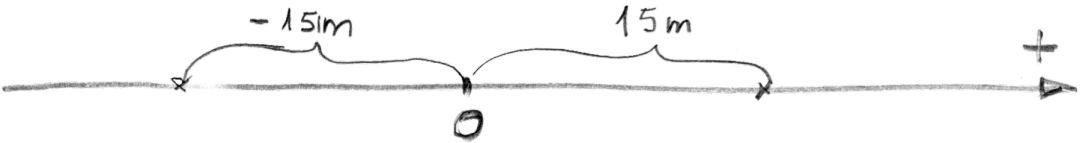
Cabría preguntarse por qué no seguimos con la introducción de derivadas superiores (por ejemplo  $\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$ ). La respuesta es que como veremos, las leyes de la dinámica permiten determinar la aceleración de los sistemas. Lo que aprenderemos ahora es a encontrar la posición en función del tiempo conociendo cómo es la aceleración (provista por las leyes de la dinámica). Esto es, precisamente lo que se entiende por cinemática: el estudio del movimiento sin ocuparse de las cosas que lo producen. Para ello empezaremos con sistemas que se mueven en una dimensión (por lo tanto, sus trayectorias serán rectilíneas).



### 1.3. Cinemática de sistemas unidimensionales

Vamos a estudiar el movimiento de sistemas que se muevan en una dimensión, es decir, sobre una recta (movimiento rectilíneo). Para este caso, entonces, el sistema de referencia es una recta, y fijado el origen (o posición del observador), la posición de un cuerpo sobre la recta estará dado por una sola coordenada,  $x$ . Entonces tendremos:

**Figura 1.18:**



Fijado el origen ( $o$ ), elegimos (e indicamos) un sentido positivo (notar la flechita con el  $+$  arriba). Esto quiere decir que si tenemos nuestro sistema en  $x = 15 \text{ metros}$ , estará situado a  $15 \text{ metros}$  de  $o$  hacia la derecha. Si en cambio  $x = -15 \text{ metros}$  ( $m$ ), estará situado a  $15 m$  de  $o$  hacia la izquierda. Lo primero que debemos hacer para estudiar un movimiento es lo que acabamos de hacer: un diagrama en donde esté claramente indicado el origen y el sentido positivo. Para este tipo de problemas, la posición en función del tiempo es una función  $x = x(t)$  que especifica dónde está posicionado el sistema, respecto del origen  $o$ , a tiempo  $t$ . Es claro que  $x = x(t)$  es una función de  $t$ : para cada  $t$  hay una y solo una posición (¡esquizofrénicos abstenerse!). La velocidad está definida como

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Notemos que si  $x(t + \Delta t) > x(t)$ ,  $\frac{dx}{dt} = v > 0$ , y esto significa que el sistema se

mueve hacia la dirección + (la derecha, en el sistema de referencia que definimos antes). Por otra parte, si  $x(t + \Delta t) < x(t)$ , el sistema se estará moviendo hacia la izquierda  $\left( v = \frac{dx}{dt} < 0 \right)$ .

La aceleración queda definida como:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Aquí debemos remarcar que al ser trayectoria rectilínea, la velocidad (recordemos que es tangente a la trayectoria) siempre permanecerá sobre la recta  $x$  (puede cambiar de sentido pero nunca de recta de acción). Esto significa que al no haber cambio de dirección en la velocidad, la aceleración, en esta clase de problemas (rectilíneos), siempre estará asociada al cambio del módulo de la velocidad.

## 1.4. ¿Movimiento acelerado o desacelerado?

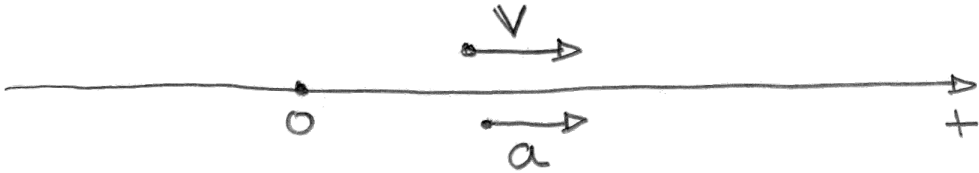
En lenguaje coloquial (lenguaje corriente, no científico) existen las palabras “aceleración” y “desaceleración”. El significado de “aceleración” se aplica a algo que cada vez va más rápido y el de “desaceleración” a algo que cada vez va más lento.

Para un científico no existe “desaceleración”. La aceleración es la variación de la velocidad, y en un problema unidimensional puede ser mayor que cero (positiva) o menor que cero (negativa). Estos signos claramente dependerán de cómo hayamos definido nuestro sistema de referencia. Es un error habitual introducir el lenguaje coloquial dentro de la ciencia. Es así que se suele decir que si  $a = \frac{dv}{dt} > 0$  el movimiento es acelerado, y si  $a = \frac{dv}{dt} < 0$  el movimiento es desacelerado, en el sentido coloquial de las palabras. Esto, claramente, *no es cierto*. Podemos tener  $a > 0$  y que el sistema se mueva cada vez más despacio o tener

$a < 0$  y que el sistema cada vez se mueva más rápido. Veamos:

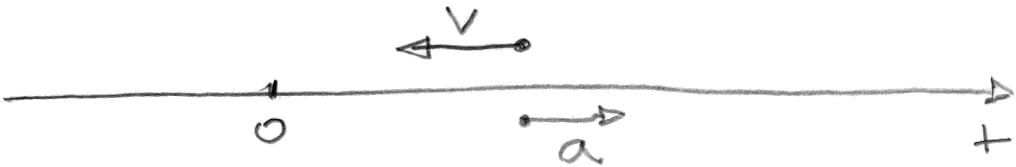
1. Supongamos que tenemos un móvil moviéndose hacia la derecha ( $v > 0$ ), con una aceleración  $a > 0$ . Es decir: en estas condiciones, el móvil se moverá hacia la derecha cada vez más rápido (en lenguaje coloquial está “acelerado”).

**Figura 1.19:**



2. Supongamos ahora que el móvil se mueve hacia la izquierda ( $v < 0$ ) y la aceleración sigue siendo  $a < 0$ :

**Figura 1.20:**



En este caso, el móvil se seguirá moviendo hacia la izquierda, pero cada vez más despacio (en lenguaje coloquial está “desacelerando”). Sin embargo, en algún momento se detendrá ( $v = 0$ ) y a partir de ese momento comenzará a moverse hacia la derecha cada vez más rápido (se convierte en el caso 1 y, coloquialmente pasa a ser “acelerado”).

Veamos aquí que el carácter de “acelerado” o “desacelerado” va a depender del signo relativo entre la velocidad y la aceleración. Si tienen el mismo signo el

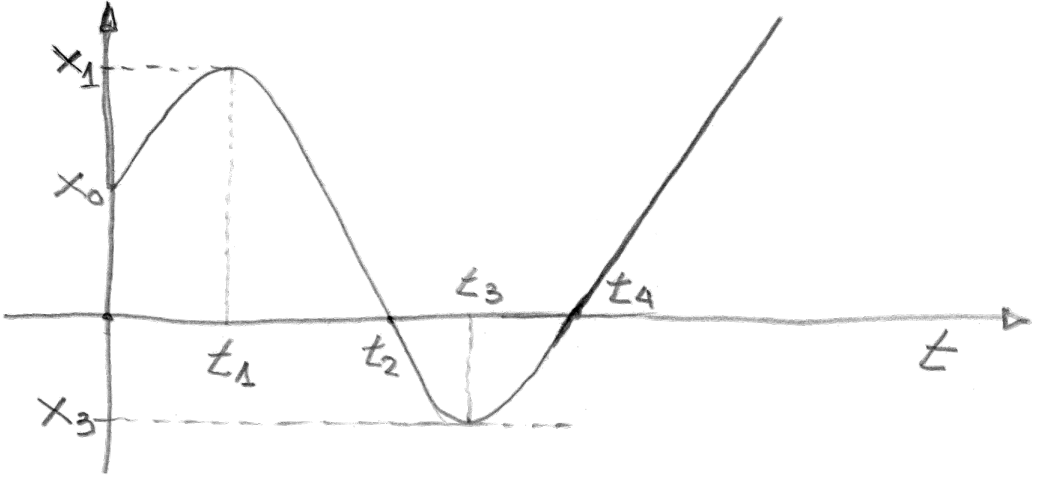
movimiento será, coloquialmente hablando, acelerado (el móvil irá cada vez más rápido). Si en cambio tienen signo contrario, el móvil irá cada vez más despacio. El movimiento del mismo móvil puede pasar de “acelerado” a “desacelerado” y viceversa. Entonces, para evitar confusiones tratemos de desterrar (a menos que lo tengamos bien claro, que la aceleración contraria a la velocidad), si de física se trata, la palabra coloquial “desacelerado”. Simplemente, los movimientos pueden tener una aceleración (que puede ser tanto positiva como negativa) que tendrá diferentes efectos según el signo que tenga su velocidad.

## 1.5. Gráficos de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo

A partir del conocimiento de la posición en función del tiempo,  $x = x(t)$ , podemos obtener fácilmente la velocidad en función del tiempo derivando, es decir,  $v(t) = \frac{dx}{dt}$ . Derivando una vez más, también podemos obtener la aceleración  $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

Supongamos que conocemos  $x = x(t)$ . Si graficamos esta función, podría ser algo así:

Figura 1.21:



Esta curva siempre va a ser continua y derivable en todas partes: las razones son las mismas por las cuales las trayectorias deben ser continuas y derivables (como ya discutimos):

1. *La posición no puede “pegar saltos”.*
2. *La velocidad de un cuerpo siempre está definida y es única para cada tiempo.*

Si bien la curva  $x = x(t)$  tiene estas dos propiedades, que también tiene la trayectoria, notemos que la curva  $x = x(t)$  no tiene nada que ver con la trayectoria, que es siempre sobre el eje  $x$ , es decir rectilínea. La función  $x = x(t)$  que hemos graficado nos dice que el móvil parte del punto  $x_0$  a  $t = 0$ , y se aleja del origen en dirección positiva. A tiempo  $t_1$  llega al punto  $x_1$ . Allí, su velocidad se anula ( $x_1 = x(t_1)$ ), es un máximo relativo de  $x(t)$ , por lo tanto  $v(t_1) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_1} = 0$ , para luego retornar hacia el origen. A tiempo  $t = t_2$  pasa por el origen y continúa alejándose de él hacia la dirección negativa. A tiempo  $t = t_3$  se detiene

nuevamente, para luego retornar al origen, el cual alcanza en  $t = t_4$ , para seguir de largo y finalmente alejarse en la dirección positiva.

Este gráfico también nos da toda la información necesaria sobre la velocidad y la aceleración. En efecto, sabemos el significado geométrico que tiene la derivada en una función. La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto (recordemos que la pendiente de una recta es la tangente trigonométrica al ángulo formado entre la recta y el eje de abscisas). La curva que representa la velocidad en función del tiempo debe ser necesariamente continua, (¿por qué?). Sin embargo podría tener algún punto cúspide (piensen un ejemplo). Por otro lado, la aceleración, al ser  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , está asociada a la concavidad y a los puntos de inflexión de  $x(t)$

## 1.6. Integraciones y derivaciones

Como ya dijimos, el problema de la cinemática consiste en hallar  $x = x(t)$ , conocida la aceleración de  $a$ . Si ya nos dan la solución  $x = x(t)$ , hallar  $x(t)$  y  $a(t)$  es trivial. Basta saber derivar. ¿Cómo procederemos si lo que conocemos es  $a = a(t)$  y queremos saber cómo será  $x = x(t)$ ? Tendremos que integrar. El problema a resolver es el siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t) \quad (1.1)$$

Queremos hallar una función  $x = x(t)$  tal que la derivada segunda me da una función que conocemos (dato),  $a = a(t)$ . Desde el punto de vista matemático, la Ec. (1.1) es lo que se conoce con el nombre de una ecuación diferencial (una relación que debe cumplir una función y sus derivadas). Por cierto, es una ecuación diferencial de las más fáciles y se puede resolver por integración directa. Como está involucrada una derivada segunda, debemos integrar dos veces:

Primero.

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \Rightarrow dv = a(t)dt \Rightarrow \int_{v_o}^{v(t)} dv' = \int_{t_o}^t a(t')dt' \Rightarrow v(t) - v_o = \int_{t_o}^t a(t')dt'$$

Entonces,

$$v(t) = v_o + \int_{t_o}^t a(t')dt'$$

esta es la velocidad en función del tiempo. Notemos que al integrar nos aparece  $v_o$  (es decir, la velocidad en un tiempo dado  $t_o$ , o sea  $v_o = v(t_o)$ ). Si queremos conocer  $v = v(t)$ , debemos contar con ese dato (como casualmente  $t_o = 0$ , a  $v_o$  se la llama velocidad inicial).

Segundo.

Si ya contamos con  $v = v(t)$ , para hallar  $x = x(t)$  hacemos

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \Rightarrow dx = v(t)dt \Rightarrow \int_{x_o}^{x(t)} dx' = \int_{t_o}^t v(t')dt' = \int_{t_o}^t \left( v_o + \int_{t_o}^{t'} a(t'')dt'' \right) dt'$$

$$\Rightarrow x(t) - x_o = v_o(t - t_o) + \int_{t_o}^t \left[ \int_{t_o}^{t'} a(t'')dt'' \right] dt'$$

Así

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \int_{t_o}^t \left[ \int_{t_o}^{t'} a(t'')dt'' \right] dt' \quad (1.2)$$

Aquí, nuevamente, la integración introduce una constante que debemos conocer para resolver el problema:  $x_o = x(t_o)$ , es decir la posición a tiempo  $t_o$ . Como usualmente  $t_o = 0$ , a  $x_o$  se la conoce como posición inicial.

La Ec. (1.2) puede parecer complicada, pero en realidad es muy simple: la integral entre corchetes  $\left[ \int_{t_0}^{t'} a(t'') dt'' \right]$ , podrá ser fácil o complicada pero una vez hecha resulta una función de  $t'$  ( $t'$  está en el límite superior). Si llamamos a esa función  $A(t')$ , lo que hacemos después es:  $\int_{t_0}^t A(t') dt'$ , que va a ser una función de  $t$  y listo.

Apliquemos lo que acabamos de aprender al sencillísimo caso en el que la aceleración es constante. Primero la velocidad en función del tiempo será

$$v(t) = v_o + \int_{t_0}^t a dt'$$

Es decir,

$$v(t) = v_o + a(t - t_o) \quad (1.3)$$

Para la posición tendremos que

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \int_{t_0}^t A(t') . dt' = x_o + v_o(t - t_o) + \int_{t_0}^t \overbrace{a(t' - t_o)}^{A(t')} dt'$$

o sea

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2 \quad (1.4)$$

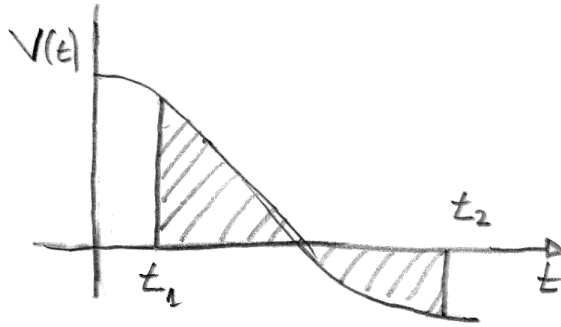
Las Ec. (1.3) y (1.4) son las conocidas velocidad en función del tiempo y posición en función del tiempo para el caso en que la aceleración sea una constante. Este tipo de movimiento es conocido con el nombre de movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) y es solo un movimiento posible dentro del universo de todas las aceleraciones posibles. Basta que  $a = a(t)$ , es decir, que la aceleración no sea una constante, para que las Ec. (1.3) y (1.4) no sirvan para nada. Para terminar, un comentario sobre la relación



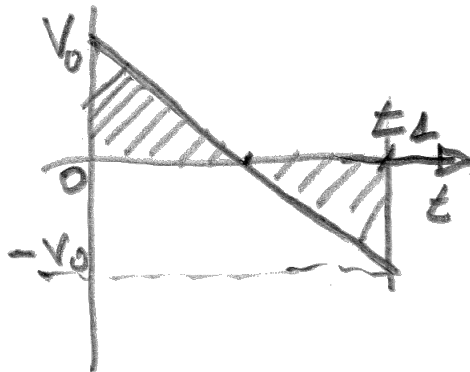
$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot dt \quad (1.5)$$

Esto quiere decir que si tenemos el gráfico  $v = v(t)$ , la relación expresada en la Ec. (1.5), que es el desplazamiento del cuerpo entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  ( $x(t_2) - x(t_1)$ ), es el área (en sentido de la integral definida, o sea, positiva por arriba del eje de abscisas y negativa por debajo de él) subtendida por la curva de  $v(t)$  (la que está rayada en el gráfico). Ojo: el desplazamiento no es la distancia recorrida.

**Figura 1.22:**



**Figura 1.23:**



Consideremos una  $v = v(t)$  como las que se ven en estas figuras. Aquí,  $x(t_2) -$

$x(t_1) = 0$ , el desplazamiento vale cero porque fue y volvió. En cambio, la distancia recorrida es:

$$d = d_{ida} + d_{vuelta} = \frac{v_o t_1}{4} + \frac{v_o t_1}{4} = \frac{v_o t_1}{2}$$

Como ya dijimos, nos ocupa el problema de determinar la posición en función del tiempo  $x = x(t)$ , conocida la aceleración de  $a$ . Esta aceleración está determinada por las leyes de la dinámica (que estudiaremos más adelante). El problema consiste en que, en general, la dinámica no nos dice cómo es la aceleración en función del tiempo  $a = a(t)$ , sino que nos permite conocer la aceleración en función de la posición,  $a = a(x)$ . Si conocemos  $a = a(v)$  o  $a = a(v)$ , no podemos integrar la ecuación diferencial  $\frac{dv}{dt} = a$  directamente dado que  $a = a(t)$  no la conocemos. Es decir, podemos integrar  $dv = a(t)dt$  si conocemos  $a(t)$ , pero si  $a = a(x)$  tendremos  $dv = a(x)dt$  y esto no sabemos qué es a menos que conozcamos  $x = x(t)$ , ya que, en ese caso,  $a(t) = a(x(t))$  y listo. Sin embargo,  $x = x(t)$  es precisamente lo que queremos determinar. Es claro que debemos entonces cambiar la estrategia. A continuación, estudiaremos cómo proceder para determinar  $x = x(t)$  en el caso de conocer  $a = a(v)$  o  $a = a(x)$ .

### 1.6.1. Caso en el que se conoce $a = a(v)$

En este caso

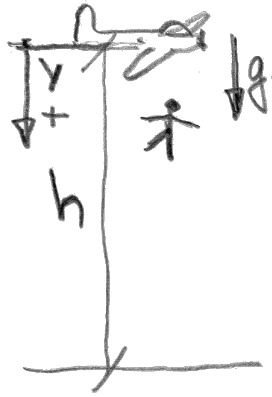
$$\frac{dv}{dt} = a(v) \Rightarrow \frac{dv}{a(v)} = dt \Rightarrow \int_{v_o}^{v(t)} \frac{dv'}{a(v')} = \int_{t_o}^t dt' = (t - t_o)$$

donde  $v_o = v(t_o)$  y  $v = v(t)$ . Siendo  $a(v)$  una función conocida, la integral siempre se puede hacer y resultará una función de  $v$ . De este modo, obtenemos  $t = t(v)$ . Esta función la podemos invertir para obtener  $v = v(t)$ . Una vez conocida  $v = v(t)$ , para hallar  $x = x(t)$  podemos proceder a la integración directa ya que  $\frac{dx}{dt} = v$  y conocemos  $v(t)$ . Es decir

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^t v(t')dt'$$

donde  $x_o = x(t_o)$ . Para que todo esto quede claro veremos un ejemplo: el caso del paracaídas.

**Figura 1.24:**



Todos sabemos que si soltamos un cuerpo desde cierta altura  $h$  respecto del suelo, este caerá hacia el suelo con una aceleración constante  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ . Para ser más preciso. Supongamos que desde un avión que vuela a una altura  $h$  se deja caer un sujeto. Poniendo el origen a la altura del avión y midiendo la posición del sujeto, con sentido positivo hacia abajo, tendremos  $y = \frac{1}{2}gt^2$ ,  $v = gt$ .

Es fácil determinar con qué velocidad va a llegar el cuerpo al piso. En efecto, como  $t = \frac{v}{g}$ , podemos reemplazar este tiempo en la posición  $y$ , con lo cual obtenemos  $y = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g}$ . Si despejamos  $v$ , obtenemos  $v(t) = \sqrt{2gy}$ . Si queremos la velocidad cuando le sujeto toca el piso, hacemos  $y = h$  y entonces  $v(h) = \sqrt{2gh}$ . Como ya intuíamos, cuanto más grande sea  $h$ , más grande será la velocidad con la cual nuestro sujeto se estrole contra el piso. Por ejemplo, si cae desde  $h = 2000m$ , tenemos

$$v(2000m) = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 2000m} \approx 200 \frac{m}{s} = 72 \frac{km}{h}$$

¡Se hace pomada!. Aunque en realidad esto no es tan cierto. Le sujete está moviéndose en el aire y, como también intuimos, algo que se mueve en el aire, el agua o algún medio en general tiende a ser frenado, y se habla de “resistencia” del medio. Este “poder” de frenado, depende bastante de la forma del objeto que se está moviendo. Por eso los autos de alta competencia tienen una forma especial (formas aerodinámicas). Este poder de frenado, además, depende de la velocidad. Cuanto más grande es la velocidad, el medio tiende a frenar más al móvil. Esto lo podemos observar en las películas cuando los malos le disparan al bueno, que está bajo el agua, y, ve cómo las balas que entran a gran velocidad se frenan. Podemos decir que el poder de frenado del medio provee una aceleración  $a = -\beta v$ , donde  $\beta > 0$  es una constante que depende del medio y de la forma del móvil. Notemos que esta aceleración siempre se opone a la velocidad.

Volviendo a nuestro sujete, su aceleración no será  $a = g = cte$ , sino  $a = g - \beta v$ . Es decir, una  $a = a(v)$ . Prácticamente sin hacer cuentas, podemos pensar lo que va a pasar. Cuando le sujete empieza a caer, a partir de  $v = 0$ ,  $a \approx g$ . Esto hace que la velocidad vaya creciendo, pero como  $a = g - \beta v$ , su aceleración va disminuyendo. Esto sucede hasta que la velocidad alcanza un valor tal que  $a = g - \beta v_{lim} = 0$ . Una vez que la aceleración se anula, le sujete cae con esa velocidad constante  $v_{lim}$  (velocidad límite). Como  $g - \beta v_{lim} = 0$ , entonces

$$v_{lim} = \frac{g}{\beta}$$

El problema es que un cuerpo en el aire tiene un  $\beta_H$  tal que  $v_{lim}$  resulta lo suficientemente grande como para que se estrole igual contra el suelo. Aquí es donde entra el paracaídas: ¡la misión del paracaídas es aumentar el  $\beta$ !

Normalmente, las personas que se arrojan en paracaídas no lo hacen con el

paracaídas abierto sino que caen “libremente” bastante distancia (dicen que esa parte es la más divertida de un salto en paracaídas). En ese caso, el movimiento es tal que durante la caída libre podemos suponer que se alcanza la velocidad límite para un cuerpo humano con un  $\beta_H$ , o sea

$$v_{lim}^{libre} = \frac{g}{\beta_H}$$

El paracaidista cae con esa velocidad constante. En un determinado momento abre el paracaídas y eso cambia el  $\beta$  tal que el nuevo  $\beta(\beta_P)$ , es  $\beta_P > \beta_H$ . En ese instante aparece una aceleración  $a = g - \beta_P v$ . Esta aceleración se opondrá a  $v$  dado que la velocidad que lleva el paracaidista en ese momento es  $v_{lim}^{libre} = \frac{g}{\beta_H}$ , es decir  $a = g - \frac{\beta_P}{\beta_H}g$  o  $a = g(1 - \frac{\beta_P}{\beta_H}) < 0$ , dado que  $\frac{\beta_P}{\beta_H} > 1$ . Esto quiere decir que el paracaidista va frenando hasta que su velocidad límite es

$$v_{lim}^{para} = \frac{g}{\beta_P} < \frac{g}{\beta_H} v_{lim}^{libre}$$

En ese momento, la velocidad se anula y el paracaidista cae con velocidad constante  $v_{lim}^{para}$ . Hagamos ahora las cuentas.

Primero consideremos a alguien que se arroja con el paracaídas ya abierto (esto es un poco irreal). Entonces  $a(v) = g - \beta_P v$  con las condiciones iniciales  $v(t = 0) = 0$  y  $y(t = 0) = 0$ . Entonces, como  $\frac{dv}{dt} = a(v)$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dv}{a(v)} = dt &\Rightarrow \int_{v=0}^v \frac{dv'}{g - \beta_P v'} = \int_{t=0}^t dt' \Rightarrow \frac{1}{\beta_P} \ln(g - \beta_P v') \Big|_{v'=0}^{v'=v} = t \\ &\Rightarrow t(v) = \frac{1}{\beta_P} \ln \left( \frac{g - \beta_P v}{g} \right) \end{aligned}$$

Esto es el tiempo como función de la velocidad. Si ahora invertimos y despejamos  $v$ , obtenemos

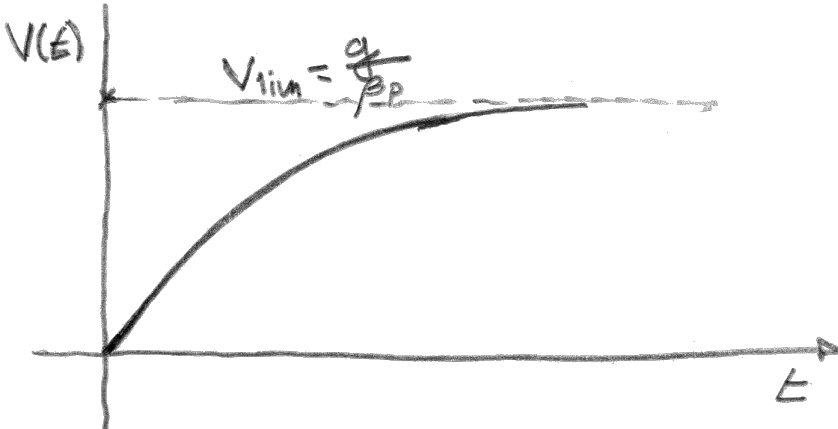
$$-\beta_P t = \ln\left(\frac{g - \beta_P v}{g}\right) \Rightarrow g e^{-\beta_P t} = g - \beta_P v \Rightarrow \beta_P v = g(1 - e^{-\beta_P t})$$

Lo que implica

$$v(t) = \frac{g}{\beta_P}(1 - e^{-\beta_P t})$$

Si graficamos  $v(t)$  vs.  $t$ , vemos que la velocidad de caída tiende a  $v_{lim}$ .

**Figura 1.25:**



Veamos qué pasa si el paracaidista cae un tiempo  $t_o$  libremente antes de abrir el paracaídas. La velocidad para  $0 \leq t \leq t_o$  será igual a la que calculamos antes, solo que con  $\beta = \beta_H$ . Es decir,

$$v(t) = \frac{g}{\beta_H}(1 - e^{-\beta_H t})$$

para

$$0 \leq t \leq t_o$$

La velocidad, cuando se abra el paracaídas, será

$$v(t = t_o) = \frac{g}{\beta_H} (1 - e^{-\beta_H t_o}) = v_o \quad (1.6)$$

Para  $t \leq t_o$ , tendremos (ahora  $\beta = \beta_P$ )

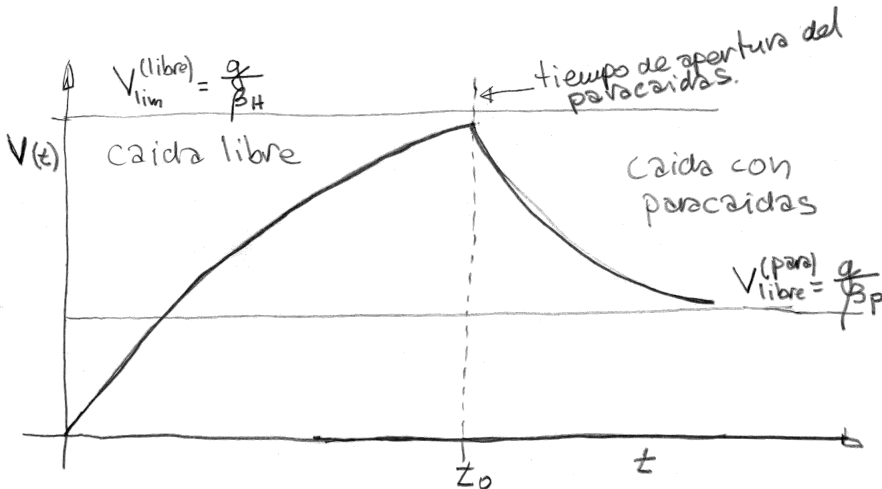
$$\int_{v_o}^v \frac{dv'}{g - \beta_P v'} = \int_{t_o}^t dt' = (t - t_o)$$

Haciendo la integral e invirtiendo (recordar que  $v_o$  está dado por la Ec. (1.6)), resulta

$$\frac{g}{\beta_P} - \left( \frac{g}{\beta_P} - \frac{g}{\beta_H} (1 - e^{-\beta_H t_o}) \right) e^{-\beta_H (t - t_o)}$$

Si graficamos  $v(t)$  vs.  $t$ , tendremos

Figura 1.26:



Vemos aquí que la velocidad alcanzada durante la caída libre  $v_o$  no llega a la límite  $v_{lim}^{libre}$  pero es mayor que la velocidad límite  $v_{lim}^{para}$ . El efecto de agrandar el  $\beta$  ( $\beta_H \rightarrow \beta_P$ ) al abrir el paracaídas hace que la velocidad del paracaidista tienda a  $v_{lim}^{para}$  desde arriba de este valor. Les dejo a ustedes, como problema, el hallar

$x = x(t)$ , para los dos casos (hay que integrar directamente, no hay ninguna vuelta rara).

### 1.6.2. Caso en el que se conoce $a = a(x)$

Aquí debemos emplear otra estrategia. Sabemos que  $a = \frac{dv}{dt}$ , pero no podemos integrar directamente (ya vimos que no conocemos  $x = x(t)$ , que nos permitiría poner  $a(t) = a(x(t))$ ). No conocemos  $x = x(t)$  pero sabemos que esta función existe. Si la conociéramos podríamos invertirla y encontrar  $t = t(x)$ . Si hiciéramos eso, de  $v = v(t)$  (que también desconocemos pero sabemos que existe), podríamos obtener  $v = v(x)$  (reemplazando  $t = t(x)$ ). En ese caso tendríamos

$$\frac{dv(x)}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \quad (\text{dado que } \frac{dx}{dt} = v)$$

Esto es, aplicar la regla de la cadena para la derivación. Entonces tenemos que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} v = a(x) \Rightarrow v dv = a(x) dx$$

Y como  $a(x)$  es una función conocida, podemos integrar

$$\int_{v_o}^v v' dv' = \int_{x_o}^x a(x') dx'$$

donde  $x_o = x(t = t_o)$  y  $v_o = v(t = t_o)$ , son las condiciones iniciales (remarquemos que debemos conocer estos dos datos, si queremos resolver el problema).

Entonces

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_o^2 = \int_{x_o}^x a(x') dx'$$

La integral del segundo miembro siempre se puede hacer (será fácil o difícil, pero se puede hacer, dado que  $a(x)$  es conocida). Su resultado será una función



de  $x$  (que está en el límite superior). Llamando  $u(x)$  a una primitiva de  $a(x)$  (o sea,  $\frac{du}{dx} = a(x)$ ), tendremos

$$\int_{x_o}^x dx' = u(x) - u(x_o) \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_o^2 = u(x) - u(x_o)$$

Entonces obtenemos

$$\frac{1}{2}v^2 - u(x) = \frac{1}{2}v_o^2 - u(x_o)$$

La relación de esta expresión es notable: indica que la cantidad  $\frac{1}{2}v^2 - u(x)$  es una constante. En efecto,  $v$  y  $x$  son la velocidad y posición en un tiempo arbitrario cualquiera, y resulta que  $\frac{1}{2}v^2 - u(x)$  vale lo mismo que  $\frac{1}{2}v_o^2 - u(x_o)$  que es la misma cantidad, pero evaluada en el tiempo inicial  $t_o$ . Esto quiere decir que si la evaluamos inicialmente (cosa que podemos hacer dado que conocemos  $v_o$  y  $x_o$ ), sabremos que vale lo mismo durante todo el movimiento. Llamemos  $\varepsilon$  a esa *constante de movimiento* (ya volveremos a ella, más adelante). Entonces, tenemos que

$$\frac{1}{2}v^2 - u(x) = \varepsilon \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2(\varepsilon + u(x))}$$

Lo que nos da

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{2(\varepsilon + u(x))}} = dt$$

Y ahora podemos integrar

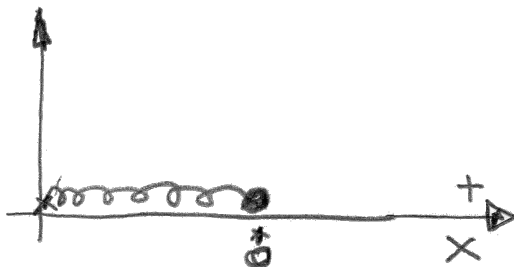
$$\int_{x_o}^x \frac{dx'}{\pm\sqrt{2(\varepsilon + u(x))}} = \int_{t_o}^t dt' = (t - t_o)$$

Aquí, la integral del primer miembro siempre la podemos hacer ( $u(x)$  es una función desconocida, dado que  $\frac{du}{dx} = a(x)$ ) y resulta una función de  $x$  (por el límite superior). De este modo obtenemos  $t = t(x)$ , que al invertir nos conduce a

$x = x(t)$ . Respecto de  $\pm$  frente a la raíz, observemos que si  $x > x_o$  el móvil tiene velocidad + (positiva), y tiene velocidad - (negativa) si  $x_o > x$ .

Veamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un cuerpo atado al extremo de un resorte cuyo otro extremo está fijo a una pared.

**Figura 1.27:**



El resorte puede deformarse (estirarse o comprimirse). El cuerpo está ubicado de modo tal que el resorte no está deformado, y en ese punto ponemos el origen. Si pateamos el cuerpo o deformamos el resorte, el cuerpo empieza a ir y venir. Supongamos que la velocidad apunta hacia la derecha y el resorte está estirado. En ese caso, el cuerpo va a moverse cada vez más despacio (la aceleración apunta hacia la izquierda). Si está estirado y la velocidad apunta hacia la izquierda, en ese caso el cuerpo se moverá cada vez más rápido (también la aceleración apunta hacia la izquierda). Si vemos qué sucede para el resorte comprimido, concluiremos que, en ese caso, la aceleración apunta hacia la derecha.

Para el resorte estirado corresponde  $x > 0$ , y para el resorte comprimido,  $x < 0$ . Vemos entonces que la aceleración tiene signo contrario a  $x$ . Además, cuanto mayor es la deformación del resorte, mayor es el módulo de esa aceleración. Todo esto puede resumirse en que una aceleración dada por  $a = -\alpha x$ , donde  $\alpha > 0$  es una constante que dependerá del resorte, describe adecuadamente la aceleración de nuestro móvil. Asumamos que  $a(x) = -\alpha x$ , entonces sabemos que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -\alpha x \Rightarrow v dv = -\alpha x dx$$

Supongamos que a  $t = 0$ , estiramos el resorte colocando al cuerpo en  $x = A$  y lo soltamos. Esto nos dice que  $x_o = x(t = 0) = A$  y  $v_o = v(t = 0) = 0$ :

$$\int_0^v v' dv' = - \int_A^x \alpha x' dx' \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = -\frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{1}{2} \alpha A^2$$

o también

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 = \frac{1}{2} \alpha A^2 = \varepsilon$$

Aquí  $\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2$  es la constante de movimiento y vale  $\frac{1}{2} \alpha A^2$ , y además  $u(x) = -\frac{1}{2} \alpha x^2$  (notemos que  $\frac{du}{dx} = -\alpha x = a(x)$ ). Entonces,

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \alpha (A^2 - x^2) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} \pm \sqrt{\alpha (A^2 - x^2)} \Rightarrow \frac{dx}{\pm \sqrt{\alpha (A^2 - x^2)}} = dt$$

$$\Rightarrow \int_A^x \frac{dx'}{-\sqrt{\alpha (A^2 - x'^2)}} = \int_0^t dt' = t$$

Aquí corresponde el signo (-) porque cuando soltamos el resorte estirado desde  $A$ , seguro que  $x < A$ . Entonces,

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_A^x \frac{dx'}{A \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{A}\right)^2}} = t \text{ y si } u = \frac{x'}{A} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{u=1}^{u=\frac{x}{A}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = t$$

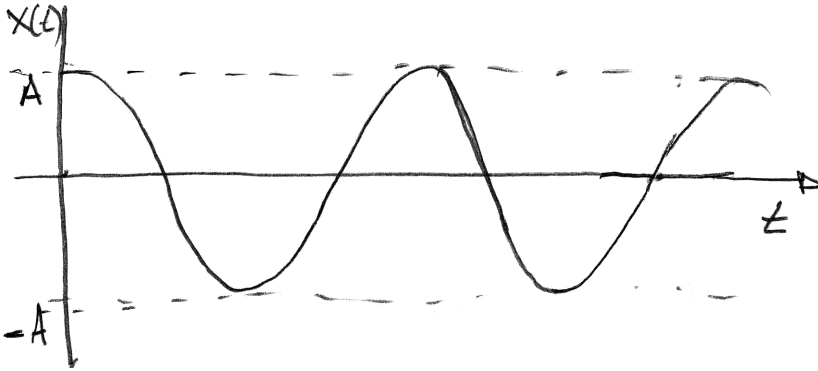
$$\Rightarrow -\int_{u=1}^{u=\frac{x}{A}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \sqrt{\alpha} t \Rightarrow \arccos(u) \Big|_{u=1}^{u=\frac{x}{A}} = \sqrt{\alpha} t \Rightarrow \arccos\left(\frac{x}{A}\right) - \arccos(1) \overset{0}{=} =$$

Finalmente,  $\frac{x}{A} = \cos(\sqrt{\alpha t})$ , entonces

$$x(t) = A \cos(\sqrt{\alpha t})$$

Es decir, la posición en función del tiempo es una función oscilante alrededor de cero como sabemos que pasa por haber jugado con resortes.

**Figura 1.28:**



Este sistema se conoce con el nombre de oscilador armónico y ya tendremos la oportunidad de estudiarlo con todo detalle.

### 1.6.3. ¿Cómo se obtiene $v = v(x)$ o $x = x(v)$ ?

En algunos casos, lo que queremos conocer es la velocidad como función de la posición,  $v = v(x)$  (o su inversa  $x = x(v)$ ). Un ejemplo de esto es cuando hablamos del sujeto que se estrola contra el piso sin considerar la resistencia del aire. En esa oportunidad calculamos  $v(y) = \sqrt{2gy}$ . Para esa cuenta habíamos considerado como  $y = \frac{1}{2}gt^2$  y  $v = gt$ , al eliminar el tiempo usando  $t = \frac{v}{g} \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$ .

Para conocer  $v(x)$  en cualquier caso podríamos hacer lo mismo. Es decir, hallar  $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  y de estas relaciones eliminar  $t$  obteniendo  $x = x(v)$  o  $v = v(x)$ . Sin embargo, podemos proceder de otro modo. En el caso de tener  $a = a(v)$ , escribimos

$$\frac{dv}{dt} = a(v) \Rightarrow \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = a(v) \Rightarrow \frac{v dv}{a(v)} = dx$$

Entonces de  $\int_{v_0}^v \frac{v' dv'}{a(v')} = \int_{x_0}^x dx'$  sale  $x = x(v)$

En el caso de tener  $a = a(x)$ , como vimos,  $\frac{1}{2}v^2 - u(x) = \varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2 - u(x_0) = cte$ , es decir,  $v(x) = \pm\sqrt{2(\varepsilon - u(x))}$ .

## 1.7. Movimiento relativo

La idea es muy simple. Supongamos que están en el vagón de un tren viajando sentados. De pronto pasa un vendedor de bebidas por el pasillo. Desde nuestro asiento lo vemos moverse a cierta velocidad  $u$ .

**Figura 1.29:**



A su vez, supongamos que el tren viaja a una velocidad  $V_T$ . Una persona fuera del tren lo ve moverse a una velocidad  $V_T$ .

**Figura 1.30:**



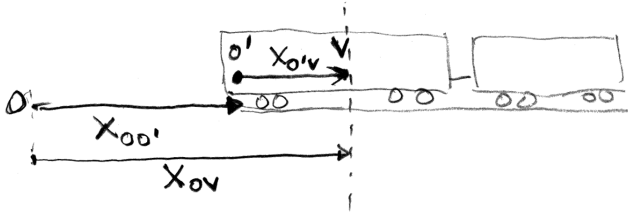
La pregunta es, ¿con qué velocidad la persona verá moverse al vendedor de bebidas?. La respuesta es intuitivamente obvia: si el tren se mueve respecto de

la tierra a una velocidad  $V_T$  y el vendedor se mueve respecto del tren a una velocidad  $u$ , el vendedor tendrá una velocidad  $v = V_T + u$  respecto de la tierra. Introduzcamos una notación:

- $v_{ov} = v$  (velocidad del vendedor relativa al observador  $o$ , solidario a la tierra).
- $v_{oo'}$  (velocidad del pasajero solidario al tren  $o'$  relativa al observador solidario a la tierra).
- $v_{o'v} = u$  (velocidad del vendedor relativa al observador  $o'$  solidario al tren).

Entonces  $v_{ov} = v_{oo'} + v_{o'v}$ . Este resultado (conocido como adición de velocidades de Galileo), lo podríamos obtener también a partir del siguiente esquema:

**Figura 1.31:**



Es evidente que

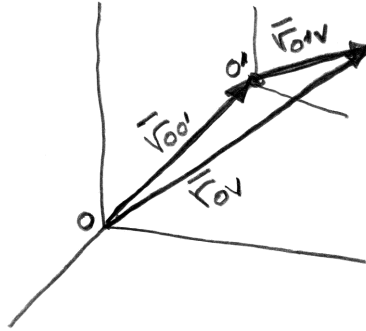
$$x_{ov} = x_{oo'} + x_{o'v}$$

Todo esto está en movimiento así que todas las  $x$  dependen del tiempo. Si derivamos respecto del tiempo,

$$v_{ov} = \frac{dx_{ov}}{dt} = \frac{dx_{oo'}}{dt} + \frac{dx_{o'v}}{dt} = v_{oo'} + v_{o'v}$$

Esto que vemos para movimiento unidimensional se generaliza inmediatamente. En más dimensiones las posiciones y las velocidades son vectores. En este caso, nuestro esquema es:

**Figura 1.32:**



Del gráfico es inmediato que  $\vec{r}_{ov} = \vec{r}_{oo'} + \vec{r}_{o'v}$ , en donde derivando

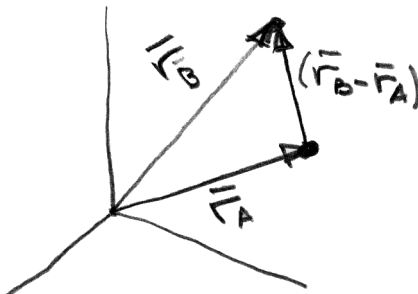
$$\vec{v}_{ov} = \vec{v}_{oo'} + \vec{v}_{o'v} \quad (1.7)$$

Supongamos que tenemos dos móviles,  $A$  y  $B$ . Entonces el vector

$$\vec{r}_{BA} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

es la posición relativa del cuerpo  $B$  respecto de  $A$ .

**Figura 1.33:**



Su derivada

$$\frac{d\bar{r}_{BA}}{dt} = \bar{v}_{BA}$$

es la velocidad relativa de  $B$  respecto de  $A$ . Como puede verse, si  $\bar{v}_A = \frac{d\bar{r}_A}{dt}$  y  $\bar{v}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt}$ , resulta que

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \tag{1.8}$$



## 1.8. Ejercicios resueltos del capítulo

**PROBLEMA 1:** Un móvil se desplaza describiendo una trayectoria rectilínea con una aceleración dada por  $a(t) = a_o \ln\left(\frac{t}{t_o}\right)$ , donde  $a_o = 10 \frac{m}{s^2}$  y  $t_o = 1s$ . Sabiendo que  $v_o = v(t = t_o) = 1 \frac{m}{s}$  y que  $x_o = x(t = t_o) = 0$ , hallar:

- $v = v(t)$ .
- $x = x(t)$  (comparar las expresiones obtenidas con las correspondientes al caso en el cual  $a = a_o = cte$ ).
- Supongamos que el movimiento anterior (con  $a(t) = \ln\left(\frac{t}{t_o}\right)$ ) corresponde al movimiento respecto del aire de un planeador que vuela hacia el norte. Si hay un viento hacia el oeste que sopla a  $5 \frac{km}{h}$ , cuánto valdría el desplazamiento del planeador luego de transcurridos  $21s$  (o sea  $20s$  después de  $t_o$  para un observador que está en la tierra)?

**RESOLUCIÓN:** Se puede hallar la velocidad y la posición en función del tiempo sabiendo que  $a(t) = a_o \ln\left(\frac{t}{t_o}\right)$  ( $a_o = 10 \frac{m}{s^2}$ ) con las condiciones iniciales  $v_o = v(t = t_o) = 1 \frac{m}{s}$  y  $x_o = x(t = t_o) = 0$ . El problema es muy sencillo. Simplemente hay que integrar dos veces.

- Cálculo de  $v = v(t)$

$$\text{Como } \frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = a(t)dt \Rightarrow dv = a_o \ln\left(\frac{t}{t_o}\right) dt$$

Ahora integramos

$$\int_{v_o}^v dv' = a_o \int_{t_o}^t \ln\left(\frac{t'}{t_o}\right) dt'$$

Llamando  $u = \frac{t}{t_o} \Rightarrow t_o du = dt$ ,  $u = 1$  para  $t = t_o$  y  $u = \frac{t}{t_o}$  para cualquier otro tiempo  $t$ . O sea

$$v - v_o = a_o t_o \int_{u=1}^{\frac{t}{t_o}} \ln(u) du = a_o t_o \left[ \frac{t}{t_o} \ln \left( \frac{t}{t_o} \right) - \frac{t}{t_o} + 1 \right] = a_o t \ln \left( \frac{t}{t_o} \right) - a_o (t - t_o)$$

O sea

$$v(t) = v_o + a_o t \ln \left( \frac{t}{t_o} \right) - a_o (t - t_o) \quad (1.9)$$

Observamos que cada término de esta expresión tiene unidades de velocidad. Además, cuando  $t = t_o$ ,  $v = v_o$  como debe ser.

b) Cálculo de  $x = x(t)$

$$\text{Como } \frac{dx}{dt} = v \Rightarrow dx = v(t) dt = \left( v_o + a_o t \ln \left( \frac{t}{t_o} \right) - a_o (t - t_o) \right) dt$$

Ahora integramos

$$\begin{aligned} \int_{x_o}^x dx' &= a_o \underbrace{\int_{t=t_o}^t t' \ln \left( \frac{t'}{t_o} \right) dt'}_{I_1} - a_o \underbrace{\int_{t=t_o}^t (t' - t_o) dt'}_{I_2} + v_o \underbrace{\int_{t=t_o}^t dt'}_{I_3} \\ &\Rightarrow \int_{x_o}^x dx' = I_1 - I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Cálculo de  $I_1$ :

Llamamos  $u = \frac{t}{t_o} \Rightarrow t_o du = dt$ ,  $u = 1$  para  $t = t_o$  y  $u = \frac{t}{t_o}$  para cualquier otro tiempo. O sea

$$I_1 = a_o t_o^2 \int_{u=1}^{\frac{t}{t_o}} u \ln(u) du = a_o t_o^2 \left[ \frac{u^2 \ln(u)}{2} - \frac{u^2}{4} \right]_1^{\frac{t}{t_o}}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} a_o t^2 \ln \left( \frac{t}{t_o} \right) - \frac{1}{4} a_o t^2 + \frac{1}{4} a_o t_o^2$$

Cálculo de  $I_2$ :

Llamamos  $u = (t - t_o) \Rightarrow du = dt$ ,  $u = 0$  para  $t = t_o$  y  $u = (t - t_o)$  para cualquier otro tiempo. O sea,

$$I_2 = a_o \int_{u=0}^{(t-t_o)} u' du' = a_o \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^{(t-t_o)} = \frac{1}{2} a_o (t - t_o)^2$$

Cálculo de  $I_3$

$$I_3 = v_o \int_{t_o}^t dt' = v_o (t - t_o)$$

Finalmente,

$$x(t) = x_o + \frac{1}{2} a_o t^2 \ln \left( \frac{t}{t_o} \right) - \frac{1}{4} a_o (t^2 - t_o^2) - \frac{1}{2} a_o (t - t_o)^2 + v_o (t - t_o) \quad (1.10)$$

Observemos que todos los términos tienen unidades de longitud, y si  $t = t_o$ , el resultado es  $x_o$  (como debe ser). La velocidad y la posición en función del tiempo correspondiente al movimiento con aceleración constante  $a = cte$  son

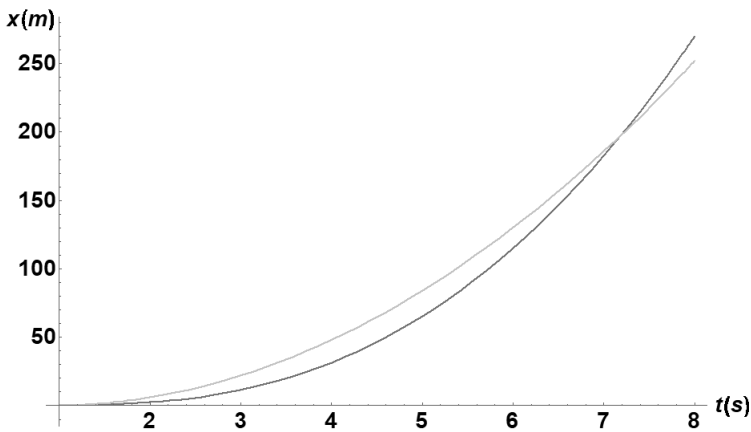
$$v(t) = v_o + a_o (t - t_o) \quad (1.11)$$

$$x(t) = v_o (t - t_o) + \frac{1}{2} a_o (t - t_o)^2 \quad (1.12)$$

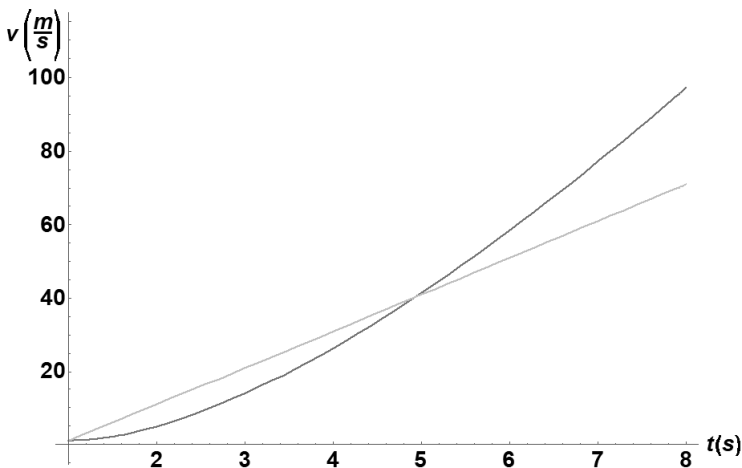
Comparando la Ec. (1.9) con la Ec. (1.11), vemos que al principio la velocidad del móvil con aceleración logarítmica es menor que la correspondiente a la

del móvil con velocidad constante. Sin embargo, al ser la aceleración logarítmica creciente, por algún tiempo suficientemente grande, la velocidad dada por la Ec. (1.9) resulta mayor que la dada por la Ec. (1.11). Como resultado de ello, el móvil con aceleración logarítmica, alcanza y pasa al móvil con aceleración constante.

**Figura 1.34: Gráfico de  $x$  vs.  $t$  para  $a = a_o \ln \left( \frac{t}{t_o} \right)$  (gris oscuro) y  $a = a_o = cte$  (gris claro)**

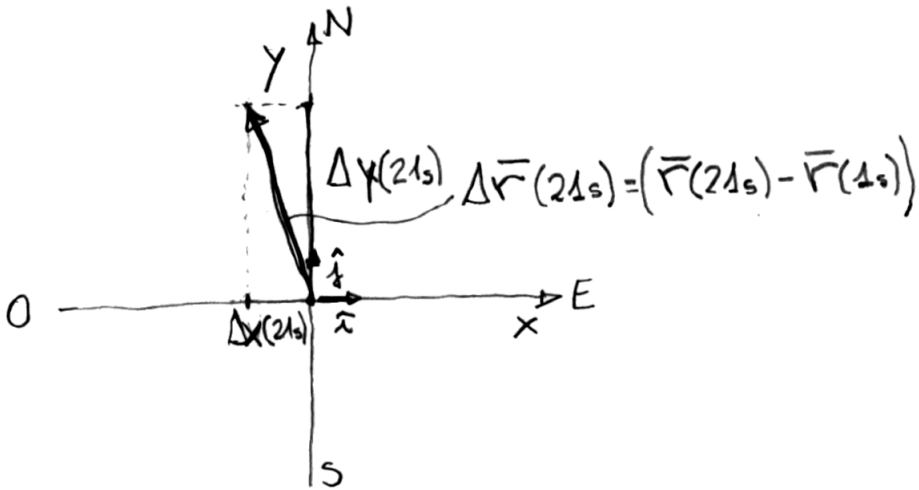


**Figura 1.35: Gráfico de  $v$  vs.  $t$  para  $a = a_o \ln \left( \frac{t}{t_o} \right)$  (gris oscuro) y  $a = a_o = cte$  (gris claro)**



c) El diagrama vectorial para el movimiento es:

**Figura 1.36:**



Aclaremos que un tiempo de  $20s$  a partir de  $t_0$  es  $t = 20s + t_0 = 21s$ . La velocidad del planeador respecto del aire es la encontrada en los puntos anteriores del problema. Entonces, luego de  $20s$ , después de  $t_0$ , se habrá desplazado hacia el norte.

$$\Delta y = (y(21s) - y(t_0))$$

$$\Rightarrow \Delta y = \left( \frac{1}{2} 10 \frac{m}{s^2} (21s)^2 \ln(21s) - \frac{1}{4} 10 \frac{m}{s^2} (21s) - (1s)^2 \right) - \frac{1}{2} 10 \frac{m}{s^2} (20s)^2 + 1 \frac{m}{s} (20s)$$

Al mismo tiempo, el aire se desplaza hacia el oeste respecto de la tierra, lo que provoca un desplazamiento del planeador hacia el oeste dado por

$$\Delta x = x(21s) - x(1s) = -1.39 \frac{m}{s} 20s \quad (\text{ya que } 5 \frac{km}{h} \approx 1.39 \frac{m}{s})$$

Haciendo las cuentas  $\Delta y = 3630.6m$  y  $\Delta x = -27.8m$ , el desplazamiento será

$$\Delta \vec{r}(21s) = -27.8m \hat{x} + 3630.6m \hat{y}$$

**PROBLEMA 2:** Un automóvil pasa por una garita policial a una velocidad constante de  $v_a = 150 \frac{km}{h}$ . A los  $10s$ , parte un policía en su persecución en una moto, a una velocidad inicial de  $v_m^o = 1 \frac{km}{h}$  (el envión inicial para que arranque la moto porque le falla el arranque) y con una aceleración  $a_m(x) = \gamma x$ , ( $\gamma = \frac{2.0 \times 10^5}{h^2}$ ). La moto acelera hasta que se encuentra a una distancia de  $400m$  de la garita, y luego continúa a velocidad constante.

- Hallar el tiempo que dura la persecución desde la partida de la moto hasta que esta alcanza al auto.
- ¿A qué distancia de la garita se produce el alcance?
- Hacer un gráfico que muestre la posición en función del tiempo para el auto y la motocicleta.

Ayuda:  $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$ . Además si  $u^2 \gg 1$ ,  $\ln(u + \sqrt{1+u^2}) \approx \ln(2u)$ .

**RESOLUCIÓN:** Es un típico problema de encuentro. Estos problemas consisten, básicamente, en encontrar la intersección de dos curvas, las que representan la posición en función del tiempo  $x = x(t)$  para ambos móviles, en el plano  $(t, x)$ . El enunciado nos dice que el auto se mueve a velocidad constante  $v_o = 150 \frac{km}{h}$ , por lo tanto  $x_a(t) = v_o t$ . La moto permanece en reposo en el origen para los primeros  $10s$ , sale con una velocidad inicial  $v_m^o = 1 \frac{km}{h}$  y una aceleración  $a_m(x) = \gamma x$ , con

$\gamma = \frac{2.0 \times 10^5}{h^2}$ . Este movimiento sigue hasta que  $x_m = 400m$ . A partir de allí deja de acelerar ( $a = 0$ ) y por lo tanto continúa a velocidad constante, que llamaremos  $v_c$ , igual a la velocidad de la moto cuando llega a los  $400m$ , o sea,  $v_c = v_m(400m)$ . A partir de los  $400m$ , la expresión que describe la posición en función del tiempo para la moto es

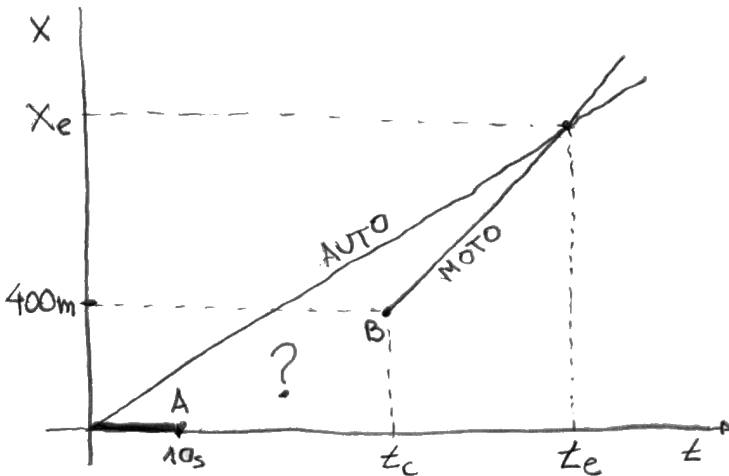
$$x_m(t) = v_c(t - t_c) + 400m$$

donde  $t_c$  es el tiempo correspondiente a  $x_m = 400m$  (es decir, el tiempo en el cual la moto deja de acelerar). Entonces, el problema consiste en hallar la intersección de dos rectas.

$$\begin{cases} x_a(t) = v_o t \\ x_m(t) = v_c(t - t_c) + 400m \end{cases}$$

Aquí, entonces, el problema es que no conocemos  $v_c$  y tampoco  $t_c$ . Para aclarar más las cosas, podemos hacer un gráfico que ilustre la situación en que nos encontramos:

**Figura 1.37:**



Aquí,  $x_e$  y  $t_e$  son la posición y el tiempo de encuentro (que es lo que nos piden). Notemos que entre  $A$  y  $B$  no hemos dibujado ninguna curva. Esto es así debido a que esa curva, que corresponde a  $x_m = x_m(t)$  entre  $t = 10s$  y  $t = t_c$  no la conocemos. Para resolver el problema entonces, primero debemos hallar  $v_c$  y  $t_c$ , y para completar el gráfico hallar  $x_m = x_m(t)$ .

Sabemos que

$$\frac{dv_m}{dt} = a_m \Rightarrow \frac{dv_m}{dx_m} \frac{dx_m}{dt} = \gamma x_m \Rightarrow v_m dv_m = \gamma x_m dx_m$$

o sea,

$$\int_{v_m=v_m^o}^{v_m} = \gamma \int_{x_m=0}^{x_m} x'_m dx_m \Rightarrow \frac{1}{2}v_m^2 - \frac{1}{2}v_m^o{}^2 = \frac{1}{2}\gamma x_m^2$$

es decir,

$$v_m(x_m) = \pm \sqrt{v_m^o{}^2 + \gamma x_m^2} \Rightarrow v_m(0.4km) = \sqrt{1 \frac{km^2}{h^2} + 2 \times 10^5 (0.4)^2 \frac{km^2}{h^2}}$$

o sea,  $v_m(0.4km) \approx 178.9 \frac{km}{h}$ , es decir,

$$v_c = 178.9 \frac{km}{h}$$

a) Determinación de  $t_c$ .

$t_c$  es el tiempo para que  $x_m = 0.4km$ . Debemos hallar entonces  $t = t(x_m)$ .

Sabemos que

$$v_m = \frac{dx_m}{dt} = \sqrt{v_m^o{}^2 + \gamma x_m^2} \Rightarrow \frac{dx_m}{\sqrt{v_m^o{}^2 + \gamma x_m^2}} = dt$$

Ahora integramos



$$\int_{x_m=0}^{x_m} \frac{dx'_m}{\sqrt{v_m^{\circ 2} + \gamma x_m'^2}} = \int_{x_m=0}^{x_m} dt' = (t - 10s)$$

Pero

$$\int_{x_m=0}^{x_m} \frac{dx'_m}{\sqrt{v_m^{\circ 2} + \gamma x_m'^2}} = \frac{1}{v_m^{\circ}} \int_{x_m=0}^{x_m} \frac{dx'_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{\gamma} x'_m}{v_m^{\circ}}\right)^2}}$$

llamando  $u = \frac{\sqrt{\gamma} x'_m}{v_m^{\circ}} \Rightarrow du = \frac{\sqrt{\gamma} dx'_m}{v_m^{\circ}} \Rightarrow dx'_m = \frac{v_m^{\circ}}{\sqrt{\gamma}} du$ . Además para  $x_m = 0, u = 0$  y para  $x'_m = x_m, u = \frac{\sqrt{\gamma} x'_m}{v_m^{\circ}}$

$$\Rightarrow \frac{v_m^{\circ}}{\sqrt{\gamma} v_m^{\circ}} \int_{u=0}^{u=\frac{\sqrt{\gamma} x'_m}{v_m^{\circ}}} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right]_{u=0}^{u=\frac{\sqrt{\gamma} x'_m}{v_m^{\circ}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left( \frac{\sqrt{\gamma} x_m}{v_m^{\circ}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{\gamma} x_m}{v_m^{\circ}}\right)^2} \right) = (t - 10s)$$

Si aplicamos esta expresión a  $x_m = 0.4km$  obtenemos  $t_c$ . Notemos que para  $x_m = 0.4km$  resulta

$$\frac{2 \times 10^5 (0.4)^2 \cancel{km^2}}{1 \cancel{km^2} / h^2} = 32 \times 10^3 \gg 1$$

entonces podemos usar la aproximación del enunciado

$$(t - 10s) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left( \frac{2\sqrt{\gamma} x_m}{v_m^{\circ}} \right)$$

Reemplazando los valores numéricos ( $x_m = 0.4\text{km}$ ,  $\gamma = \frac{2.0 \times 10^5}{h^2}$ ,  $v_m^o = 1\frac{\text{km}}{h}$ ), obtenemos  $(t_c - 10s) = 0.01315h = 47s$ , o sea,

$$t_c = 57s = 0.0158h$$

De  $t = t(x_m)$ , podemos invertir y obtenemos

$$x_m \approx \frac{v_m^o}{2\sqrt{\gamma}} e^{\sqrt{\gamma}(t-10s)} \quad (\text{para } 10s < t < 57s)$$

b) El encuentro.

Debemos encontrar la intersección de

$$x_a(t) = 150\frac{\text{km}}{h}t \quad \text{y} \quad x_m(t) = 178.9\frac{\text{km}}{h}(t - 0.0158h) + 0.4\text{km}$$

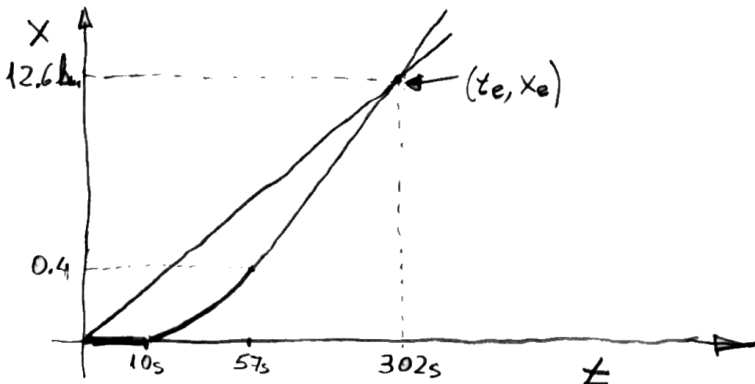
Si hacemos  $x_a(t_e) = x_m(t_e)$ , resulta

$$150\frac{\text{km}}{h}t_e = 178.9\frac{\text{km}}{h}(t_e - 0.0158h) + 0.4\text{km}$$

y obtenemos que  $t_e = 0.08369h = 302s$  y  $x_e = 150\frac{\text{km}}{h}t_e = 12.6\text{km}$ .

c) Al final, el gráfico queda,

Figura 1.38:

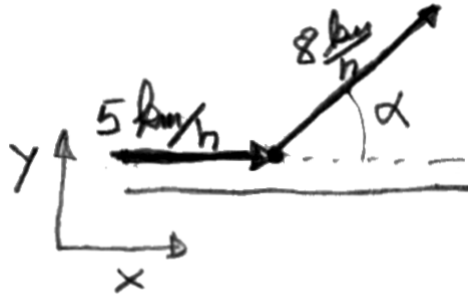


**PROBLEMA 3:** Un remero es capaz de imprimirle a su bote una velocidad de  $8 \frac{km}{h}$  cuando las aguas están tranquilas. Un día quiere cruzar un canal de  $2km$  de ancho cuyas aguas corren con una rapidez de  $5 \frac{km}{h}$ .

- ¿En qué dirección debe remar para desembarcar en el punto situado justo enfrente al otro lado del canal?
- Supongamos que ahora las aguas corren con una rapidez de  $10 \frac{km}{h}$ , ¿en qué dirección debe remar para alcanzar la orilla lo antes posible? ¿Qué longitud recorrerá entonces?

**RESOLUCIÓN**

**Figura 1.39:**



La velocidad del remero respecto del agua:

$$\bar{v}_{ar} = 8 \frac{km}{h} \cos(\alpha) \hat{x} + 8 \frac{km}{h} \text{sen}(\alpha) \hat{y}$$

Esto es  $\bar{v}_{ov}$  en la Ec. (1.7).

La velocidad del agua respecto de la costa:

$$\bar{v}_{ca} = 5 \frac{km}{h} \hat{x}$$

Esto es  $\bar{v}_{oo'}$  en la Ec. (1.7).

Finalmente, la velocidad del remero respecto a la costa:

$$\bar{v}_{cr} = \bar{v}_{ca} + \bar{v}_{ar} = \left( 5 \frac{km}{h} + 8 \frac{km}{h} \cos(\alpha) \right) \hat{x} + 8 \frac{km}{h} \text{sen}(\alpha) \hat{y} \quad (1.13)$$

- a) Se trata de hallar  $\alpha$  tal que el cruce sea sin velocidad del remero respecto de la costa en la coordenada  $x$ . De la Ec. (1.13), para la componente  $x$  debemos establecer que

$$v_{cr_x} = 5 \frac{km}{h} + 8 \frac{km}{h} \cos(\alpha) = 0$$

Así,  $\alpha$  para que cruce a la orilla de enfrente es

$$\cos(\alpha) = \frac{-5}{8} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-5}{8}\right) \approx 129^\circ$$

- b) Ahora, la cosas cambian, la velocidad del agua respecto de la costa es  $\bar{v}_{ca} = 10 \frac{km}{h} \hat{x}$  y como  $|\bar{v}_{ca}| > |\bar{v}_{ar}|$ , indefectiblemente el remero se desviará para alcanzar la orilla de enfrente.

La distancia recorrida para cruzar el canal es de  $2km$  en la dirección  $y$ . Entonces, el tiempo que tarda en cruzar el río ( $t_c$ ) se calcula a partir de

$$v_{cr_y} t_c = 2km = \left( 8 \frac{km}{h} \text{sen}(\alpha) \right) t_c \Rightarrow t_c = \frac{1}{4 \text{sen}(\alpha)} h$$

Por otro lado, la distancia recorrida en  $x$ , que llamaremos  $x_c$ , para ese tiempo es

$$x_c = v_{cr_x} t_c = \left( 10 \frac{km}{h} + 8 \frac{km}{h} \cos(\alpha) \right) t_c = (10 + 8 \cos(\alpha)) \frac{1}{4 \text{sen}(\alpha)} km$$

Entonces la mínima desviación se da cuando

$$\frac{dx_c}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{10 + 8 \cos(\alpha)}{4 \text{sen}(\alpha)} km \right) = 0$$

Mediante regla del cociente para la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= \frac{1}{4} km \frac{(-8 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha) - \cos(\alpha)(10 + 8 \cos(\alpha)))}{(\operatorname{sen}(\alpha))^2} \\ &= \frac{-8 \overbrace{(\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha))}^1 - 10 \cos(\alpha)}{4 \operatorname{sen}^2(\alpha)} km \\ &= \frac{-8 - 10 \cos(\alpha)}{4 \operatorname{sen}^2(\alpha)} km = 0 \end{aligned}$$

Así,

$$\alpha_{min} = \arccos\left(\frac{8}{-10}\right) \approx 143^\circ$$

Esto implica que el tiempo mínimo para cruzar de lado a lado el canal es

$$t_c = \frac{1}{4 \operatorname{sen}(143^\circ)} h \approx 0.41h$$

Finalmente, la longitud que recorre hasta alcanzar la otra orilla la podemos calcular como

$$|\bar{v}_{cr}| t_c = \sqrt{\bar{v}_{ca}^2 + \bar{v}_{ar}^2} t_c \quad (\text{por Teorema de Pitágoras})$$

recordando que es para el caso en que  $\alpha = \alpha_{min}$ . Este cálculo se los dejo a ustedes.



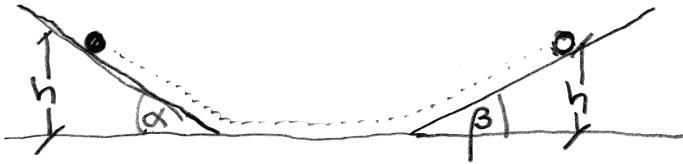
# **Capítulo 2**

## **Cantidad de movimiento y dinámica**

## 2.1. Inercia - Masa inercial

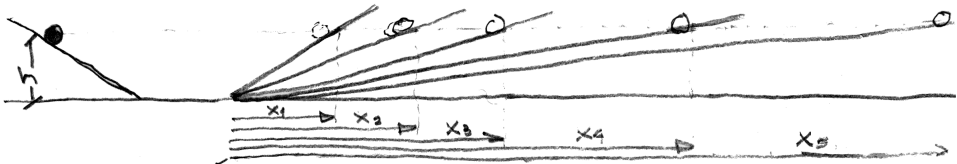
Vamos a comenzar a estudiar las leyes que gobiernan el movimiento de los cuerpos (leyes de la dinámica). El pionero en establecer estas leyes fue Galileo (1564-1642). Con él, la física comenzó a separarse de la filosofía (se conocía como filosofía natural) para dar nacimiento a la física como la conocemos hoy en día (ciencia natural). Galileo observó que si se dejaba caer un cuerpo por un plano inclinado desde cierta altura  $h$ , este se detenía al subir por otro plano inclinado enfrenteado, a la misma altura  $h$  (las superficies estaban perfectamente pulidas).

Figura 2.1:



Pensó entonces en qué pasaba con la distancia horizontal recorrida a medida que el ángulo  $\beta$  disminuye, es decir

Figura 2.2:



Se ve que la distancia aumenta a medida que  $\beta$  disminuye ( $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 \dots$ ). ¿Qué pasa entonces para  $\beta \rightarrow 0$ ? . es evidente que  $x \rightarrow \infty$ . ¡Esto significa que el cuerpo continúa siempre con la misma velocidad! ¡No se detiene nunca! Descubrió de este modo la *Ley de Inercia*: *si un cuerpo no interactúa con ningún otro,*



entonces o está quieto ( $v = 0$ ) o sigue moviéndose siempre con la velocidad constante que tiene. Podemos decir entonces, que si un cuerpo modifica su velocidad, es porque está interactuando con algún otro cuerpo.

Años después, Newton (1643-1727), no solo reafirmó la ley o principio de inercia, sino que fue más allá. Es evidente que ante las interacciones con otros cuerpos, los cuerpos varían sus velocidades de distinta manera. Imaginemos dos cuerpos diferentes, por ejemplo un vagón de ferrocarril y un carrito de supermercado, ambos moviéndose a la misma velocidad  $v$ . Supongamos que con la intención de detenerlos nos paramos delante de ellos con los brazos hacia adelante.

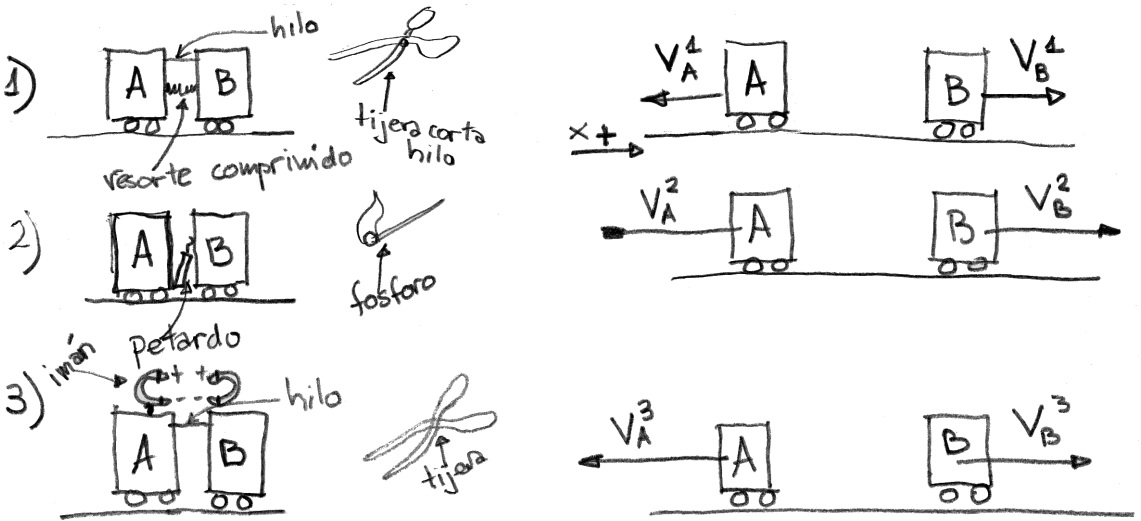
**Figura 2.3:**



No es difícil intuir el resultado. ¡Si alguno no lo intuye, le aconsejo que no salga a la calle sin compañía!. Por lo que surge inmediatamente la siguiente pregunta: ¿Qué es lo que hace que nos resulte posible “frenar” el carrito de supermercado pero, en cambio, el vagón de ferrocarril a la misma velocidad, nos pasa por arriba sin modificar prácticamente su velocidad?..Alguien podría responder que esto sucede por la diferencia de tamaño. Es cierto que el tamaño del vagón es distinto al tamaño del carrito. También es cierto que el color del vagón (que puede ser verde) es distinto al color del carrito (que es plateado), y a nadie se le ocurriría decir que el comportamiento de ambos cuerpos ante “el frenado” tiene que ver con el color. En suma, no basta con que detectemos una propiedad en la que difieran los cuerpos para que ella sea la que explique su comportamiento (eso se llama prejuicio). Para encontrar cuál es la propiedad que determina la variación de velocidades de los cuerpos ante interacciones, debemos experimentar.

Supongamos que tenemos dos carritos ( $A$  y  $B$ ) y los hacemos interactuar entre ellos los siguientes modos:

Figura 2.4:



Como resultado de estos experimentos se obtiene que, si bien  $v_A^1 \neq v_A^2 \neq v_A^3$  y  $v_B^1 \neq v_B^2 \neq v_B^3$ , siempre  $v_A < 0$  y  $v_B > 0$ , además:

$$-\frac{v_A^1}{v_B^1} = -\frac{v_A^2}{v_B^2} = -\frac{v_A^3}{v_B^3}$$

Aquí, lo introducimos el  $(-)$  para que el cociente sea positivo. Si repetimos con otro petardo distinto, otro resorte distinto y otros imanes distintos, las velocidades que obtendremos serán diferentes a las anteriores pero... llamando "primas" a las medidas en este segundo experimento:

$$-\frac{v_A^1}{v_B^1} = -\frac{v_A^2}{v_B^2} = -\frac{v_A^3}{v_B^3} = -\frac{v_A^1'}{v_B^1'} = -\frac{v_A^2'}{v_B^2'} = -\frac{v_A^3'}{v_B^3'} \quad \text{¡Para cualquier interacción!}$$

Esto quiere decir que, como resultado de la interacción, las velocidades que adquieren ambos cuerpos tienen la misma relación, independientemente de cómo hayan interactuado. Esto lo podemos utilizar para definir cierta propiedad

de los cuerpos que cuantifica su inercia (es decir, su tendencia a seguir con la misma velocidad), que llamaremos masa inercial  $m$ , y proponemos:

$$\frac{m_B}{m_A} = -\frac{v_A}{v_B} \quad (2.1)$$

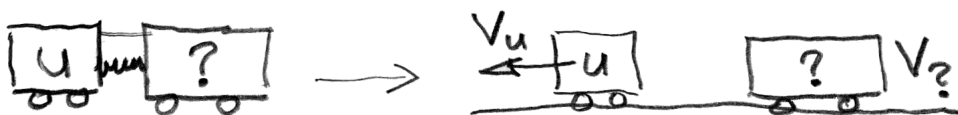
Esto significa que como resultado de la interacción mutua, los cuerpos, a partir del reposo, adquieren una velocidad inversamente proporcional a sus masas inerciales (más masa inercial, menos cambio de velocidad). A partir de la Ec. (2.1) podemos definir la unidad de masa inercial: elegimos un carrito y pintamos una “ $u$ ”.

Figura 2.5:



si queremos determinar la masa de cualquier otro carrito (en unidades  $u$ ), hacemos el experimento:

Figura 2.6:



$$\frac{m_?}{u} = -\frac{v_u}{v_?}$$

Si medimos  $v_u$  y  $v$  tendremos  $m_?$  en unidades de  $u$ . Esto ya lo hicieron y lo llamaron 1  $kg$  (kilogramo) a la masa del carrito elegido como unidad. Ese “carrito” está guardado en Saint-Cloud (París-Francia) en la Oficina Internacional

de Pesas y Medidas y la llaman “kilogramo patrón”. Hay una copia en cada país. En Argentina está en el INTI . Así definida, la masa tiene algunas propiedades a tener en cuenta:

1. La masa inercial es una propiedad intrínseca de cada cuerpo. Todo cuerpo tienen una masa no nula, y si ponemos alguna vez  $m = 0$ , esto quiere decir que es una masa despreciable frente a la masa de los otros cuerpos que aparecen en el problema.
2. El cociente de velocidades (Ec. (2.1)) es siempre positivo. Luego el cociente entre dos masas cualesquiera es siempre positivo. Luego todas las masas inerciales tienen el mismo signo (o son todas positivas o son todas negativas). Las elegimos entonces como todas positivas. *NO EXISTEN MASAS INERCIALES NEGATIVAS.*
3. La masa se conserva. No hay manera de crearla o destruirla. Por ejemplo, si tomamos un cuerpo de madera de masa  $m$  y lo reducimos a aserrín, la masa de todo el aserrín es  $m$ . Si en lugar de reducirlo a aserrín, lo quemáramos, la masa del producto de la combustión del carrito resulta  $m$ . Esto es cierto si despreciamos efectos que tienen que ver con la relatividad de Einstein que podremos discutir en otro momento.

## 2.2. Cantidad de movimiento

Otra forma de escribir la Ec. (2.1) es  $m_A v_A + m_B v_B = 0$ , o también de la siguiente manera:

$$p_A + p_B = 0 \tag{2.2}$$

donde hemos definido  $p = mv$  como cantidad de movimiento. La Ec. (2.2) expresa una propiedad fundamental de la mecánica. Consideremos las interac-

ciones que estudiamos para definir la masa (ese tipo de interacciones se las llama “interacciones explosivas”).

*Antes de la interacción:*

**Figura 2.7:**



$$v_A = 0, v_B = 0 \Rightarrow p_A = 0, p_B = 0 \Rightarrow P_T = p_A + p_B = 0$$

*Después de la interacción:*

**Figura 2.8:**



$$v_A \neq 0, v_B \neq 0 \Rightarrow p_A = m_A v_A \neq 0, p_B = m_B v_B \neq 0 \text{ pero } P_T = p_A + p_B = 0$$

¡La cantidad de movimiento total es cero *ANTES* de la interacción y también *DESPUÉS*!

Detengámonos un poco para pensar qué significa lo que sucede con la cantidad de movimiento de cada cuerpo y la cantidad de movimiento total antes de la interacción y después de ella.

*ANTES:*  $p_A = 0$  y  $p_B = 0$  ya que los carritos están en reposo. Por lo tanto  $P_T = p_A + p_B = 0$ .

**DESPUÉS:**  $p_A \neq 0$  y  $p_B \neq 0$ . Sin embargo,  $P_T = p_A + p_B = 0$ . Es decir,  $P_T$  sigue siendo cero.

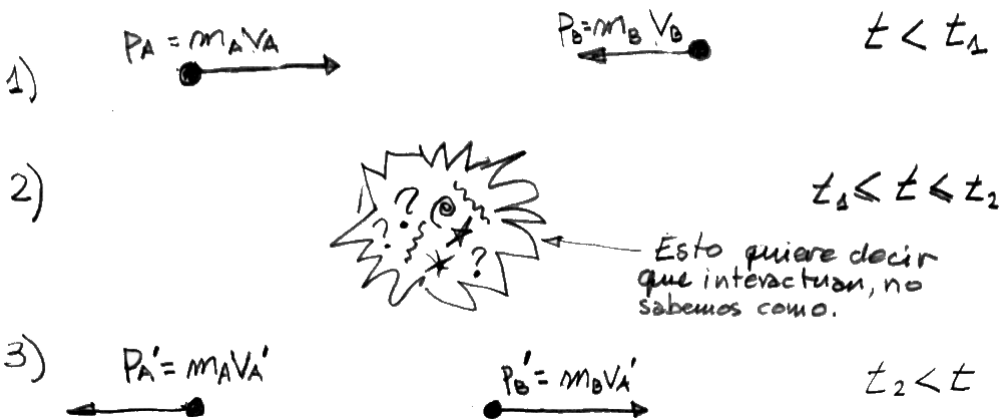
¿Qué significa esto?. Significa que como resultado de la interacción ambos cuerpos adquieren una cantidad de movimiento (antes de ella el  $p$  de cada cuerpo era cero) y además como el total de la cantidad de movimiento sigue siendo cero, los cuerpos adquieren una cantidad de movimiento opuesta:

$$p_A = -p_B$$

Podemos decir entonces que la cantidad de movimiento total se conserva durante todo el proceso. Que se conserve quiere decir que vale lo mismo *antes* de la interacción ( $P_T = 0$ ) y *después* de ella ( $P_T = 0$ ). Lo interesante del asunto es que esto que vale para las interacciones explosivas (donde  $P_T = 0$ ), vale para CUALQUIER INTERACCIÓN.

Supongamos que dos cuerpos  $A$  y  $B$  (con masas  $m_A$  y  $m_B$ ) se acercan con velocidades  $v_A$  y  $v_B$ . Cuando están suficientemente cerca, interactúan entre ellos (con la interacción que a ustedes se les ocurra) y luego se separan con velocidades  $v'_A$  y  $v'_B$ . Esto lo podemos esquematizar como sigue (Fig. (2.9)):

**Figura 2.9:**



1.  $t < t_1$  significa *antes* de la interacción (que empieza en  $t_1$ ).
2.  $t_1 \leq t \leq t_2$  significa *durante* la interacción (que dura un tiempo  $(t_2 - t_1)$ ).
3.  $t_2 < t$  significa *después* de la interacción (que termina en  $t_2$ ).

$$P_T = m_a v_A + m_B v'_B = m_a v'_A + m_B v'_B = P'_T \quad (2.3)$$

Es decir, la cantidad de movimiento *antes* de la interacción es igual a la cantidad de movimiento *después* de ella *cualquiera sea esta interacción*. La Ec. (2.3) se puede escribir como

$$\Delta P_T = P'_T - P_T = (p_A - p'_A) + (p_B - p'_B) = \Delta p_A + \Delta p_B = 0 \Rightarrow \Delta p_A = -\Delta p_B$$

Esto quiere decir que, como resultado de la interacción, la cantidad de movimiento del cuerpo  $A$ ,  $p_A$ , varía en  $\Delta p_A$ ; y la cantidad de movimiento del cuerpo  $B$ ,  $p_B$ , varía en  $\Delta p_B$ ; pero, como en total la cantidad de movimiento se conserva (no varía), resulta que  $\Delta p_A = -\Delta p_B$ . Si la cantidad de movimiento de  $A$  aumenta (o disminuye), la cantidad de movimiento de  $B$  disminuye (o aumenta) en lo mismo. Podemos decir que lo que sucede durante la interacción es un proceso de *intercambio* de cantidad de movimiento entre los cuerpos: un cuerpo gana cantidad de movimiento gracias a que otro lo pierde. De esta forma, la cantidad de movimiento total permanece constante.

Vamos a hacer una analogía que nos va a resultar útil. Cuando era chico, jugábamos a *las figuritas*. Las figuritas eran cartoncitos con fotos de jugadores de fútbol que se pegaban en un álbum, el cual, una vez lleno se canjeaba por una pelota N°5. Básicamente, el juego, consistía en un mecanismo por lo cual durante el juego un jugador ganaba las figuritas y otro jugador, perdía. Podemos decir

que una interacción entre dos cuerpos es análoga a un partido de figuritas entre dos chicos. Veamos:

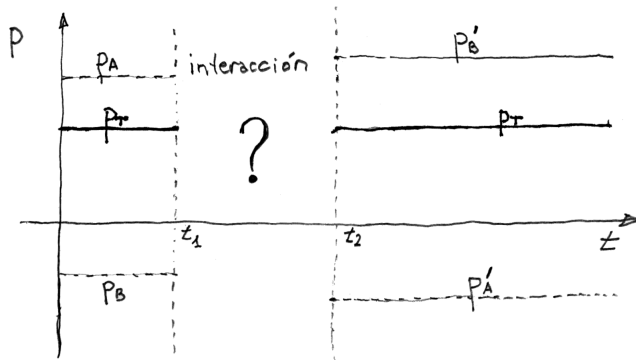
- *Antes de jugar* (total de figuritas: 90). Pedro tiene 50 figuritas, Roque tiene 40.
- *Durante el juego* (cualesquiera sean las reglas, aun si algún jugador hace trampa y le roba figuritas al otro). Hay figuritas que gana Pedro porque Roque las pierde y viceversa.
- *Después del juego* (total de figuritas: 90). Pedro tiene 70 figuritas (ganó 20), Roque tiene 20 (perdió 20).

En cualquier juego de figuritas entre dos chicos se cumple el principio de conservación del número total de figuritas. Podríamos “definir” un juego de figuritas entre dos chicos, con toda generalidad, como cualquier proceso de intercambio entre los dos chicos. Del mismo modo, podemos decir que cualquier interacción entre dos cuerpos cumple con el principio de conservación de la cantidad de movimiento total. Además, definimos como interacción entre dos cuerpos a cualquier proceso que implica el intercambio de cantidad de movimiento entre ellos.

Vamos ahora a una descripción más “científica”. Grafiquemos la evolución de la cantidad de movimiento de dos cuerpos durante el proceso de interacción entre ellos (Fig. (2.9)).



Figura 2.10:

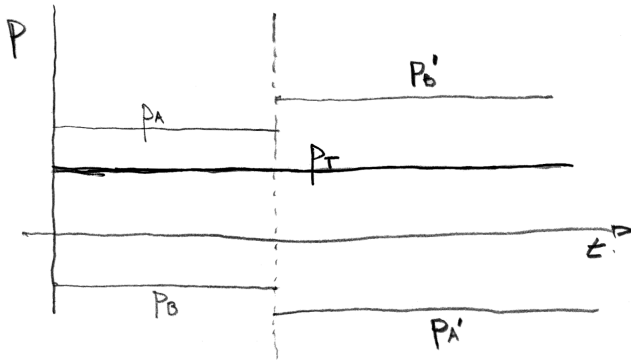


Como dijimos antes de la interacción ( $t < t_1$ ), cada cuerpo tiene un  $p$  ( $p_A$  y  $p_B$ ) que permanece constante. La suma de ellos es  $P_T = p_A + p_B$  (y por supuesto, también permanece constante). Luego de la interacción ( $t > t_2$ ) los  $p$  de cada cuerpo variaron  $p_A \rightarrow p'_A$  y  $p_B \rightarrow p'_B$ , pero de modo tal que  $p_A + p_B = p'_A + p'_B = P_T$ . Es decir, la cantidad de movimiento total es la misma antes y después de la interacción. Durante la interacción ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) no sabemos cómo evolucionan los  $p$  de cada cuerpo. Esto va a depender de cuál y cómo es la interacción entre ellos. En lo que sigue estudiaremos justamente eso. Pero antes imaginemos un proceso de interacción cuya duración es muy corta ( $(t_2 - t_1)$  pequeño). La palabra “corta” (y también “pequeño”) merecen una explicación. ¡Algo es “corto” (o “pequeño”) respecto a otra cosa!. Por ejemplo, cierto tipo de mariposas, llamadas efímeras, viven alrededor de un día en su estado de mariposa. Los hámsters viven cerca de tres o cuatro años, y las ballenas del océano Ártico cerca de doscientos años. Está claro que decir que la vida de los hámsteres es “corta” es ambiguo y no significa nada. Deberíamos decir, “La vida de los hámsteres es corta comparada a la vida de las ballenas, y es larga comparada a la vida de las efímeras”.

En nuestro caso, cuando decimos que la duración es corta, lo que queremos decir es que  $(t_2 - t_1)$  es más pequeño que el tiempo mínimo que puede medir

nuestro reloj. Por ejemplo, estamos viendo un juego de billar (de carambolas). ¿Serían ustedes capaces de decirme cuánto dura una interacción de las bolas cuando chocan?. ¿Cómo sería la Fig. (2.10) en ese caso?

**Figura 2.11:**



La interacción no dura nada, es instantánea. De verdad, interacciones así no existen en la naturaleza. Sin embargo, esta es la descripción de lo que vemos cuando  $(t_2 - t_1)$  no es “medible” con nuestro reloj. Si mejoramos la precisión de nuestro reloj, la Fig. (2.10) se convertiría en la Fig. (2.11). Esto nos permite definir lo que entendemos por “choque” o “colisión”. Un choque entre dos cuerpos es cualquier interacción cuya duración es tan pequeña que no podemos determinarla. Es claro, que si estamos en presencia de un choque, no podremos decir qué es lo que pasa durante la interacción. Solo habrán un antes y un después. Vamos ahora a “remover” el signo de pregunta que está dentro de la Fig. (2.10).

## 2.3. Choques

Antes de ponernos a estudiar lo que pasa durante la interacción, hablamos un poco más de los choques. Como ya dijimos, un choque entre dos cuerpos es cualquier interacción cuya duración es tan corta que no la podemos medir. Es claro

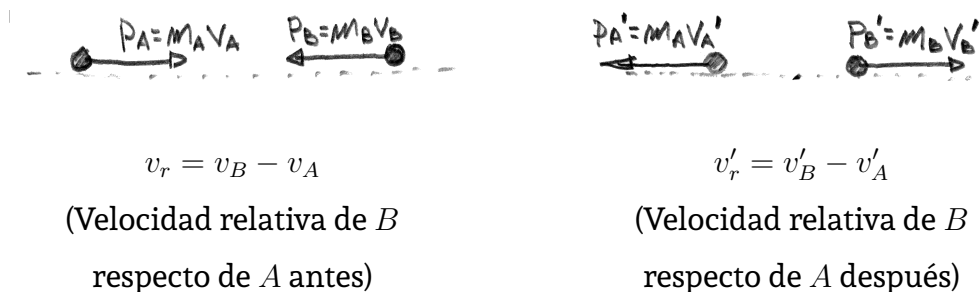
entonces que lo único que podemos decir es qué pasa antes de la interacción y qué pasa después. ¿Y qué podemos decir?.. Que en todo choque entre dos cuerpos se conserva la cantidad de movimiento total. Es decir, si  $p_A + p_B = P_T$  antes, será  $p'_A + p'_B = P_T$  después. Dicho de otro modo, si  $\Delta p_A = p'_A - p_A$  y  $\Delta p_B = p'_B - p_B$  son lo que varía la cantidad de movimiento de cada cuerpo como consecuencia del choque, resulta

$$\Delta p_A = -\Delta p_B \quad (2.4)$$

A la variación de la cantidad de movimiento se la suele llamar impulso ( $\Delta p_A = j_A$ ,  $\Delta p_B = j_B$ ,  $j \equiv \text{impulso}$ ). Otra forma de escribir la Ec. (2.4) es  $j_A = j_B$ . Esto, repito, se cumple para cualquier choque.

Podemos distinguir tres tipos de choques. En general, el esquema es el siguiente:

**Figura 2.12:**



1. *Choques perfectamente elásticos:* Además de  $\Delta P_T = 0$ , resulta  $v_r = -v'_r$ . Esto quiere decir que si viajásemos subidos al cuerpo A, antes del choque veríamos que el cuerpo B se nos acerca con una velocidad  $v_r$ . La velocidad relativa conserva el módulo pero no cambia el sentido.
2. *Choques inelásticos:* Además de  $\Delta P_T = 0$ , resulta  $|v'_r| < |v_r|$ .  
En particular, se llama choque completamente inelástico (o choque plásti-

co) cuando  $v'_r = 0$ . Esto significa que luego del choque los cuerpos quedan adheridos, es decir pegados. La velocidad de ambos luego del choque es la misma y, por lo tanto,  $v'_r = 0$ .

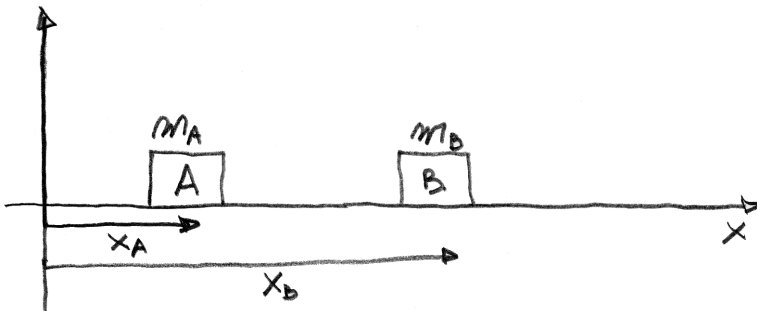
3. *Choques explosivos*: Además de  $\Delta P_T = 0$ , resulta  $|v'_r| > |v_r|$ .

Esto implica que después del choque los cuerpos se alejan entre sí con una velocidad mayor que la velocidad a la cual se acercaban antes del choque.

## 2.4. Centro de masa

Dado un sistema de dos cuerpos, existe un punto en el espacio que tiene algunas propiedades interesantes. Lo definiremos para problemas unidimensionales y más adelante lo generalizaremos a más dimensiones y a más cuerpos. Consideremos el siguiente sistema:

**Figura 2.13:**



La posición de este punto, llamado *CENTRO DE MASA* ( $CM$ ), está definida por

$$X_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

Este punto está ubicado entre los dos cuerpos. Por simple inspección de su definición, es fácil comprobar que si las masas son iguales ( $m_A = m_B$ ), el  $CM$

está exactamente en la mitad de la distancia que separa a ambos cuerpos, y si una masa es mayor que la otra, el  $CM$  se encuentra más cerca de la mayor. Por ejemplo, si  $m_A > m_B$ , el  $CM$  se encuentra más cerca de  $A$  que de  $B$ . Si los cuerpos se mueven,  $x_A$  y  $x_B$  varían con el tiempo y por lo tanto también  $X_{CM}$ . Calculemos la velocidad del centro de masa  $\frac{dX_{CM}}{dt}$

$$V_{CM} = \frac{dX_{CM}}{dt} = \frac{m_A \frac{dx_A}{dt} + m_B \frac{dx_B}{dt}}{m_A + m_B} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{P_T}{m_A + m_B}$$

O sea

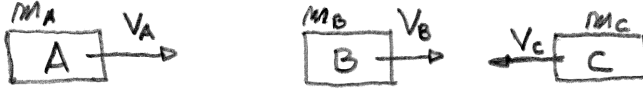
$$V_{CM} = \frac{P_T}{m_A + m_B} \quad (2.5)$$

Aquí vemos por qué es importante el  $CM$ . Su velocidad está relacionada con la cantidad de movimiento total  $P_T$ . Como ya vimos el  $P_T$  total se conserva para dos cuerpos en interacción (cualquiera sea esta). Vale lo mismo *antes* y *después*. Esto también se cumple para cualquier choque. ¡Esto quiere decir que en un choque la velocidad del  $CM$  permanece constante! No importa cómo se muevan los dos cuerpos *luego del choque*, la velocidad del  $CM$  será la misma que tenía *antes del choque*. Es decir, el  $CM$  se mueve antes y después del choque con una velocidad constante cuyo valor es expresado por la Ec. (2.5). Por cierto, si el choque es plástico, la velocidad del  $CM$  coincide con la velocidad de ambos cuerpos después del choque (dado que quedan pegados).

## 2.5. Cantidad de movimiento total y muchos cuerpos

Supongamos ahora que tenemos tres cuerpos que pueden interactuar entre ellos. Antes que interactúen tendremos:

Figura 2.14:



Vamos a introducir ahora lo que entendemos por “mi sistema”. Llamaremos “mi sistema” (o el sistema) a aquel conjunto de cuerpos cuyo movimiento nos interesa estudiar.

Si vamos a estudiar el movimiento de los tres cuerpos ( $A$ ,  $B$  y  $C$ ), estamos incluyendo todos los cuerpos que pueden interactuar entre sí, no hay cuerpos externos (externos al sistema, claro).

Si, en cambio, el sistema lo tomamos como los cuerpos  $A$  y  $B$ , pero  $C$  queda afuera de mi sistema, luego  $C$  es un cuerpo externo al sistema. A veces se dice que un sistema como el ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) es *aislado* porque contiene a todos los cuerpos que pueden interactuar entre sí. El sistema ( $A$ ,  $B$ ) en cambio es *no aislado* porque puede interactuar con un cuerpo externo (el cuerpo  $C$ ).

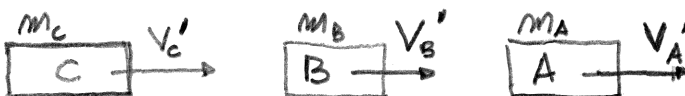
Trascurre el tiempo y los cuerpos interactúan (no importa cómo):

Figura 2.15:



Después que las interacciones terminan, tenemos:

Figura 2.16:



Consideremos el sistema aislado  $(A, B, C)$ . La cantidad de movimiento total *antes* de la interacción es  $P_T = m_A v_A + m_B v_B + m_C v_C$ . La cantidad de movimiento *después* es  $P'_T = m_A v'_A + m_B v'_B + m_C v'_C$ . Teniendo en cuenta lo que dijimos respecto de lo que era una interacción (un intercambio de cantidad de movimiento entre los cuerpos interactuantes), esperamos que  $P_T = P'_T$ , dado que si algún cuerpo perdió  $p$  es que algún otro cuerpo lo ganó. Por consiguiente, ¡todo el  $p$  que había en el sistema se conserva!

Si en cambio, consideramos el sistema  $(A, B)$ , la cosa cambia. En ese caso,  $P_T = m_A v_A + m_B v_B$  y  $P'_T = m_A v'_A + m_B v'_B$ . Como en este caso, los cuerpos  $A$  y  $B$  interactúan con una cantidad de movimiento por intercambio con  $C$  (que no está tenido en cuenta en la cantidad de movimiento total del sistema), esto quiere decir que, en este caso,  $P_T$  no tiene por qué conservarse, porque, en general,  $C$  entregará parte de su cantidad de movimiento o adquirirá, cantidad de movimiento de  $A$  y/o  $B$ . Podemos, enunciar lo siguiente: *un sistema aislado de  $N$  cuerpos en interacción conserva su cantidad de movimiento*. Se suele decir que

$$P_T = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots + m_N v_N = \sum_{i=1}^N m_i v_i$$

es una constante de movimiento para un sistema aislado de  $N$  cuerpos en interacción. Aprovechamos la ocasión para generalizar la posición y la velocidad del  $CM$  para  $N$  cuerpos:

$$X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$V_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots + m_N v_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i v_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{P_T}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Vemos aquí que la velocidad del centro de masa de un sistema aislado de  $N$  cuerpos en interacción es constante. Señalo una vez más que hasta ahora esqui-

vamos prolijamente lo que sucede *durante* la interacción. Todo lo que vimos, por lo tanto es general y no depende de cómo sea la interacción. El *durante* será motivo de la próxima entrega.

## 2.6. Estudiando las interacciones

Dado un sistema de dos cuerpos  $A$  y  $B$  que interactúan, ya sabemos cómo se relacionan sus movimientos *anteriores a la interacción* con sus movimientos *posteriores a la interacción*. Ahora veremos lo que pasa *durante la interacción*. En términos del Gráfico (2.10) de estos apuntes, ya hablamos bastante de lo que pasa para  $t < t_1$  y  $t > t_2$ . Ahora estudiaremos que pasa para  $t_1 \leq t \leq t_2$ . En otras palabras, trataremos de remover el signo “?” del Gráfico (2.10) encontrando como evoluciones  $p_a$  hasta  $p'_a$  y  $p_b$  hasta  $p'_b$ . Recordemos que una interacción entre dos cuerpos es un intercambio de cantidad de movimiento entre ellos tal y como una partida de figuritas. Esto quiere decir que si somos capaces de describir un partido de figuritas por medio de alguna característica, ¡también lo habremos logrado con las interacciones!

Recordemos el partido de figuritas entre Pedro y Roque de las páginas anteriores: diálogo entre Pedro y su mamá:

*Mamá:* ¿Qué hacés Petty? . Bueno, ya jugaste lo suficiente. ¡Ahora a bañarse y a hacer los deberes!

*Pedro:* Uh... ¡no! ¡Ya me bañé ayer! ¡Además esto de las fracciones es un plomo!

*Mamá:* Mirá Pedro que me voy a enojar... ¿De dónde venís?

*Pedro:* De jugar a las figuritas con Roque...

*Mamá:* ¿Y cómo te fue?...

*Pedro:* Bien... Gané 20 figuritas.

*Mamá:* ¿Y cuánto tiempo estuviste jugando?



*Nota de relator:* A partir de esta respuesta de Pedro, consideraremos dos escenarios posibles.

■ **ESCENARIO 1**

*Pedro:* 15 minutos

*Mamá:* ¿Y en 15 minutos le ganaste 20 figuritas? ¡Qué bárbaro! ¿No le habrás hecho trampa, me imagino?

*Pedro:* ¡Ay, mamá! Además, esas son cosas mías

■ **ESCENARIO 2**

*Pedro:* 3 horas...

*Mamá:* ¿3 horas jugando y solo le ganaste 20 figuritas? ¡Qué manera de perder el tiempo por 20 figuritas! ¡Qué aburrido!

Este diálogo ya nos introduce una cantidad adecuada, al menos de manera global o grosera, para describir la partida. Es la que emplea la mamá de Pedro (quizá sin saber formalizar como sí sabemos nosotros):

$$\text{Intensidad de juego } (\langle I_j \rangle) = \frac{\text{número de figuritas ganadas}}{\text{tiempo total de juego}}$$

■ *Para el ESCENARIO 1*

$$\langle I_j \rangle = \frac{20 \text{ figuritas}}{15 \text{ minutos}} = 1.33 \frac{\text{figurita}}{\text{minuto}}$$

■ *Para el ESCENARIO 2*

$$\langle I_j \rangle = \frac{20 \text{ figuritas}}{180 \text{ minutos}} = 0.11 \frac{\text{figurita}}{\text{minuto}}$$

Es obvio que el juego del ESCENARIO 1 fue mucho más intenso (al menos en promedio) que el juego del ESCENARIO 2. En el ESCENARIO 1 cada tanto se

intercambiaba  $\frac{4}{3}$  de figurita mientras en el ESCENARIO 2 hubo que esperar casi 10 minutos (en promedio) para intercambiar una figurita. Resulta más o menos claro que  $\langle I_j \rangle$  describe el juego de figuritas pero sin demasiado detalle. Para entender esto podemos imaginar infinitos juegos diferentes pero con la misma  $\langle I_j \rangle$ . Pensemos que la descripción de Pedro para el ESCENARIO 2 podría haber sido:

*Pedro:* ¡Fue muy emocionante! En los primeros 15 minutos perdí 10 figuritas, en la media hora siguiente, otras 10, pensé que me pelaba, pero en la hora y cuarto siguiente recuperé las figuritas que había perdido. Seguimos jugando y en 45 minutos perdí 15 figuritas. Se estaba haciendo de noche y entonces jugábamos cada vez más rápido, y ¡al final en los últimos 15 minutos gané 45 figuritas!. Resultado: gané 20 figuritas en tres horas

$$\langle I_j \rangle = 0.11 \frac{\text{fig}}{\text{min}}$$

Si queremos dar una descripción detallada del juego,  $\langle I_j \rangle$  no sirve. Esto se debe a que  $I_j$  en general varía a lo largo del juego. Podríamos, por ejemplo, decir lo que vale  $I_j$  a medida que transcurre el juego.

Dejemos las figuritas y volvamos a la mecánica. La manera más grosera de describir una interacción es considerar cuánta cantidad de movimiento se transfirió de un cuerpo a otro durante la interacción

$$\frac{\text{Número de figuritas ganadas}}{\text{Tiempo total de juego}}$$

O sea, la intensidad de la interacción media sobre  $A$  debida al cuerpo  $B$ , es (ver gráfico (2.10))

$$\langle F_{AB} \rangle = \frac{p'_A - p_A}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta p_A}{t_2 - t_1}$$

Análogamente, sobre el cuerpo  $B$  tendremos

$$\langle F_{BA} \rangle = \frac{p'_B - p_B}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta p_B}{t_2 - t_1}$$

Además, como  $\Delta p_A = -\Delta p_B$  (por conservación de  $P_T$ ), resulta

$$\langle F_{AB} \rangle = - \langle F_{BA} \rangle$$

A  $\langle F_{AB} \rangle$  se la llama *fuera media* sobre  $A$  debido a su interacción con  $B$  (es obvio cómo se llama  $\langle F_{AB} \rangle$ ). Esta cantidad describe la interacción tan bien o mal como  $\langle I_j \rangle$  describe el juego de figuritas.

Para mejorar la descripción deberíamos hacerla en términos de la intensidad de la interacción pero en cada instante (no el valor medio), o sea, en términos de la cantidad de movimiento intercambiada por unidad de tiempo pero instante a instante. Para eso consideramos lo siguiente: si aceptamos que la interacción entre dos cuerpos es un proceso de intercambio de cantidad de movimiento, esto no solo implica la conservación de movimiento total *antes* de la interacción y *después* de la interacción, sino también *durante* ella. En efecto, cada vez que un cuerpo gana un poquito de  $p$  es porque lo pierde el otro (durante el juego de figuritas, cada vez que un chico gana una figurita es porque el otro la pierde y el número de figuritas total permanece constante). Podemos entonces escribir para todo tiempo

$$P_T = p_A + p_B = cte$$

con toda generalidad.

$$\frac{dp_A}{dt} + \frac{dp_B}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dp_A}{dt} = -\frac{dp_B}{dt}$$

Si aplicamos estas expresiones para un tiempo  $t < t_1$  o  $t > t_2$

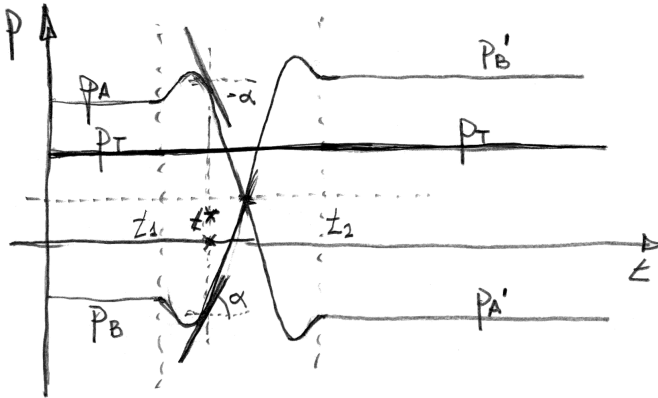
$$\frac{dp_A}{dt} = 0, \quad \frac{dp_B}{dt} = 0$$

y se cumplen trivialmente (si no hay interacción cada cuerpo conserva su cantidad de movimiento). Si en cambio  $t_1 \leq t \leq t_2$ , esto nos dice cómo deben evolucionar las curvas entre  $p_A$  y  $p'_A$  y  $p_B$  y  $p'_B$ . Que

$$\frac{dp_A}{dt} = -\frac{dp_B}{dt} \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

significa que si la curva baja, la otra curva debe subir lo mismo (y al revés). O sea el gráfico (2.10) lo completamos así:

**Figura 2.17:**



En el gráfico tratamos de explicarlo dibujando el ángulo de la recta tangente a ambas curvas en un tiempo cualquiera  $t^*$ . Debe suceder que si el ángulo para  $p_B$  es  $\alpha$  el otro será  $-\alpha$ .

Por otra parte, ¿qué significa  $\frac{dp_A}{dt}$ ? Es lo que varía la cantidad de movimiento por unidad de tiempo a cada momento. Es la intensidad de la interacción en ese momento. Por eso lo llamamos

$$F_{AB} = \frac{dp_A}{dt} = m_A \frac{dv_A}{dt} = am_A a_A$$

fuerza sobre  $A$  debido a la interacción con  $B$  y

$$F_{BA} = \frac{dp_B}{dt} = m_B \frac{dv_B}{dt} = a_B a_B$$

fuerza sobre  $B$  debido a la interacción con  $A$

(Notar: fuerza = intensidad de una interacción)

Como vimos,

$$\frac{dp_A}{dt} = -\frac{dp_B}{dt} \Rightarrow F_{AB} = -F_{BA}$$

Ya estamos en condiciones de enunciar, porque ya sabemos lo que quieren decir, las leyes fundamentales de la mecánica, también conocidas como *Leyes de Newton*:

1. Principio de inercia: todo cuerpo libre de interacciones o está en reposo o continúa con movimiento rectilíneo uniforme ( $v = cte$ ).
2. Principio de masa: todo cuerpo sometido a una interacción cuya intensidad es la fuerza  $F$ , adquiere una aceleración proporcional a dicha fuerza. La constante de proporcionalidad es la masa inercial.

$$F = m \cdot a \text{ (principio de masa)}$$

3. Principio de acción y reacción: toda fuerza proviene de una interacción entre dos cuerpos  $A$  y  $B$ . Esto quiere decir que las fuerzas aparecen de a pares (pares de acción y reacción). Una componente del par está en  $A$  ( $F_{AB}$ ), otra en  $B$  ( $F_{BA}$ ), y se verifica

$$F_{AB} = F_{BA} \text{ (principio de acción y reacción)}$$

Ya sabemos qué pasa con los cuerpos no interactúan (principio de inercia), y lo que sucede cuando interactúan es que varían su velocidad de acuerdo al principio de masa (segunda ley de Newton). Esto significa que si sabemos cómo son las interacciones (o sea las fuerzas), podremos determinar las aceleraciones. Y si conocemos las aceleraciones, podremos determinar cómo se mueven los cuerpos (integrando podemos encontrar  $v = v(t)$  y  $x = x(t)$ ) tal y como hemos aprendido cuando estudiamos cinemática. Vamos ahora a estudiar algunas interacciones.

## 2.7. Tipos de interacciones

Vamos a distinguir dos tipos de interacciones:

1. Interacciones a “distancia”.
2. Interacciones de vínculo.

La gran diferencia entre ambas es que las segundas (es decir, las interacciones de vínculo) *limitan* el movimiento de los cuerpos mientras que las que son “a distancia”, no lo hacen. Esto va a quedar más claro a continuación con ejemplos.

### 2.7.1. Interacciones “a distancia”

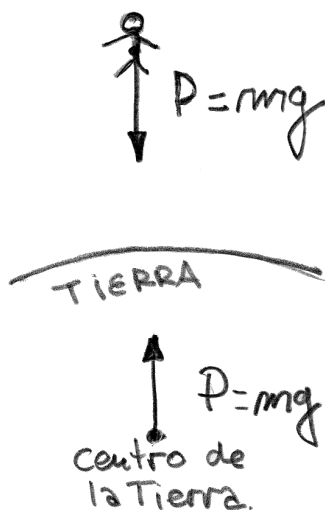
- a) La primera interacción de este tipo que vamos a introducir es la interacción gravitatoria con la Tierra. Todos los cuerpos (todos - todos) interactúan con la Tierra de modo tal que, por esa interacción, si no interactúan con ningún otro cuerpo, adquieren una aceleración hacia la Tierra que vale  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ . La *fuerza* que describe la interacción gravitatoria sobre el cuerpo recibe el nombre de *PESO* del cuerpo. El peso de un cuerpo de masa inercial vale entonces

$$P = m \cdot g$$

Esto último utilizando la segunda ley de Newton.

Según la tercera ley de Newton, las fuerzas vienen de a pares (pares de acción y reacción; , cada miembro del par aparece en cada uno de los cuerpos que interactúan. Esto quiere decir que si queremos describir la interacción gravitatoria entre un cuerpo (una persona, por ejemplo) de masa inercial  $m$  y la Tierra (de masa inercial  $M_T$ ) tendremos en el esquema de la Fig. (2.18).

**Figura 2.18:**



Por supuesto que la Fig. (2.18) no está a escala. Lo que queremos mostrar es que, como resultado de la interacción con la Tierra, sobre todo cuerpo cerca de ella (digamos que a una altura tal que  $h \ll R_T$  (radio terrestre) =  $6400km$ ) aparece una fuerza llamada peso del cuerpo, en el cuerpo y en el centro de la Tierra, que hace que se atraigan entre sí. Esto, entre otras cosas, nos permite afirmar pedantemente que quien dice: “Los objetos dejados libres desde una altura  $h$  caen hacia la Tierra”, está equivocado. Debería decir que “caen el uno hacia el otro”. Sin embargo, de hecho todos decimos que caen hacia la Tierra, y si bien, técnicamente, está mal, lo que

pasa es que sí caen! ¿Cómo puede ser que eso suceda? Hagamos algunos números. Consideremos que la persona en cuestión tiene una masa inercial  $m = 100kg$  (para redondear). Entonces tiene un peso de  $P = 100kg \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} = 980kg \frac{m}{s^2} = 980 \text{ Newton } (N)$  (aunque ya volveremos sobre las unidades, hemos aprovechado para introducir una unidad de fuerza:  $1 \text{ Newton } (N) = 1 \text{ kilogramo} \cdot \frac{1 \text{ metro}}{(\text{segundo})^2} = kg \frac{m}{s^2}$ ).

Calculemos qué aceleración aparece sobre la Tierra ( $a_T$ ) como consecuencia de esta fuerza aplicada en su centro,

$$980 N = M_T \cdot a_T = 5.97 \times 10^{24} kg \cdot a_T$$

(donde hemos puesto  $M_T = 5.97 \times 10^{24} kg$ ). O sea

$$a_T = \frac{980}{5.97} \cdot 10^{-24} = 1.34 \times 10^{-22} \frac{m}{s^2}$$

o sea,

$$a_T = \frac{1.64}{1000000000000000000000000} \frac{m}{s^2}$$

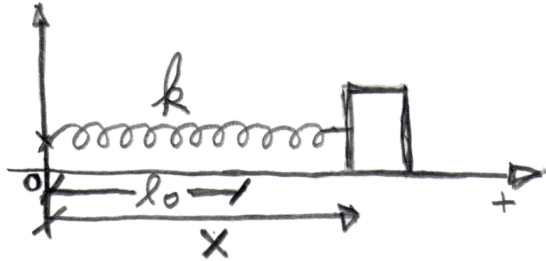
¡¡No existe instrumento capaz de medir esta aceleración!!

- b) Otra interacción “a distancia” que vamos a introducir ahora es la interacción elástica. Se la suele simbolizar como un “resorte” (porque en algunas condiciones es una realización de este tipo de interacción), pero hay que tener en cuenta que un resorte real siempre tiene masa inercial y se puede estirar y comprimir hasta cierto límite, en cambio nuestros “resortes” no tienen estas limitaciones: tienen masa nula y se pueden estirar o comprimir lo que haga falta, o sea no limitan el movimiento. Esta interacción es muy importante, ya que veremos, más adelante que cualquier interacción, bajo determinadas condiciones y con ciertas propiedades, dentro de ciertos



límites se comporta como la interacción elástica. Primero consideremos un cuerpo interactuando con una pared por medio de esta interacción.

**Figura 2.19:**

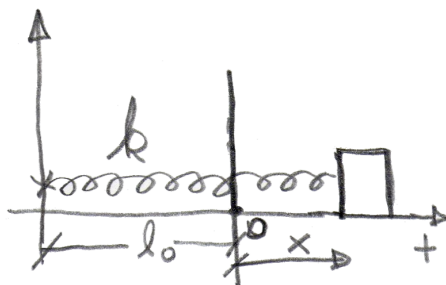


La fuerza que aparece sobre el cuerpo (fuerza elástica) resulta:

$$F_e = -k(x - l_0) \quad (2.6)$$

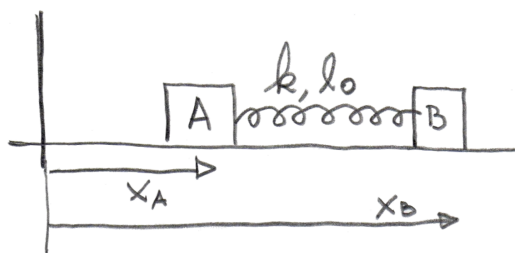
$k$  recibe el nombre de *constante elástica* del resorte y  $l_0$  es lo que se conoce con el nombre de *longitud libre* (es decir, cuando el resorte no está ni estirado ni comprimido). Es importante notar que la expresión de la fuerza elástica en términos de las coordenadas definidas por nuestro sistema de referencia va a variar si cambiamos dicho sistema. Por ejemplo, la expresión 2.6 para la fuerza elástica, es válida si  $x$  está definida como indica el sistema de referencia que está al lado. Si tomamos, por ejemplo el sistema

**Figura 2.20:**



entonces  $F_e = -kx$ . Esto es así porque el sentido físico de la fuerza elástica está dado por si el resorte está comprimido o estirado. Si el resorte está estirado, el sentido de la fuerza será aquel en que tiende a comprimirse y si está comprimido el sentido de la fuerza será aquel que tiende a estirarse. Ahora consideremos que el resorte provee la interacción entre los cuerpos  $A$  y  $B$

**Figura 2.21:**



Determinemos primero  $F_{AB}$  (la fuerza elástica sobre  $A$  debido a la interacción con  $B$ ).

La separación entre  $B$  y  $A$ ,  $(x_B - x_A)$  coincide con la longitud del resorte. Esto quiere decir que  $[(x_B - x_A) - l_0]$  es la deformación del resorte. Cuando el resorte está estirado  $[(x_B - x_A) - l_0] > 0$ , y entonces tendería a comprimirse, luego la fuerza sobre  $A$  debería apuntar hacia  $B$ . O sea,  $F_{AB} = k[(x_B - x_A) - l_0]$ . Sabemos que  $F_{AB} = -F_{BA} = -k[(x_B - x_A) - l_0]$  pero podríamos concluir lo mismo razonando como hicimos para determinar  $F_{AB}$ . En suma, la descripción “matemática” de la fuerza *debe* cumplir con la física: si el resorte entre los cuerpos está estirado, entonces la interacción entre ellos es atractiva (tiende a juntarlos). Si el resorte está comprimido, entonces la interacción es repulsiva (tiende a separarlos).

Más adelante trabajaremos con otras interacciones “a distancia”, como la inter-

acción gravitatoria universal (que a cortas distancias de la Tierra provee el peso sobre los cuerpos que ya vimos) o la fuerza electrostática (o ley de Coulomb) entre cuerpos con carga eléctrica.

### 2.7.2. Interacciones de vínculo

Como ya fue mencionado, las interacciones de vínculo son aquellas que provienen de una limitación en el movimiento de los cuerpos, por ejemplo, un cuerpo apoyado sobre una superficie, una bolita deslizando (enhebrada) en un alambre, una piedra atada a un piolín describiendo un círculo, etcétera. Las fuerzas que describen interacciones de este tipo reciben el nombre de fuerzas de vínculo. Estas interacciones están *siempre* relacionadas con la existencia de alguna ecuación que *vincula* las coordenadas del problema (ecuación de vínculo).

NO HAY INTERACCIÓN DE VÍNCULO (NI FUERZA CLARO) SIN ECUACIÓN DE VÍNCULO.

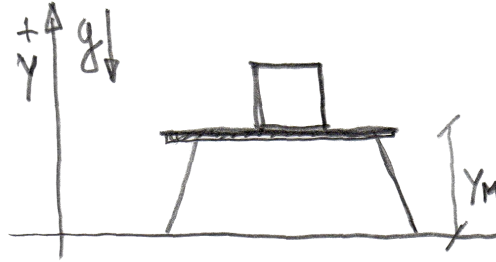
Esto quedará más claro con los ejemplos que veremos a continuación. Otra característica de las interacciones de vínculo es que el valor que toman sus fuerzas es desconocido y en general resultan incógnitas que conoceremos recién como solución del problema mecánico. Podemos decir entonces que las fuerzas de vínculo se acomodan (mientras puedan...) al resto de las interacciones y condiciones del problema. Esta característica las hace completamente diferentes de las interacciones a distancia, cuyas fuerzas conocemos antes de resolver el problema (por ejemplo el peso es  $P = mg$ ; dado un sistema de referencia la fuerza elástica vale  $F_e = -kx \dots$ , etcétera).

a) Interacción de contacto.

Esta interacción es la que se produce cuando dos cuerpos están en contacto mutuo y está relacionada con la impenetrabilidad de la materia.

Por ejemplo, consideremos un cuerpo apoyado sobre una mesa (o cualquier superficie plana). Supongamos que el cuerpo se encuentra en reposo. Entonces tendremos el siguiente esquema:

**Figura 2.22: Cuerpo apoyado sobre una mesa.**

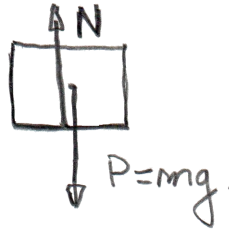


El cuerpo interactúa con la tierra gravitatoriamente, entonces sobre él actúa la fuerza peso. También está en contacto con la mesa. Que esté en contacto con la mesa establece una ecuación de vínculo para la coordenada  $Y$  del cuerpo:

$$y = y_M$$

Asociada a esta ecuación hay una interacción de contacto entre el bloque y la mesa. A las fuerzas de esa interacción (fuerzas de contacto) se las suele llamar “normales” porque resultan perpendiculares a las superficies de contacto. Es usual dibujar los cuerpos por separado con todas las fuerzas aplicadas sobre ellos. Tales dibujos reciben el nombre de *diagrama de cuerpo libre*. Para el caso es

Figura 2.23:



Ahora, si pensamos en la segunda ley de Newton, podemos escribir

$$ma = -mg + N$$

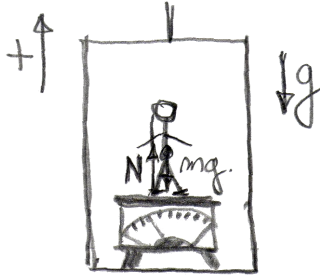
(Observar que esta ecuación tiene sentido si viene acompañada del sistema de referencia indicado en el gráfico 2.22. La ecuación de vínculo  $y = y_M$  nos permite decir que  $a = \frac{d^2y}{dt^2} = 0$ . Esto significa que

$$mg = N$$

Dadas las condiciones del problema, resulta que  $N$  es igual y opuesta a  $P$ . Quizá alguno de ustedes piense que el peso y  $N$  son un par de acción y reacción ¡De ningún modo es así! Recordemos que la otra componente del par correspondiente al peso está aplicada en el centro de la Tierra y la otra componente del par correspondiente a la fuerza de contacto  $N$  está en la mesa. En una descripción “animalista” podríamos decir que el bloque “trata” de atravesar la mesa pero la mesa no se “deja” atravesar. La fuerza  $N$  se acomoda a lo que haga falta para mantener las condiciones del problema (que  $y = y_M$  y por lo tanto  $a = 0$ ). Este poder de acomodación tiene su límite. ¿Qué pasa si aumentamos la masa del bloque?. Claramente debe también aumentar  $N$  pero llega un momento que el  $N$  llega a ser tan grande que... la mesa se hace moco. Se despanzurra y se acabó el poder de

acomodación. Resolvamos un sencillo problema que tiene que ver con las normales. Supongamos que un señor está en un ascensor que se encuentra en reposo y se está pesando en una balanza:

**Figura 2.24:**



La segunda ley de Newton nos dice que (al igual que el ejemplo anterior del bloque y la mesa) resulta  $mg = N$ , donde  $N$  es la fuerza de contacto entre el señor y la balanza. La balanza mide la fuerza de contacto  $N$ , y como  $N$  es igual al peso, el señor dice que su peso es  $N = mg$ .

Imaginemos que ahora el ascensor comienza a subir con una aceleración constante  $a$ .

**Figura 2.25:**



Entonces, ahora tendremos

$$ma = N - mg$$

y por lo tanto,

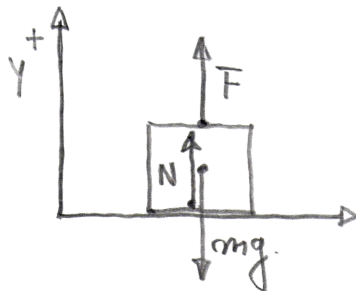
$$N = mg + ma$$

y como la balanza mide la fuerza de contacto  $N$ , vemos que el resultado será mayor que el peso. El señor dirá, en este caso, que “pesa” más (por cierto, si la aceleración  $a$  fuera hacia abajo, diría que “pesa” menos, es más, si  $a = -g$ , o sea si el ascensor cayera libremente hacia la Tierra, entonces  $N = 0$  y diría que “no pesa nada”). Por supuesto que el peso del señor es siempre el mismo,  $P = mg$ , ya que el peso, por definición es la fuerza que aparece sobre los cuerpos por su interacción gravitatoria con la Tierra. Lo que cambia es la *sensación de peso*, que está relacionada con la fuerza de contacto  $N$  y que es lo que miden las balanzas (a las balanzas deberíamos llamarlas “normalómetros” o “contactómetros”).

Otra forma de “pesar menos”, es pesarnos en una pileta. Esto también disminuye la  $N$  entre nosotros y la balanza.

Consideremos ahora el siguiente sistema, consistente en un bloque apoyado en el piso y con una fuerza aplicada hacia arriba (por interacción con otro cuerpo que no está en el dibujo)

**Figura 2.26:**



Mientras  $y = 0$  (ecuación de vínculo que expresa que el bloque está en contacto con la mesa), la segunda ley de Newton se escribe como

$$F + N - mg = 0 \Rightarrow mg = F + N$$

En estas condiciones, vemos que para que haya fuerza de contacto  $F$  debe ser menor que  $mg$ . Si  $F > mg$  el cuerpo se “levanta” y deja de haber contacto. Para que no “levante”, en ese caso, el bloque debería estar “adherido”, pegado, al piso. Si eso sucede, la fuerza de contacto entre el bloque y el piso puede apuntar para el otro lado (contrario al del dibujo) y entonces

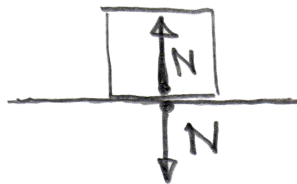
$$N = mg - F < 0$$

Si aumentamos  $F$ , en algún momento el pegamento que adhiere el bloque resistirá y  $N$  no podrá acomodarse más: el bloque se despega.

Notemos aquí que si el bloque no está pegado, es decir, en contacto, apoyado en el piso,  $N$  *no puede apuntar para el otro lado*. Esto quiere decir que en este caso, si bien no podemos decir cuanto va a valer  $N$  sin hacer la cuenta, *si sabemos para dónde va a apuntar*. Si después de hacer la cuenta  $N$  nos da negativa, pueden pasar dos cosas: *i)* o nos equivocamos o *ii)* el problema es imposible.

En resumen, si el bloque está en contacto (sin goma de pegar) seguro que las fuerzas que describen la interacción de contacto deben ser como están representadas en la Fig. (2.27).

**Figura 2.27:**

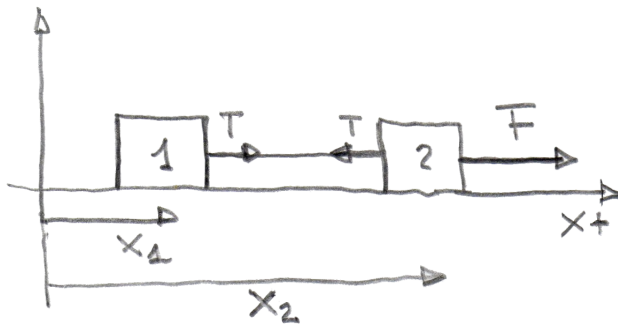




b) Tensión

Esta interacción está provista por un hilo, de masa nula (despreciable) inextensible. como se presenta en la Fig. (2.28)

Figura 2.28:



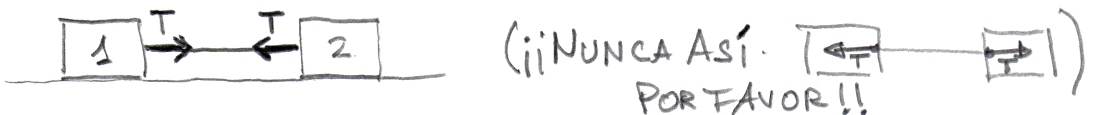
Mientras el hilo esta tenso se cumple la ecuación de vínculo.

$$x_2 - x_1 = l$$

donde  $l$  es la longitud del hilo.

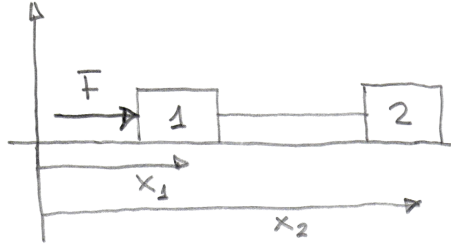
Acompañando esta ecuación de vínculo aparece una interacción entre los cuerpos cuya fuerza recibe el nombre de *tensión*. Es evidente que el hilo impide que los cuerpos se separen, esto indica que *a priori*, conocemos para donde deben apuntar las fuerzas sobre cada cuerpo.

Figura 2.29:



Decimos entonces que esta interacción es siempre atractiva. Si el problema fuera como está representado en la Fig. (2.30).

Figura 2.30:

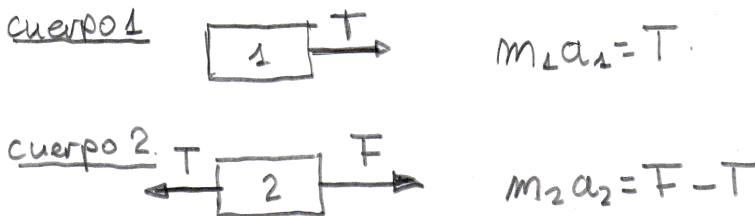


no tendríamos interacción de vínculo ya que el hilo se aflojaría y no habría ecuación de vínculo ( $x_2 - x_1 = l$ ).

Resolvamos el siguiente problema: conocidas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $F$ , hallar la tensión y la aceleración de cada cuerpo.

1. Hacer un diagrama donde esté claramente indicado el sistema de referencia (ya lo hicimos antes).
2. Hacer el diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo y plantear la segunda ley de Newton (Fig. (2.31)).

Figura 2.31:



- 3 Utilizar las ecuaciones de vínculo. En este caso

$$x_2 - x_1 = l \Rightarrow \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0 \Rightarrow a_2 - a_1 = 0$$

- 4 Resolver las ecuaciones.

Como  $a_1 = a_2 = a$ , tendremos

$$m_1 a = T \quad (2.7)$$

$$m_2 a = F - T \quad (2.8)$$

Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas ( $a$  y  $T$ ). Sumamos miembro a miembro las ecuaciones:

$$(m_1 + m_2)a = F \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} \quad a_1 = a_2 = a$$

Esta expresión la reemplazamos en (2.7) y obtenemos

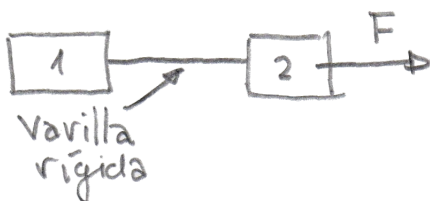
$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F$$

Notemos que:

- 1)  $T$  resulta positivo. Esto es importante porque si diera negativo indicaría que debería apuntar al revés y sabemos que con un hilo es imposible.
- 2) El valor de  $T$  se acomoda a las otras fuerzas (no de vínculo) que actúan en el sistema (en este caso  $F$ ). Claro que se acomoda mientras puede ya que vemos que si aumentamos  $T$  y podría ser que para algún valor de  $F$  el hilo se corte.

Les dejo pensar cuáles serían los cambios en todo lo escrito desde el item “b) Tensión” si en lugar del hilo, tuviéramos una varilla rígida de masa despreciable entre los cuerpos (Fig. (2.32)).

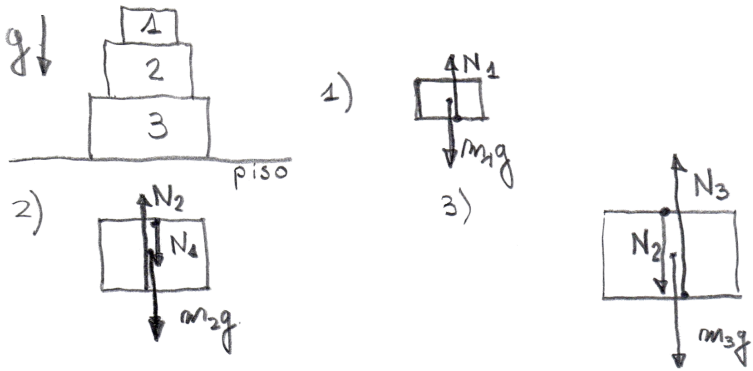
**Figura 2.32:**



## 2.8. Fuerzas Internas y Externas

Consideremos el sistema de la figura formado por tres cuerpos 1, 2 y 3. Los diagramas de cuerpo libre son los mostrados en la Fig. (2.33).

Figura 2.33:

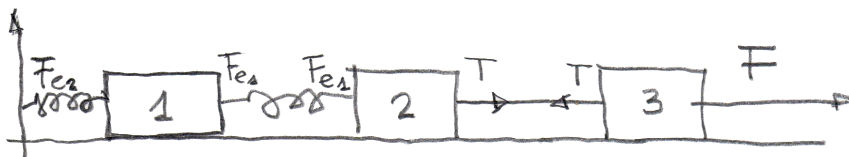


Vemos aquí que la interacción de contacto entre 1 y 2 origina las fuerzas del módulo  $N_1$  que aparecen en 1 y 2 con sentidos opuestos (son un par de acción y reacción). Lo mismo podemos decir de la interacción de contacto entre 2 y 3: origina las fuerzas de módulo  $N_2$  que aparecen en 2 y 3. En el caso de estas dos interacciones, *ambas* componentes del par de acción y reacción están aplicadas a cuerpos que están *dentro* del sistema. Es por eso que estas dos interacciones (y las fuerzas respectivas) reciben el nombre de *internas*.

Por otra parte, los pesos de los tres cuerpos y la normal  $N_3$  son fuerzas *externas* debido a que las otras componentes del par de acción y reacción están aplicadas en cuerpos que están fuera del sistema (la Tierra en el caso del los pesos y el piso en el caso de  $N_3$ ).

Otro ejemplo: el sistema son los cuerpos 1, 2 y 3 (Fig. (2.34)).

Figura 2.34:



En este caso, las tensiones y las fuerzas elásticas  $F_{e1}$  son internas.  $F_{e2}$  y  $F$  resultan externas.

Es evidente que el carácter de interno o externo dependerá de lo que tomemos como sistema. Por ejemplo, si el sistema es el cuerpo 2, tanto  $T$  como  $F_{e1}$  resultan externas.

Consideremos ahora un sistema formado por  $N$  cuerpos que interactúan entre sí y además con otros cuerpos que están afuera del sistema.

La segunda ley de Newton para el cuerpo 1 será:

$$m_1 a_1 = F_1^{(ext)} + F_{12} + F_{13} + F_{14} + \dots + F_{1N}$$

donde hemos distinguido entre la suma de todas las fuerzas externas que aparecen en el cuerpo 1 ( $F_1^{(ext)}$ ) y cada una de las fuerzas internas que aparecen en él ( $F_{12}, F_{13}, \dots, F_{1N}$ ). Para el cuerpo 2 será

$$m_2 a_2 = F_2^{(ext)} + F_{21} + F_{23} + F_{24} + \dots + F_{2N}$$

Y así siguiendo hasta el cuerpo  $N$ -ésimo:

$$m_N a_N = F_N^{(ext)} + F_{N1} + F_{N2} + F_{N3} + \dots + F_{N(N-1)}$$

sumamos miembro a miembro todas estas ecuaciones obtenemos:

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_N \cdot a_N = F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)} + \dots + F_N^{(ext)}$$

*Aquí desaparecieron las fuerzas internas.* Esto es así porque  $F_{12}$  se cancela con  $F_{21}$  (recordar  $F_{12} = -F_{21}$ ,  $F_{13}$  se cancela con  $F_{31}$ , etcétera.

Por otra parte, como  $a_1 = \frac{dv_1}{dt}$ ,  $a_2 = \frac{dv_2}{dt}$ , ...,  $a_N = \frac{dv_N}{dt}$  y las masas son constantes, podemos escribir

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_N v_N)}_{P_T} = F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)} + \dots + F_N^{(ext)}$$

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_N) \frac{d}{dt} \left[ \frac{P_T}{(m_1 + m_2 + \dots + m_N)} \right] = F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)} + \dots + F_N^{(ext)}$$

o sea, llamando  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$  (masa total del sistema)

$$MA_{CM} = \sum_{i=1}^N F_i^{(ext)}$$

Esta relación es muy importante y nos dice que el movimiento del centro de masa del sistema está determinado sólo por las fuerzas externas al sistema (no importa en qué cuerpo estén aplicadas).

En particular, si no hay fuerzas externas (o sea el sistema está aislado), obtenemos

$$MA_{CM} = M \frac{dV_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} (MV_{CM}) = 0 \Rightarrow MV_{CM} = P_T = cte$$

Es decir, reencontramos el principio de conservación de la cantidad de movimiento:

Si sobre un sistema no actúan fuerzas externas (está aislado), su cantidad de movimiento es una constante de movimiento (no varía en el tiempo)

Podemos decir en ese caso, que su centro de masa se moverá con velocidad constante, es decir  $V_{CM} = cte$ .

## 2.9. Unidades de Fuerza

Como vimos cuando introdujimos la masa inercial, la elección de las unidades es absolutamente arbitraria. Esto ocurre para cualquier magnitud física. No

es de extrañar que las magnitudes más básicas (como la longitud, las fuerzas, los volúmenes, las masas, etcétera) hayan originado, en cada cultura, una unidad propia. Tomemos la unidad de longitud, por ejemplo:

- Las unidades inglesas tradicionales son pulgada, pie, yarda, braza, milla terrestre, milla náutica, etcétera.
- Las unidades eslavas son tochka, diuim, fut, arshin, versta, milia, etcétera.
- Las unidades romanas eran actus vorsus, cubitus, digitus, palmus, etcétera.
- Las españolas: legua, cuerda, estadal, tercia, milla (distinta de la inglesa!!), vara, etcétera.
- Las francesas: toesa, caña, linea, arpent, etc.
- Las incas son rikra, sikya, cuchuch, capa, yuku, etc.
- Las aztecas: matlacicxitia, tlalcuahuitl, yollotliciacatl, etc.

Podría agregar las chinas, japonesas, indias, vietnamitas, etcétera, pero entienden lo que significa.

La historia de la generación de un sistema de unidades universal podría ocupar varios libros y aún no es cosa cerrada, aunque estamos bastante cerca.

Hoy en día los científicos de todo el mundo (o casi todo...) se han puesto de acuerdo y han definido “sistemas” de unidades con el objeto de conseguir cierto orden dentro del lío esbozado más arriba.

Nosotros utilizaremos dos de estos sistemas:

1. *MKS* (o *SI*, Sistema Internacional de unidades)
2. *cgs* (o sistema cegesimal de unidades)

*Empecemos con el MKS(SI)*

Las unidades básicas de este sistema son:

- Longitud: metro ( $m$ )
- Masa inercial: kilogramo ( $kg$ )
- Tiempo: segundo ( $s$ )

*Para el cgs*

- Longitud: centímetro ( $cm$ )
- Masa inercial: gramo ( $g$ )
- Tiempo: segundo ( $s$ )

La unidad de fuerza queda definida por la segunda ley de Newton:

*Para el MKS*

La unidad de fuerza es aquella fuerza que aplicada sobre un cuerpo cuya masa es de  $1 kg$ , le imprime una aceleración de  $1 \frac{m}{s^2}$  y recibe el nombre de  $1 Newton(N)$ .

O sea,

$$1 N = 1 kg \frac{m}{s^2}$$

*Para el cgs*

Es aquella fuerza aplicada sobre un cuerpo de masa  $1 g$ , le imprime una aceleración de  $1 \frac{cm}{s^2}$  y recibe el nombre de  $1 dina(dyn)$ . O sea,

$$1 dyn = 1 g \frac{cm}{s^2}$$

Alternativamente también utilizaremos, como unidad de fuerza, el “kilogramo fuerza” ( $\vec{kg}$ ). Esta unidad está definida como aquella fuerza que le confiere a un cuerpo cuya masa es de  $1 kg$  una aceleración de  $9.8 \frac{m}{s^2}$ . Dicho de otra forma  $1\vec{kg}$  es lo que pesa en la Tierra un cuerpo cuya masa inercial es de  $1 kg$ .

$$1\vec{kg} = 9.8 kg \frac{m}{s^2} = 9.8 N$$



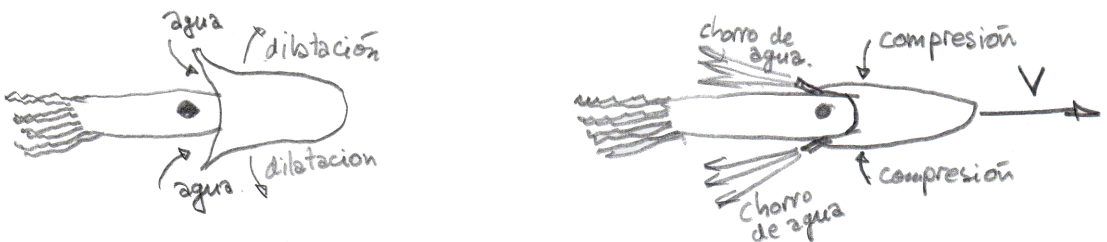
## 2.10. “Fuerza” de retropropulsión. Masa variable

Vamos a estudiar ahora un efecto que tiene aplicaciones tecnológicas de gran importancia: la “fuerza” de retropropulsión.

Las comillas obedecen a que, como veremos, *NO* es una fuerza (al menos no lo es en el sentido de ser la intensidad de una interacción). Lo que estudiaremos está relacionado con los aviones a “chorro” (a “reacción”), a los cohetes y a la manera de trasladarse que tienen los pulpos, los calamares, las aguas vivas y ciertos caracoles en el mar.

Veamos cómo se traslada el calamar. Primero el tubo del calamar se dilata y se llena del agua circundante. Luego, se comprime súbitamente, de modo de expulsar agua a través de cánulas. En un dibujito, graficamos como el calamar se mueve en un medio (el agua de mar) y, luego de adquirir cierta velocidad, se va frenando. De esta manera, por repeticiones del proceso que describimos va avanzando de a trechos.

**Figura 2.35: Calamar.**

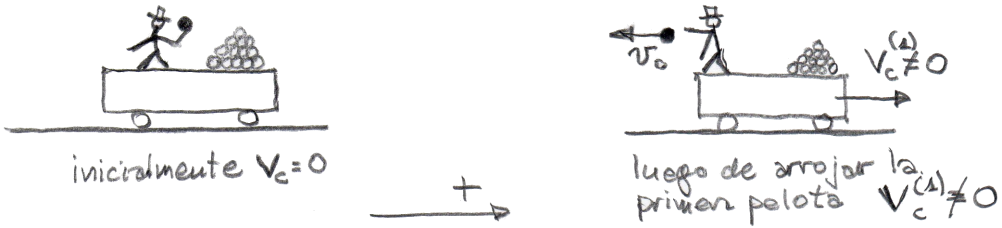


Imaginemos un dispositivo “mecánico” que reproduzca esa manera de propulsarse: una persona sobre un carrito con una bolsa de pelotas de fútbol (también pueden ser melones o sandías o cualquier cosa que se pueda arrojar). Supongamos que la persona puede agarrar una de esas pelotas con una velocidad

$v_0$  respecto de él.

Inicialmente el carrito está en reposo. Veamos qué pasa inmediatamente después de arrojar una pelota (Fig. (2.36)):

**Figura 2.36:**



Conociendo las masas inerciales de las pelotas ( $m_p$ ), las masas del conjunto hombre-carro ( $M_0$ ) y el número de pelotas inicial  $N$ , podemos calcular fácilmente la velocidad que adquiere el carrito luego del lanzamiento de la primera pelota ( $V_c^{(1)}$ ). En efecto, por conservación de la cantidad de movimiento, sabemos que:

$$-m_p v_0 + (M_0 + (N - 1)m_p) V_c^{(1)} = 0$$

ya que inicialmente, la cantidad de movimiento es cero. O sea

$$V_c^{(1)} = \frac{m_p v_0}{(M_0 + (N - 1)m_p)}$$

Notemos que esta velocidad depende fuertemente de  $v_0$  y como en general  $m_p \ll (M_0 + (N - 1)m_p)$ , para que la velocidad  $V_c^{(1)}$  sea apreciable necesitaríamos que  $v_0$  sea enorme (frente a las velocidades ordinarias a escala humana). Hagamos números: supongamos  $N = 100$ ,  $m_p = 0.5 \text{ kg}$ ,  $M_0 = 150 \text{ kg}$  y  $v_0 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (esta velocidad corresponde a la que le puede imprimir un humano "normal" a una pelota). Entonces obtenemos:

$$V_c^{(1)} = 0.0025 v_0 \Rightarrow V_c^{(1)} = 0.03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

¡Tres centímetros en un segundo! ¡Así no vamos a llegar muy lejos!

Calculemos, por otra parte, con qué velocidad deberíamos lanzar la pelota para tener una velocidad apreciable, digamos  $V_c^{(1)} = 1 \frac{m}{s}$ :

$$v_0 = \frac{1 \frac{m}{s}}{0.0025} = 400 \frac{m}{s} = 1440 \frac{km}{h} !!$$

¡Imposible a menos que contemos con un cañón lanzapelotas!

Supongamos entonces que nuestro hombre cuenta con un dispositivo de ese tipo cuya masa incluiremos en  $M_0$ . Vamos a considerar dos procesos posibles:

El primero, pensando en el calamar, corresponde a tener en cuenta el rozamiento del carrito con el aire. En ese caso, a partir de la velocidad  $V_c^{(1)}$ , el carrito se irá deteniendo. Finalmente, cuando se detiene, se arroja otra pelota desde el carrito y entonces tendremos:

$$V_c^{(2)} = \frac{m_p v_0}{(M_0 + (N - 2)m_p)}$$

que fácilmente se generaliza para obtener la velocidad del carrito luego de arrojar un número  $l$  de pelotas:

$$V_c^{(l)} = \frac{m_p v_0}{(M_0 + (N - l)m_p)}$$

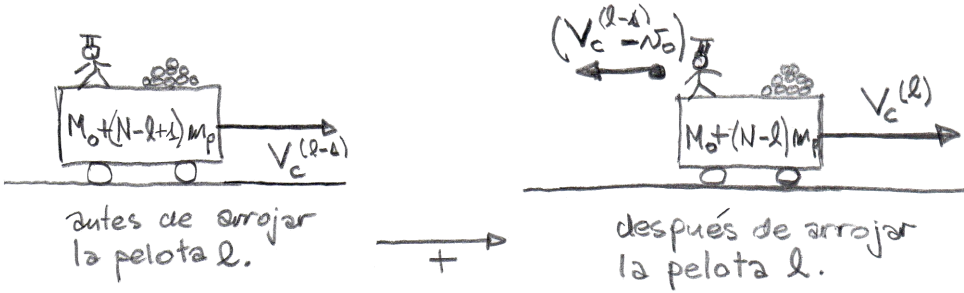
Este movimiento, por trechos, se parece bastante al del calamar. Sin embargo, hay dos diferencias importantes:

1. La velocidad del calamar luego de cada expulsión de agua es esencialmente la misma. En nuestro caso, en cambio,  $V_c^{(l)}$  va aumentando a medida que  $l$ , el número de pelotas arrojadas, aumenta. Eso se debe a que a medida que arrojamos pelotas, el conjunto (carrito-hombre-pelotas) disminuye su masa. En caso del calamar, la masa de agua que se expulsa en el chorro, se recupera en la dilatación. Es como si en nuestro caso, alguien nos devolviese la pelota que arrojamos de modo que siempre tiramos la misma.

2. Podemos mover el carrito mientras tengamos pelotas para arrojar. Se acaban las pelotas, se acaba el movimiento. El caso del calamar es diferente porque en cada dilatación recupera masa para poder expulsar, en consecuencia puede trasladarse indefinidamente.

El segundo proceso no tiene que ver con el calamar sino más bien con un cohete que se impulsa en el espacio exterior. Ahora despreciamos el efecto del rozamiento y suponemos que el conjunto (carrito-hombre-pelotas remanentes) continúa con velocidad constante entre los “arrosos” de pelota. Entonces, entre el arrojado de la pelota  $(l - 1)$  y  $l$  tendremos:

**Figura 2.37:**



Entonces, la cantidad de movimiento antes de arrojar la pelota  $l$  es

$$P = [M_0 + (N - l + 1)m_p] V_c^{(l-1)}$$

y después,

$$P = (V_c^{(l-1)} - v_0) m_p + [M_0 + (N - l)m_p] V_c^{(l)}$$

Aquí, tal vez, para quien esté medio distraído, la velocidad que tiene la pelota  $(V_c^{(l-1)} - v_0)$  puede resultar rara. Aclaremos entonces que esa velocidad de la pelota corresponde a un observador que está en el piso (que es la que hay que tener en cuenta para calcular  $P$ ).

Esto es así porque  $v_0$  es la velocidad de la pelota respecto de la persona que la arroja, que cuando lo hace tiene una velocidad  $V_c^{(l-1)}$  hacia adelante (porque se mueve con el carrito). Es decir, la velocidad de la persona respecto del piso es  $V_c^{(l-1)}$  hacia adelante. La velocidad de la pelota respecto al señor es  $v_0$  hacia atrás. Entonces, la velocidad de la pelota respecto del piso será  $(V_c^{(l-1)} - v_0)$ .

Igualando  $P$  antes y después

$$[M_0 + (N - l + 1)m_p] V_c^{(l-1)} = (V_c^{(l-1)} - v_0) m_p + [M_0 + (N - l)m_p] V_c^{(l)}$$

De aquí despejamos  $V_c^{(l)}$  y obtenemos

$$V_c^{(l)} = V_c^{(l-1)} + \frac{v_0 m_p}{(M_0 + (N - l)m_p)}, \text{ con } V_c^{(0)} = 0$$

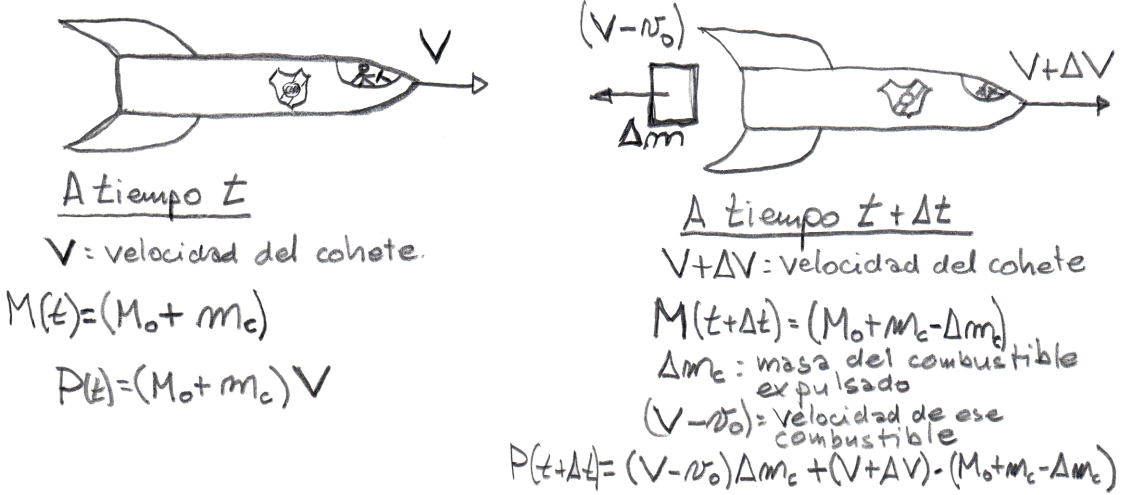
Vemos que el carrito va cada vez más rápido. A medida que la persona arroja pelotas, aumenta la velocidad y además disminuye su masa. Podríamos decir que el conjunto (carrito-hombre-pelotas remanentes) adquiere cantidad de movimiento hacia adelante gracias a que las pelotas que arroja, se llevan cantidad de movimiento hacia atrás (por eso el mecanismo se llama de retropropulsión).

Iterando la expresión que hallamos, se puede obtener:

$$V_c^{(l)} = v_0 m_p \sum_{l=1}^N \frac{1}{(M_0 + (N - l)m_p)}$$

*Cohete* (dedicado a Luis Alberto Spinetta y al Capitán Beto). Para ello utilizaremos la estrategia ya planteada con nuestro carrito “retropropulsado” por pelotas. Un cohete funciona exactamente igual. En este caso las “pelotas” que arroja, son gases quemados, que provienen de combustión y que el cohete expulsa a gran velocidad por medio de una turbina (Fig (2.38)).

Figura 2.38: Ahí va el Capitán Beto por el espacio...



Durante el tiempo  $\Delta t$ , el combustible expulsado de masa  $\Delta m$  y el cohete son un sistema asilado, o sea no hay fuerzas externas sobre ellos. Esto quiere decir que, como  $\frac{dP}{dt} = F^{(ext)}$ , sabemos que debe ser

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = 0$$

O sea,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(V + \Delta V)(M_0 + m_c - \Delta m_c) + (V - v_0)\Delta m_c - V(M_0 + m_c)}{\Delta t} = 0$$

Desarrollamos el numerador,

$$\cancel{V(M_0 + m_c)} - V\Delta m_c + \Delta V(M_0 + m_c) - \Delta V\Delta m_c + \cancel{V\Delta m_c} - v_0\Delta m_c - \cancel{V(M_0 + m_c)}$$

O sea,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} (M_0 + m_c) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V \Delta m_c}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_0 \frac{\Delta m_c}{\Delta t}$$

Ahora bien:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\Delta m_c}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{M(t + \Delta t)}^{M_0 + m_c - \Delta m_c} - \overbrace{M(t)}^{M_0 + m_c}}{\Delta t} = \frac{dM}{dt}$$

además,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m_c \Delta V}{\Delta t} = 0$ , ya que para  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta m_c$  y  $\Delta V$  tienden a cero como  $\Delta t$  (por eso existen  $\frac{dM}{dt}$  y  $\frac{dV}{dt}$ !!) o sea  $\Delta m_c \Delta V \sim (\Delta t)^2$ . Finalmente obtenemos

$$(M_0 + m_c) \frac{dV}{dt} = -\frac{dM}{dt} v_0$$

o también

$$M(t) \frac{dV}{dt} = -\frac{dM}{dt} v_0 \tag{2.9}$$

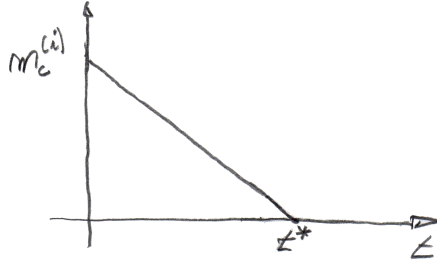
Esta expresión para la aceleración del cohete se parece a la segunda ley de Newton ( $F = ma$ ), sin embargo, no lo es. Quizá por ese parecido es que al término  $F_{re} = -\frac{dM}{dt} v_0$  se lo conoce como “fuerza” de retropropulsión. Esta observación quedará más clara si consideramos un problema más concreto.

Tanto  $v_0$  como  $\frac{dM}{dt}$  son características del cohete.  $v_0$ , velocidad de expulsión de los gases, depende de la turbina, y  $\frac{dM}{dt}$  es la velocidad de quemado del combustible. Recordemos que  $M(t) = M_0 + m_c(t)$ .  $M_0$  es una constante: la masa del capitán Beto, la de su sillón y todo el material que forma el cohete, incluido el escudo de River, que no es combustible. La masa del sistema que estudiamos varía porque varía la masa de combustible  $m_c(t)$ . Supongamos que nuestro cohete tiene una velocidad de expulsión  $v_0$  constante y una velocidad de quemado  $\frac{dM}{dt} = \frac{dm_c}{dt}$  también constante. Observemos que  $m_c$  disminuye con el tiempo, esto quiere decir que  $\frac{dm_c}{dt} < 0$ . O sea,

$$\frac{dm_c}{dt} = -\mu, \text{ con } \mu > 0 \Rightarrow m_c(t) = -\mu t + m_c^{(i)}$$

donde  $m_c^{(i)}$  es la masa inicial del combustible. Esta es la ley que nos indica la masa remanente de combustible a tiempo  $t$ . Esto lo podemos ver gráficamente en la Fig. (2.39).

Figura 2.39:



El tiempo  $t^*$  es el tiempo en el cual se acaba el combustible y vale  $t^* = \frac{m_c^{(i)}}{\mu}$ . Después de ese tiempo, se apagan los motores y el cohete continuará con la misma velocidad alcanzada en ese momento.

Para este cohete, ( $v_0$  y  $\mu$  constantes) la expresión de la Ec. (2.9) resulta

$$(M_0 + m_c^{(i)} - \mu t) \frac{dV}{dt} = \mu v_0 \quad (2.10)$$

Si esto fuera “una” segunda ley de Newton, una fuerza constante  $\mu v_0$  debería conducir a una aceleración  $\frac{dV}{dt}$  constante pero vemos que no es así (la masa depende del tiempo y, si bien  $\mu v_0$  es constante, al disminuir la masa debe aumentar la aceleración). En este caso, la Ec. (2.10) se integra inmediatamente separando variables:

$$dV = \mu v_0 \frac{dt}{(M_0 + m_c^{(i)} - \mu t)}$$

O sea,

$$V(t) = \int_{V_0=0}^{V(t)} dV = \mu v_0 \int_{t=0}^t \frac{dt}{M_0 + m_c^{(i)} - \mu t} = \mu v_0 \left[ -\frac{1}{\mu} \ln (M_0 + m_c^{(i)} - \mu t) \right]_0^t$$

$$V(t) = v_0 \ln \left[ \frac{M_0 + m_c^{(i)}}{M_0 + m_c^{(i)} - \mu t} \right]$$



Esta expresión vale hasta  $t = t^*$ , ya que como vimos a ese tiempo se apagan los motores y se llega a la velocidad máxima:

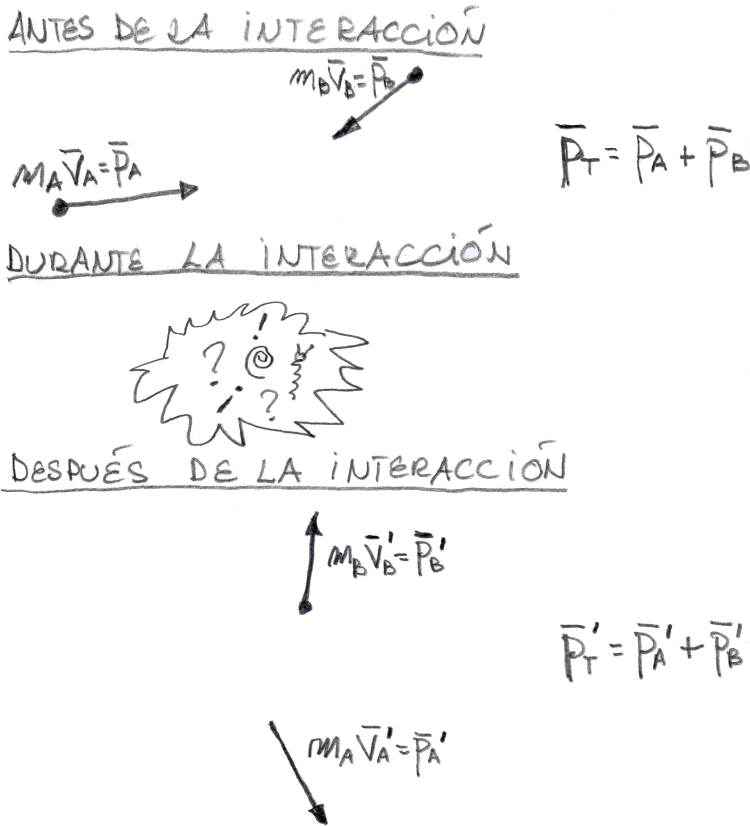
$$V_{max} = V(t = t^*) = v_0 \ln \left[ \frac{M_0 + m_c^{(i)}}{M_0} \right]$$

Lo notable de esta velocidad es que no depende de la velocidad de quemado. Cualquiera sea esta, tarde o temprano llegamos a  $V_{max}$  cuando se acaba el combustible. Vemos también la conveniencia de maximizar la relación  $\frac{m_c^{(i)}}{M_0}$  (Masa de combustible/Masa inútil)

## 2.11. Generalización a más de una dimensión

Sabemos, desde nuestros estudios de cinemática, que la posición de un cuerpo viene dada por un vector: el vector posición  $\vec{r}$ . Luego, la velocidad,  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  y la aceleración  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ , también lo son. Consecuentemente, la cantidad de movimiento  $\vec{p} = m\vec{v}$  y las fuerzas  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  son vectores. Todo lo que estudiamos hasta ahora es fácilmente generalizable si tenemos en cuenta ahora el carácter *vectorial* de las magnitudes involucradas.

Consideremos, por ejemplo, dos cuerpos,  $A$  y  $B$ , moviéndose en el plano de manera que se acercan, interactúan entre ellos y luego se alejan (Fig. (2.40)).

**Figura 2.40: Carácter vectorial**

De acuerdo a lo que ya sabemos, resulta que

$$\vec{P}'_T = \vec{P}_T$$

*cualquiera sea la interacción.*

Esta última ecuación constituye una relación entre vectores. Los vectores son entes matemáticos que tienen componentes, módulo (o norma), dirección (recta de acción) y sentido. Esto quiere decir que al escribir la conservación de la cantidad de movimiento total, estamos diciendo que las *componentes* de la cantidad de movimiento *antes* de la interacción son iguales a las *componentes después* de la interacción, que los módulos son iguales y que la dirección y el sentido son los

mismos. O sea, para las componentes

$$P_{T_x} = P'_{T_x} \qquad P_{T_y} = P'_{T_y}$$

o también

$$P_{T_x} \hat{x} + P_{T_y} \hat{y} = P'_{T_x} \hat{x} + P'_{T_y} \hat{y}$$

y para el módulo, la dirección y el sentido que:

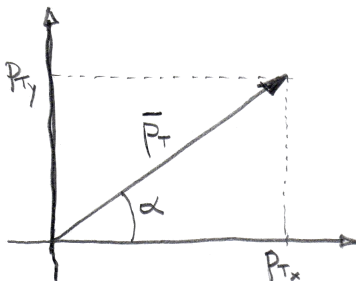
$$|\bar{P}_T| = P_T = \sqrt{(P_{T_x})^2 + (P_{T_y})^2} = |\bar{P}'_T| = P'_T = \sqrt{(P'_{T_x})^2 + (P'_{T_y})^2}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{P_{T_y}}{P_{T_x}}\right) = \beta = \arctg\left(\frac{P'_{T_y}}{P'_{T_x}}\right)$$

Esto presupone el haber definido un sistema de coordenadas o sistema de referencia en donde son evidentes las relaciones que escribimos antes, y además

$$P_{T_x} = P_T \cos(\alpha), P_{T_y} = P_T \text{sen}(\alpha).$$

**Figura 2.41:**



Todas estas relaciones están referidas al sistema de referencia (que podría haber sido otro), y todas las expresiones anteriores *NO TIENEN SENTIDO* (salvo  $\bar{P}'_T = \bar{P}_T$ , que dice que estos dos vectores son iguales y lo son, independientemente del sistema que elijamos para definirlos).

Volviendo al problema de dos cuerpos, la conservación de la cantidad de movimiento total en términos de las componentes de la cantidad de movimiento de

cada cuerpo se escribe:

$$P_{A_x} + P_{B_x} = P'_{A_x} + P'_{B_x}$$

$$P_{A_y} + P_{B_y} = P'_{A_y} + P'_{B_y}$$

donde:

- $|\bar{P}_A| = \sqrt{(P_{A_x})^2 + (P_{A_y})^2}$  y  $\alpha_A = \arctg\left(\frac{P_{A_y}}{P_{A_x}}\right)$  son el módulo y la dirección y sentido de la cantidad de movimiento de *A antes* de la interacción.
- $|\bar{P}_B| = \sqrt{(P_{B_x})^2 + (P_{B_y})^2}$  y  $\alpha_B = \arctg\left(\frac{P_{B_y}}{P_{B_x}}\right)$  son el módulo y la dirección y sentido de la cantidad de movimiento de *B antes* de la interacción.
- $|\bar{P}'_A| = \sqrt{(P'_{A_x})^2 + (P'_{A_y})^2}$  y  $\alpha'_A = \arctg\left(\frac{P'_{A_y}}{P'_{A_x}}\right)$  son el módulo y la dirección y sentido de la cantidad de movimiento de *A después* de la interacción.
- $|\bar{P}'_B| = \sqrt{(P'_{B_x})^2 + (P'_{B_y})^2}$  y  $\alpha'_B = \arctg\left(\frac{P'_{B_y}}{P'_{B_x}}\right)$  son el módulo y la dirección y sentido de la cantidad de movimiento de *B después* de la interacción.

### 2.11.1. Posición, velocidad y aceleración del centro de masa

La posición del CM para un sistema con  $N$  cuerpos se generaliza como

$$\bar{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \begin{cases} X_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \\ Y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \end{cases}$$

La velocidad, como

$$\bar{V}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \begin{cases} V_{CM_x} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i v_{i_x}}{\sum_{i=1}^N m_i} \\ V_{CM_y} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i v_{i_y}}{\sum_{i=1}^N m_i} \end{cases}$$

Y la aceleración, como

$$\bar{A}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{a}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \begin{cases} A_{CM_x} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i a_{i_x}}{\sum_{i=1}^N m_i} \\ A_{CM_y} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i a_{i_y}}{\sum_{i=1}^N m_i} \end{cases}$$

Es evidente que  $\bar{P}_T = M\bar{V}_{CM}$  (donde  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  es la masa total del sistema).

### 2.11.2. Leyes de Newton

A partir de la conservación de la cantidad de movimiento, es evidente la validez de las tres leyes de Newton. En particular, la segunda ley es:

$$m\bar{a} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F} = \begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases}$$

Y para un sistema de  $N$  cuerpos, distinguiendo entre las fuerzas externas e internas, se puede obtener fácilmente:

$$\frac{d\bar{P}_T}{dt} = M\bar{A}_{CM} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^{(ext)} = \begin{cases} MA_{CM_x} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_{i_x}^{(ext)} = \frac{dP_{T_x}}{dt} \\ MA_{CM_y} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_{i_y}^{(ext)} = \frac{dP_{T_y}}{dt} \end{cases}$$

Por supuesto, aquí obtenemos, nuevamente, que si *no existen fuerzas externas*, es decir

$$\left( \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^{(ext)} = 0 \right)$$

significa que  $\frac{d\bar{P}_T}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{P}_T$  es constante  $\Rightarrow \bar{V}_{CM}$  es constante.

*Más en palabras y nuevamente:* en un sistema aislado (no hay fuerzas externas), la cantidad de movimiento total se conserva (la velocidad del centro de masa permanece constante).

Como ya vimos, este es el principio de conservación de la cantidad de movimiento. La novedad, ahora, es que este principio puede cumplirse “parcialmente”. En efecto, como

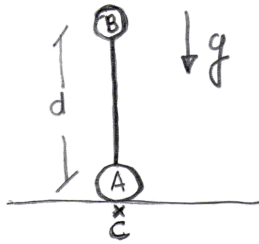
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \bar{F}_{i_x}^{(ext)} = \frac{dP_{T_x}}{dt} \\ \sum_{i=1}^N \bar{F}_{i_y}^{(ext)} = \frac{dP_{T_y}}{dt} \end{array} \right.$$

Bien podría suceder que si bien hay fuerzas externas (esto es el  $\bar{P}_T$  **NO SE CONSERVA**), esas fuerzas solo tienen una componente (por ejemplo,  $\sum_{i=1}^N \bar{F}_{i_x}^{(ext)} = 0$  con  $\sum_{i=1}^N \bar{F}_{i_y}^{(ext)} \neq 0$ ). Esto quiere decir que se va a conservar la componente de  $\bar{P}_T$  en la dirección de la componente nula (ya que como  $\frac{dP_{T_x}}{dt} = \sum F_{i_x}^{(ext)} = 0 \Rightarrow P_{T_x} = cte$ ). O sea, si bien  $\bar{P}_T$  no se conserva, sí lo hace una componente (la  $P_{T_x}$  en este caso). Esto quiere decir que la velocidad del  $CM$  en esa dirección, será constante (OJO,  $\bar{V}_{CM}$  **NO ES CONSTANTE**, solo una componente se conserva).

Veamos un ejemplo muy sencillo de este principio de conservación “parcial”.

Supongamos que tenemos un sistema consistente en dos cuerpos de masas  $m_A$  y  $m_B$  unidos por una barra rígida de masa despreciable de longitud  $d$  como muestra la figura:

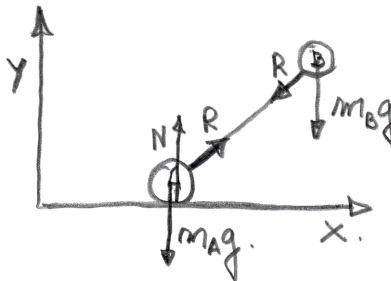
**Figura 2.42:**



Se deja libre el sistema y queremos saber a qué distancia del punto  $C$  el cuerpo  $B$  va a tocar al piso. La superficie está perfectamente pulida y no hay ningún tipo de rozamiento entre  $A$  y el piso. En otras palabras, el cuerpo  $A$  puede deslizarse sobre el piso libremente.

Para resolver este problema, el manejo del principio de conservación de  $P$  en su versión “parcial” es crucial. Veamos las fuerzas que actúan en nuestro sistema para una posición genérica cualquiera (Fig. (2.43)):

**Figura 2.43:**



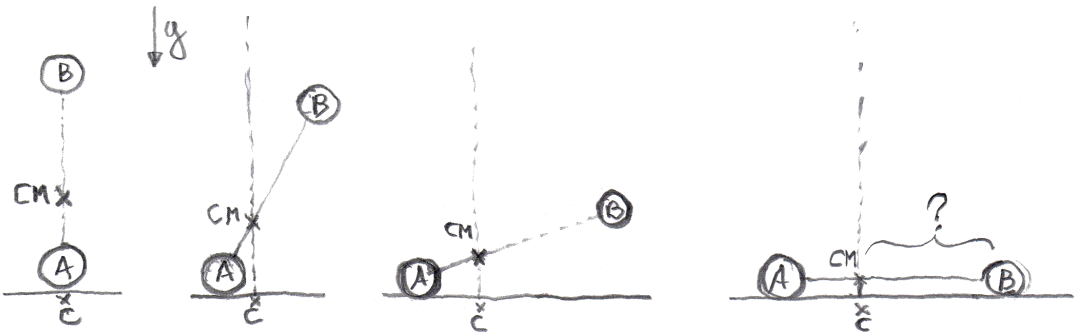
Sobre  $B$  aparece la fuerza de vínculo  $R$  y el peso. La fuerza de vínculo  $R$  es interna, el peso es externo. La fuerza de vínculo tendrá, en general, sus dos componentes, el peso, en cambio, tiene solo componente  $y$ .

Sobre  $A$  aparece la fuerza de vínculo  $R$  (interna y de dos componentes), la normal  $N$  (externa y en la dirección  $y$ ) y el peso (externa y en la dirección  $y$ ).

En conclusión, **NO HAY FUERZAS EXTERNAS EN LA DIRECCIÓN  $x$** . Luego,  
 $\frac{dP_{T_x}}{dt} = 0 \Rightarrow V_{CM_x} = cte.$

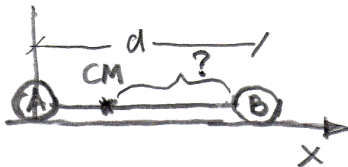
Eso quiere decir que como inicialmente  $V_{CM_x} = 0$ , siempre va a ser cero. Esto quiere decir que el movimiento del  $CM$  va a ser vertical. O sea simplemente va a caer

**Figura 2.44:**



Ya tenemos la respuesta: la distancia entre el punto  $C$  y el cuerpo  $B$  cuando este toca el piso será la misma distancia entre  $B$  y el centro de masa. Calculamos esa distancia fácilmente:

**Figura 2.45:**



Para calcular la posición del  $CM$  ponemos el origen en la posición de  $A$ , entonces,

$$X_{CM} = \frac{m_B d}{m_A + m_B}$$



La distancia entre el  $CM$  y el cuerpo  $B$  será:

$$(d - X_{CM}) = \frac{m_A d}{m_A + m_B}$$

que es la respuesta del problema.

Este es un muy buen ejemplo de cómo los principios de conservación nos pueden simplificar la vida. Si hubiéramos querido responder la pregunta tratando de determinar cómo es el movimiento del cuerpo  $B$  para hallar en dónde toca el piso, rápidamente nos habríamos quedado en el intento. El movimiento de  $B$  es una mezcla complicada de rotación y traslación y no estamos en condiciones de resolverlo. Sin embargo, manejando los principios de conservación, lo resolvimos trivialmente, casi sin hacer cuentas.

### 2.11.3. Choques en más de una dimensión

1. El choque perfectamente elástico entre dos cuerpos está caracterizado, en este caso, por conservar el módulo de la velocidad relativa:  $|\bar{v}_{BA}| = |\bar{v}_B - \bar{v}_A| = |\bar{v}'_B - \bar{v}'_A|$ .
2. El completamente inelástico está caracterizado porque la velocidad relativa final es nula  $\bar{v}'_B - \bar{v}'_A = 0$ , es decir, luego del choque ambos cuerpos quedan adheridos.

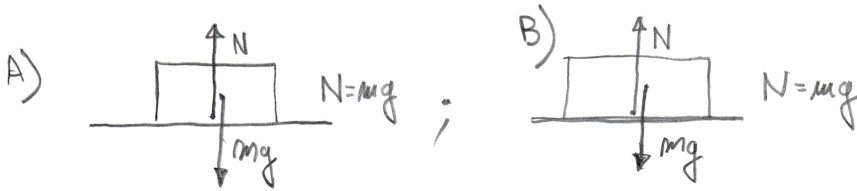
## 2.12. Fuerza de rozamiento

Vamos a estudiar ahora una nueva fuerza de vínculo conocida bajo el nombre de fuerza de rozamiento.

Supongamos que tenemos dos bloques de igual masa,  $A$  y  $B$ . El  $A$  tiene sus superficies perfectamente pulidas mientras que el  $B$  las tiene rugosas. Supongamos que el bloque  $A$  está apoyado sobre una superficie totalmente pulida mien-

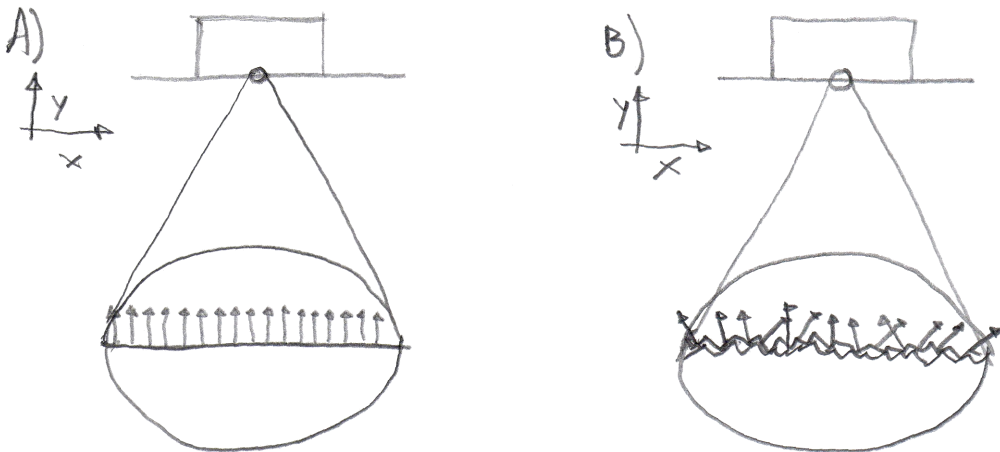
tras que el  $B$  lo está sobre una superficie rugosa. Es importante aquí notar que el carácter de “pulido” o “rugoso” es de naturaleza más microscópica que lo que observamos a simple vista. Para ser más precisos, el tamaño de las irregularidades que producen la rugosidad es mucho menor que el tamaño de los bloques. Esto quiere decir que si queremos hacer un dibujo de ambos sistemas tendremos:

**Figura 2.46:**



Es decir, lo mismo. No hay diferencia. Sin embargo... hagamos una ampliación de las superficies en contacto para ambos casos (Fig. 2.47):

**Figura 2.47:**



Aquí vemos una gran diferencia. En el caso  $A$ , la fuerza de contacto  $N$ , que apunta en la dirección  $\hat{y}$ , es la resultante de un montón de fuerzas de contacto

“elementales” todas ellas en la misma dirección. Podemos escribir, en el caso  $A$

$$\vec{N} = N\hat{y} = \left( \sum_i N_i \right) \hat{y}$$

y como el sistema está en equilibrio resulta  $N = mg$ .

En el caso  $B$ , la situación es diferente. En este caso, la fuerza de contacto  $N$ , que también apunta en la dirección  $\hat{y}$ , es la resultante de un montón de fuerzas de contacto elementales, pero que son perpendiculares a la superficie “local” de contacto. En un dibujito más grande, sería,

**Figura 2.48:**



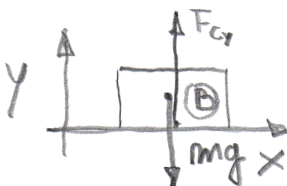
Cada una de estas fuerzas elementales tiene las dos componentes  $\vec{N}_i = (N_{ix}\hat{x} + N_{iy}\hat{y})$

O sea tendremos que la fuerza contacto será

$$\vec{F}_c = \sum_i \vec{N}_i = \left( \sum_i N_{ix} \right) \hat{x} + \left( \sum_i N_{iy} \right) \hat{y} = F_{cx}\hat{x} + F_{cy}\hat{y}$$

Entonces, cuando el bloque  $B$  se apoya en la superficie y queda en equilibrio resulta,

**Figura 2.49:**



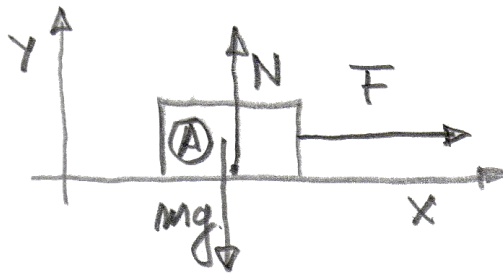
$$\vec{P} + \vec{F}_c = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{cx} = 0 \\ -mg + F_{cy} = 0 \end{cases}$$

y entonces  $\bar{F}_c = F_{c_y} \hat{y} = mg \hat{y}$ . Si llamamos  $N = F_{c_y}$  obtenemos el mismo resultado que para el bloque  $A$ .

Podemos decir, resumiendo, que en el caso  $A$  las normales “elementales” se acomodan para dar la resultante en la dirección  $\hat{y}$  de manera de mantener el equilibrio de acuerdo con las otras fuerzas que aparecen en el sistema en esa dirección (mientras pueden: ya sabemos que si  $mg$  supera cierto valor, la superficie “se hunde”). En el caso  $B$  sucede lo mismo, pero para ambas direcciones. O sea, las componentes  $\hat{y}$  de las “normales elementales” se acomodan a lo que haga falta para equilibrar a las otras fuerzas en esa dirección, pero *además* se pueden acomodar las componentes  $\hat{x}$  para equilibrar las fuerzas en esa dirección. En el caso del bloque  $B$  no hay otras fuerzas en la dirección  $\hat{x}$ , no hay nada que “equilibrar”, entonces  $F_{c_x} = \sum_i N_{i_x} = 0$ .

¿Qué pasa si aparece una fuerza  $F$  en la dirección  $\hat{x}$ ? Para el bloque  $A$  resultará

**Figura 2.50:**



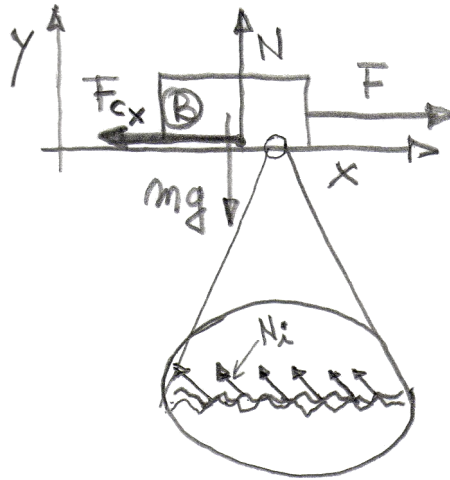
En la dirección  $y$ :  $N - mg = 0$  (igual que antes)

En la dirección  $x$ :  $F = ma$  (no hay equilibrio: aparece  $a$ )

Para el bloque  $B$  pueden pasar dos cosas diferentes:

1. La resultante de las componentes  $\hat{x}$  de las fuerzas “normales elementales” se pueden acomodar como para equilibrar a  $F$ .

Figura 2.51:



En ese caso

En la dirección  $y$ :  $N - mg = 0$  (igual que antes).

En la dirección  $x$ :  $F - F_{cx} = 0$  (también hay equilibrio).

$F_{cx}$  es la resultante de las componentes  $\hat{x}$  de las normales elementales  $N_i$ , que ahora, en su mayoría apuntan opuestas a  $F$ .

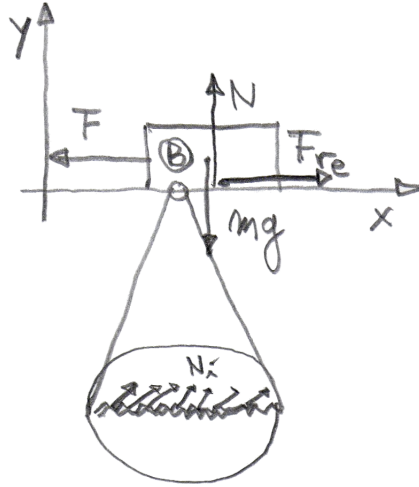
La fuerza de contacto  $F_{cx}$  recibe el nombre de **FUERZA DE ROZAMIENTO ESTÁTICO** ( $F_{re}$ ) (lo de estático está relacionado con que las superficies en contacto **NO DESLIZAN**).

- La fuerza  $F$  es tan grande que no puede ser equilibrada de la manera antes descrita. En ese caso, las superficies empiezan a deslizarse y la interacción entre ellas *deja de ser estática*. Nos ocuparemos de ello más adelante.

Volvamos al **ROZAMIENTO ESTÁTICO**. Como toda fuerza de vínculo, tiene poder de “acomodación”, en este caso, tanto en módulo como en sentido y dirección. Veamos qué pasa con esto último.

¿Qué pasa si la fuerza  $F$  apunta en la dirección contraria?

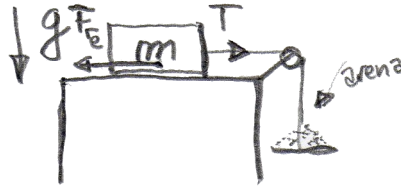
**Figura 2.52:**



La mayoría de las  $N_{ix}$  apuntarán para el otro lado, o sea,  $F_{re}$  apuntará en la dirección opuesta.

En suma, vemos que *siempre se opone a las otras fuerzas*. Cambia de dirección y sentido y se opone a las otras fuerzas. En cuanto al módulo, pasa lo mismo. Su módulo es tal que equilibra al sistema en esa dirección. Pero, como ya sabemos, este último poder de acomodación no es ilimitado. Si la fuerza  $F$  crece lo suficiente, superará este poder de acomodación y las superficies comenzarán a deslizar. Decimos entonces que la fuerza de rozamiento puede acomodarse mientras no supere cierto valor máximo. Ese valor lo llamaremos FUERZA DE ROZAMIENTO ESTÁTICO ( $F_{re}^M$ ) y va a depender de cómo sean las superficies en contacto: si las superficies son completamente pulidas,  $F_{re}^M = 0$ , e irá creciendo a medida que las superficies resulten más y más rugosas. Otro factor importante es cuán forzadas están las superficies una contra otra. Veamos un ejemplo: supongamos que tenemos un bloque de masa  $m$  apoyado en una superficie y determinamos la  $F_{re}^M$  del siguiente modo:

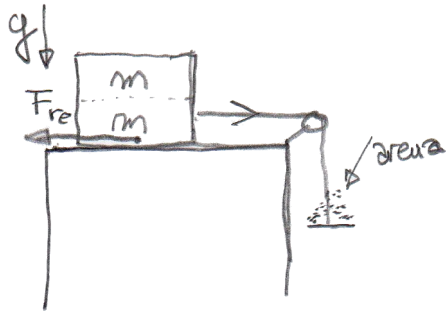
**Figura 2.53:**



Vamos de a muy poquito tirando arena sobre el platillo hasta que este cuerpo comienza a deslizar. Pesamos el conjunto platillo-arena y eso nos dará una idea de  $F_{re}^M$ .

Repitamos el experimento pero ahora colocamos un bloque cuya masa es  $2m$ , de igual base (la superficies de contacto es la misma, pero el doble de alto). ¿Cómo resultará ahora  $F_{re}^M$ ?

**Figura 2.54:**



Las superficies no cambiaron, el grado de rugosidad es el mismo... y sin embargo, ahora el resultado va a ser diferente. De hecho, si lo hacemos con cierto cuidado, llegaríamos a la conclusión de que ahora  $F_{re}^M$  será el doble que en el primer experimento. Podríamos decir que si bien la rugosidad es la misma, en el segundo caso se “comporta” más eficientemente. ¿Y por qué? Porque en el segundo caso las superficies están “más forzadas” a estar en contacto que en el primero. ¿Y cómo sé que “están más forzadas”? ¡Por la componente normal  $N$ ! En el pri-

mer caso, la componente normal  $N$  de la fuerza de contacto entre el bloque y la superficie vale  $mg$  mientras que en el segundo vale  $2mg$ .

En suma, después de realizar unos cuantos experimentos cambiando bloques, superficies, etcétera, concluimos que el valor máximo que puede tomar la fuerza de rozamiento estático  $F_{re}^M$  es

$$F_{re}^M = \mu_e N$$

donde  $\mu_e$  es un coeficiente adimensional característico de ambas superficies (vidrio-fórmica, madera-vidrio, madera-madera, etcétera) llamado *coeficiente de rozamiento estático* y  $N$  es la componente normal de la fuerza de contacto.

Ojo, aquí no dice que la fuerza de rozamiento estático vale  $\mu_e N$ . Aquí dice que la fuerza de rozamiento estático puede valer cualquier cosa mientras su módulo no supere  $\mu_e N$ . En suma, siempre debe ser

$$F_{re} \leq F_{re}^M = \mu_e N$$

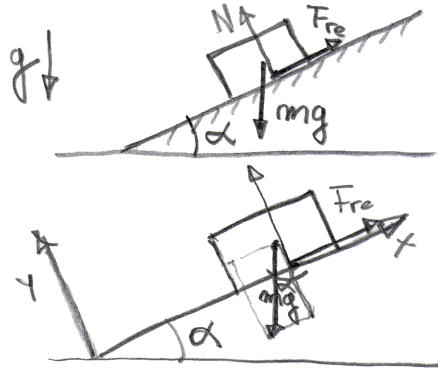
Discutamos un sencillo problema que ilustra lo que queremos decir.

Un cuerpo de masa  $m$  se encuentra sobre un plano inclinado, de inclinación  $\alpha$ . El cuerpo no desliza. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y el plano es  $\mu_e$ , encontrar el máximo valor de  $\alpha$  tal que el cuerpo no deslice.

Como siempre, primero indicamos el sistema de referencia.



Figura 2.55:



Descomponemos las fuerzas en las direcciones  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  y escribimos la segunda ley de Newton para ambas direcciones.

$$x) 0 = -mg \operatorname{sen}(\alpha) + F_{re} \Rightarrow F_{re} = mg \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$y) 0 = N - mg \operatorname{cos}(\alpha) \Rightarrow N = mg \operatorname{cos}(\alpha)$$

Esto quiere decir que el bloque no va a deslizar hacia abajo mientras  $F_{re} = mg \operatorname{sen}(\alpha)$ . Si aumentamos  $\alpha$ , aumentará  $F_{re}$ , pero sabemos que para algún  $\alpha$   $F_{re}$  alcanzará su valor máximo posible. A partir de un  $\alpha$  mayor a ese (que llamaremos  $\alpha_c$ ), comenzará a deslizar. ¿Cómo determinamos  $\alpha_c$ . Muy sencillamente:

Sabemos que

$$F_{re} = mg \operatorname{sen}(\alpha) \leq F_{re}^M = \mu_e N = \mu_e mg \operatorname{cos}(\alpha)$$

O sea, para que no deslice debe ser

$$mg \operatorname{sen}(\alpha) \leq \mu_e mg \operatorname{cos}(\alpha) \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) \leq \mu_e$$

O sea,

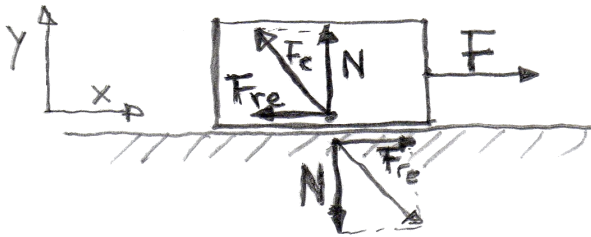
$$\operatorname{tg}(\alpha)_c = \mu_e \Rightarrow \alpha_c = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\mu_e)$$

Esta expresión puede ser útil para determinar  $\mu_e$  experimentalmente.

## 2.13. Rozamiento Dinámico

Hasta ahora estudiamos la fuerza de contacto entre dos superficies que no deslizan entre sí. Vimos que esa fuerza tiene una componente normal a las superficies (a la que llamamos  $N$ ) y otra (si las superficies son “rugosas” o “ásperas”) tangencial (a la cual llamamos “rozamiento estático”). Podríamos resumirlo en el siguiente gráfico.

**Figura 2.56:**



$$\vec{F}_c = F_{re}\hat{x} + N\hat{y}$$

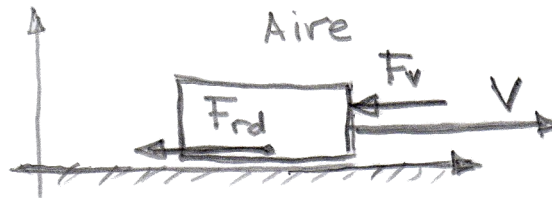
Aquí hemos graficado ambas componentes del par de fuerzas de acción y reacción asociadas a la interacción de contacto. Vimos que  $F_{re}$  se “acomoda” mientras se podía (léase si la fuerza  $F$  no supera cierto valor límite) para que no haya deslizamiento. El “poder de acomodación” está dado por  $F_{re}^M = \mu_e N$ . Es decir, si hace falta una fuerza de rozamiento cuyo módulo supere este valor, las superficies deslizan. Otra característica de  $F_{re}$  es que su sentido, en general, se opone a la resultante de las otras fuerzas que tienden a favorecer el deslizamiento.

Ahora veremos qué pasa cuando se supera el límite de “acomodación”, es decir, cuando las superficies de contacto *deslizan*. En ese caso, aparece la que se llama el “rozamiento dinámico”. Esta interacción también está relacionada con

la “rugosidad” de las superficies y quizá resulte más familiar que su versión “estática”. En efecto, ya de niños sabemos que si le imprimimos a un bloquecito de cualquier material (un ladrillito de Lego, una piedra, etcétera) una velocidad inicial, por grande que sea esta, de manera que el bloque deslice por alguna superficie (una mesa, el piso, etcétera) el cuerpo terminará deteniéndose. Este es el efecto que mantuvo, durante siglos, “escondida” la primera ley de Newton (o principio de inercia).

Veamos qué fuerzas aparecen sobre el bloque cuando este se mueve con cierta velocidad  $v$ .

**Figura 2.57:**



El bloque interactúa con la superficie, lo que origina una fuerza que se opone a la velocidad del bloque que recibe el nombre de “rozamiento dinámico”. Adicionalmente, el bloque interactúa con el medio lo que origina una fuerza llamada “fricción con el aire”, que también se opone a la velocidad. Es el tipo de fuerza que ya estudiamos (cuando estudiamos cinemática) y resulta  $F_v = -\gamma v$ . El coeficiente  $\gamma$  depende del medio y la forma del bloque. Vimos en su momento que el efecto del paracaídas era “aumentar”  $\gamma$ . En otros casos, como el de los autos de F1, se trata de que tengan el menor  $\gamma$  posible. Por ahora ignoraremos la fricción con el aire que a velocidades bajas es mucho menos importante que el rozamiento dinámico  $F_{rd}$ .

Esta fuerza, que se opone al deslizamiento de las superficies, tiene un módulo

constante y su valor es:

$$F_{rd} = \mu_d N \quad (2.11)$$

$\mu_d$  recibe el nombre de *coeficiente de rozamiento dinámico* entre las superficies y depende de las características que ellas tienen (cuán “rugosas” son). Existe el  $\mu_d$  vidrio-vidrio, vidrio-madera, fórmica-fórmica, etcétera.

$N$  es la componente normal de la fuerza de contacto y que  $F_{rd}$  depende de ella es razonable porque  $N$  nos indica cuán “apretadas” entre sí están las superficies. Cuanto más “apretadas” están, la “rugosidad” será más efectiva.

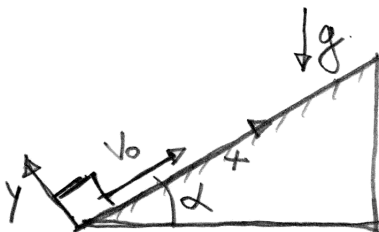
La similitud de la expresión para el módulo del rozamiento dinámico ( $F_{rd} = \mu_d N$ ) con la correspondiente al módulo de la fuerza de rozamiento estático máxima ( $F_{re}^M = \mu_e N$ ) puede generarnos cierta confusión. Por eso es importante tener en claro, es decir, entender algunas cosas:

1. El coeficiente de rozamiento dinámico  $\mu_d$ , en general, *NO ES IGUAL* al coeficiente de rozamiento estático  $\mu_e$ . Suele suceder que  $\mu_d < \mu_e$ . Sin embargo, salvo que explícitamente se aclare en el problema, podemos considerar  $\mu_d \cong \mu_e$ .
2. Cuando hay deslizamiento entre las superficies  $F_{rd} = \mu_d N$  *siempre*. Es decir, sabemos que vale eso. En cambio,  $F_{re}^M = \mu_e N$  nos da una cota para el valor máximo que puede tomar el rozamiento estático tal que las superficies no deslicen.
3. El sentido de la fuerza de rozamiento dinámico depende *de la velocidad de deslizamiento* entre las superficies. *Siempre se opone a esa velocidad*. El sentido de la fuerza de rozamiento estático es tal que *se opone a la resultante de las otras fuerzas*.

Esto último quedará claro en el ejemplo siguiente: se tiene un cuerpo de masa  $m$  en la base de un plano inclinado rugoso (de  $\mu_e$  y  $\mu_d$  conocidos) y  $\alpha > \arctg \mu_e$ .

El cuerpo es lanzado hacia arriba con cierta velocidad inicial  $v_0$ . Describir el movimiento del bloque.

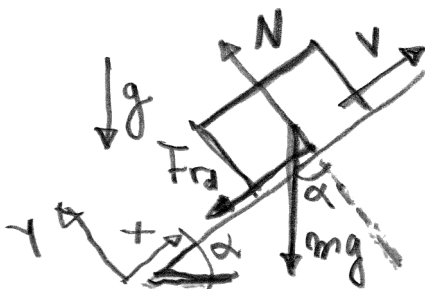
Figura 2.58:



El bloque va a subir por el plano inclinado con velocidad cada vez menor, se va a detener y, como  $\alpha > \arctan \mu_e$ , instantáneamente va a comenzar a caer con velocidad cada vez mayor (notar que si  $\alpha \leq \arctan \mu_e$ , se quedaría quieto arriba).

Como la velocidad cambia de sentido en la vuelta respecto a la ida, tendremos que plantear separada la ida de la vuelta.

IDA



O sea,

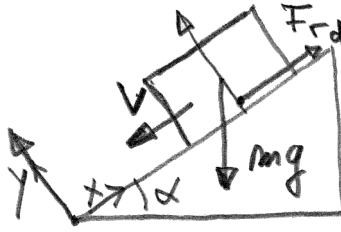
$$ma = -mg(\sin(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha)) \Rightarrow a = -g(\sin(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha))$$

O sea,  $V(t) = v_0 - g(\sin(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha))t$  dado que  $a = cte$ .

El tiempo de subida entonces es  $t_S = \frac{v_0}{g(\sin(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha))}$  y además

$$x(t = t_S) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\sin(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha))}$$

## VUELTA



O sea,

$$ma = -mg(\operatorname{sen}(\alpha) - \mu_d \cos(\alpha)) \Rightarrow a = -g(\operatorname{sen}(\alpha) - \mu_d \cos(\alpha))$$

(notemos aquí que como  $\alpha > \operatorname{arc\,tg}(\mu_e) \gtrsim \operatorname{arc\,tg}(\mu_d)$ , resulta que  $\operatorname{sen}(\alpha) - \mu_d \cos(\alpha) > 0$ ). Para calcular el tiempo de bajada hacemos

$$x(t_B) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\operatorname{sen}(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha))} - \frac{1}{2} g(\operatorname{sen}(\alpha) - \mu_d \cos(\alpha)) t_B^2 = 0$$

$$\Rightarrow t_B = \frac{v_0}{g \sqrt{(\operatorname{sen}(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha)) (\operatorname{sen}(\alpha) - \mu_d \cos(\alpha))}}$$

El tiempo de bajada es menor que el tiempo de subida. Además, la velocidad con la que llega abajo es

$$V(t = t_B) = -g(\operatorname{sen}(\alpha) - \mu_d \cos(\alpha)) \frac{v_0}{g \sqrt{(\operatorname{sen}(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha)) (\operatorname{sen}(\alpha) - \mu_d \cos(\alpha))}}$$

O sea,

$$V(t = t_B) = -\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\alpha) - \mu_d \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha)}} v_0$$

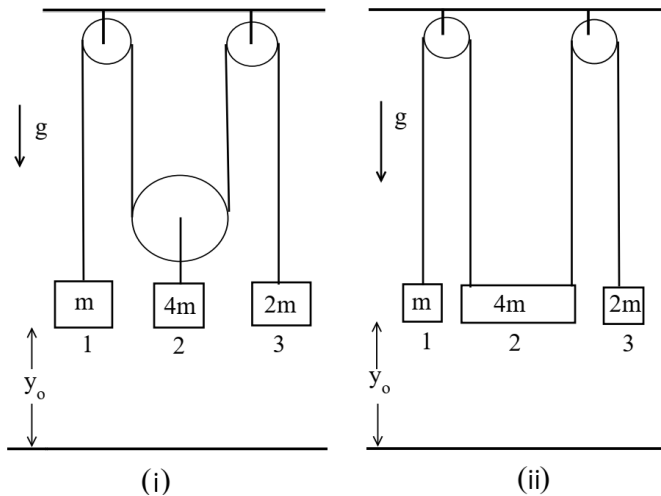
Aquí vemos que la velocidad con la que llega abajo es (en módulo) menor que  $v_0$ . Si no hubiera rozamiento, el módulo de la velocidad inicial sería igual al módulo de la velocidad final de caída.

## 2.14. Ejercicios resueltos del capítulo

**PROBLEMA 1:** En los sistemas (i) y (ii) que muestra la figura, las masas de las poleas y las sogas son despreciables y estas últimas son inextensibles. Determinar para ambos sistemas:

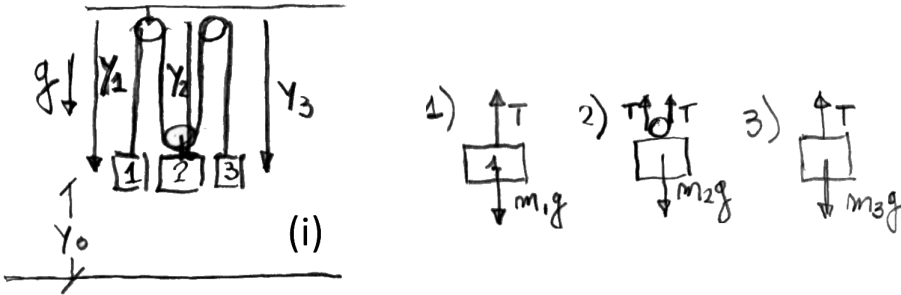
- Las aceleraciones de cada cuerpo.
- El tiempo que tarda el cuerpo 2 en llegar al piso, en ambos casos.
- La posición de cada uno de los otros cuerpos cuando el cuerpo dos llega al piso.
- Las tensiones en las cuerdas mientras hay movimiento.
- ¿En qué cambian los resultados si  $m_1 = m_3 = \frac{3}{2}m$ ?

**Figura 2.59: Problema 1**



**RESOLUCIÓN:**

a)

*Análisis del sistema (i)***Figura 2.60: Esquema general de (i) y diagramas de cuerpo libre.**

Las masas de las poleas son despreciables. Hay una sola cuerda, entonces hay una sola fuerza de vínculo (la tensión) asociada a la ecuación de vínculo:

$$y_1 + 2y_2 + y_3 = l$$

donde  $l$  es una constante (la longitud de la cuerda). Y la segunda ley de Newton aplicada a los cuerpos 1, 2 y 3 son, respectivamente:

$$1) \quad m_1 a_1 = m_1 g - T \quad (2.12)$$

$$2) \quad m_2 a_2 = m_2 g - 2T \quad (2.13)$$

$$3) \quad m_3 a_3 = m_3 g - T \quad (2.14)$$

Derivando la ecuación de vínculo respecto del tiempo dos veces obtenemos

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \frac{d^2 y_3}{dt^2} = \frac{d^2 l}{dt^2} \Rightarrow a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$$

Si hacemos Ec. (2.13) - (2.12) - (2.14) miembro a miembro obtenemos



$$-m_1 a_1 + m_2 a_2 - m_3 a_3 = (m_2 - m_1 - m_3)g \text{ Y si hacemos Ec. (2.14) - (2.12)}$$

$$-m_1 a_1 + m_3 a_3 = (m_3 - m_1)g$$

O sea, si  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 4m$  y  $m_3 = 2m$ , después de algunas operaciones algebraicas simples, obtenemos

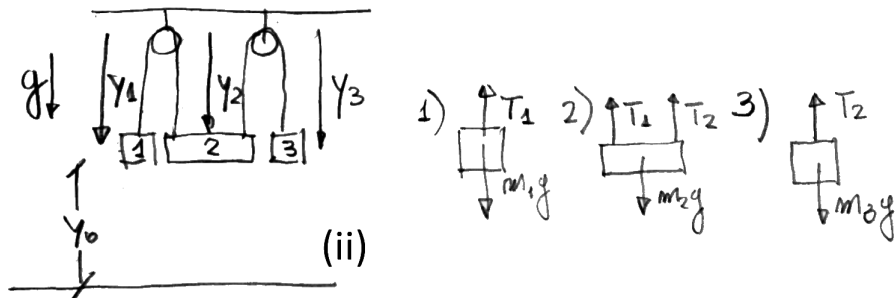
$$a_1 = -\frac{12}{20}g = -\frac{3}{5}g$$

$$a_2 = \frac{4}{20}g = \frac{1}{5}g$$

$$a_3 = \frac{4}{20}g = \frac{1}{5}g$$

Análisis del sistema (ii)

Figura 2.61: Esquema general de (ii) y diagramas de cuerpo libre.



Hay dos cuerdas, entonces hay dos fuerzas de vínculo asociadas a dos ecuaciones de vínculo:

$$y_1 + y_2 = l_1 \quad \text{e} \quad y_2 + y_3 = l_2$$

donde  $l_i$  es la longitud (constante) de la cuerda  $i$ .  $l_1$  y  $l_2$  (las longitudes de cada una de las cuerdas) son constantes. La segunda ley de Newton aplicada a los cuerpos 1, 2 y 3, para el sistema (ii), son:

$$1) \quad m_1 a_1 = m_1 g - T_1 \quad (2.15)$$

$$2) \quad m_2 a_2 = m_2 g - T_1 - T_2 \quad (2.16)$$

$$3) \quad m_3 a_3 = m_3 g - T_2 \quad (2.17)$$

Derivando la ecuación de vínculo respecto del tiempo dos veces (tal cual se realizó para el sistema (i)), obtenemos

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{d^2 l_1}{dt^2} \Rightarrow a_2 \equiv a = -a_1$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + \frac{d^2 y_3}{dt^2} = \frac{d^2 l_2}{dt^2} \Rightarrow a_2 \equiv a = -a_3$$

Si hacemos entonces Ec. (2.16) – (2.15) – (2.17) miembro a miembro tendremos que

$-m_1 a_1 + m_2 a_2 - m_3 a_3 = (m_2 - m_1 - m_3)g$ , y como  $a_2 = a$ ,  $a_1 = -a$  y  $a_3 = -a$ , tenemos

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = (m_2 - m_1 - m_3)g$$

y como  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 4m$  y  $m_3 = 2m$ , resulta

$$7ma = mg \Rightarrow a = \frac{g}{7}$$

O sea,

$$a_1 = -\frac{g}{7}$$

$$a_2 = \frac{g}{7}$$

$$a_3 = -\frac{g}{7}$$

b)

*Para el sistema (i)*

Para hallar el tiempo de caída,  $t_c$ , basta hacer

$$y_o = \frac{1}{2}a_2t_c^2 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2y_o}{a_2}} = \sqrt{\frac{10y_o}{g}}$$

*Análisis del sistema (ii)*

Para hallar el tiempo de caída,  $t_c$ , basta hacer

$$y_o = \frac{1}{2}a_2t_c^2 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{14y_o}{g}}$$

c)

*Para el sistema (i)*

$$y_1(t_c) = \frac{1}{2}a_1t_c^2 = -\frac{3}{10}g\frac{10y_o}{g} = -3y_o$$

Esto significa que el cuerpo 1 subió una distancia  $3y_o$ . Entonces  $y_2(t_c) = y_3(t_c) = y_o$  (dado que la aceleración de 2 y 3 son iguales). Esto también sale de la ecuación de vínculo

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \Rightarrow \Delta y_1 = -2\Delta y_2 - \Delta y_3$$

pero  $\Delta y_2 = \Delta y_3 = y_o$ , luego  $\Delta y_1 = -3y_o$

*Para el sistema (ii)*

Sin hacer cuentas, a partir de las ecuaciones de vínculo, se ve que si el cuerpo 2 baja  $y_o$  los cuerpos 1 y 3 suben  $y_o$ . Es decir,

$$y_1 + y_2 = l_1 \Rightarrow \Delta y_1 = -\Delta y_2 = -y_o$$

$$y_2 + y_3 = l_2 \Rightarrow \Delta y_2 = -\Delta y_3 = y_0$$

d)

Para el sistema (i)

La tensión la obtenemos utilizando la Ec. (2.12) del primer ítem,

$$T = mg - m_1 a_1 \text{ y como } a_1 = -\frac{3}{5}g$$

$$\Rightarrow T = mg \left( 1 + \frac{3}{5} \right) = \frac{8}{5}mg$$

Para el sistema (ii)

Las tensiones se obtienen utilizando las Ec. (2.15) y (2.17) respectivamente:

$$T_1 = mg - m_1 a_1 = mg + m \frac{g}{7} = \frac{8}{7}mg$$

$$T_2 = 2mg - 2ma_3 = mg = 2mg + 2m \frac{g}{7} = \frac{16}{7}mg$$

e)

Para el sistema (i)

Si  $m_1 = \frac{3}{2}m$ ,  $m_3 = \frac{3}{2}m$  y  $m_2 = 4m$ , sin hacer cuentas, y por simetría, es evidente que las aceleraciones cambian. Al ser  $m_1 = m_3$ , debe ser  $a_1 = a_3 \equiv a$ . Por otra parte, del vínculo

$$2a_2 + 2a_a = 0 \Rightarrow a_2 = -a$$

Entonces de  $-m_1 a_1 + m_2 a_2 - m_3 a_3 = (m_2 - m_1 - m_3)g$  tendremos

$$ma \left( -\frac{3}{2} - 4 - \frac{3}{2} \right) = \cancel{m}g \left( 4 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) \Rightarrow a = \frac{g}{7}$$

O sea

$$a_1 = -\frac{g}{7}$$

$$a_2 = \frac{g}{7}$$

$$a_3 = -\frac{g}{7}$$

Las aceleraciones son iguales al caso del sistema (ii) del ítem ,b). De la Ec. (2.12), la tensión resulta  $T = \frac{23}{14}mg$ .

*Para el sistema (ii)*

Si  $m_1 = \frac{3}{2}m$ ,  $m_3 = \frac{3}{2}m$  y  $m_2 = 4m$ , no se modifican  $(m_1 + m_2 + m_3) = 7m$  y  $(m_2 - m_1 - m_3) = m$ . Luego las aceleraciones son las mismas, o sea,  $a = \frac{g}{7}$ .

Las tensiones serán ahora  $T_1 = T_2$  (por razones de simetría y sin hacer ninguna cuenta). Haciendo cuentas vemos que

$$T_1 = \frac{3}{2}mg - ma_1 = \frac{3}{2}mg + \frac{mg}{7} = \frac{23}{14}mg = T_2$$

(igual a la tensión  $T$  del sistema (i)).

Pensar la similitud de los resultados para ambos sistemas si  $m_1 = m_2 = \frac{3}{2}m$ .

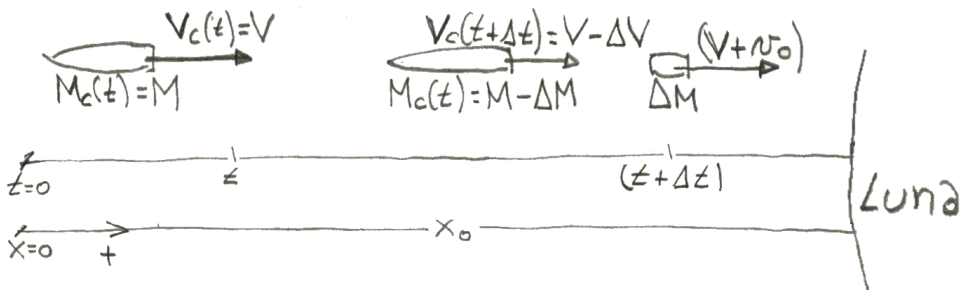
**PROBLEMA 2:** Una sonda espacial no tripulada debe posarse en la Luna suavemente siguiendo la vertical. Como en la Luna no existe atmósfera, la manera de conseguirlo es utilizando la retropropulsión (los paracaídas no sirven) para llegar a la superficie con una velocidad suficientemente pequeña como para evitar daños en el instrumental abordo. A una distancia de la Luna  $x_o$  se encienden los motores que arrojan el combustible a una velocidad  $v_o = 2694 \frac{m}{s}$ . En esos momentos, la velocidad de la sonda hacia la Luna es de  $v_o^s = 2000 \frac{m}{s}$ . Luego de transcurridos 10 minutos, la sonda se posa suavemente sobre la superficie habiendo

quemado toda la masa de combustible que se disponía ( $m_c = 2000kg$ ) justo en el momento de tocar Luna. Sabiendo que la masa de la sonda, sin el combustible es de  $m_s = 1000kg$  y, la aceleración de la gravedad lunar es de  $g_l = 1.6\frac{m}{s^2}$ , determinar:

- La aceleración y la velocidad de la sonda en función del tiempo desde que se encienden los motores hasta que la sonda aluniza.
- ¿A qué distancia de la luna  $x_o$  se encendieron los motores?

**RESOLUCIÓN:**

**Figura 2.62: Problema 3**



- La sonda a  $t = 0$  está dirigiéndose hacia la Luna y en ese momento enciende los motores, estando a una distancia  $x_o$  de la superficie lunar. A un tiempo  $t > 0$  cualquiera, la masa de la sonda (toda la estructura que forma la sonda, el instrumental y el combustible, etcétera) es  $M_c(t) = M$ . En ese momento, la velocidad de la sonda es  $V_c(t) = v$ .

A un tiempo posterior ( $t + \Delta t$ ), luego de la expulsión de una masa de combustible  $\Delta M$ , que sale con una velocidad  $v_o$  respecto de la sonda dirigida hacia la Luna, la masa de la sonda será  $M_c(y + \Delta t) = M - \Delta M$  y su velocidad será  $V_c(t + \Delta t) = V - \Delta V$ . Notemos aquí lo siguiente:

$$\frac{dV_c}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_c(t + \Delta t) - V_c(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V - \Delta V - V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{-\Delta V}{\Delta t} \right)$$

$$\frac{dM_c}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_c(t + \Delta t) - M_c(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M - \Delta M - M}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{-\Delta M}{\Delta t} \right)$$

Para hallar la ecuación de movimiento de la sonda partiremos de la segunda ley de Newton:

$$\frac{dp}{dt} = F_{ext}$$

que establece que la variación de la cantidad de movimiento de un sistema por unidad de tiempo resulta igual a la fuerza externa. En nuestro caso, la fuerza externa es la atracción de la gravedad lunar  $F_{ext} = M_c g_L$ . Entonces, como

$$\frac{dp}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

escribimos  $p(t + \Delta t)$ . Esta cantidad de movimiento está repartida entre la masa de combustible expulsada ( $\Delta M$ ) y la masa de la sonda ( $M - \Delta M$ ). O sea,

$$p(t + \Delta t) = (M - \Delta M)(V - \Delta V) + \Delta M(V + v_o)$$

donde  $(V + v_o)$  es la velocidad de la masa del combustible respecto de un observador en reposo (fuera de la sonda). Ahora escribimos  $p(t)$

$$p(t) = MV$$

Ahora hacemos  $p(t + \Delta v) - p(t)$

$$\begin{aligned} p(t + \Delta v) - p(t) &= (M - \Delta M)(V - \Delta V) + \Delta M(V + v_o) - MV = \\ &= \cancel{MV} - M\Delta V - \cancel{\Delta MV} - \Delta M\Delta V + \cancel{\Delta MV} + \Delta Mv_o - MV \end{aligned}$$

Ahora dividimos por  $\Delta t$ , tomamos el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  e igualamos a la fuerza externa.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ M - \left( -\frac{\Delta V}{\Delta t} \right) + v_o \left( \frac{\Delta M}{\Delta t} \right) - \Delta M \frac{\Delta V}{\Delta t} \right] = M_c g_L$$

recordando que, como vimos al principio

$$\frac{dV_c}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta V}{\Delta t} \right) \quad \text{y} \quad \frac{dM_c}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta M}{\Delta t} \right)$$

y además  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M \Delta V}{\Delta t} = 0$ , Dado que  $\Delta M \Delta V$  tienden a cero como  $(\Delta t)^2$ , obtenemos

$$M_c(t) \frac{dV_c}{dt} - v_o \frac{dM_c}{dt} = M_c(t) g_L$$

O sea,

$$M_c(t) \frac{dV_c}{dt} = M_c(t) g_L + v_o \frac{dM_c}{dt}$$

Ahora bien, la masa de la sonda en función del tiempo  $M_c(t)$ , resulta

$$M_c(t) = (m_s + m_c - \mu t)$$

donde  $m_s$  es la masa de la sonda que no es combustible (1000kg en el problema),  $m_c$  es la masa de combustible presente cuando se encendieron los motores (2000kg en el problema) y  $\mu$  es el combustible quemado por unidad de tiempo ( $\mu = \frac{2000kg}{600s} = 3.33 \frac{kg}{s}$ ). O sea,  $\frac{dM_c}{dt} = -\mu$ . Entonces,



$$(m_s + m_c - \mu t) \frac{dV_c}{dt} = (m_s + m_c - \mu t)g_L - \mu v_o$$

Es decir

$$\frac{dV_c}{dt} = g_L - \frac{\mu v_o}{(m_s + m_c - \mu t)}$$

Esta es la aceleración de la sonda en función del tiempo. Para hallar  $V_c = V_c(t)$ , debemos integrar la aceleración,

$$dV_c = \left[ g_L - \frac{\mu v_o}{(m_s + m_c - \mu t)} \right] dt$$

O sea

$$\begin{aligned} (V_c(t) - V_s^{(o)}) &= \int_{t=0}^t \left[ g_L - \frac{\mu v_o}{(m_s + m_c - \mu t')} \right] dt' = \\ &= g_L t - \mu v_o \int_{t=0}^t \frac{1}{(m_s + m_c - \mu t')} dt' \end{aligned}$$

definiendo  $u = (m_s + m_c - \mu t')$  y  $du = -\mu dt' \Rightarrow$

$$(V_c(t) - V_s^{(o)}) = g_L t + v_o \ln(u) \Bigg|_{m_s + m_c}^{m_s + m_c - \mu t} \Rightarrow$$

$$V_c(t) = g_L t + V_s^{(o)} - v_o \ln \left( \frac{m_s + m_c}{m_s + m_c - \mu t} \right)$$

Esta es la velocidad en función del tiempo. Notar que para  $t = 600s$  (tiempo de llegada a la superficie) se verifica que:

$$v_f = 1.6 \frac{m}{s^2} 600s + 2000 \frac{m}{s} - 2694 \ln(3) \frac{m}{s} = 0.338 \frac{m}{s}$$

Es decir, una velocidad razonablemente pequeña ( $\sim 34 \frac{cm}{s}$ ) como para evitar daños.

- b) Para hallar  $x_o$ , debemos integrar  $V_c(t)$  de modo que podamos obtener la posición a los  $600s$  (el origen lo pusimos en el punto en que se encienden los motores). Para hacer la integral más fácil, escribimos  $V_c(t)$  de un modo ligeramente diferente.

$$V_c(t) = g_L t + V_s^{(o)} - v_o \ln \left( 1 - \frac{u}{m_s + m_c} t \right) = \frac{dx}{dt}$$

Entonces,

$$\int_{x=0}^x dx = g_L \int_{t=0}^t t' dt' + V_s^{(o)} \int_{t=0}^t dt' + v_o \int_{t=0}^t \ln \left( 1 - \frac{u}{m_s + m_c} t' \right) dt'$$

llamando  $u = \left( 1 - \frac{\mu}{m_s + m_c} t \right)$ ,  $\Rightarrow du = -\frac{\mu}{m_s + m_c} dt \Rightarrow$

$$x(t) = \frac{1}{2} g_L t^2 + V_s^{(o)} t - \dots$$

$$\dots v_o \frac{m_s + m_c}{\mu} [u \ln(u) - u] \Big|_1^{\left( 1 - \frac{\mu}{m_s + m_c} t \right)}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g_L t^2 + V_s^{(o)} t -$$

$$\frac{v_o(m_s + m_c)}{\mu} \left[ \left( 1 - \frac{\mu}{m_s + m_c} t \right) \ln \left( 1 - \frac{\mu}{m_s + m_c} t \right) - \left( 1 - \frac{\mu}{m_s + m_c} t \right) + 1 \right]$$

Esto hay que evaluarlo para  $t = 600s$  (recordar que  $\mu t_f = m_c$ ). O sea, que

$$x_o = \underbrace{\frac{1}{2} 1.6 \frac{m}{s^2} + 2000 \frac{m}{s} (600s)}_{14.88 \times 10^5 m} - \underbrace{2694 \frac{m}{s} 300s \left[ \ln \left( \frac{1}{3} \right) - 1 + 3 \right]}_{7.28 \times 10^5 m}$$

Entonces

$$x_o = (14.88 - 7.28) \times 10^5 m \approx 760 km.$$

Aclaración: Veremos más adelante que a esta distancia la aceleración de la gravedad lunar no vale  $1.6 \frac{m}{s^2}$ . En efecto, ese valor corresponde al valor cercano a la Luna (distancia mucho menor que el radio lunar). El radio lunar es de  $R_L = 1737 km$  y claramente  $x_o$  no es mucho menor que  $R_L$ . En realidad, como veremos más adelante,

$$g_L = \left( \frac{R_L}{R_L + d} \right)^2 1.6 \frac{m}{s^2}$$

donde  $d$  es la distancia a la superficie lunar. Si tenemos en cuenta este hecho, el problema solo es soluble de manera numérica (con computadora).

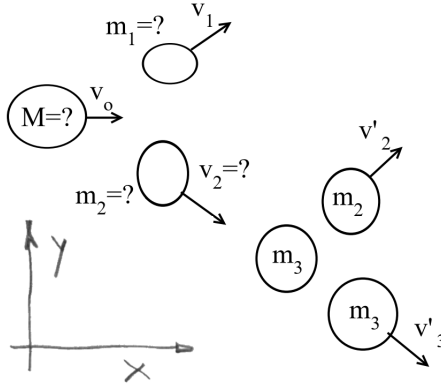
---

**PROBLEMA 3:** Por el espacio vaga un asteroide de masa desconocida  $M$  con velocidad conocida  $\bar{v}_o$ . Como resultado de un proceso nuclear que sucede en su interior, se desintegra en dos cuerpos, 1 y 2, de masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente (también desconocidas). Después de la desintegración, se detecta al cuerpo 1 y se puede determinar su velocidad  $\bar{v}_1$ . Tiempo después, se observa que el cuerpo 2 colisiona con otro asteroide 3, de masa conocida  $m_3$ , que se hallaba en reposo. Como resultado de esta última colisión, se puede determinar la velocidad del cuerpo 2,  $\bar{v}'_2$ , y la velocidad del cuerpo 3,  $\bar{v}_3$ .

- Determinar las masas de los cuerpos 1 y 2, es decir  $m_1$  y  $m_2$ .
- Hallar la velocidad  $\bar{v}_2$  del cuerpo 2 después de la desintegración inicial.
- Responder si la colisión entre el cuerpo 2 y el cuerpo 3 fue: a) Perfectamente elástica, b) Inelástica, c) Explosiva o d) Ninguna de las anteriores.

Datos:  $\bar{v}_o = 1000\hat{x} \frac{km}{h}$ ,  $\bar{v}_1 = (1200\hat{x} + 3000\hat{y}) \frac{km}{h}$ ,  $\bar{v}'_2 = (600\hat{x} + 300\hat{y}) \frac{km}{h}$ ,  $\bar{v}_3 = (150\hat{x} - 900\hat{y}) \frac{km}{h}$  y  $m_3 = 1333kg$ .

**Figura 2.63: Problema 3**



**RESOLUCIÓN:**

a) Planteamos la conservación de la cantidad de movimiento en la desintegración que origina al cuerpo 1 y al 2.

$$Mv_o = m_1v_{1x} + p_{2x} \quad (\text{en la dirección } x) \quad (2.18)$$

$$0 = m_1v_{1y} + p_{2y} \quad (\text{en la dirección } y) \quad (2.19)$$

Con  $M = m_1 + m_2$

Por otro lado, planteamos la conservación de la cantidad de movimiento en la colisión del cuerpo 2 con el 3.

$$p_{2x} = m_2v'_{2x} + m_3v'_{3x} \quad (\text{en la dirección } x) \quad (2.20)$$

$$p_{2y} = m_2v'_{2y} + m_3v'_{3y} \quad (\text{en la dirección } y) \quad (2.21)$$

Reemplazando las Ec. (2.20) y (2.21) en las Ec. (2.18) y (2.19) correspondientemente, obtenemos

$$(m_1 + m_2)\underline{v_o} = m_1\underline{v_{1x}} + m_2\underline{v'_{2x}} + m_3\underline{v'_{3x}}$$

$$0 = m_1\underline{v_{1y}} + m_2\underline{v'_{2y}} + m_3\underline{v'_{3y}}$$

Las cantidades subrayadas son conocidas (los datos). Entonces tenemos dos ecuaciones lineales de dos incógnitas ( $m_1$  y  $m_2$ ):

$$(v_{1x} - v_o)m_1 + (v'_{2x} - v_o)m_2 = -m_3v'_{3x}$$

$$v_{1y}m_1 + v'_{2y}m_2 = -m_3v'_{3y}$$

O sea

$$m_1 = \frac{-m_3v'_{3x}v'_{2y} + m_3v'_{3y}(v'_{2x} - v_o)}{(v_{1x} - v_o)v'_{2y} - (v'_{2x} - v_o)v_{1y}} = \frac{m_3}{4} = \frac{1000}{3}kg \approx 333kg$$

$$m_2 = \frac{-m_3v'_{3y}(v_{1x} - v_o) + m_3v'_{3x}v_{1y}}{(v_{1x} - v_o)v'_{2y} - (v'_{2x} - v_o)v_{1y}} = \frac{m_3}{2} = \frac{2000}{3}kg \approx 666kg$$

b) Para calcular  $\bar{v}_2$  utilizamos las Ec. (2.18) y (2.19):

$$v_{2x} = \frac{(m_1 + m_2)v_o - m_1v_{1x}}{m_2} = \frac{(1000)(1000) - \frac{1000}{3}1200}{\frac{2000}{3}} \frac{km}{h} = 900 \frac{km}{h}$$

$$v_{2y} = \frac{-m_1v_{1x}}{m_2} = \frac{-\frac{1000}{3}3000}{\frac{2000}{3}} \frac{km}{h} = -1500 \frac{km}{h}$$

Es decir,

$$\bar{v}_2 = (900\hat{x} - 1500\hat{y})\frac{km}{h}$$

c) Para determinar el tipo de choque calculamos el módulo de la velocidad relativa del cuerpo 2 respecto del 3 antes del choque y después de él:

$$\left| \bar{v}_{rel}^{(A)} \right| = |\bar{v}_2 - \bar{v}_3| = |\bar{v}_2| \quad (\text{ya que } \bar{v}_3 = 0, \text{ antes del choque})$$

$$\Rightarrow \left| \bar{v}_{rel}^{(A)} \right| = 100\sqrt{(9)^2 + (15)^2}\frac{km}{h}$$

Por otro lado

$$\left| \bar{v}_{rel}^{(B)} \right| = |\bar{v}'_2 - \bar{v}'_3| = |(600 - 150)\hat{x} + (300 + 900)\hat{y}|\frac{km}{h}$$

$$\Rightarrow \left| \bar{v}_{rel}^{(A)} \right| = 100\sqrt{(9)^2 + (15)^2}\frac{km}{h} = 10\sqrt{(4.5)^2 + (12)^2}\frac{km}{h}$$

Claramente  $\left| \bar{v}_{rel}^{(B)} \right| < \left| \bar{v}_{rel}^{(A)} \right|$ . O sea, la colisión no es perfectamente elástica ni completamente inelástica (ya que  $\left| \bar{v}_{rel}^{(B)} \right| \neq 0$ ), y tampoco es explosiva (ya que si lo fuera, el módulo de la velocidad relativa después de la colisión debería ser mayor que antes de ella). Es decir, la respuesta es la (b) inelástica.

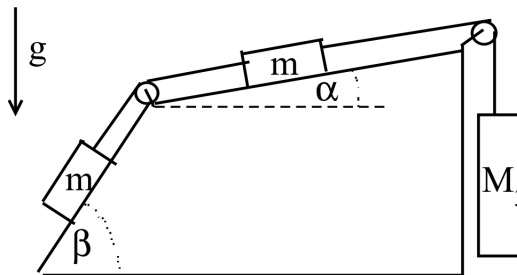
---

**PROBLEMA 4:** En el sistema de la figura, todas las poleas y las cuerdas inextensibles tienen masa despreciable. Los coeficientes de rozamiento estático  $\mu_e$  y dinámico  $\mu_d$  entre todas las superficies valen lo mismo.

- a) Determinar las condiciones que debe cumplir la masa del cuerpo 3,  $M_3$  para que el sistema no deslice, es decir, permanezca en equilibrio.
- b) Suponiendo que  $M_3$  duplica el valor límite para que el sistema no deslice hacia la derecha, calcular la aceleración del sistema y las tensiones en los hilos sabiendo que inicialmente se está moviendo hacia la izquierda con una velocidad  $v_o$ .
- c) ¿Cuánto tardará en detenerse? ¿Qué sucederá luego de detenerse?

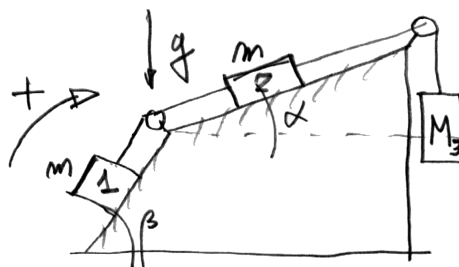
Datos:  $m, g, \alpha, \beta, \mu_e, \mu_d$  y  $v_o$ .

**Figura 2.64: Problema 4**

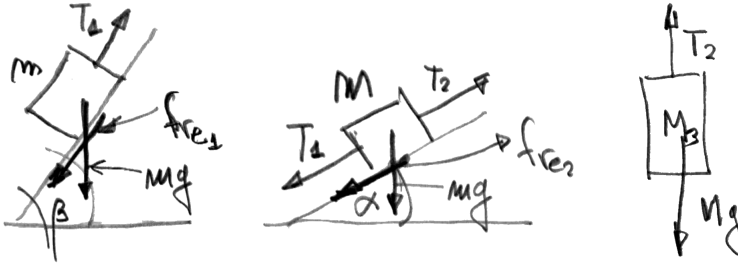


**RESOLUCIÓN:**

**Figura 2.65:**



- a) Primero planteamos la condición para que el sistema no deslice hacia la derecha:

**Figura 2.66: Diagrama de cuerpo libre para los 3 cuerpos**

$$0 = T_1 - mg \operatorname{sen}(\beta) - f_{re_1} \quad (2.22)$$

$$0 = T_2 - T_1 - mg \operatorname{sen}(\alpha) - f_{re_2} \quad (2.23)$$

$$0 = -T_2 + M_3g \quad (2.24)$$

Sumando las Ec. (2.22) + (2.23) + (2.24) miembro a miembro, obtenemos

$$M_3g - mg(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)) - f_{re_1} - f_{re_2} = 0 \Rightarrow$$

$$f_{re_1} + f_{re_2} = M_3g - mg(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)) \leq f_{re_{1max}} + f_{re_{2max}}$$

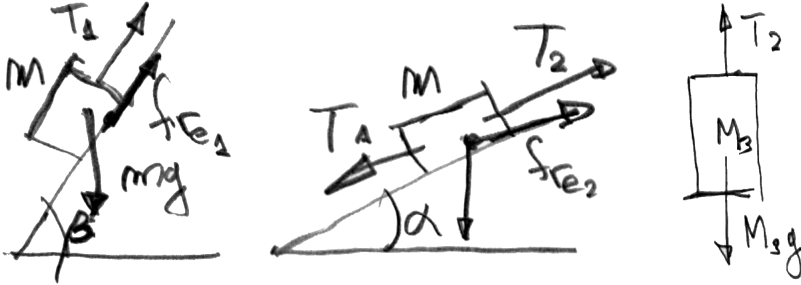
donde  $f_{re_{1max}} = mg \cos(\beta)\mu_e$  y  $f_{re_{2max}} = mg \cos(\alpha)\mu_e$ , o sea,

$$M_3 \leq m [\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) + \mu_e(\cos(\alpha) + \cos(\beta))] = M_c^{(+)}$$

Ahora, la condición para que el sistema no deslice para la izquierda sale de:



**Figura 2.67: Diagrama de cuerpo libre para los 3 cuerpos**



$$0 = T_1 - mg \operatorname{sen}(\beta) + f_{re_1} \quad (2.25)$$

$$0 = T_2 - T_1 - mg \operatorname{sen}(\alpha) + f_{re_2} \quad (2.26)$$

$$0 = -T_2 + M_3g \quad (2.27)$$

Sumando las Ec. (2.25) + (2.26) + (2.27) miembro a miembro obtenemos

$$M_3g - mg(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)) + f_{re_1} + f_{re_2} = 0 \Rightarrow$$

$$f_{re_1} + f_{re_2} = -M_3g + mg(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)) \leq f_{re_{1max}} + f_{re_{2max}}$$

O sea,

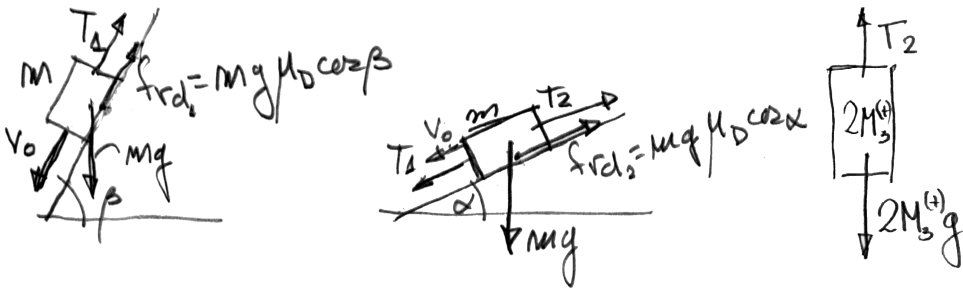
$$M_c^{(-)} = m [\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) - \mu_e(\operatorname{cos}(\alpha) + \operatorname{cos}(\beta))] \leq M_3$$

Entonces, para que el sistema no deslice debe cumplirse

$$M_c^{(-)} \leq M_3 \leq M_c^{(+)}$$

- b) El problema plantea ahora que  $M_3 = 2M_c^{(+)}$ . Esto quiere decir que a partir del reposo, el sistema deslizaría hacia la derecha. Pero la condición inicial no es el reposo. El sistema, inicialmente, está deslizando hacia la derecha con velocidad  $v_0$ . Recordar que la fuerza de rozamiento dinámica siempre se opone a la velocidad relativa entre las superficies: en este caso como  $v_0$  apunta en dirección  $-$ , el rozamiento apuntará en la dirección  $+$ .

**Figura 2.68: Diagrama de cuerpo libre para los 3 cuerpos**



$$ma_1 = T_1 - mg \operatorname{sen}(\beta) + mg\mu_d \cos(\beta) \quad (2.28)$$

$$ma_2 = T_2 - T_1 - mg \operatorname{sen}(\alpha) + mg\mu_d \cos(\alpha) \quad (2.29)$$

$$2M_c^{(+)}a_3 = -T_2 + M_3^{(+)}g \quad (2.30)$$

por los vínculos  $a_1 = a_2 = a_3 = a$ . Sumando las Ec. (2.28) + (2.29) + (2.30) se obtiene

$$2(M_c^{(+)} + m)a = (2M_c^{(+)} - m(\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)) + m\mu_d(\cos(\beta) + \cos(\alpha)))g$$

y reemplazando  $M_c^{(+)}$  por lo que vale, finalmente se obtiene

$$a = \frac{[(\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)) + (2\mu_e + \mu_d)(\cos(\beta) + \cos(\alpha))]}{2(\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) + \mu_e(\cos(\beta) + \cos(\alpha)))}g$$

Esta aceleración resulta positiva (contraria a la velocidad  $v_o$ ). Las tensiones se obtienen reemplazando esta aceleración en las Ec. (2.28) y (2.30).

$$T_1 = ma + mg \operatorname{sen}(\beta) - mg\mu_d \cos(\beta)$$

$$T_2 = 2M_c^{(+)}(g - a)$$

c) Al ser la velocidad inicial  $v_o$ , contraria a la aceleración constante  $a$ , resulta

$$v(t) = -v_o + at$$

para todos los cuerpos. Entonces para  $v = 0$

$$t^* = \frac{v_o}{a}$$

Luego de detenerse, el sistema comienza a adquirir una velocidad hacia la derecha (ya que desliza hacia esa dirección, dado que  $M_3 = 2M_c^{(+)}$ ). La aceleración de este movimiento (el que ocurre después de detenerse) sigue teniendo el mismo sentido, pero no es la misma, que antes, dado que las fuerzas de rozamiento dinámicas cambian de sentido.



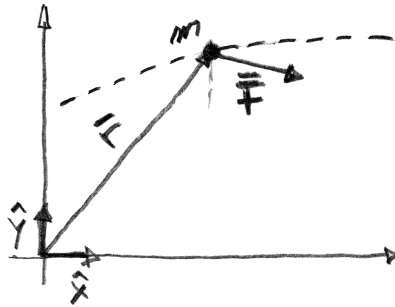
# **Capítulo 3**

## **Dinámica circular**

### 3.1. Descomposición de la segunda ley de Newton utilizando otros versores

Como vimos,  $\vec{F} = m\vec{a}$  es una relación entre vectores. Esta relación tendrá distintas formas según el sistema de referencia que adoptemos para describir dichos vectores. Hasta ahora utilizamos un sistema de ejes cartesianos ortogonales.

Figura 3.1:



Es decir, en dos dimensiones proyectamos todos los vectores sobre los versores  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Entonces

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} \right)$$

o también

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

Además

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left( \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} \right)$$

o sea

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$$

y consecuentemente

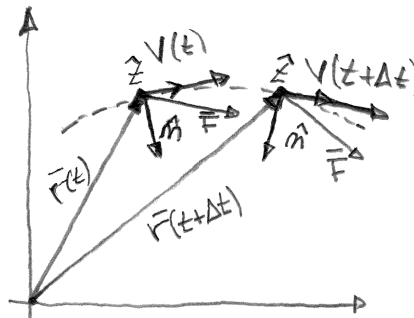
$$\vec{F} = m\vec{a} = \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \end{cases}$$

Podría ocurrir, sin embargo, que para algún problema convenga utilizar otro tipo de versores ortogonales. Podemos elegir infinitos pares de versores ortogonales. De hecho, cada problema tendrá su elección ideal. Podemos elegir versores intrínsecos, polares, elípticos, parabólicos, etcétera. Pero a no asustarse. En este curso veremos qué pasa con los intrínsecos y los polares. Si la vida los lleva a cruzarse con la conveniencia de utilizar otros, no dudo que lo podrán hacer.

### 3.2. Descomposición en versores intrínsecos

Estos dos versores reciben ese nombre porque están definidos sobre la trayectoria de la partícula u objeto cuyo movimiento estamos estudiando (Fig. (3.2)):

**Figura 3.2:**



Consideremos un cuerpo de masa  $m$  que a tiempo  $t$  está en el punto  $r = r(t)$ . En ese punto podemos definir dos versores ortogonales:  $\hat{t}$ , versor tangencial a la trayectoria  $\hat{n}$ , versor normal a la trayectoria (la dirección normal apunta hacia adentro de la curvatura). Estas direcciones, tangencial y normal, dependerán evidentemente del tiempo. Como puede verse después de un  $\Delta t$ , la partícula estará en  $r = r(t + \Delta t)$  y las direcciones normal y tangencial serán otras. O sea  $\hat{t} = \hat{t}(t)$ ,  $\hat{n} = \hat{n}(t)$ , los versores dependen del tiempo. Encontraremos ahora la segunda ley de Newton descompuesta en estas direcciones.

Para ello consideremos lo siguiente

$$\bar{F} = m\bar{a} = m \frac{d(v\hat{t})}{dt}, \text{ o sea } \bar{a} = \frac{d(v\hat{t})}{dt}$$

dado que por definición  $\bar{v}$  es un vector tangencial a la trayectoria. Recalquemos aquí que  $\bar{v} = (v_x\hat{x} + v_y\hat{y}) = v\hat{t}$  es el mismo vector. Si lo derivamos descompuesto en cartesianas, obtenemos lo que ya sabemos:  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$  y  $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ . La gracia está en derivarlo escrito como  $\bar{v} = v\hat{t}$ . Esto se hace sencillamente si tenemos en cuenta que no solo  $v = v(t)$  sino que también  $\hat{t} = \hat{t}(t)$ . O sea,

$$\bar{a} = \frac{d(v\hat{t})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt}$$

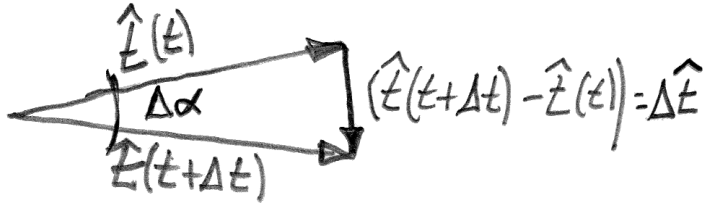
Aquí debemos ser capaces de encontrar  $\frac{d\hat{t}}{dt}$ . Esto es la derivada de un vector. Sabemos que la derivada es otro vector. Vayamos a la definición de derivada,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{t}(t + \Delta t) - \hat{t}(t)}{\Delta t}$$

Para hacer esta operación, consideremos la Fig. (3.3), obtenida de transportar  $\hat{t}(t)$  y  $\hat{t}(t + \Delta t)$  paralelamente a un origen común.



Figura 3.3:



Calcular  $|\hat{t}(t + \Delta t) - \hat{t}(t)|$  es sencillo, sobre todo pensando que luego haremos  $\Delta t \rightarrow 0$ . El módulo que nos interesa es la longitud del arco que subtiende el ángulo  $\Delta\alpha$  y como sabemos que la longitud del arco es el radio por el ángulo que lo subtiende, resulta que

$$\frac{|\hat{t}(t + \Delta t) - \hat{t}(t)|}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

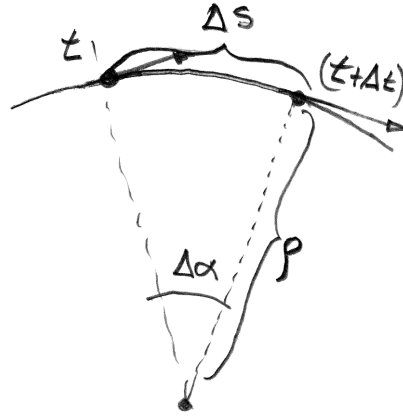
ya que  $|\hat{t}(t)| = |\hat{t}(t + \Delta t)| = 1$  (recordar que son versores).

Para averiguar la dirección, notemos que si  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta\alpha$  también y entonces el vector  $\Delta\hat{t}$  tiende hacia la dirección normal  $\hat{t}$ . Pero por definición, la dirección normal a  $\hat{t}$  es  $\hat{n}$ . O sea, que tendremos que

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \hat{n}$$

Ahora recurrimos a otro dibujito.

Figura 3.4:



Aquí se ve claro que el ángulo  $\Delta\alpha$  que forman  $\hat{t}(t)$  y  $\hat{t}(t + \Delta t)$  es igual al ángulo que avanza el radio de curvatura  $\rho$  cuando la partícula recorre una longitud  $\Delta s$ . Luego  $\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{\rho}$ . Es decir

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \frac{\Delta s}{\Delta t} \hat{n} = \frac{1}{\rho} v \hat{n}$$

y luego

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + v \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n}$$

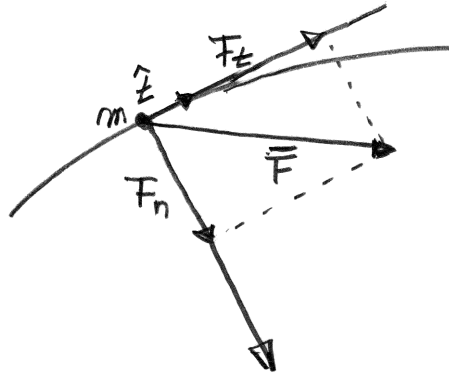
O sea encontramos  $\bar{a} = a_t \hat{t} + a_n \hat{n}$ , donde  $a_t = \frac{dv}{dt}$ ,  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ , y la segunda ley de Newton se escribe, en versores intrínsecos, como

$$\bar{F} = m\bar{a} = \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F_t \\ m \frac{v^2}{\rho} = F_n \end{cases}$$

donde  $F_t$  y  $F_n$  son las componentes de las fuerzas proyectadas en las direcciones tangencial y normal respectivamente.

La descripción de la segunda ley de Newton tiene una alta riqueza pedagógica (más que utilidad práctica). Detengámonos un poco para profundizar esta descomposición para un movimiento absolutamente general.

**Figura 3.5:**



El gráfico muestra un tramo de la trayectoria de una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza  $\vec{F}$ . Se muestra allí, las componentes tangencial ( $F_t$ ) y normal ( $F_n$ ) de dicha fuerza. Por lo que acabamos de ver entonces, la ley de Newton, en la dirección tangencial es

$$m \frac{dv}{dt} = F_t$$

La componente tangencial de la aceleración  $a_t = \frac{dv}{dt}$  indica cómo la varía el módulo de la velocidad en el tiempo. Dicho de otra manera, las componentes *tangenciales* de la fuerza modifican el *módulo de la velocidad*. La ley de Newton en la dirección normal es

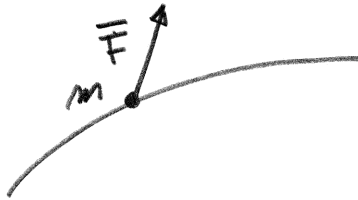
$$m \frac{v^2}{\rho} = F_n$$

La componente normal de la aceleración  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$  está asociada al cambio de dirección de la velocidad. Dicho de otra forma, las componentes *normales* de

la fuerza modifican *la dirección de la velocidad* (y dejan invariable el módulo). Por definición, la aceleración es el otro vector que describe cómo varía  $\bar{v}$ . Ahora bien, un vector puede variar porque varía su módulo o porque varía su dirección (o porque varían ambas cosas). Las componentes *tangenciales* de la fuerza, varían el *módulo*. Las componentes *normales* varían la dirección.

Si la fuerza no tiene componentes normales, la dirección de la velocidad no cambia en el tiempo y la trayectoria será rectilínea. Si la fuerza no tiene componentes tangenciales y solo normales, entonces la trayectoria se curva, pero el módulo de la velocidad no varía. Si alguien dibuja algo como la Fig. (3.6), quiere decir que no entiende mecánica. En efecto, si la trayectoria se curva es porque hay una fuerza que la hace curvar. Esa fuerza debe tener una componente normal hacia adonde se curva la fuerza. Si la fuerza fuera en la dirección que indica el dibujo, la trayectoria se debería curvar hacia el otro lado.

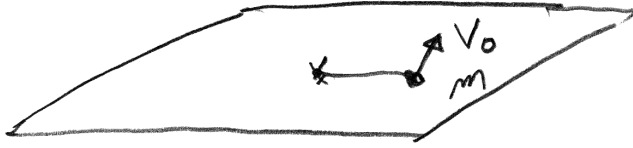
**Figura 3.6:**



Como dijimos, cualquier movimiento rectilíneo es un ejemplo de fuerza sin componente normal. Veamos ahora ejemplos de fuerzas puramente normales.

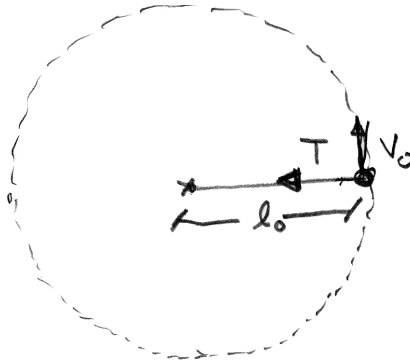
Supongamos que tenemos una partícula atada a un hilo cuyo extremo está clavado sobre una superficie horizontal. Con el hilo tenso le damos a la partícula una velocidad inicial perpendicular al hilo. NO hay rozamiento entre la superficie y la partícula.

**Figura 3.7:**



Visto desde arriba es algo así, como se muestra en la Fig. (3.8).

**Figura 3.8:**



Entonces aquí vemos que solo hay una fuerza en la dirección normal: la tensión  $T$ . La dirección normal apunta desde donde se encuentra la partícula hacia donde está fijo el hilo. Como ya sabemos, la tensión es una fuerza de vínculo, por lo tanto está acompañada de una ecuación de vínculo:  $\rho = l_0$ . Esta ecuación nos dice que la trayectoria de la partícula, (el hilo está tenso y por lo tanto existe  $T$ ), será una circunferencia de radio  $\rho = l_0$ . La segunda ley de Newton en componentes intrínsecas será

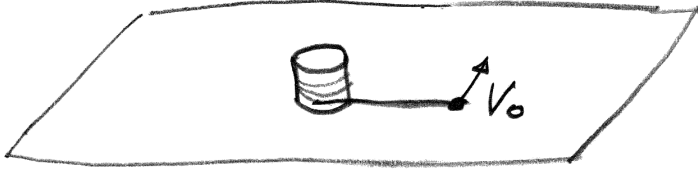
$$\begin{aligned} \hat{t}) \quad m \frac{dv}{dt} &= 0 \quad \Rightarrow v = cte \Rightarrow v = v_0 \\ \hat{n}) \quad m \frac{v^2}{l_0} &= T \quad \Rightarrow \bar{a} = \frac{v^2}{l_0} \hat{n} \quad \text{y} \quad T = \frac{mv^2}{l_0} \end{aligned}$$

o sea, la ausencia de componentes tangenciales nos indica que el módulo de la velocidad permanecerá constante  $v = v_0$ . Por otra parte, la ecuación en la direc-

ción normal nos indica que basta tener una velocidad inicial  $v_o$  en la dirección tangencial para que el hilo permanezca tenso. Este tipo de movimiento es el que se conoce como “movimiento circular uniforme” debido a que la trayectoria es una circunferencia y el módulo de la velocidad permanece constante. Podríamos preguntarnos: ¿alcanza con que la fuerza sea puramente normal para que la trayectoria sea una circunferencia? La respuesta es *NO*, no alcanza. Nuestro siguiente ejemplo es una muestra de ello.

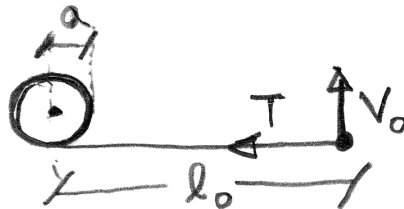
Consideremos un sistema parecido al anterior pero en lugar de tener el hilo clavado a la superficie, este se va enrollando en un cilindro de radio  $a$  (Fig. (3.9)).

**Figura 3.9:**



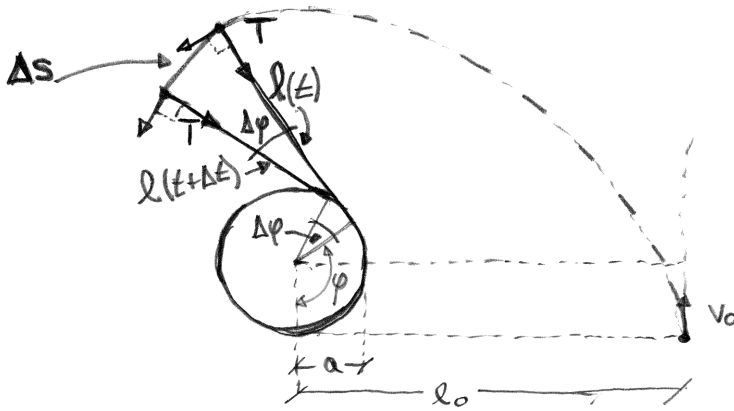
La Fig. (3.10), representa la situación vista de arriba.

**Figura 3.10:**



donde  $l_o$  es la longitud libre del hilo inicial. A medida que transcurre el tiempo, el hilo se va enrollando en el cilindro, o sea,  $l = l(t)$ , con  $l_o = l(t = 0)$ . El movimiento va a terminar cuando todo el hilo termine enrollado. ¿Cuánto tardará en enrollarse?. Responderemos esta pregunta. Grafiquemos el sistema a un tiempo cualquiera  $t$  y  $t + \Delta t$

Figura 3.11:



Mientras el hilo está tenso actúa la tensión que está en la dirección normal a la trayectoria (la dirección del hilo). La ley de Newton en versores intrínsecos será:

$$\hat{t}) \quad m \frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow v = cte \Rightarrow v = v_0 \quad (\text{igual que en el ejemplo anterior})$$

$$\hat{n}) \quad m \frac{v^2}{l(t)} = T \quad \Rightarrow \bar{a} = \frac{v^2}{l(t)} \hat{n} \quad \text{y} \quad T = \frac{mv^2}{l(t)}$$

Aquí vemos una diferencia grande respecto del ejemplo anterior. En aquel caso, la ecuación de vínculo imponía que el radio de curvatura fuese constante e igual a la longitud del hilo  $\rho = l_0$ . En el caso presente, ya dijimos que  $\rho = l(t)$  cambia en el tiempo, ya que la ecuación de vínculo es otra. ¿Cuál es la ecuación de vínculo? Esta dice que todo lo que se acorta el hilo debe ser igual a todo lo que se enrolla en el cilindro. Observemos el gráfico para determinar cuánto hilo se enrolla cuando pasamos del tiempo  $t$  al  $t + \Delta t$ . La longitud de hilo que se enrolla es igual al arco subtendido sobre el cilindro por el ángulo  $\Delta \varphi$ . O sea, podemos poner

$$\text{longitud del hilo enrollado en } \Delta t = a \Delta \varphi$$

Esta cantidad debe ser igual a lo que se acortó  $l$  en ese  $\Delta t$ . ¿Y cuánto se acordó?

$$\text{acortamiento de } l \text{ en } \Delta t = l(t) - l(t + \Delta t)$$

Es decir

$$\frac{l(t) - l(t + \Delta t)}{\Delta t} = a \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

y tomando el límite para  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dl}{dt} = a \frac{d\varphi}{dt}$$

Por otro lado, también mirando el dibujo, sabemos que

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} l \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} l \frac{d\varphi}{dt} = v_o$$

Esta última igualdad se debe a que ya vimos que  $v = v_o$  durante todo el movimiento. Pero la ecuación de vínculo recién hallada dice que

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{a} \frac{dl}{dt}$$

o sea,

$$-\frac{1}{a} l \frac{dl}{dt} = v_o \Rightarrow l dl = -v_o a dt \Rightarrow \int_{l=l_o}^l l dl = -v_o a \int_{t=0}^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} l^2 - \frac{l_o^2}{2} = -v_o a t \Rightarrow l^2 = l_o^2 - 2v_o a t$$

$$\Rightarrow l(t) = \sqrt{l_o^2 - 2v_o a t}$$

Para hallar el tiempo pedido, o sea el tiempo que dura el movimiento  $t_C$ , haremos

$$l(t) = \sqrt{l_o^2 - 2v_o a t_C} = 0 \Rightarrow t_C = \frac{l_o^2}{2v_o a}$$



Este es el tiempo que tarda el hilo en enrollarse. Además, podemos ver cómo cambia la tensión en función del tiempo

$$T(t) = m \frac{v_o^2}{\sqrt{l_o^2 - 2v_o a t}}$$

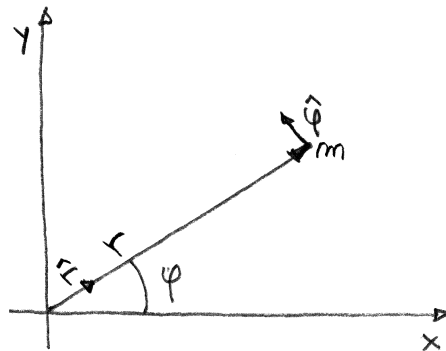
En este ejemplo, vimos que una fuerza puramente normal puede conducir a trayectorias que con son circunferencias. En particular, a la curva que describe la trayectoria de nuestro último ejemplo los matemáticos la llaman “envolvente de la circunferencia”.

### 3.3. Descomposición de la segunda ley de Newton en versores polares

Vamos a presentar los versores polares, pero antes vamos a introducir una notación debida a Newton). En todo lo que sigue indicaremos la derivación temporal por un punto sobre la función que estamos derivando. O sea, por ejemplo  $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ,  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ . Esto quiere decir que si aparece, por ejemplo  $\dot{f}$ , esto significa  $\frac{df}{dt}$ .

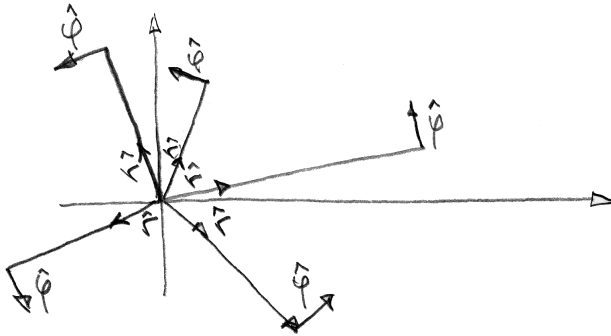
Vamos ahora a versores polares

Figura 3.12:



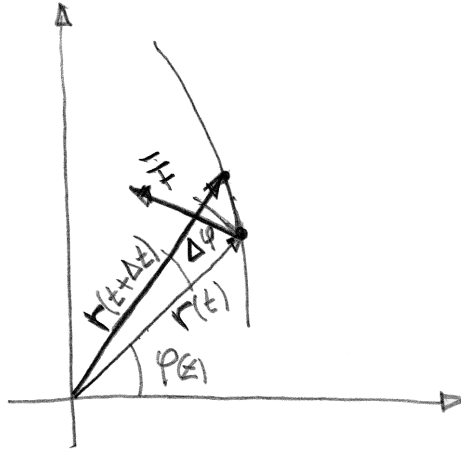
Estos versores están asociados a las coordenadas polares. Sabemos que un vector (el vector posición  $\vec{r}$  indicado en la figura), lo podemos describir como sus correspondientes cartesianas  $F_x$  y  $F_y$  o por su módulo  $r$  y su dirección  $\varphi$ . Así como las componentes cartesianas están asociados dos versores ortogonales  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  asociados a las direcciones en que crece  $x$  y crece  $y$  respectivamente, podemos definir dos versores  $\hat{r}$  y  $\hat{\varphi}$  asociados a las direcciones en que crecen  $r$  y  $\varphi$  respectivamente (ver el gráfico). La dirección de estos versores van a variar según el punto en el que esté la partícula. En la figura siguiente se muestran varias direcciones según dónde esté la partícula.

**Figura 3.13:**



Vamos a descomponer la segunda ley de Newton en estos versores. Veamos un tramo de la trayectoria para una partícula que se mueve por una fuerza  $F$  aplicada. Aquí hemos graficado la posición a tiempo  $t(\vec{r}(t))$  y la posición a tiempo  $(t + \Delta t)$ .

Figura 3.14:



Queremos determinar entonces  $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$  descompuesto en esos versores. Sabemos que  $\bar{r} = r\hat{r}$ , o sea el vector posición, por definición apunta en la dirección que crece su módulo. Esto permite encontrar fácilmente la velocidad descompuesta en versores polares. En efecto

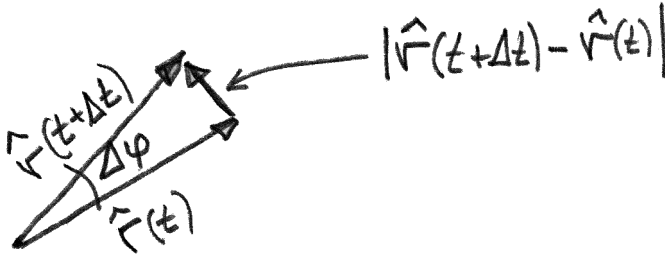
$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Para encontrar  $\left(\frac{d\hat{r}}{dt}\right)$ , aplicamos su definición

$$\left(\frac{d\hat{r}}{dt}\right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{r}(t + \Delta t) - \hat{r}(t)}{\Delta t}$$

Es fácil encontrar el módulo de este vector con ayuda de la siguiente figura:

Figura 3.15:



Para  $\Delta t$  pequeño, este módulo va a ser el arco subtendido por el ángulo  $\Delta\varphi$ .

O sea,

$$|\hat{r}(t + \Delta t) - \hat{r}(t)| = |\hat{r}(t)|\Delta\varphi \quad (\text{ya que el arco es el radio por el ángulo})$$

$$\text{y } |\hat{r}(t)|\Delta\varphi = \Delta\varphi \quad (\text{dado que } |\hat{r}(t)| = 1 \text{ por ser un versor})$$

Entonces,

$$\left| \frac{d\hat{r}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Para calcular la dirección, basta notar que si  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ ,  $(\hat{r}(t+\Delta t) - \hat{r}(t))$  tiende a ser ortogonal a  $\hat{r}(t)$ . Esto quiere decir que  $(\hat{r}(t+\Delta t) - \hat{r}(t))$  apunta en la dirección  $\hat{\varphi}$ . O sea,

$$\left( \frac{d\hat{r}}{dt} \right) = \dot{\varphi} \hat{\varphi}$$

Y, finalmente, obtenemos la velocidad en coordenadas polares,

$$\bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

o, lo que es lo mismo,  $v_r = \dot{r}$  (componente radial de la velocidad) y  $v_\varphi = r\dot{\varphi}$  (componente angular de la velocidad). Recalquemos, aunque la verdad creo que no debería hacer falta, que:

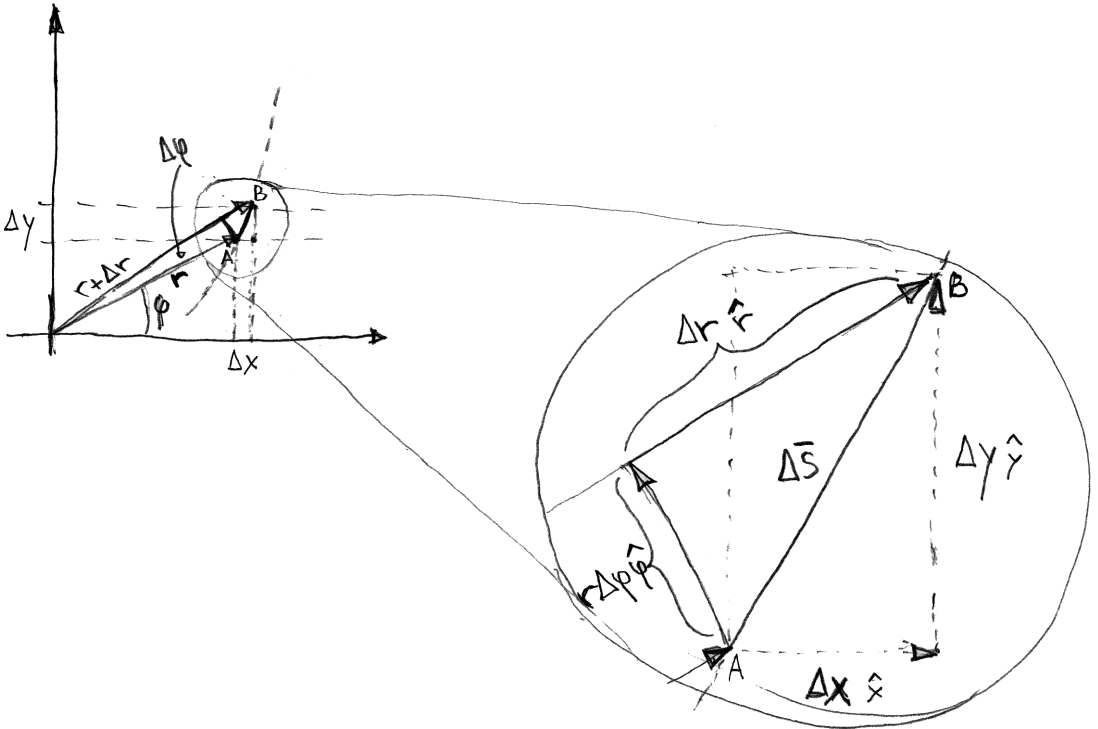
$$\bar{v} = (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) = (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi})$$

Se trata de la misma velocidad, del mismo vector, descompuesto en sistemas de versores diferentes. Ahora debemos derivar a la velocidad para obtener la aceleración

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi})$$

Antes de terminar con el cálculo de la aceleración en componentes polares examinemos el significado de las componentes de la velocidad en dichos versores. Para eso es bastante instructivo deducir las componentes a partir de la “geometría” del movimiento. Consideremos un pequeño tramo de la trayectoria de una partícula recorrida entre el tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$ .

Figura 3.16:



La parte derecha de la Fig. (3.16) es una ampliación de la parte izquierda. En el  $\Delta t$ , la partícula se desplaza del punto  $A$  al  $B$ . Consecuentemente, el vector desplazamiento es

$$\bar{\Delta s} = \Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y} = r \Delta \varphi \hat{\varphi} + \Delta r \hat{r}$$

Ahora bien, la definición de velocidad es  $\frac{\bar{\Delta s}}{\Delta t}$ , es decir

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y})}{\Delta t} = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y}$$

y también

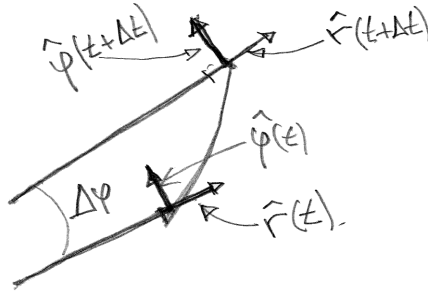
$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(r \Delta \varphi \hat{\varphi} + \Delta r \hat{r})}{\Delta t} = r \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{r} \hat{r}$$

Vamos, ahora sí, a calcular  $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$  en componentes polares,

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) = \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d(r\dot{\varphi})}{dt}\hat{\varphi} + r\dot{\varphi}\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + r\dot{\varphi}\frac{d\hat{\varphi}}{dt}$$

, donde hemos utilizado nuestro resultado anterior  $\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\varphi}\hat{\varphi}$ . Aquí aparece la derivada del versor angular  $\hat{\varphi}$ ,  $\frac{d\hat{\varphi}}{dt}$ . Para eso recurrimos de nuevo a una figura.

**Figura 3.17:**

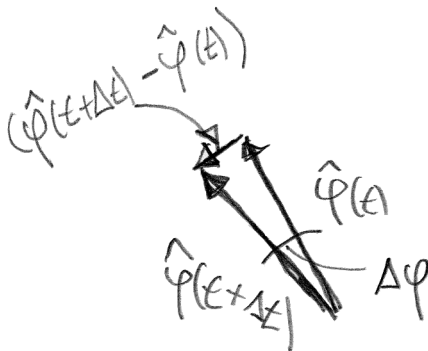


Por definición

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\hat{\varphi}(t + \Delta t) - \hat{\varphi}(t))}{\Delta t}$$

Para calcular el módulo  $|\hat{\varphi}(t + \Delta t) - \hat{\varphi}(t)|$  hacemos la resta de los versores:

**Figura 3.18:**



$$|\hat{\varphi}(t + \Delta t) - \hat{\varphi}(t)| = |\hat{\varphi}(t)|\Delta\varphi = \Delta\varphi$$

O sea,

$$\left| \frac{d\hat{\varphi}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi}$$

Para determinar la dirección, observamos que el vector  $(\hat{\varphi}(t + \Delta t) - \hat{\varphi}(t))$  tiende a ser perpendicular a  $\hat{\varphi}(t)$  cuando  $\Delta t$  (y  $\Delta\varphi$ ) tienden a cero. Además apunta en contra de  $\hat{r}(t)$ . Se concluye entonces que  $\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\hat{r}$ . O sea, juntando todo lo que apunta en la dirección  $\hat{r}$  y todo lo que apunta en la dirección  $\hat{\varphi}$ , queda:

$$\bar{a} = ((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r})\hat{\varphi}) = a_r\hat{r} + a_\varphi\hat{\varphi}$$

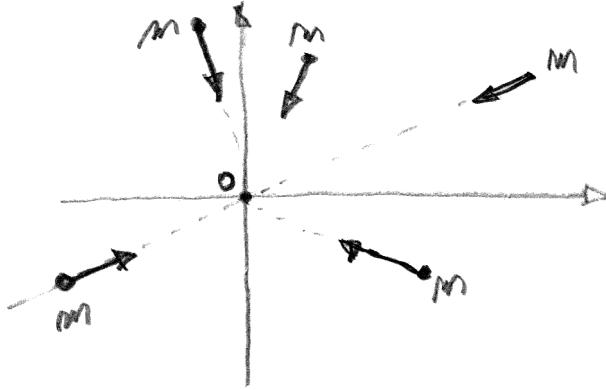
La segunda ley de Newton entonces es:

$$\bar{F} = m\bar{a} = \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r & \text{(ecuación radial)} \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r}) = F_\varphi & \text{(ecuación angular)} \end{cases}$$

$F_r$  y  $F_\varphi$  son las componentes de la fuerza proyectadas en las direcciones radial y angular respectivamente. Es decir, descomponemos la fuerza como  $\bar{F} = F_r\hat{r} + F_\varphi\hat{\varphi}$ . Los versores polares son muy útiles (diría que necesarios) para estudiar una “familia” de sistemas muy importante: los problemas de fuerzas centrales. Estos problemas consisten en una partícula de masa  $m$  con una fuerza central aplicada. Una fuerza es central si en cada momento solo tiene una componente radial (o sea componente angular nula)  $\bar{F} = F_r\hat{r}$ . En un diagrama podría ser algo así:



Figura 3.19:



Con esto queremos ilustrar el hecho de que la fuerza siempre está en la dirección de  $\hat{r}$ , no importa en dónde esté ubicada la partícula. En el presente ejemplo hemos supuesto que la fuerza es siempre atractiva hacia  $o$  pero podría ser repulsiva o a veces atractiva y a veces repulsiva. En todos los casos, resulta  $\vec{F} = F_r \hat{r}$ . Para el problema de fuerzas centrales la segunda ley de Newton resulta,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_r \quad (\text{ecuación radial})$$

$$m(r\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{r}) = 0 \quad (\text{ecuación angular})$$

Observemos que si multiplicamos por  $r$  ambos miembros de la ecuación angular obtenemos la ecuación (válida siempre  $r \neq 0$ ),

$$mr^2\ddot{\phi} + m2\dot{\phi}r\dot{r} = 0$$

Es fácil notar que  $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = mr^2\ddot{\phi} + m2\dot{\phi}r\dot{r}$ . O sea,

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0$$

Esta última ecuación nos dice que

$$mr^2\dot{\phi} \equiv l = cte$$

O sea que en el problema de fuerzas centrales existe una *constante de movimiento* (que llamaremos  $l$ ; no confundir con la  $l$  de longitud, dado que es una nueva magnitud). Que sea una constante de movimiento significa que si somos capaces de conocerla a partir de las condiciones iniciales del problema ( $r_o, \varphi_o, \dot{r}_o, \dot{\varphi}_o$ ), siempre valdrá lo mismo. Esto nos resulta muy útil, porque escribimos

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$$

y podemos reemplazar  $\dot{\varphi}$  en la ecuación radial:

$$\Rightarrow m\ddot{r} - \cancel{m} \frac{\cancel{r} l^2}{m^2 r^3} = m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = F_r$$

Si además  $F_r = F(r)$ , o sea, la fuerza solo depende de la distancia de la partícula al origen, tendremos

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{l^2}{mr^3}$$

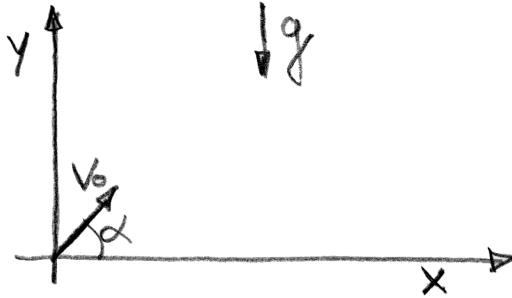
Notemos aquí que esta ecuación (llamada ecuación del problema unidimensional equivalente) solo depende de una coordenada. Si cambiamos el nombre “ $r$ ” por “ $x$ ”, esta ecuación es de la forma

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \left( F(x) + \frac{l^2}{mx^3} \right)$$

O sea, conocemos  $a = a(x)$ , ¡Problema que ya sabemos resolver!. Ya ahondaremos en el estudio de  $l$  y de estas ecuaciones cuando estudiemos movimiento planetario y las leyes de Kepler. De acuerdo con lo que estudiamos hasta ahora, la elección de cómo descomponer la ley de Newton (qué tipo de coordenadas utilizar) va a depender del problema. Está claro que si la fuerza es central, debemos utilizar polares. También está claro que si la fuerza  $F$ , descompuesta en versores cartesianos tiene siempre una componente nula, la elección serán los versores cartesianos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Un ejemplo sencillo de esto es el caso de lo que se conoce como tiro oblicuo o movimiento de proyectiles. Estudiemos el caso de una

bala de cañón disparada desde el origen con una velocidad inicial de módulo  $v_o$  e inclinación  $\alpha$ .

**Figura 3.20:**



Puesto que  $\vec{F} = -mg\hat{y}$  (no hay fuerzas en la dirección  $x$ ) es evidente que conviene plantear el problema en versores cartesianos (inténtelo en polares).

$$\vec{F} = m\vec{a} = \begin{cases} m\ddot{y} = -mg & \Rightarrow y(t) = v_o \text{sen}(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ m\ddot{x} = 0 & \Rightarrow x(t) = v_o \text{cos}(\alpha)t \end{cases}$$

donde hemos descompuesto la velocidad inicial según  $x$  e  $y$  y  $\vec{v}_o = v_o(\text{cos}(\alpha)\hat{x} + \text{sen}(\alpha)\hat{y})$ . El movimiento es la superposición de un movimiento uniforme en la dirección  $x$  y un movimiento uniformemente acelerado en la dirección  $y$ . Es importante notar que estos movimientos son “simultáneos”, o sea, en rigor deberíamos poner

$$\vec{r}(t) = \left( x(t) = v_o \text{cos}(\alpha)t\hat{x} + \left( v_o \text{sen}(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right)\hat{y} \right)$$

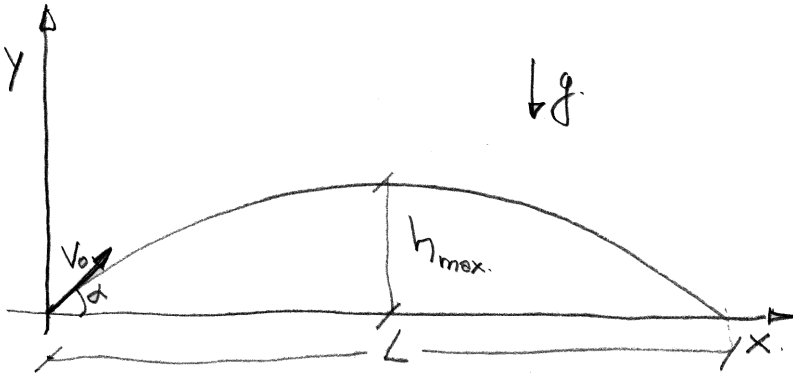
En este problema es particularmente sencillo encontrar la trayectoria, es decir, la curva que describe la partícula en su movimiento. Esta curva, en el plano, vendrá dada por una función que relaciona las dos coordenadas del problema. En cartesianas será  $x = x(y)$  o  $y = y(x)$ , en polares,  $r = r(\varphi)$  o  $\varphi = \varphi(r)$ , etcétera.

Para el caso del tiro oblicuo hacemos  $t = \frac{x}{v_o \cos(\alpha)}$ , y esto lo reemplazamos en  $y = y\left(t = \frac{x}{v_o \cos(\alpha)}\right)$ . O sea,

$$y(x) = \tan(\alpha)x - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_o^2 \cos^2(\alpha)}$$

que resulta una parábola,

**Figura 3.21:**



Las longitudes  $L$  y  $h_{max}$  (alcance y altura máxima) son parámetros de interés en esta trayectoria y se determinan fácilmente. Para el alcance, notemos que  $x = L$  es la otra raíz de la parábola, que no es  $x = 0$ . Entonces, factorizamos,

$$y(x) = \frac{x}{\cos(\alpha)} \left( \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \frac{gx}{v_o^2 \cos(\alpha)} \right)$$

y resulta que

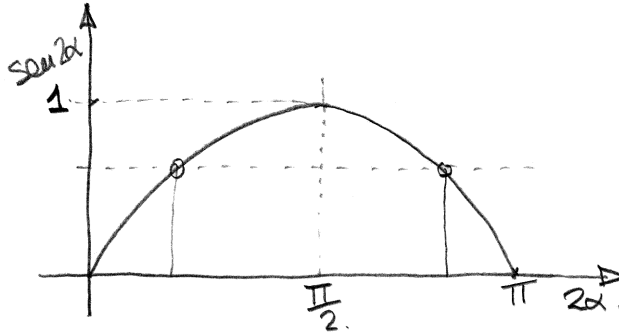
$$\sin(\alpha) - \frac{1}{2} \frac{gx}{v_o^2 \cos(\alpha)} = 0 \Rightarrow L = \frac{2v_o^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_o^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

(ya que  $\sin(2\alpha) = 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)$ )

Esta expresión merece algún comentario: cuando  $\alpha$  varía entre  $0$  y  $2\pi$ ,  $2\alpha$  varía entre  $0$  y  $\pi$ , y el seno cuando su argumento varía entre  $0$  y  $\pi$  vale lo mismo

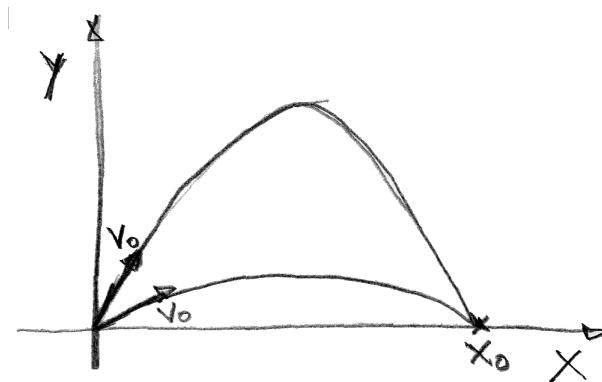
que para dos valores diferentes. Resulta así que tendremos el mismo alcance para dos valores de  $\alpha$  (salvo para  $\alpha = 45^\circ$ ,  $2\alpha = 90^\circ$  en donde el alcance se hace máximo).

**Figura 3.22:**



Este gráfico ilustra lo que pasa con  $\text{sen}(2\alpha)$ , en función de  $2\alpha$  cuando  $\alpha$  varía entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$ . Esto quiere decir que si queremos alcanzar un objetivo situado en  $x_o < \frac{v_o^2}{g}$  podremos hacerlo a modo “rasante” o por elevación.

**Figura 3.23:**



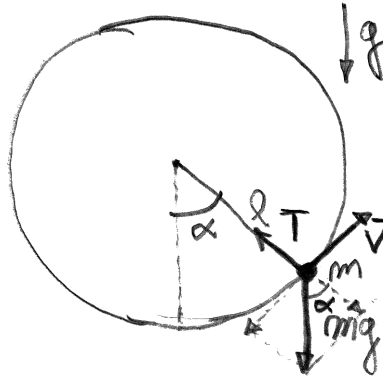
Está claro que si  $x_o > \frac{v_o^2}{g}$  el objetivo resultará inalcanzable dado que el alcance máximo  $L_{max}$  se obtiene para  $\alpha = 45^\circ$  y vale  $\frac{v_o^2}{g}$ . En cuanto  $h_{max}$ , corresponde

a la cúspide de la parábola y la obtenemos fácilmente haciendo

$$y \left( x = \frac{L}{2} \right) = h_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{g}$$

Vamos ahora a estudiar un problema de movimiento circular bastante instructivo. Consideremos un cuerpo puntual de masa  $m$  atado a un hilo inextensible moviéndose en un plano vertical (o sea, estamos “revoleando” un llavero, por ejemplo).

**Figura 3.24:**



Para estudiar este sistema podemos utilizar versores polares, o bien versores intrínsecos. Veremos que su utilidad es equivalente. Escribamos primero la descomposición en polares,

$$\begin{aligned} \hat{r}) \quad m(\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2) &= -T + mg \cos(\alpha) \\ \hat{\alpha}) \quad m(r\ddot{\alpha} + 2\dot{r}\dot{\alpha}) &= -mg \operatorname{sen}(\alpha) \end{aligned}$$

La tensión  $T$  está relacionada con la ecuación de vínculo  $r = l$  mientras el hilo está tenso (o sea, mientras  $T > 0$ ). Esta ecuación nos dice que  $\dot{r} = 0$  y  $\ddot{r} = 0$ , entonces, nos queda:

$$\hat{r}) \quad -ml\dot{\alpha}^2 = -T + mg \cos(\alpha) \quad (3.1)$$

$$\hat{\alpha}) \quad ml\ddot{\alpha} = -mg \operatorname{sen}(\alpha) \quad (3.2)$$

¿Cómo queda la descomposición en intrínsecas?

$$\hat{n}) \quad m\frac{v^2}{l} = T + mg \cos(\alpha) \quad (\text{radio de curvatura } \rho = l) \quad (3.3)$$

$$\hat{t}) \quad m\frac{dv}{dt} = -mg \operatorname{sen}(\alpha) \quad (3.4)$$

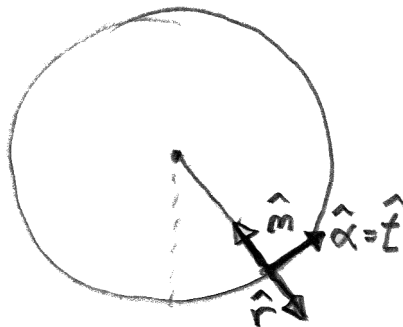
Es fácil ver la equivalencia entre las Ec. (3.1) y (3.3) y entre las Ec. (3.2) y (3.4). En efecto, sabemos que  $v = l\dot{\alpha}$  (¿por qué?), entonces (3.3) y (3.4) se convierten en

$$\hat{n}) \quad ml\dot{\alpha}^2 = T - mg \cos(\alpha) \quad (3.5)$$

$$\hat{t}) \quad ml\ddot{\alpha} = -mg \operatorname{sen}(\alpha) \quad (3.6)$$

Aquí vemos que la Ec. (3.6) es idéntica a (3.2) y la Ec. (3.5) es (3.1) pero toda multiplicada por  $(-1)$  (o sea es la misma ecuación). ¿Por qué aparece el cambio de signo global en Ec. (3.5) respecto de (3.1)? Porque la dirección radial  $\hat{r}$  apunta hacia afuera del círculo, mientras que la dirección normal  $\hat{n}$  apunta hacia adentro. Las direcciones angular ( $\hat{\alpha}$ ) y tangencial ( $\hat{t}$ ), en cambio, coinciden. En un gráfico, es:

**Figura 3.25:**



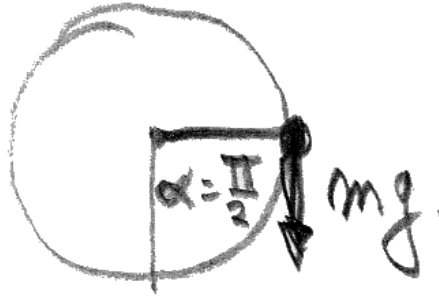
Esto quiere decir que podemos utilizar cualquiera de estas composiciones. Pero ojo: *debemos especificar cuál vamos a utilizar*. Aquí vamos a utilizar la descomposición polar (es decir, Ec. (3.1) y (3.2)).

Despejamos la tensión  $T$  desde la Ec. (3.1):

$$T = ml\dot{\alpha}^2 + mg \cos(\alpha) \quad (3.7)$$

Lo primero que observamos es que, a medida que  $\alpha$  crece, el término  $mg \cos(\alpha)$  disminuye, y cuando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , se anula (Fig. (3.26)).

**Figura 3.26:**



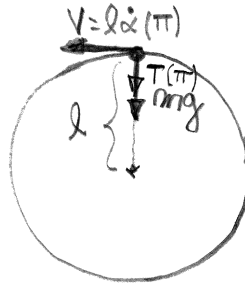
Esto corresponde a que en ese punto el peso solo tiene componente angular. Si  $\alpha$  sigue creciendo, el  $\cos(\alpha)$  cambia de signo (dado que  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ) y el peso empieza a tener componentes radiales negativas (apuntan hacia el centro). Y cuando llegamos a  $\alpha = \pi$ , todo el peso resulta radial negativo. En efecto, si especializamos Ec. (3.7) en  $\alpha = \pi$ , obtenemos

$$T(\alpha = \pi) = ml(\dot{\alpha}(\alpha = \pi))^2 - mg \quad (3.8)$$

donde  $T(\alpha = \pi)$  y  $\dot{\alpha}(\alpha = \pi)$  son la tensión y la  $\dot{\alpha}$  (llamada velocidad angular, no confundir con la componente angular de la velocidad  $v_\alpha = l\dot{\alpha}$ ) en  $\alpha = \pi$ . Esto se observa en la Fig. (3.27).

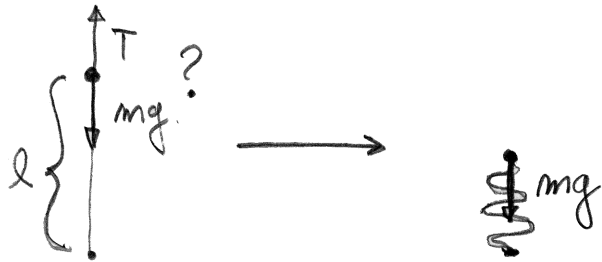


Figura 3.27:



Supongamos que  $\dot{\alpha}(\pi) = 0$ . De Ec. (3.8) obtenemos  $T(\alpha = \pi) = -mg$ . Sabemos que esto no puede ser, dado que significa que la fuerza de vínculo  $T$  debería apuntar para el otro lado. ¡Es pretender sostener el cuerpo arriba con un hilo! El hilo se afloja (Fig. (3.28)).

Figura 3.28:



Notemos que este problema no lo tendríamos si en lugar del hilo tuviéramos un palito. Con un palito sí podríamos mantener el cuerpo quieto arriba. Pero tenemos un hilo. Vemos que si queremos que el hilo recorra una circunferencia completa, necesitamos que en  $\alpha = \pi$  tenga una velocidad mayor que cierta velocidad mínima, tal que  $T(\alpha = \pi)$  no resulte negativa. O sea, de Ec. (3.8):

$$l\dot{\alpha}^2(\alpha = \pi) - g \geq 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_{min}(\alpha = \pi) = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$$

(el  $\pm$  tiene que ver con el sentido del giro. + en contra de las agujas del reloj).

Tomemos el sentido antihorario. Entonces  $\dot{\alpha}_{min} = \sqrt{\frac{g}{l}}$  es la velocidad angular mínima (la velocidad mínima será  $v_{min} = l\dot{\alpha}_{min} = \sqrt{lg}$ ) con la que podemos tener el cuerpo en  $\alpha = \pi$ . Justo para esta velocidad,  $T(\alpha = \pi) = 0$ . Si  $v(\alpha = \pi) > v_{min}$ ,  $T > 0$  y no hay problema, si en cambio  $v(\alpha = \pi) < v_{min}$ ,  $T < 0$  y tal situación no es posible con un hilo (sí con un palito).

Vamos a responder dos preguntas:

1. ¿Cuál es la velocidad mínima que tiene que tener el cuerpo en  $\alpha = 0$  para llegar a  $\alpha = \pi$  y así dar la vuelta completa?
2. Si el cuerpo en  $\alpha = 0$  tiene una velocidad menor que la que determinamos, ¿hasta dónde llega? (¿o a qué velocidad el hilo se afloja?),

Para responder la primera pregunta tenemos la Ec. (3.2);

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \text{sen}(\alpha) \Rightarrow \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} \underbrace{\frac{d\alpha}{dt}}_{\dot{\alpha}} = -\frac{g}{l} \text{sen}(\alpha) \Rightarrow$$

$$\dot{\alpha}d\dot{\alpha} = -\frac{g}{l} \text{sen}(\alpha)d\alpha \tag{3.9}$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\alpha}(\alpha=0)}^{\dot{\alpha}(\alpha=\pi)} \dot{\alpha}d\dot{\alpha} = -\frac{g}{l} \int_0^\pi \text{sen}(\alpha)d\alpha \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2(\alpha = \pi) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2(\alpha = 0) = \frac{g}{l} \cos(\alpha) \Big|_0^\pi = -2\frac{g}{l}$$

O sea,

$$\dot{\alpha}^2(\alpha = 0) = \dot{\alpha}^2(\alpha = \pi) + 4\frac{g}{l} \Rightarrow \dot{\alpha}_{min}^2(\alpha = 0) = \dot{\alpha}_{min}^2(\alpha = \pi) + 4\frac{g}{l} \Rightarrow \dot{\alpha}_{min}^2(\alpha = 0) = 5\frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}_{min}(\alpha = 0) = \sqrt{\frac{5g}{l}} \quad (\text{y } v_{min}(\alpha = 0) = \sqrt{5lg})$$

O sea, si abajo ( $\alpha = 0$ ) el cuerpo tiene una velocidad  $v(\alpha = 0) \geq \sqrt{5lg}$ , dará toda la vuelta. En otro caso, no llegará arriba.

Para responder la segunda pregunta, notemos que, en el caso de no llegar arriba, tenemos dos situaciones posibles:

- a) El cuerpo abajo ( $\alpha = 0$ ) no tiene velocidad suficiente para llegar a  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . En ese caso el cuerpo se detiene y alcanza un ángulo máximo en  $\alpha_{max} < \frac{\pi}{2}$  (que llamaremos amplitud) con el hilo tenso y luego vuelve. En este caso, el movimiento será un vaivén u oscilación: es lo que se conoce como péndulo (que luego estudiaremos con cierto detalle). Podemos calcular ahora la velocidad máxima  $\dot{\alpha}^*(\alpha = 0)$  abajo, de modo tal que el problema sea un péndulo (o sea, qué velocidad debe tener en  $\alpha = 0$  para llegar a  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ). Para ello integramos la Ec. (3.9):

$$\int_{\dot{\alpha}(\alpha=0)}^0 \dot{\alpha} d\dot{\alpha} = -\frac{g}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\alpha) d\alpha \Rightarrow -\frac{1}{2} \dot{\alpha}^2(\alpha = 0) = -\frac{g}{l} \Rightarrow \dot{\alpha}^{*2}(\alpha = 0) = 2\frac{g}{l} \Rightarrow$$

$$\dot{\alpha}^*(\alpha = 0) = \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad (\text{o } v^*(\alpha = 0) = \sqrt{2lg})$$

Entonces concluimos que si  $0 \leq v(\alpha = 0) \leq \sqrt{2lg}$  tendremos un péndulo y el hilo no se aflojará.

- b) Si en cambio  $\sqrt{2lg} \leq v(\alpha = 0) \leq \sqrt{5lg}$  no tendremos péndulo y no llegará arriba. Esto quiere decir que para una velocidad en este último intervalo, el hilo se aflojará. Vamos a determinar a qué ángulo el hilo se afloja. Para ello integramos la Ec. (3.9) para una  $\dot{\alpha}$  genérica:

$$\int_{\dot{\alpha}(\alpha=0)}^{\dot{\alpha}(\alpha)} \dot{\alpha} d\dot{\alpha} = -\frac{g}{l} \int_0^{\alpha} \text{sen}(\alpha) d\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2(\alpha) - \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2(\alpha = 0) = \frac{g}{l} (\cos(\alpha) - 1)$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}^2(\alpha) = 2\frac{g}{l}(\cos(\alpha) - 1) + \dot{\alpha}^2(\alpha = 0) \quad (3.10)$$

Esta ecuación la utilizaremos para obtener la tensión en función de  $\alpha$  (en la Ec. (3.7):

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \left[ l \left[ \frac{2g}{l}(\cos(\alpha) - 1) \right] + l\dot{\alpha}^2(\alpha = 0) + g \operatorname{sen}(\alpha) \right] \\ \Rightarrow T(\alpha) &= m (3g \cos(\alpha) - 2g + l\dot{\alpha}^2(\alpha = 0)) \end{aligned}$$

Para hallar el ángulo  $\alpha = \alpha^*$  para el cual el hilo se afloja, planteamos  $T(\alpha = \alpha^*) = 0 \Rightarrow$

$$mg \left( 3 \cos(\alpha^*) - 2 + \frac{l}{g} \dot{\alpha}^2(\alpha = 0) \right) = 0 \Rightarrow \cos(\alpha^*) = \frac{2g - l\dot{\alpha}^2(\alpha = 0)}{3g}$$

O sea,

$$\alpha^* = \arccos \left( \frac{2g - l\dot{\alpha}^2(\alpha = 0)}{3g} \right)$$

(notar que en el intervalo de  $\dot{\alpha}(\alpha = 0)$  considerado,  $\alpha^*$  varía de  $\frac{\pi}{2}$  a  $\pi$ )

para  $\sqrt{\frac{2g}{l}} \leq \dot{\alpha}(\alpha = 0) \leq \sqrt{\frac{5g}{l}}$  (o  $\sqrt{2gl} \leq v(\alpha = 0) \leq \sqrt{5gl}$ ).

Esta relación la podemos comprobar para los extremos ya que sabemos que si para  $\dot{\alpha}(\alpha = 0) = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ ,  $\alpha^* = \frac{\pi}{2}$ , y para  $\dot{\alpha}(\alpha = 0) = \sqrt{\frac{5g}{l}}$ , el hilo se afloja justo en  $\alpha^* = \pi$ .

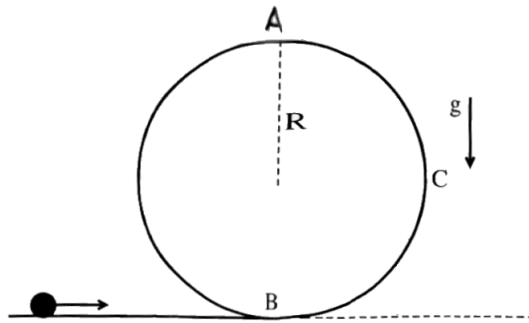
Notemos que la Ec. (3.10) es similar a las expresiones que obteníamos para  $v = v(x)$  cuando partíamos de  $a = a(x)$ . De hecho, para integrar y obtener la Ec. (3.10) recurrimos al mismo recurso para separar variables  $\left( \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \right)$ .

### 3.4. Ejercicios resueltos del capítulo

**PROBLEMA 1:** Un piloto, cuya masa es de  $80\text{kg}$ , se dirige en línea recta y posteriormente realiza un *loop* circular de  $130\text{m}$  de radio con una avioneta (ver figura).

- Determinar la velocidad de la avioneta en los puntos  $A$  y  $B$  sabiendo que en el punto  $A$  el piloto experimenta la sensación de gravedad cero y en el punto  $B$  tiene un peso aparente de  $300\vec{kg}$ .
- Si en el punto  $C$  la velocidad de la avioneta es de  $50\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , ¿cuánto vale la componente radial de la fuerza de contacto entre el piloto y el asiento de la avioneta en ese punto?

**Figura 3.29: Problema 1**

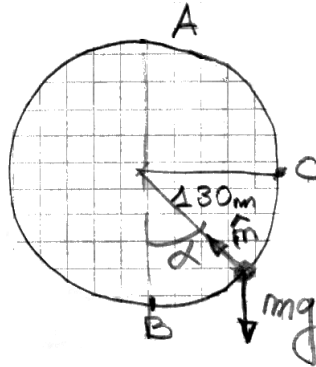


**RESOLUCIÓN:**

- En coordenadas intrínsecas, las ecuación dinámica que describe el movimiento en la dirección normal es:

$$\hat{n}) m \frac{v^2}{R} = -mg \cos(\alpha) + N$$

Figura 3.30: Esquema general de la situación



Como el enunciado nos dice que en el punto  $A$  ( $\alpha = \pi$ ) hay sensación de gravedad nula, esto implica que la fuerza normal es cero:

$$\Rightarrow N = 0 \Rightarrow m \frac{v_A^2}{R} = -mg \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} = g$$

Por lo tanto,

$$|v_A| = \sqrt{gR}$$

En el punto  $B$ , ( $\alpha = 0$ ), el peso aparente es de  $300kg\vec{g}$ , lo que equivale a  $29400N$ ,

$$\Rightarrow N = 300kg\vec{g} = 300kg \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} = 29400N$$

Así, la segunda ley de Newton en la coordenada normal nos queda:

$$\hat{n}) m \frac{v_B^2}{R} = -mg \underbrace{\cos(0)}_1 + N$$

$$\Rightarrow |v_B| = \sqrt{\left(\frac{-80kg \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} + 300kg \cdot 9.8 \frac{m}{s^2}}{80kg}\right)} 130m$$

Finalmente,

$$|v_B| = \frac{7\sqrt{286} m}{2} \approx 29.2 \frac{m}{s}$$

- b) En el punto  $C$  el ángulo  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , esto implica que la fuerza peso no “aporta” nada en la componente normal, ya que  $mg \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , así:

$$\hat{n}) m \frac{v_C^2}{R} = - \underbrace{mg \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 + N = N$$

Como  $|v_C| = 50 \frac{m}{s}$ , entonces  $N = m \frac{v_C^2}{R}$ , por lo tanto,

$$N = \frac{80kg}{130m} (50)^2 \frac{m^2}{s^2} = \frac{20000}{13} N \approx 1538.5 N$$


---

**PROBLEMA 2:** El sistema de la figura, consiste en un poste de sección cuadrada que tiene un hilo atado a un vértice. El hilo está atado en su otro extremo a un cuerpo de masa  $m$  que puede moverse en el plano horizontal sin rozamiento. Con el hilo estirado se pone en movimiento el cuerpo al darle una velocidad inicial perpendicular al hilo  $V_o$ . Sabiendo que la longitud total del hilo es  $l_o = 30d$  donde  $d$  es lo que mide el lado del poste cuadrado:

- Determinar el tiempo que tarda el hilo en enrollarse en el poste.
- Determinar la tensión del hilo en función del tiempo.
- Generalizar los resultados anteriores al caso en que el poste, en lugar de ser un cuadrado, es un polígono regular de  $m$  lados (o sea, un pentágono

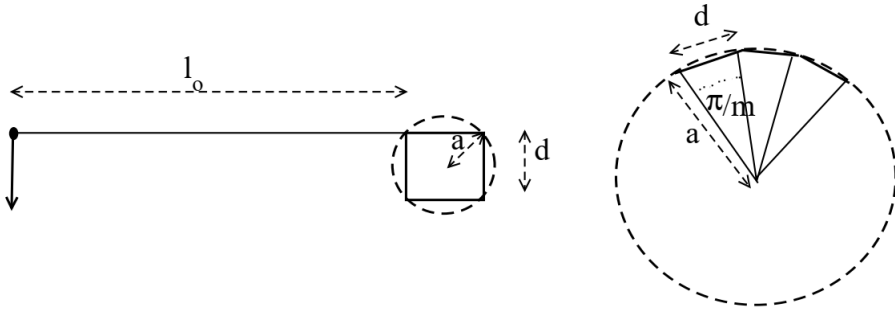
regular, hexágono regular, etcétera), teniendo en cuenta que el radio de la circunferencia que circunscribe el polígono siempre es el mismo,  $a$  y la longitud del hilo  $l_o = nd$ .

- d) Estudiar las expresiones obtenidas en el límite  $m \rightarrow \infty$  y  $n \rightarrow \infty$  pero de modo que  $nd = l_o$  (pensar a qué polígono regular tiende la sección del poste en este caso)

Datos:  $a, l_o, V_o$  y  $m$ .

Ayuda: será necesario hallar la relación entre el lado del polígono regular de  $m$  lados y el radio de la circunferencia que lo circunscribe (pensar en los triángulos isósceles que quedan determinados por cada lado y los radios que salen de cada vértice) hacia el centro del polígono (ver figura). Recordar además que  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^N i = (n + 1)\frac{n}{2}$  y que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

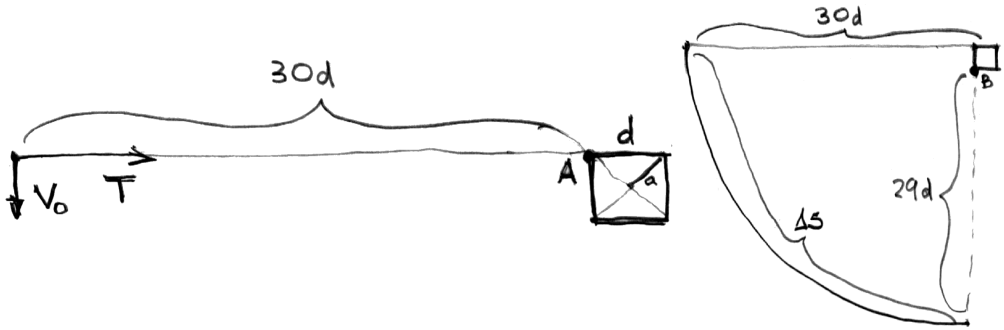
**Figura 3.31: Problema 2**



**RESOLUCIÓN:** Como la tensión siempre es perpendicular a la velocidad, esta mantendrá su módulo constante. Al principio, la trayectoria será sobre una circunferencia centrada en  $A$  con módulo de la velocidad  $V_o$ .



Figura 3.32:



a) El tiempo transcurrido en este tramo será la longitud de arco:

$$\Delta S_1 = \frac{\pi}{2} 30d$$

dividido por el módulo de la velocidad  $V_o$ :

$$t_1 = \frac{\pi}{2V_o} 30d$$

El segundo tramo es otro arco de circunferencia centrada ahora en  $B$  y radio  $29d$ :

$$t_2 = \frac{\pi}{2V_o} 29d$$

y así siguiendo. El tiempo total lo podemos obtener sumando:

$$\begin{aligned} t_{tot} &= t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{30} = \frac{\pi}{2V_o} (30 + 29 + \dots + 1) \\ &= \frac{\pi d}{2V_o} \frac{30 \cdot 31}{2} = \frac{\pi}{2V_o} (15 \cdot 31) d \\ &= \frac{\pi}{2V_o} (15 \cdot 31) 2 \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{\pi}{V_o} \frac{\sqrt{2}}{2} a (15 \cdot 31) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado  $d = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)a$

- b) La tensión la obtenemos de plantear la ley de Newton en versores intrínsecos en la dirección normal:

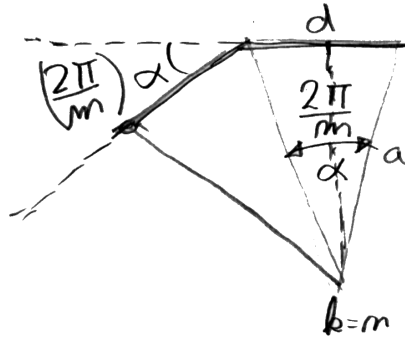
$$M_o \frac{V_o^2}{\rho} = T$$

donde  $\rho$  es el radio de curvatura de la trayectoria. En este caso,  $\rho$  es la longitud del hilo que no está enrollado aún en el poste. Entonces, si  $\rho = d = \sqrt{2}a$

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{M_o V_o^2}{30\sqrt{2}a} && \left( 0 \leq t \leq t_1 = \frac{30\sqrt{2}\pi a}{2V_o} \right) \\
 T_2 &= \frac{M_o V_o^2}{29\sqrt{2}a} && \left( t_1 \leq t \leq \underbrace{t_1 + t_2}_{\frac{(30+29)\sqrt{2}\pi a}{2V_o}} \right) \\
 &\vdots \\
 T_k &= \frac{M_o V_o^2}{(30 - k + 1)\sqrt{2}a} && (t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1} \leq t \leq t_1 + t_2 + \dots + t_k) \\
 &\vdots \\
 T_{30} &= \frac{M_o V_o^2}{\sqrt{2}a} && (t_1 + t_2 + \dots + t_{29} \leq t \leq t_1 + t_2 + \dots + t_{tot})
 \end{aligned}$$

- c) La generalización es inmediata: basta observar la figura siguiente

Figura 3.33:



Entonces,  $d = a 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{m} \right)$ . O sea, los tiempos para cada tramo ahora serán:

$$t_k = \left( \frac{2\pi}{m} \right) (n - k + 1) \frac{d}{V_o}$$

O sea,

$$\begin{aligned} t_{tot} &= \sum_{k=1}^{k=n} t_k = \frac{2\pi}{m} \frac{d}{V_o} \sum (n - k + 1) \\ &= \frac{2\pi}{m} d \left( n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{2\pi}{m} \frac{d}{V_o} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2\pi a}{m V_o} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{m} \right) n(n+1) \end{aligned}$$

y para las tensiones,

$$T_k = \frac{M_o V_o^2}{(n - k + 1) 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{m} \right) a} \quad \text{para} \quad \sum_{i=1}^{k-1} t_i < t < \sum_{i=1}^k t_i$$

d) En el límite de  $n \rightarrow \infty$  y  $m \rightarrow \infty$  pero tal que  $nd = l_o$  y  $md = 2\pi a$ , resulta:

$$\frac{n}{m} = \frac{l_o}{2\pi a}$$

Entonces, en ese límite,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{2\pi a}{mV_o} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{m} \right) (n^2 + n) &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{2\pi^2 a}{V_o m^2} (n^2 + n) \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{2\pi^2 a}{V_o} \left( \left( \frac{n}{m} \right)^2 + \left( \frac{n}{m} \right) \right) = \frac{2\pi^2 a l_o^2}{V_o 4\pi^2 a^2} = \frac{l_o^2}{2aV_o} \end{aligned}$$

O sea,

$$t_{tot} = \frac{l_o^2}{2aV_o}$$

Este es el mismo resultado que se obtiene para el poste circular de radio  $a$ , resolviendo la ecuación diferencial para  $l = l(t)$  utilizando las leyes de Newton en versores intrínsecos.

# **Capítulo 4**

## **Trabajo y energía**

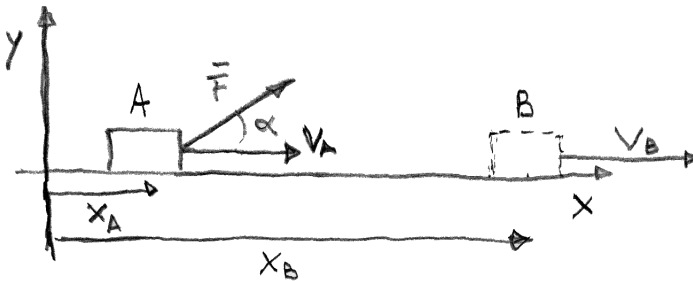
## 4.1. Trabajo y energía

Vamos a comenzar el estudio de ciertas magnitudes físicas que se desprenden directamente de las leyes de Newton a partir de su aplicación sistemática para resolver problemas mecánicos. Sin embargo, su existencia trasciende la mecánica y su estudio, y su comprensión es fundamental para descubrir el comportamiento de la naturaleza (repito: no solo en sistemas mecánicos, sino también en procesos químicos, en sistemas biológicos, geológicos, etcétera, y, en general, cualquier fenómeno natural), aunque aquí nos restringiremos a la mecánica.

De hecho, ya desde nuestro estudio de cinemática, estas magnitudes ya aparecieron (solo que no les prestamos atención).

Consideremos para empezar un sistema simple consistente en un cuerpo de masa  $m$  que se mueve sobre un plano (sin rozamiento), que se desplaza de un punto  $A$  a otro  $B$  con una fuerza  $\vec{F}$ , constante, aplicada:

Figura 4.1:



La dirección de movimiento es  $\hat{x}$ . La segunda ley de Newton, en cartesianas, resulta:

$$\hat{x}) \quad m \overbrace{\frac{dv}{dt}}^a = F_x = F \cos(\alpha) \quad \left( \text{donde } v = \frac{dx}{dt} \right) \quad (4.1)$$

$$\hat{y}) \quad F \operatorname{sen}(\alpha) - N = 0 \quad (4.2)$$

Sabemos que la Ec. (4.1) la podemos escribir bajo la forma (ya lo hicimos cuando estudiamos cinemática):

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = F \cos(\alpha) \Rightarrow mv \frac{dv}{dx} = F \cos(\alpha) \Rightarrow mv dv = F \cos(\alpha) dx$$

Esta última forma permite integrarla entre  $A$  y  $B$ .

$$\int_{v_A}^{v_B} mv dv = \int_{x_A}^{x_B} F \cos(\alpha) dx \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = F \cos(\alpha) (x_B - x_A) \quad (4.3)$$

Notamos que el miembro izquierdo es el resultado de una integración que siempre conduce a lo mismo: si introducimos una magnitud (que llamaremos *energía cinética*)  $T = \frac{1}{2}mv^2$ , la Ec. (4.3) se escribe como:

$$T_B - T_A = \Delta T \Big|_A^B = F_x (x_B - x_A)$$

En cambio, el resultado de la integración que conduce al miembro derecho de (4.3) dependerá de la fuerza. En este caso, al ser  $F_x = F \cos(\alpha) = \text{constante}$  durante todo el desplazamiento (de  $A \rightarrow B$ ), obtenemos que

$$\int_{x_A}^{x_B} F_x dx = F_x (x_B - x_A) = F (x_B - x_A) \cos(\alpha)$$

Esta integral recibe el nombre de “Trabajo ( $W$ ) de la fuerza  $F$  entre  $A$  y  $B$ ”:

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx$$

Notemos que para nuestro sistema (fuerza constante) este trabajo resulta ser el producto entre la fuerza en la dirección del desplazamiento ( $F_x = F \cos(\alpha)$ ) por el desplazamiento ( $x_B - x_A$ ). Concluimos entonces que

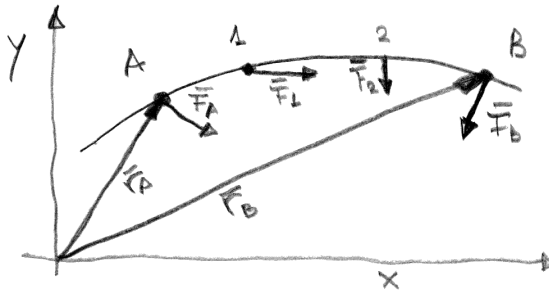
$$\Delta T \Big|_A^B = W_{AB} \quad (4.4)$$

al menos si la fuerza es constante durante el desplazamiento y este corresponde a una trayectoria rectilínea.

Esta conclusión es bastante pobre, ya que este sistema es muy particular (¡la fuerza genérica para un problema mecánico general no será constante y la trayectoria podría ser cualquier curva!). Sin embargo, vamos a ver cómo nuestro “pobre” resultado puede utilizarse para obtener un resultado completamente general.

Consideremos ahora que nuestro cuerpo se mueve sobre cualquier trayectoria con una fuerza aplicada que varía en módulo y dirección punto a punto (o sea, la fuerza puede depender de la velocidad del cuerpo, de su posición e incluso del tiempo). La situación está ilustrada en el siguiente gráfico:

**Figura 4.2:**

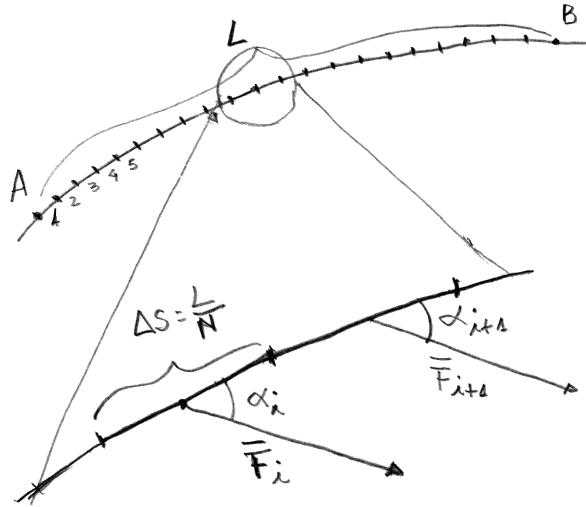


Aquí queremos significar que el cuerpo se desplaza de  $A$  hacia  $B$  mientras la fuerza varía en cada punto. Indicamos solo cuatro puntos como ejemplo ( $A$ ,  $1$ ,  $2$  y  $B$ ), y allí  $\vec{F}_A \neq \vec{F}_1 \neq \vec{F}_2 \neq \vec{F}_B$ .

Para tratar de utilizar el resultado que ya obtuvimos, hacemos lo siguiente: si a la longitud de la curva entre  $A$  y  $B$  la llamamos  $L$ , partimos  $L$  en  $N$  pedacitos de longitud  $\Delta s = \frac{L}{N}$  muy pequeños ( $N$  grande), de modo tal de poder considerar cada pedacito como rectilíneo y además considerar la fuerza  $\vec{F}$  como constante en cada pedacito. Numeramos cada pedacito:  $i = 1, 2, 3, \dots, N$



Figura 4.3:



Ahora aplicamos nuestro resultado (Ec. (4.4)) a cada pedacito. O sea,

$$\begin{aligned}
 T_1 - T_A &= F_1 \cos(\alpha_1) \Delta s \\
 T_2 - T_1 &= F_2 \cos(\alpha_2) \Delta s \\
 &\vdots \\
 T_B - T_N &= F_N \cos(\alpha_N) \Delta s
 \end{aligned}$$

Si ahora sumamos, se obtiene

$$T_B - T_A = F_1 \cos(\alpha_1) \Delta s + F_2 \cos(\alpha_2) \Delta s + \dots + F_N \cos(\alpha_N) \Delta s = \sum_{i=1}^N F_i \cos(\alpha_i) \Delta s$$

Esta expresión es aproximada, dado que hemos supuesto que los pedacitos son segmentos de recta y que a lo largo de ella la fuerza permanece constante. Pero sabemos también que cuanto más grande sea N, como L permanece fijo, Δs será más chico y nuestra expresión se parecerá más al resultado exacto. Pensemos entonces qué sucede con la suma si N → ∞ y Δs → 0, de modo tal que

$N \cdot \Delta s = L$ . En ese caso, tendremos:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0 \\ (N\Delta s=L)}} \sum_{i=1}^N F_i \cos(\alpha_i) \Delta s = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} F \cos(\alpha) ds$$

Llegado este punto, si definimos  $\overline{\Delta s} = \Delta s \hat{t}$  (y consecuentemente  $\overline{ds} = ds \hat{t}$ ), resulta que  $F \cos(\alpha) ds = \vec{F} \cdot \overline{ds}$  (dado que  $\alpha$  es el ángulo entre el vector  $\vec{F}$  y el vector  $\overline{ds}$ ) y obtenemos el resultado exacto:

$$\Delta T \Big|_A^B = T_B - T_A = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \overline{ds} = W_{AB}$$

donde  $W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \overline{ds}$  es el trabajo que realiza la fuerza  $\vec{F}$  cuando el cuerpo se desplaza de  $A$  a  $B$  siguiendo la trayectoria. Concluimos entonces con la ley absolutamente general, que dice que

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \overline{ds} \quad (4.5)$$

Este resultado se conoce como el “Teorema de las fuerzas vivas para una partícula”. Notemos aquí que esta igualdad nos dice que solo las componentes tangenciales de la fuerza (esto es, en la dirección del desplazamiento del cuerpo) son las que pueden modificar el módulo de la velocidad, ya que si  $\vec{F}$  es perpendicular a  $\overline{ds}$  entonces  $\vec{F} \cdot \overline{ds} = 0$ , no hay trabajo, y  $\Delta T \Big|_A^B = 0$  (o sea,  $v_B^2 = v_A^2$ ). Podríamos obtener el mismo resultado utilizando directamente la segunda ley de Newton en la dirección tangencial:

$$m \frac{dv}{dt} = F_t \Rightarrow m \frac{dv}{ds} \overbrace{\frac{ds}{dt}}^v = F_t \Rightarrow mvdv = F_t ds$$

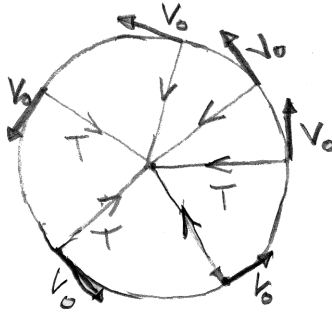
o sea,

$$mvdv = F \cos(\alpha) ds = \vec{F} \cdot \overline{ds} \Rightarrow \int_{v_A}^{v_B} mv dv = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \overline{ds} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \overline{ds}$$

Encontramos, nuevamente, lo que ya conocíamos: si la fuerza es puramente normal a la trayectoria, no modifica el módulo de la velocidad. Las fuerzas que no realizan trabajo dejan invariante al módulo de la velocidad. El ejemplo más claro es el del movimiento circular uniforme: un cuerpo atado a un hilo que se mueve sobre un plano horizontal sin rozamiento.

**Figura 4.4:**



La tensión  $T$  es siempre perpendicular al desplazamiento, entonces, NO REALIZA TRABAJO, por lo tanto, LA ENERGÍA CINÉTICA NO VARÍA ( $v = v_0 = cte$ ). Notemos que la velocidad  $\vec{v}$  SÍ VARÍA. Lo que no cambia es su módulo  $v$ .

El trabajo  $W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$  es lo que se conoce como una integral de línea (o curvilínea). El integrando es evaluado sobre una curva (la trayectoria, en este caso, entre el punto  $A$  (o sea,  $\vec{r}_A$ ) y el punto  $B$  (o sea,  $\vec{r}_B$ )). Para efectuarla debemos especificar cuál es esa curva (o sea, debemos conocer la trayectoria entre esos puntos). Desde este punto de vista, parecería que la Ec. (4.5) no es demasiado útil, a menos que conozcamos *a priori* la trayectoria o que el resultado de la integral curvilínea NO DEPENDA DEL CAMINO (esto es que solo dependa de  $\vec{r}_A$  y  $\vec{r}_B$  y no de la curva que los conecta). Ya volveremos sobre este caso.

*Unidades de trabajo y energía*

MKS(SI)

Se define la unidad de trabajo como aquel trabajo que realiza la unidad de fuerza ( $1 N$ ) en un desplazamiento de una unidad de longitud. O sea,

$$1 N \cdot 1 m = Nm = 1 \text{ Joule}$$

*cgs*

En este caso,

$$1 \text{ dina} \cdot 1 \text{ cm} = \text{dina} \cdot \text{cm} = 1 \text{ ergio}$$

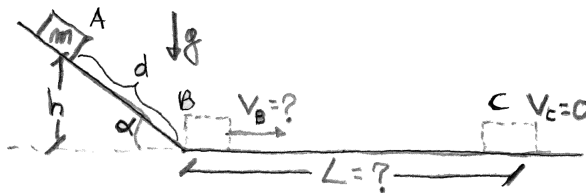
A veces se utiliza una unidad “técnica”, que es el trabajo que realiza una fuerza de  $1\vec{k}g$  en  $1m$

$$1\vec{k}g \cdot 1 m = 1 \text{ kilogrammetro}$$

Con el objeto de ilustrar el “Teorema de las fuerzas vivas”, veamos algunas aplicaciones. Supongamos que tenemos un cuerpo sobre un plano inclinado de ángulo  $\alpha$ , a una altura  $h$ . El cuerpo desliza sobre el plano sin rozamiento y cuando llega a la horizontal sigue moviéndose, pero ahora con una superficie cuyo coeficiente de rozamiento dinámico es  $\mu_d$ . Queremos determinar dos cosas:

- a) La velocidad del cuerpo cuando llega a la horizontal.
- b) Cuánto recorre el cuerpo sobre la horizontal antes de detenerse.

**Figura 4.5:**



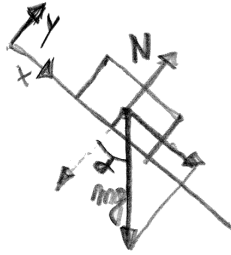
- a) Notemos que *conocemos la trayectoria*.

Para resolver la primera cuestión, planteamos:

$$T_B - T_A = W_{AB}$$

$W_{AB}$  es el trabajo que realizan las fuerzas.

**Figura 4.6:**



Las fuerzas sobre el cuerpo son  $\vec{P} = mg \operatorname{sen}(\alpha) \hat{x} - mg \cos(\alpha) \hat{y}$  y además  $\vec{N} = N \hat{y}$ . O sea,

$$\vec{F} = mg \operatorname{sen}(\alpha) \hat{x} + (N - mg \cos(\alpha)) \hat{y}$$

El desplazamiento es en la dirección  $\hat{x} d\vec{s} = dx \hat{x}$ . O sea,

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (mg \operatorname{sen}(\alpha) \hat{x} + (N - mg \cos(\alpha)) \hat{y}) dx \hat{x}$$

pero  $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1$  e  $\hat{y} \cdot \hat{x} = 0$ , o sea,

$$W_{AB} = \int_A^B mg \operatorname{sen}(\alpha) dx = mgd \operatorname{sen}(\alpha) = mgh$$

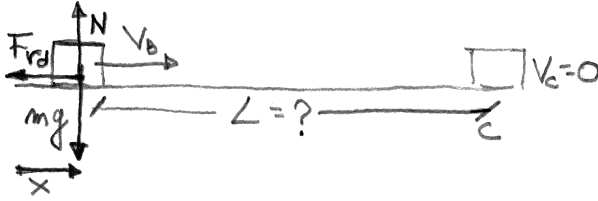
Veamos aquí que el trabajo resulta simplemente la fuerza en la dirección  $\hat{x}(mg \operatorname{sen}(\alpha))$ , constante durante el desplazamiento, por el total en la dirección  $\hat{x}(d)$ . Utilizando  $d \operatorname{sen}(\alpha) = h$ , vemos que  $W_{AB} = mgh$  (¡solo depende de la altura!; ¡si el ángulo fuera más grande o más pequeño daría lo mismo!, ya volveremos sobre esto). Concluimos entonces que:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh$$

y como  $v_A = 0 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$ .

b) Ahora la situación es la siguiente:

Figura 4.7:



En este caso,  $\vec{F} = -F_{rd}\hat{x}$  y  $\vec{ds} = dx\hat{x}$ , con  $F = \mu_d N = \mu_d mg$ . O sea,  $W_{BC} = -\mu_d mgL$  (el trabajo resulta negativo porque la fuerza y el desplazamiento se oponen).

Entonces,

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu_d mgL$$

pero  $v_C = 0$  y  $v_B^2 = 2gh$ , entonces,

$$\frac{1}{2}m2gh = \mu_d mgL \Rightarrow L = \frac{h}{\mu_d}$$

## 4.2. Potencia

La potencia ( $P$ ) de una fuerza  $\vec{F}$  mide el trabajo por unidad de tiempo que realiza la fuerza. Es decir, si en un  $\Delta t$  el desplazamiento es  $\vec{\Delta s}$ , tendremos

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{F} \cdot \frac{\vec{\Delta s}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

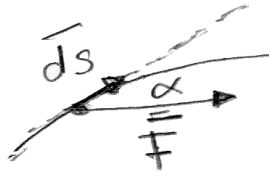
La unidad de potencia en el *MKS*(SI) es  $\frac{\text{Joule}}{\text{s}} = W$  (Vatio o Watt). EN el *cgs* es  $\frac{\text{ergio}}{\text{s}}$  (no tiene nombre particular y es poco utilizada). Se suelen utilizar unidades inglesas o francesas anteriores a la racionalización de las unidades.

El origen del caballo fuerza ( $1 \text{ HP} = 745.7W$ ) y del caballo vapor ( $1 \text{ CV} = 735.35W$ ) se remonta a los desarrollos ingenieriles de motores y máquinas de vapor.

### 4.3. Fuerzas conservativas y no conservativas

Como vimos, el trabajo de una fuerza entre dos posiciones  $\bar{r}_A$  y  $\bar{r}_B$  es una integral curvilínea:

Figura 4.8:

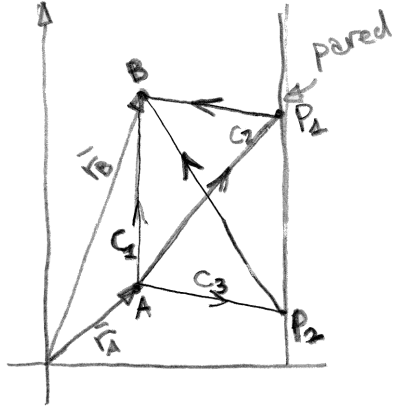


$$W_{AB} = \int_{\bar{r}_A}^{\bar{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\bar{r}_A}^{\bar{r}_B} F \cos(\alpha) ds$$

Para evaluarla necesitamos no solo especificar la curva (“el camino”) entre estas dos posiciones, sino que además debemos conocer cómo es la fuerza evaluada sobre esa curva. La fuerza, en general, puede ser una función de la posición, de la velocidad y también explícitamente del tiempo. Esto es,  $\vec{F} = \vec{F}(\bar{r}, \bar{v}, t)$ . Aun cuando esta función sea conocida, para calcular el trabajo debemos conocer cómo cambian estas variables cuando la partícula se traslada de  $\bar{r}_A$  a  $\bar{r}_B$ . O sea, debemos conocer *a priori* la solución del problema. Sin embargo, hay fuerzas cuyo trabajo entre dos posiciones se puede calcular sin conocer esta solución. Con el objeto de estudiar esta “familia” de fuerzas, veamos estos simples ejemplos.

Consideremos el caso de una partícula de masa  $m$  que se mueve sobre una superficie horizontal con coeficiente de rozamiento dinámico  $\mu_d$ . Vamos a calcular el trabajo  $W_{AB}$  que realiza la fuerza de rozamiento dinámico cuando la partícula va desde  $\bar{r}_A$  a  $\bar{r}_B$  por tres caminos distintos ( $c_1, c_2, c_3$ ), como podemos ver en la Fig. (4.9).

Figura 4.9:



Para eso tengamos en cuenta que  $|\vec{F}_{rd}| = \mu_d N = \mu_d mg$  y que siempre se opone al desplazamiento de la partícula (se opone a su velocidad). Esto se puede escribir como

$$\vec{F}_{rd}(\vec{v}) = -\mu_d mg \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

El camino  $c_1$  es el segmento que une A con B. El camino  $c_2$  es el segmento que va de A a  $P_1$  y, luego del rebote en la pared, el segmento que va de  $P_1$  a B. El camino  $c_3$  es similar a  $c_2$ , pero el rebote es en el punto  $P_2$ .

Entonces, el trabajo calculado sobre  $c_1$  es:

$$W_{AB}^{(c_1)} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\mu mg (\overline{AB})$$

donde  $(\overline{AB})$  es la longitud del segmento  $\overline{AB}$ .

El trabajo calculado sobre  $c_2$  es:

$$\begin{aligned} W_{AB}^{(c_2)} &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_{P_1}} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{r}_{P_1}}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \\ &= -\mu mg (\overline{AP_1}) - \mu mg (\overline{P_1B}) = -\mu mg (\overline{AP_1} + \overline{P_1B}) \end{aligned}$$

El trabajo calculado sobre  $c_3$  es:

$$W_{AB}^{(c_3)} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_{P_2}} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{r}_{P_2}}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\mu mg (\overline{AP_2} + \overline{P_2B})$$



Es fácil concluir que si calculamos el trabajo sobre cualquier camino  $c$ , el trabajo será:

$$W_{AB}^{(c)} = \mu mg L_c$$

donde  $L_c$  es la longitud del camino.

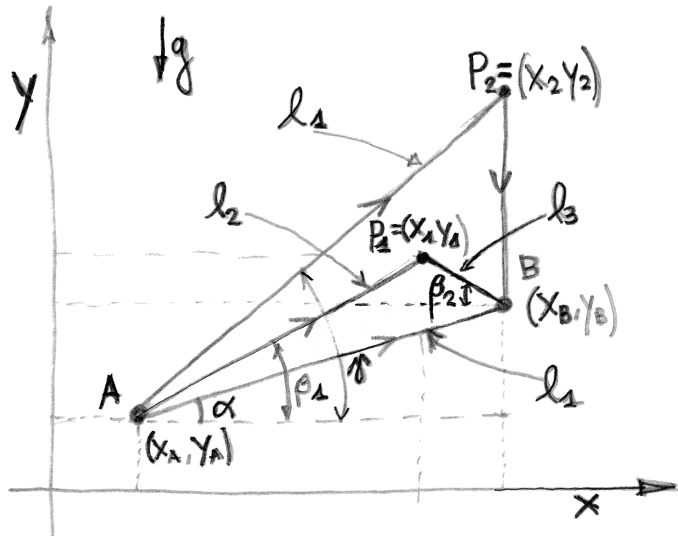
En conclusión, en este caso el trabajo depende del camino. Si no conocemos cuál es el camino, no sabremos cuánto vale el trabajo. Si quisiéramos conocer  $v_B$  conociendo  $v_A$  a partir del “Teorema de las fuerzas vivas”

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = W_{AB} + \frac{1}{2}mv_A^2$$

no podríamos, a menos que supiéramos por qué camino la partícula va de  $\vec{r}_A$  a  $\vec{r}_B$ .

Consideramos ahora otro sistema:

**Figura 4.10:**



Calculemos el trabajo que realizan las fuerzas cuando una partícula de masa  $m$  se traslada de  $A$  a  $B$  por tres caminos diferentes (todos ellos sin rozamiento).

El primer camino es subiendo por un plano inclinado de ángulo  $\alpha$  y longitud  $l_1$ .

$$W_{AB}^{(c_1)} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \vec{ds} = -mg \operatorname{sen}(\alpha) l_1 = -mg(y_B - y_A)$$

(ver Fig. (4.10)). (No estaría demás aclarar que las normales *NO realizan trabajo*).

El segundo camino es subiendo por un plano inclinado de longitud  $l_2$  e inclinación  $\beta_1$  y luego bajando por otro plano inclinado de longitud  $l_3$  e inclinación  $\beta_2$ :

$$\begin{aligned} W_{AB}^{(c_2)} &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\vec{r}_A}^{P_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{P_1}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \vec{ds} = -mg \operatorname{sen}(\beta_1) l_2 + mg \operatorname{sen}(\beta_2) l_3 \\ &\quad -mg(y_1 - y_A) + mg(y_1 - y_B) = -mg(y_B - y_A) \end{aligned}$$

(ver Fig. (4.10)).

El tercer camino es subiendo por un plano inclinado de longitud  $l_4$  e inclinación  $\gamma$  y luego cayendo libremente:

$$\begin{aligned} W_{AB}^{(c_3)} &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\vec{r}_A}^{P_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{P_2}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \vec{ds} = -mg \operatorname{sen}(\gamma) l_4 + mg(y_2 - y_B) \\ &\quad -mg(y_2 - y_A) + mg(y_2 - y_B) = -mg(y_B - y_A) \end{aligned}$$

Vemos entonces que, en este caso, el trabajo da lo mismo por los tres caminos. Es fácil concluir, entonces, que

$$W_{AB} = -mg(y_B - y_A)$$

Esto es: depende solo de la diferencia de alturas entre el punto final ( $B$ ) y el punto inicial ( $A$ ).

No importa el camino por el que la partícula se traslade de  $A$  hacia  $B$ , el trabajo de su peso valdrá

$$W_{AB} = -mg(y_B - y_A)$$

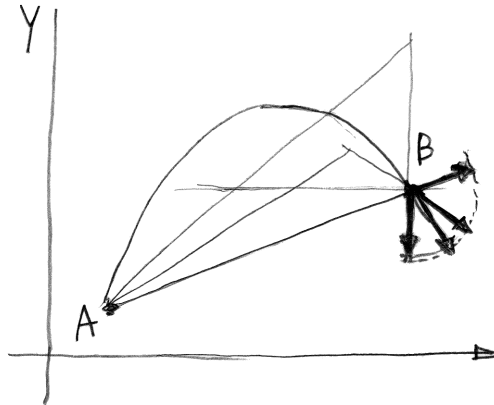
En este caso, el “Teorema de las fuerzas vivas” no va a ser útil para calcular  $v_B$  conocida  $v_A$ , ya que

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = -mg(y_B - y_A) + \frac{1}{2}mv_A^2$$

Una observación importante es la siguiente: las velocidades finales  $\vec{v}_B$  *sí dependerán* del camino, lo que **NO VA A DEPENDER DEL CAMINO ES SU MÓDULO**.

En el ejemplo que acabamos de ver (al que agregamos ahora el “camino” de tiro oblicuo) tendremos el siguiente gráfico, donde se muestra que las velocidades finales en  $B$  serán diferentes, pero sus módulos serán idénticos.

**Figura 4.11:**



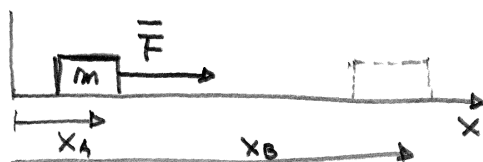
Acabamos de ver entonces que existen fuerzas cuyo trabajo entre dos posiciones es independiente del camino que une estas posiciones (como es el caso del peso) y solo depende de la posición final e inicial. Estas fuerzas son conocidas bajo el nombre de **CONSERVATIVAS**.

Las fuerzas que no tienen esta propiedad (como el rozamiento dinámico, según vimos) son **NO CONSERVATIVAS**.

## 4.4. Energía Potencial

Con el fin de determinar qué condiciones deben cumplir las fuerzas para ser conservativas, nos restringiremos primero a sistemas en una dimensión. En ese caso, el trabajo es:

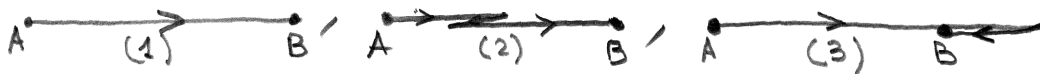
**Figura 4.12:**



$$W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{x_A}^{x_B} F dx$$

Es fácil ver que si  $F = F(x)$ ,  $W_{AB}$  solo depende de  $x_A$  y de  $x_B$  y no del camino. ¿Qué son diferentes “caminos” en un problema unidimensional? Por ejemplo:

**Figura 4.13:**



Estos son tres “caminos” diferentes.

En el primero, la partícula va de  $A$  a  $B$  directamente.

En el segundo, la partícula se detiene entre  $A$  y  $B$ , vuelve para atrás, se detiene y luego retoma el rumbo hacia  $B$ .

En la tercera, llega a  $B$  pero pasa de largo, luego se detiene y retorna a  $B$ .

El elemental conocimiento de cálculo integral nos dice que

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x) dx = G(x) \Big|_{x_A}^{x_B} = G(x_B) - G(x_A) \text{ (conocida como Regla de Barrow)}$$

donde  $\frac{dG}{dx} = F(x)$  ( $G$  es una primitiva de  $F$ ).

Es evidente que si  $F = F(x)$ , siempre se puede encontrar una primitiva y, por propiedades de las integrales, es fácil comprobar que el resultado de calcular el trabajo para diferentes caminos entre  $A$  y  $B$  da el mismo resultado. Por ejemplo, para un camino como el 3, tendremos:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_{x_A}^{x_C} F dx + \int_{x_C}^{x_B} F dx = \int_{x_A}^{x_C} F dx - \int_{x_B}^{x_C} F dx = \\ &= \cancel{G(x_C)} - G(x_A) - \cancel{G(x_C)} + G(x_B) = G(x_B) - G(x_A) \end{aligned}$$

Es claro que si  $F = F(v)$  (por ejemplo, la fuerza de rozamiento dinámico  $F_{rd} = -\mu N \frac{v}{|v|}$ , o la fuerza de resistencia en un medio  $F = \gamma v$ ) esto no se cumple. Podemos decir entonces que, en sistemas unidimensionales, una fuerza será conservativa (esto es, su trabajo entre dos puntos solo dependerá del punto final y del punto inicial pero no del “camino”) si y solo si depende solo de la posición. O sea, para una dimensión

$$F \text{ conservativa} \Leftrightarrow F = F(x)$$

Pero... ¿de dónde viene el nombre de conservativa? Escribamos el “Teorema de fuerzas vivas” para el caso de fuerzas conservativas, o sea:

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx = G(x_B) - G(x_A)$$

$$\Delta T \Big|_A^B \Rightarrow T_B - T_A = G(x_B) - G(x_A) \Rightarrow T_B - G(x_B) = T_A - G(x_A) \quad (4.6)$$

Esto significa que la magnitud  $T - G$  es una constante. Vale lo mismo cuando la partícula está en  $A$  y cuando está en  $B$  (donde  $B$  es un punto arbitrario cualquiera de la trayectoria). Llegado este punto vamos a introducir un pequeño

cambio. Que se conserve una magnitud que es una resta de dos cosas es un poco molesto.

Estamos acostumbrados a los principios de conservación que son sumas. Por ejemplo, la conservación de la cantidad de movimiento de dos cuerpos: la cantidad de movimiento total es la suma de la cantidad de movimiento de ambos, lo que quiere decir que si uno pierde una cantidad de movimiento, el otro la gana, etcétera (ya discutimos esto). Con el objeto de convertir la Ec. (4.6) en una suma (en lugar de una resta) vamos a introducir un cambio en la definición del trabajo conservativo:

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F \cdot ds = G(x_B) - G(x_A) = -(V(x_B) - V(x_A)) = -\Delta V \Big|_A^B$$

donde hemos puesto el trabajo en términos de una función  $V(x) = -G(x)$ . O sea,  $F(x) = -\frac{dV}{dx}$ .

Si introducimos este cambio en la Ec. (4.6), obtenemos

$$T_B + V(x_B) = T_A + V(x_A) \quad \left( \frac{1}{2}mv_B^2 + V(x_B) = \frac{1}{2}mv_A^2 + V(x_A) \right)$$

La suma  $T + V = E$  es lo que se conoce como “Energía mecánica total” del sistema, y la función  $V(x)$  es lo que se conoce como “energía potencial”.

Acabamos de concluir que si el trabajo de las fuerzas se puede escribir como  $W_{AB} = -\Delta V$  (esto es, las fuerzas son conservativas), como además  $\Delta T = W_{AB}$  (Teorema de las fuerzas vivas), resulta:

$$\Delta T = -\Delta V \Rightarrow \Delta \underbrace{(T + V)}_E = 0$$

o sea, la magnitud  $E = T + V$  no varía con el tiempo, *SE CONSERVA* (de allí lo de fuerzas conservativas).

Podemos entonces enunciar el principio de conservación de la energía mecánica: *si sobre un sistema, las fuerzas que realizan trabajo son conservativas, entonces*

su energía mecánica  $T + V = E$ , resultará una constante de movimiento. Esto es,  $E$  se conservará.

Cuando hay fuerzas no conservativas (como el rozamiento dinámico, por ejemplo) que realizan trabajo, no hay conservación de  $E$ . Veamos: supongamos que hay fuerzas conservativas y no conservativas que realizan trabajo. Entonces,

$$W_{AB} = W_{AB}^C + W_{AB}^{NC}$$

donde  $W_{AB}^C = -\Delta V \Big|_A^B$  es el trabajo conservativo y  $W_{AB}^{NC} = \int_A^B \bar{F}^{(NC)} \cdot d\bar{s}$  es el trabajo no conservativo. Tendremos:

$$\Delta T \Big|_A^B = W_{AB} = W_{AB}^C + W_{AB}^{NC} = -\Delta V \Big|_A^B + W_{AB}^{NC}$$

O sea,

$$\Delta (T + V) \Big|_A^B = W_{AB}^{NC}$$

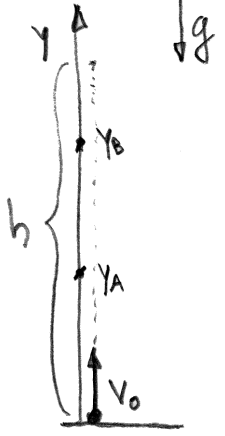
La variación de energía mecánica entre  $A$  y  $B$  es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas.

Vemos entonces que hay dos formas de energía mecánica. Una energía que depende de la velocidad ( $T = \frac{1}{2}mv^2$ ), llamada energía cinética, y otra energía que depende de la posición ( $V = V(x)$ ), llamada energía potencial. La variación de esta última forma está relacionada con el trabajo de las fuerzas conservativas, de modo que cuando el sistema pasa de una posición  $x_A$  a otra  $x_B$  resulta:

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx = -(V(x_B) - V(x_A)) = -\Delta V \Big|_A^B$$

con  $F(x) = -\frac{dV}{dx}$ . Si todas las fuerzas que realizan trabajo son conservativas, entonces la energía total del sistema,  $E = T + V$ , se conserva y su evolución consiste en una transferencia de un tipo de energía a la otra (si una disminuye, la otra aumenta y viceversa). Para que esto quede más claro, pensemos en el siguiente ejemplo: se arroja un cuerpo de masa  $m$  hacia arriba con una velocidad  $\bar{v} = v_0\hat{y}$ .

Figura 4.14:



El cuerpo asciende cada vez más lentamente hasta llegar a una altura máxima  $h$ . La única fuerza que actúa es el peso. Ya vimos que el trabajo que realiza el peso entre dos posiciones no depende de la trayectoria entre esas posiciones, sino de la diferencia de altura de esas posiciones. Luego, el peso  $\vec{P} = -mg\hat{y}$  es una fuerza conservativa. El trabajo del peso entre  $A$  y  $B$  es:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_{y_A}^{y_B} \vec{P} \cdot d\vec{s} = - \int_{y_A}^{y_B} mg dy = - (mgy_B - mgy_A) \\ &= - (V(y_B) - V(y_A)) = -\Delta V \Big|_A^B \end{aligned}$$

O sea,  $W_{AB} = -\Delta V \Big|_A^B$ , con  $V(y) = mgy$ , tal que  $P = -\frac{dV(y)}{dy}$ .

Por todo lo dicho, la energía total debe ser entonces

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

una constante de movimiento.

Inicialmente, esta energía es puramente cinética (ya que  $y(t=0) = 0$ ). O sea,  $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ .



A medida que el cuerpo sube, la velocidad disminuye, por lo cual, la energía cinética también. Pero  $y$  aumenta. Esto quiere decir que la energía potencial aumenta. Cuando el cuerpo llega a la altura máxima ( $v = 0$ ), desapareció toda la energía cinética y la energía total es toda potencial  $E = mgh$ . Entonces, como  $E$  se conserva:

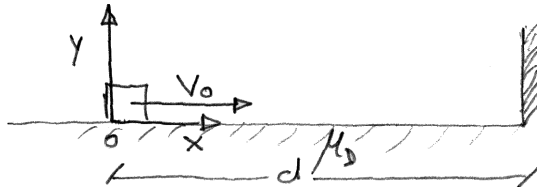
$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

donde la última expresión corresponde a la energía evaluada en cualquier posición. Una vez que el cuerpo llega a  $y = h$ , se detiene y comienza a caer. Durante la caída, la conversión entre los dos tipos de energía sucede al revés: la energía que a  $y = h$  era toda potencial se va convirtiendo en energía cinética.

Podemos ver este proceso desde el “Teorema de las fuerzas vivas”. Cuando el cuerpo sube, el trabajo del peso es negativo (el peso apunta en contra del desplazamiento); esto quiere decir que desaparece la energía cinética (recordar que  $\Delta T \Big|_A^B = W_{AB}$ ). Esto sucede hasta que desaparece *toda la energía cinética*. Cuando el cuerpo empieza a caer, el trabajo del peso cambia de signo (pasa a ser positivo), por lo cual toda la energía cinética que “nos sacó” el peso a la subida, nos la devuelve a la bajada. Podríamos decir que, en realidad, a la subida la energía cinética que se fue perdiendo en realidad no se va del sistema, sino que se almacena en otra forma de energía que eventualmente puede volver a ser cinética. Esto solo pasa para las fuerzas conservativas.

Veamos ahora un sistema que se parece (a primera vista) al que acabamos de estudiar: un cuerpo de masa  $m$  que desliza sobre una superficie con coeficiente de rozamiento  $\mu_d$  rebota elásticamente contra una pared e invierte su velocidad

Figura 4.15:



A la ida, la partícula se desplaza hacia la pared cada vez más despacio debido al trabajo que realiza la fuerza de rozamiento, que se opone al desplazamiento. El módulo de esta fuerza es constante, así que este movimiento es el mismo que teníamos durante la subida en el ejemplo anterior.

Cuando el cuerpo llega a la pared, parte de su energía cinética inicial

$$T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

desapareció

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgd\right)$$

tal y como se muestra en nuestro ejemplo anterior.

La gran diferencia está en la vuelta. Al volver, la velocidad invierte su sentido y, por lo tanto, la fuerza de rozamiento también. A diferencia del peso, en nuestro ejemplo anterior que a la vuelta nos devolvía la energía cinética que nos había sacado a la ida, el rozamiento, al cambiar de sentido siempre nos saca energía cinética. Tanto a la ida como a la vuelta, el rozamiento nos a saca energía cinética. En este caso, la energía cinética que se pierde *se va del sistema*. ¿Qué significa que se “va”? Significa que se transforma en otras formas de energía no mecánicas. En este caso, se transforma en calor. Las superficies, por la fricción que produce el rozamiento, generan calor que pasa al medio. Ese calor es la energía cinética que se “va”. Hay muchas formas de energía, además de la mecánica: energía química, energía nuclear, energía eléctrica, energía electrostática, energía eólica, energía luminosa, energía calórica, etcétera. En general, cualquier proceso que

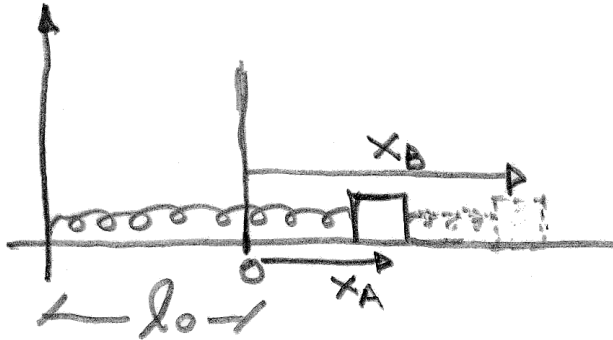
sucede involucra una transformación energética, esto es, el pasaje de un tipo de energía a otro, y se puede estudiar desde este punto de vista. En particular, los humanos hemos desarrollado dispositivos cuyo único objeto es producir esos pasajes: motor a explosión (energía química  $\rightarrow$  energía mecánica); grupo electrógeno (o central termoeléctrica: energía química  $\rightarrow$  energía eléctrica); central nuclear (energía nuclear  $\rightarrow$  energía eléctrica); cocina a gas (energía química  $\rightarrow$  calor); lamparita eléctrica (energía eléctrica  $\rightarrow$  calor + energía luminosa); y así podríamos seguir llenando hojas y hojas.

#### 4.4.1. Algunas fuerzas conservativas (además del peso)

##### Fuerza elástica

Consideremos la *fuerza elástica*:

Figura 4.16:



$F_e(x) = -kx$ ,  $k > 0$  constante elástica. Esta fuerza solo depende de la posición, entonces es conservativa. Calculemos la energía potencial  $V_e$  asociada a esta fuerza:

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot \vec{ds} = - \int_{x_A}^{x_B} kx \, dx = - \left( \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2 \right) = - (V_e(x_B) - V_e(x_A))$$

o sea,  $V_e(x) = \frac{1}{2}kx^2$  y  $F_e = -\frac{dV_e(x)}{dx} = -kx$ .

Entonces, la energía mecánica de este sistema es:

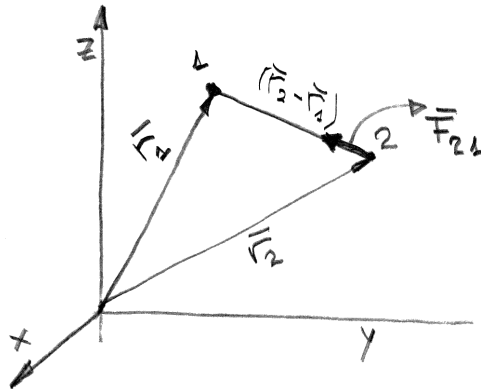
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Si no hay otras fuerzas no conservativas que realicen trabajo, esta energía será una constante de movimiento.

### Interacción gravitatoria

En 1684, Newton hizo pública su ley de gravitación universal. Básicamente, la ley establece que dos cuerpos cualesquiera (cualquiera quiere decir todos los cuerpos) se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de las distancias que los separan (Fig. (4.17)).

**Figura 4.17:**



Más en detalle, la fuerza en el cuerpo 2 debido al cuerpo 1 es:

$$\bar{F}_{21} = -\frac{G\mu_1\mu_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2}\hat{r}_{21}$$

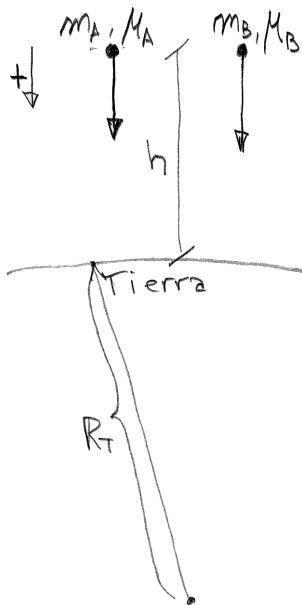
donde  $\hat{r}_{21} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|}$  es el versor que apunta desde 1 hacia 2,  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son las masas gravitatorias del cuerpo 1 y del cuerpo 2 respectivamente, y  $G$  es una constante

que dependerá de las unidades que utilicemos para la longitud, las fuerzas y las masas gravitatorias. Las masas gravitatorias son propiedades de cada cuerpo e indican la capacidad que estos tienen de interactuar gravitatoriamente.

Sabemos por otro lado (y gracias a la leyenda de la caída de la manzana) que esta interacción es la misma que origina al peso de los objetos por interacción gravitatoria con la Tierra. También sabemos que, como consecuencia del peso, todos los cuerpos adquieren una aceleración  $g$  hacia la Tierra cuando están cerca de la superficie terrestre.

Consideremos dos cuerpos  $A$  y  $B$ , de masas inerciales  $m_A$  y  $m_B$  y masas gravitatorias  $\mu_A$  y  $\mu_B$ . Notemos que  $m$  y  $\mu$ , en principio, no tienen nada que ver entre ellas:  $m$  es una propiedad de los cuerpos que mide su inercia (esto es, su tendencia a seguir con la velocidad que tiene ese cuerpo) y  $\mu$  es una propiedad que describe la capacidad de los cuerpos para interactuar gravitatoriamente.

**Figura 4.18:**



Sin embargo, la segunda ley de Newton para cada uno de los cuerpos se es-

cribe como:

$$m_A g = \frac{G \mu_T \mu_A}{(R_T + h)^2} \quad (4.7)$$

$$m_B g = \frac{G \mu_T \mu_B}{(R_T + h)^2} \quad (4.8)$$

dado que sabemos que la aceleración vale  $g$ . Si hacemos (4.7)/(4.8), miembro a miembro, obtenemos:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{\mu_A}{\mu_B}$$

Esta relación nos dice que, si bien conceptualmente son cosas bien distintas, la masa inercial de un cuerpo es proporcional a su masa gravitatoria:

$$\mu = C m$$

donde  $C$  es una constante. Si elegimos  $C = 1$ , la unidad de masa inercial nos servirá como unidad gravitatoria. En ese caso, la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos se escribirá como:

$$\vec{F}_{21} = - \frac{G m_2 m_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \hat{r}_{21}$$

Si para las fuerzas utilizamos  $N$  (newton), para las masas el  $kg$  (kilogramo) y para las longitudes  $m$  (metros), resulta:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Vemos aquí por qué no estamos inmersos en un gran pogo chocándonos los unos a los otros permanentemente (calculen con qué fuerza se atraen dos personas de unos  $100kg$  puestos a un metro y después me cuentan).

La interacción gravitatoria es la responsable de la organización de la naturaleza a escala astronómica. Hoy sabemos que la teoría newtoniana de la gravitación es solo una aproximación (de la relatividad general de Einstein). Sin embargo, esta aproximación funciona perfectamente para predecir fenómenos planetarios, movimientos de sondas espaciales, etcétera.

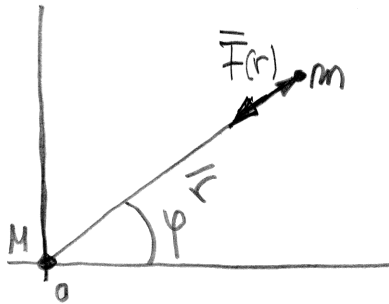
Incidentalmente, hemos también encontrado cómo varía la aceleración de la gravedad con la altura:

$$g(h) = \frac{Gm_T}{(R_T + h)^2}$$

donde  $R_T \approx 6400\text{km}$  (radio terrestre) y  $m_T \approx 5.972 \times 10^{24}\text{kg}$  (masa inercial terrestre).

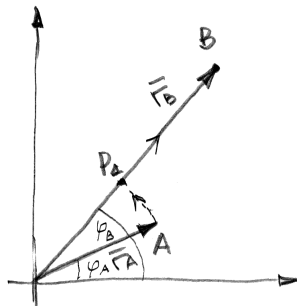
Mostraremos ahora que la fuerza gravitatoria de Newton es conservativa. Supongamos que tenemos un cuerpo de masa  $m$  bajo la atracción gravitatoria de otro cuerpo de masa  $M$ , con  $M \gg m$ . Entonces, tendremos:

**Figura 4.19:**



$$\vec{F}(r) = -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{r} = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{r} \quad \text{donde } GM_T m = \alpha$$

**Figura 4.20:**



Mostraremos que el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria cuando el cuerpo se traslada de  $A$  hacia  $B$  no depende del camino, sino de  $\bar{r}_A$  y  $\bar{r}_B$ .

Calculemos el trabajo cuando el camino es de  $A$  a  $P_1$  manteniendo  $|\bar{r}| = |\bar{r}_A|$  constante, y luego de  $P_1$  a  $B$  manteniendo  $\varphi = \varphi_B$ . Entonces:

$$W_{AB} = \int_A^B \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_A^{P_1} \bar{F} \cdot \bar{ds} + \int_{P_1}^B \bar{F} \cdot \bar{ds}$$

En el tramo de  $A$  a  $P_1$ ,  $\bar{ds} = r_A d\varphi \hat{\varphi}$  y  $\bar{F} = -\frac{\alpha}{r_A^2} \hat{r}$ , o sea,

$$\int_A^{P_1} \bar{F} \cdot \bar{ds} = - \int_A^{P_1} \frac{\alpha}{r_A^2} r_A d\varphi \underbrace{\hat{\varphi} \cdot \hat{r}}_0 = 0$$

ya que el desplazamiento es angular y la fuerza es radial.

En el tramo de  $P_1$  a  $B$ ,  $\bar{ds} = dr \hat{r}$  y  $\bar{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{r}$ , o sea,

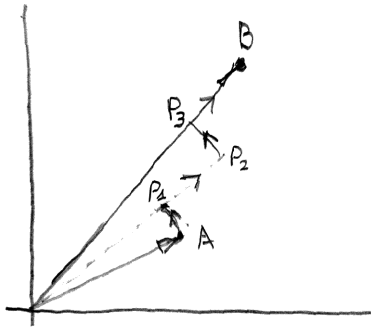
$$\int_{P_1}^B \bar{F} \cdot \bar{ds} = -\alpha \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \underbrace{(\hat{r} \cdot \hat{r})}_1 = -\alpha \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = - \left( \left( -\frac{\alpha}{r_B} \right) - \left( -\frac{\alpha}{r_A} \right) \right)$$

o sea,

$$W_{AB} = - \left( \left( -\frac{\alpha}{r_B} \right) - \left( -\frac{\alpha}{r_A} \right) \right).$$

Vamos ahora a calcularlo por otro camino.

**Figura 4.21:**



Ahora, el camino es:



- a)  $A \rightarrow P_1$ , a  $|\vec{r}|$  constante.                      c)  $P_2 \rightarrow P_3$ , a  $|\vec{r}|$  constante.  
 b)  $P_1 \rightarrow P_2$ , a  $\varphi$  constante                      d)  $P_3 \rightarrow B$ , a  $\varphi$  constante

o sea,

$$W_{AB} = W_{AP_1} + W_{P_1P_2} + W_{P_2P_3} + W_{P_3B}$$

Pero

$W_{AP_1} = 0$  (el camino y la fuerza son perpendiculares)

$W_{P_1P_2} = \int_{r_A}^{r_{P_2}} F(r) dr$  (el desplazamiento y la fuerza son radiales)

$W_{P_2P_3} = 0$  (el camino y la fuerza son perpendiculares)

$W_{P_3B} = \int_{r_{P_3}=r_{P_2}}^{r_B} F(r) dr$  (el desplazamiento y la fuerza son radiales) o sea,

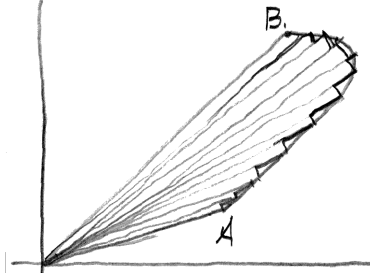
$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_{r_A}^{r_{P_2}} F(r) dr + \int_{r_{P_3}=r_{P_2}}^{r_B} F(r) dr = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr \\ &= -\alpha \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -\left( \left( -\frac{\alpha}{r_B} \right) - \left( -\frac{\alpha}{r_A} \right) \right) \end{aligned}$$

igual que en el primero. Es evidente que cualquier camino constante en trechos,  $|\vec{r}| = cte$  y  $\varphi = cte$  darán lo mismo, dado que el trabajo en los trechos  $|\vec{r}| = cte$  se anulará (la fuerza es radial y el desplazamiento es angular), y los trabajos a  $\varphi = cte$  serán integrales en las direcciones radiales, ya que sobre esos tramos el desplazamiento y las fuerzas son radiales. Al final, el trabajo entre  $A$  y  $B$  será la integral sobre un desplazamiento radial (de  $r_A$  a  $r_B$ ) de la fuerza radial  $F(r)$ . O sea,

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr = -\alpha \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -\left( \left( -\frac{\alpha}{r_B} \right) - \left( -\frac{\alpha}{r_A} \right) \right)$$

Ahora bien, cualquier curva entre  $A$  y  $B$  se puede descomponer en este tipo de desplazamientos, basta tomarlos suficientemente pequeños.

Figura 4.22:



Luego,

$$W_{AB} = - \left( \left( -\frac{\alpha}{r_B} \right) - \left( -\frac{\alpha}{r_A} \right) \right)$$

sobre cualquier camino. Además, como  $W_{AB} = - (V(r_B) - V(r_A))$ , entonces

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (\alpha = GMm) \text{ y } F(r) = -\frac{dV}{dr}$$

(energía potencial gravitatoria). Esto quiere decir que

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r}$$

es la energía mecánica del sistema, y además, en este caso (dado que no hay fuerzas no conservativas que realicen trabajo), se conserva.

#### 4.4.2. Una observación sobre la energía potencial

Como vimos, la energía potencial está definida por una integración definida en una dimensión:

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = - (V(x_B) - V(x_A)); \quad F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

Es claro que la energía potencial está definida, entonces, a menos de una constante aditiva (al igual que cualquier primitiva). En efecto,

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = - ((V(x_B) + D) - (V(x_A) + D))$$

y además  $F(x) = -\frac{dV}{dx}$  y también  $F(x) = -\frac{d(V + D)}{dx}$  para cualquier constante  $D$ . Esto quiere decir que tenemos la libertad de elegir esta constante como nos plazca. La elección de esta constante fijará el punto donde se anula la energía potencial. Cuando estudiamos un sistema, de entrada elegimos la constante como nos resulte conveniente y ya queda fija. La energía potencial puede tener cualquier signo. La energía cinética, en cambio, es *no negativa*  $\left(T = \frac{1}{2}mv^2\right)$ .

## 4.5. Gráficos y diagramas de energía

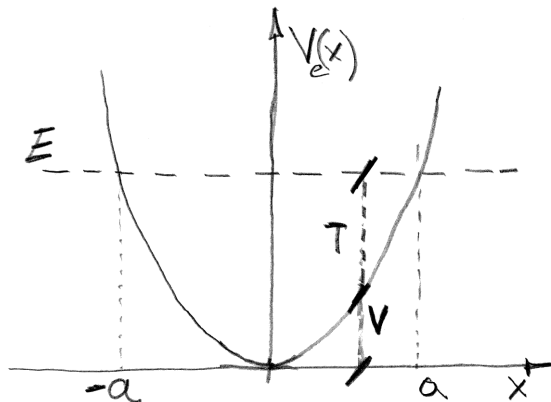
La conservación de la energía nos provee una forma de estudiar los posibles movimientos de un sistema sin necesidad de tener resultados exactos.

Consideremos el caso de la fuerza elástica  $F_e(x) = -kx$ . Sabemos que un cuerpo de masa  $m$  sometido a esta fuerza conserva su energía mecánica total:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

dado que  $V_e(x) = \frac{1}{2}kx^2$  es la energía potencial elástica. Grafiquemos esta energía potencial en función de la posición (es una parábola).

**Figura 4.23:**



La línea punteada representa la energía total  $E$  que se conserva. Es evidente entonces que el movimiento permanecerá acotado entre  $-a \leq x \leq a$ . En efecto, tomemos cualquier punto dentro de ese intervalo ( $x = x_0$ ). El segmento que va del eje  $x$  a la curva es la energía potencial cuando  $x = x_0$  ( $V_e(x_0)$ ), mientras que el segmento que va de la curva a  $E$  es la energía cinética en ese punto. A medida que el cuerpo se acerca a  $x = a$ , el segmento que corresponde a  $T$  se reduce y el que corresponde a  $V$  aumenta hasta cuando  $x = a$ .  $T = 0$  y  $V(x = a) = E$ . Allí la partícula se detiene para invertir su velocidad (en  $x = -a$  pasa lo mismo). Los puntos  $x = \pm a$  se conocen con el nombre de “punto de retorno”.

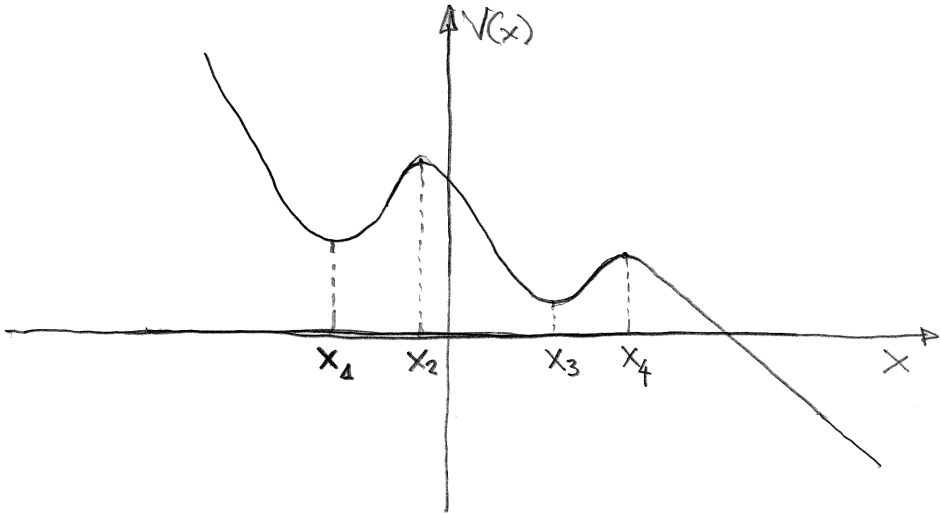
¿Qué sucedería con la partícula en  $|x| > a$ ? En ese caso,  $V_e(x) > V_e(x = a)$ , pero  $V_e(x) + T = E = V_e(x = a)$ . Para que se cumpla esto es necesario que  $T = \frac{1}{2}mv^2 < 0$ , y eso no es posible, ya que la velocidad es un número real. Concluimos entonces que el cuerpo oscilará entre  $x = -a$  y  $x = a$ .

El punto  $x = 0$  es un punto muy particular. En efecto, allí  $\frac{dV_e}{dx} = 0$ , pero como  $-\frac{dV_e}{dx} = F(x)$ , resulta que  $F(x = 0) = 0$ , y entonces  $x = 0$  es un punto de equilibrio.

Los tipos de movimiento que puede tener este sistema no dependen de la energía: en efecto, si aumentamos o disminuimos  $E$ , el movimiento siempre consistirá en una oscilación alrededor de  $x = 0$ . Lo que sí va a depender de  $E$  es el valor de  $a$  (amplitud del movimiento). En efecto, como ya dijimos,  $V_e(x = a) = \frac{1}{2}ka^2 = E \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ . Del mismo modo, podemos determinar la velocidad máxima que se alcanzará cuando la energía potencial sea mínima ( $V_e(x = 0)$ ). Allí  $E = \frac{1}{2}mv_M^2 \Rightarrow v_M = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ .

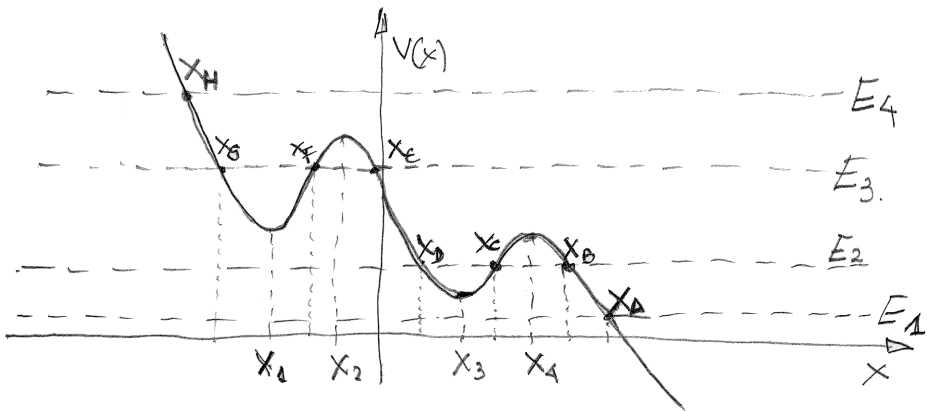
Veamos qué pasa ahora si la energía potencial es una función un poco menos aburrida.

**Figura 4.24:**



En este caso, los movimientos posibles estarán determinados fuertemente por la energía total  $E = T + V$ . Como la energía se conserva, su valor vendrá dado por su valor evaluado en las condiciones iniciales  $E = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0)$ , donde  $v_0$  y  $x_0$  son la velocidad y la posición inicial.

**Figura 4.25: Gráfico de la energía potencial**

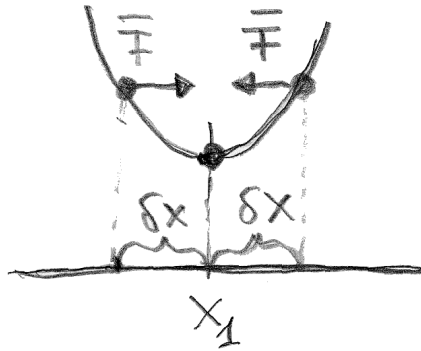


Prestemos atención primero a las posiciones  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Todos estos puntos corresponden a extremos relativos de la función  $V = V(x)$ . En todos ellos,

$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_i} = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), y como  $\frac{dV}{dx} = -F$ , resulta  $F(x_1) = F(x_2) = F(x_3) = F(x_4) = 0$ . Esto quiere decir que estas cuatro posiciones son posiciones de equilibrio. Por otra parte,  $x_1$  y  $x_3$  corresponden a *mínimos*, mientras que  $x_2$  y  $x_4$  corresponden a *máximos* de la energía potencial.

Si bien los cuatro puntos mencionados son puntos de equilibrio, el movimiento en torno a ellos es muy diferente. Estudiemos qué pasa alrededor de un mínimo ( $x_1$  por ejemplo).

**Figura 4.26:**

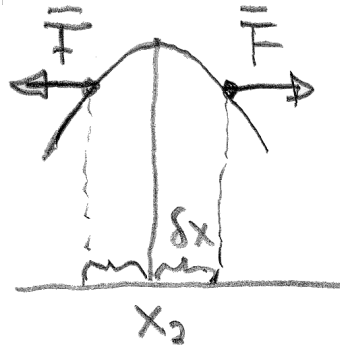


Como dijimos, al ser  $F(x_1) = 0$ , la fuerza allí es nula. Supongamos que la partícula está inicialmente allí. Ahora la desplazamos hacia la derecha de modo que  $x_1 \rightarrow x_1 + \delta x$ . En esta nueva posición aparece sobre la partícula una fuerza  $F = -\frac{dV}{dx} < 0$ , ya que a la derecha de  $x_1$ ,  $V$  es creciente ( $\frac{dV}{dx} > 0$ ). O sea, aparece una fuerza hacia la izquierda que tiende a restituir la partícula a  $x_1$ . Si hacemos el desplazamiento hacia la izquierda,  $x_1 \rightarrow x_1 - \delta x$ , aparece sobre la partícula una fuerza  $F = -\frac{dV}{dx} > 0$ , ya que a la izquierda de  $x_1$ ,  $V$  es decreciente ( $\frac{dV}{dx} < 0$ ). O sea, aparece una fuerza hacia la derecha que tiende a restituir la posición a  $x_1$ . En resumen, si tenemos la partícula en un mínimo, cualquier desplazamiento a partir de esa posición viene acompañado de la aparición de una fuerza que se *opone* al desplazamiento. Esta fuerza recibe el nombre de “fuerza restitutiva”. En

estos casos, *el punto de equilibrio resulta estable. Los mínimos relativos de la energía potencial son puntos de equilibrio estable.*

Es fácil ver que si se tratara de un máximo, ante desplazamientos de la posición de equilibrio, aparecen fuerzas que favorecen dichos desplazamientos (las fuerzas no son restitutivas).

**Figura 4.27:**



En ese caso, en lugar de volver a la posición de equilibrio, la partícula se aleja de ella. Estos puntos corresponden a equilibrios *inestables. Los máximos relativos de la energía potencial son puntos de equilibrio inestable.*

Estudiemos ahora los movimientos según el valor de la energía total.

1.  $E < V(x_3)$  (como  $E_1$  en la Fig. 4.25)

En este caso, la partícula no puede estar a la izquierda de la intersección entre  $E_1$  y el potencial, en la figura,  $x_A$ . O sea,  $V(x_A) = E_1$ . O sea,  $x_A \leq x \leq \infty$ .

Supongamos que la partícula inicialmente está en  $x_0 \gg x_A$  con velocidad hacia la izquierda ( $v_0 < 0$ ), entonces, a medida que la partícula se acerca a  $x_A$  se va deteniendo, llega a  $x_A$  (punto de retorno), se detiene, invierte su velocidad (ahora  $v > 0$ ) y se aleja hacia  $x \rightarrow \infty$ . Se dice que el movimiento es no ligado.

2.  $V(x_3) \leq E \leq V(x_4)$  ( $E_2$  en la Fig. 4.25)

Aquí son posibles dos tipos de movimiento:

- a) Si inicialmente  $x_0 > x_B$ , tendremos un movimiento no ligado, como en el caso anterior, o sea,  $x_B \leq x \leq \infty$ .
- b) Si inicialmente  $x_D < x < x_C$ , el cuerpo quedará confinado en esa región, oscilando entre  $x_C$  y  $x_B$ . Este tipo de movimiento recibe el nombre de “movimiento ligado”.

Notemos que las regiones en las que puede haber movimiento son disjuntas. Están separadas por una región “prohibida” (entre  $x_C$  y  $x_B$ ). Se suele decir que entre la región  $x_B < x$  y  $x_D < x < x_C$  hay una “barrera de potencial”. La altura de la barrera es  $V(x_4) - E_2$ .

3.  $V(x_4) < E \leq V(x_2)$  (como  $E_3$  en la Fig. 4.25)

Aquí, nuevamente, hay dos tipos de movimiento posibles:

- a) Si inicialmente  $x_E < x_0$ , tendremos un movimiento no ligado con un punto de retorno en  $x = x_E$ .

Para este rango de energías, desaparece la barrera de potencial que separaba las dos regiones anteriores, y ahora la partícula puede estar en cualquier lado a la derecha de  $x_E$ .

- b) Si inicialmente  $x_G \leq x \leq x_F$ , el cuerpo queda confinado allí, oscilando entre  $x_G$  y  $x_F$ .

Para este rango de energías aparece otra barrera de potencial (entre  $x_F$  y  $x_E$ ) de altura  $V(x_2) - E$ .

4.  $V(x_2) < E$  (como  $E_4$  en la Fig. 4.25)

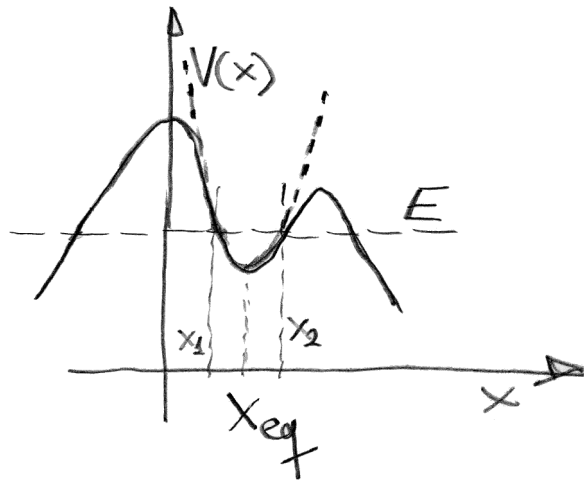


El movimiento es no ligado a la derecha de  $x_H$ . Es decir,  $x_H \leq x$ . Para este rango de energías no hay barreras de potencial.

### 4.5.1. Aproximación armónica para el movimiento alrededor de un punto de equilibrio estable

Supongamos lo siguiente: una partícula de masa  $m$  en un potencial  $V(x)$ , como muestra la Fig. 4.28, con una energía total  $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ .

**Figura 4.28: Gráfico de la energía potencial**



Como acabamos de ver, con esa energía total, si la partícula inicialmente se encuentra cerca de  $x = x_{eq}$ , permanecerá confinada entre  $x = x_1$  y  $x = x_2$ . Como se ve en el gráfico, para las regiones en donde tiene lugar el movimiento, la energía potencial no difiere mucho de una parábola. ¡Ojo! No decimos que  $V = V(x)$  es una parábola. Decimos que en el rango  $x$  para el cual puede haber movimiento, podemos aproximar  $V = V(x)$  por una parábola. En los lugares en que  $V = V(x)$  no se parece a una parábola, no nos interesa, porque la partícula nunca va a estar allí.

¿Cómo encontramos la parábola que aproxima a  $V = V(x)$  cerca de  $x = x_{eq}$ ?

Muy sencillo. Si consideramos el desarrollo de series de potencias de la función

$V = V(x)$  en  $x = x_{eq}$ , tendremos:

$$V(x) = V(x_{eq}) + \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3V}{dx^3} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^3 + \dots$$

Si retenemos hasta el segundo orden, como  $\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_{eq}} = 0$  (recordar que es un punto de equilibrio), obtenemos:

$$V(x) \approx V(x_{eq}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2$$

donde tenemos la garantía de que  $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_{eq}} > 0$ , dado que se trata de un mínimo.

De este modo, hemos convertido nuestro problema en:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2 + V(x_{eq}).$$

La energía  $E$  es constante, y como  $V(x_{eq})$  también, podemos escribir  $E' = E - V(x_{eq})$ , que va a ser constante. Si llamamos  $x' = (x - x_{eq})$ , entonces  $\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} = v$

(ya que  $x_{eq}$  es una constante) y  $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_{eq}} = k$ , finalmente resulta:

$$E' = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$

Es decir, el movimiento alrededor de un mínimo de cualquier potencial será muy parecido al movimiento de una partícula sometida a una fuerza elástica  $F = -kx'$  (a esto se lo llama oscilador armónico). Esto nos indica la importancia que tiene el estudiar este tipo de sistemas  $\left( V - \frac{1}{2}kx^2 \right)$ .

## 4.6. Energía cinética y choques

Consideremos ahora un sistema de dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  moviéndose en el espacio con velocidades  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$ . Ellos interactúan entre sí y luego de

la interacción se los detecta con velocidades  $\bar{v}'_1$  y  $\bar{v}'_2$ . Veremos qué sucede con la energía cinética.

**Figura 4.29:**



La energía cinética de dos cuerpos es:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Esta energía se puede poner en términos de la velocidad del centro de masa  $\bar{V}_{CM} = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1 + m_2}$  y  $\bar{v}_r = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$ . En efecto, entre las variables  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  y  $(\bar{V}_{CM}, \bar{v}_r)$  hay una relación lineal que podemos utilizar para hallar  $\bar{v}_1 = \bar{v}_1(\bar{V}_{CM}, \bar{v}_r)$  y  $\bar{v}_2 = \bar{v}_2(\bar{V}_{CM}, \bar{v}_r)$ . Partimos de

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{V}_{CM} \quad (4.9)$$

$$\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \bar{v}_r \quad (4.10)$$

Primero multiplicamos (4.10) por  $m_1$  y sumamos miembro a miembro. Obtenemos:

$$(m_1 + m_2)\bar{v}_2 = m_1\bar{v}_r + (m_1 + m_2)\bar{V}_{CM}$$

o sea,

$$\bar{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\bar{v}_r + \bar{V}_{CM}$$

Si ahora multiplicamos (4.10) por  $m_2$  y restamos miembro a miembro, obtenemos:

$$(m_1 + m_2)\bar{v}_1 = -m_2\bar{v}_r + (m_1 + m_2)\bar{V}_{CM}$$

o sea,

$$\bar{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\bar{v}_r + \bar{V}_{CM}$$

Entonces,

$$\bar{v}_2^2 = \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2 = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2}\bar{v}_r + \bar{V}_{CM} \right)^2 = V_{CM}^2 + \left[ \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right]^2 v_r^2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\bar{v}_r \cdot \bar{V}_{CM}$$

$$\bar{v}_1^2 = \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 = \left( -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\bar{v}_r + \bar{V}_{CM} \right)^2 = V_{CM}^2 + \left[ \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right]^2 v_r^2 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\bar{v}_r \cdot \bar{V}_{CM}$$

O sea,

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_r^2 + \underbrace{2\bar{v}_r \cdot \bar{V}_{CM} \left( \frac{m_1m_2 - m_1m_2}{m_1+m_2} \right)}_0$$

Entonces

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v_r^2$$

donde  $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ .

Esto nos indica que la energía cinética de dos cuerpos no solo es la suma de las energías cinéticas de ambos cuerpos, sino que también es la suma de la energía cinética que tiene el centro de masa la energía cinética que tiene el movimiento relativo. La masa  $\mu$  se conoce con el nombre de “masa reducida” del sistema de dos cuerpos. O sea,

$$T = T_{CM} + T_{rel}$$

Si la energía cinética *antes* de la interacción la descomponemos de esta forma, lo que podemos decir, con toda seguridad, es que después de la interacción será

$$T' = T'_{CM} + T'_{rel} \text{ con } T'_{CM} = T_{CM}.$$

La energía cinética del  $CM$  se conserva. Esto es así porque sabemos que, cualquiera sea la interacción,  $\bar{V}_{CM} = cte$  (se conserva  $\bar{P}_T = (m_1 + m_2)\bar{V}_{CM}$ ). La  $T_{rel}$ , en cambio, puede variar. Eso va a depender de la interacción. Por ejemplo, puede suceder que  $|\bar{v}_{rel}| = |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| = |\bar{v}'_2 - \bar{v}'_1| = |\bar{v}'_{rel}|$ , como en el caso de los choques perfectamente elásticos. En ese caso,  $T'_{rel} = T_{rel}$  y, por lo tanto,  $T = T'$ . Podemos decir que los choques perfectamente elásticos entre dos cuerpos son los que conservan la energía cinética.

En el otro extremo están los choques completamente inelásticos. En ellos,  $\bar{v}'_{rel} = 0$ . Es decir, se pierde toda la energía cinética relativa. En los choques completamente inelásticos (plásticos) se pierde toda la energía cinética relativa.

Notemos que esa energía relativa es la única que se puede perder como resultado de la interacción. La otra (la del  $CM$ ) permanece inalterada. Recordemos que cuando decimos “se pierde”, nos referimos a que se transforma en otro tipo de energía, que eventualmente puede producir otros efectos. Les dejo aquí una pregunta: transformémonos en monos por un instante. Tenemos dos cocos que queremos romper. Uno de masa  $M$  y el otro de masa  $m$  ( $M > m$ ). ¿Qué nos conviene hacer? Hay tres maneras:

1. Dejar  $m$  quieto y tirarle  $M$ .
2. Dejar  $M$  quieto y tirarle  $m$ .
3. Tirar uno contra otro.

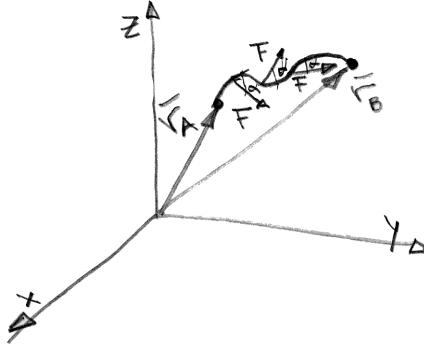
¿Qué opción eligen? ¿Por qué?

## 4.7. Como cultura general

Para terminar con los apuntes de energía, digamos algunas cosas sobre las condiciones que debe cumplir una fuerza  $\bar{F}$  para ser conservativa en más de una

dimensión. Recordemos que para una dimensión es necesario y suficiente que  $F = F(x)$ . Para más dimensiones, no es así. Veamos: consideremos el trabajo entre dos puntos  $\vec{r}_A$  y  $\vec{r}_B$ .

**Figura 4.30:**



$$W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} F \cos(\alpha) d\alpha = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

(Recordar que  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ ).

La condición necesaria y suficiente para que esta última integral solo dependa de  $\vec{r}_B$  y  $\vec{r}_A$  es que la forma  $F_x dx + F_y dy + F_z dz$  sea un diferencial exacto, o, lo que es lo mismo, que exista una función  $G(x, y, z)$  tal que

$$dG = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

y entonces,

$$W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} dG = G(\vec{r}_B) - G(\vec{r}_A)$$

o sea, debe ser  $F_x = \frac{\partial G}{\partial x}$ ,  $F_y = \frac{\partial G}{\partial y}$ ,  $F_z = \frac{\partial G}{\partial z}$  o, de manera más condensada,  $\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot G$ , donde  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  es el operador “gradiente”. Por lo que ya

explicamos antes, conviene introducir en lugar de  $G$  una función  $V = -G$ , de modo que:

$$W_{AB} = - \int_{\bar{r}_A}^{\bar{r}_B} dV = - \int_{\bar{r}_A}^{\bar{r}_B} \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = - (V(\bar{r}_B) - V(\bar{r}_A))$$

Entonces, por el “Teorema de las fuerzas vivas”

$$\Delta T|_A^B = W_{AB}$$

y si la fuerza es conservativa:

$$W_{AB} = - \Delta V|_A^B$$

o sea

$$\Delta \underbrace{(T + V)}_E \Big|_A^B = 0$$

y la energía mecánica total se conserva.

Hemos mostrado entonces que una fuerza en más de una dimensión es conservativa si y solo si existe una función  $V(x, y, z)$  (llamada función potencial) tal que  $\bar{F} = -\bar{\nabla}V$ . Otra forma de decirlo es que una fuerza  $\bar{F}$  es conservativa si proviene del gradiente de una función escalar (para los físicos, esa función escalar cambiada de signo es la energía potencial).

Hay otra manera de identificar una fuerza conservativa: si  $\bar{F} = -\bar{\nabla}V$ , debe ser necesariamente:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

(las derivadas parciales cruzadas deben ser iguales). Condensadamente, eso se escribe como:

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = 0$$

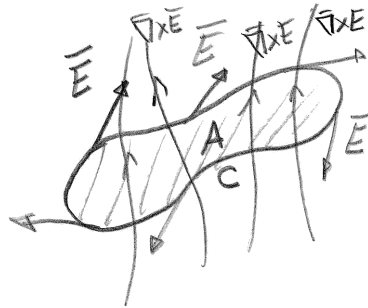
(producto vectorial del operador gradiente y la fuerza  $\bar{F}$  llamado “rotor de  $\bar{F}$ ”).

En otras palabras, si una fuerza es conservativa:

$\vec{F} = -\nabla V \Rightarrow \vec{F}$  es irrotacional  $\nabla \times \vec{F} = 0$  (su rotor es cero).

Es fácil ver que, en realidad, esta condición es un si y solo si con una ayuda del Teorema de Stokes. Dicho teorema dice que, dado un campo vectorial cualquiera  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$ , la circulación de dicho campo alrededor de cualquier curva cerrada es igual al flujo del rotor sobre la superficie concatenada por la curva.

**Figura 4.31:**

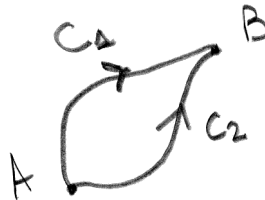


Si se aplica esto a un campo de fuerzas  $\vec{F}$  tal que  $\nabla \times \vec{F} = 0$ , tendremos que:

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Si tomamos ahora dos puntos cualesquiera  $A$  y  $B$  y dos caminos cualesquiera para calcular el trabajo:

**Figura 4.32:**



$$W_{AB}^{c_1} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}; \quad W_{AB}^{c_2} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



Por otro lado, la circulación sobre la curva cerrada que forma  $c_1$  y  $c_2$  será:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{c_1}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{c_2}^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = W_{AB}^{c_1} - W_{AB}^{c_2} = 0$$

(dado que  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ), entonces,  $W_{AB}^{c_1} = W_{AB}^{c_2}$  y el trabajo no depende del camino.

O sea,  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ , entonces,  $\vec{F}$  es conservativa.

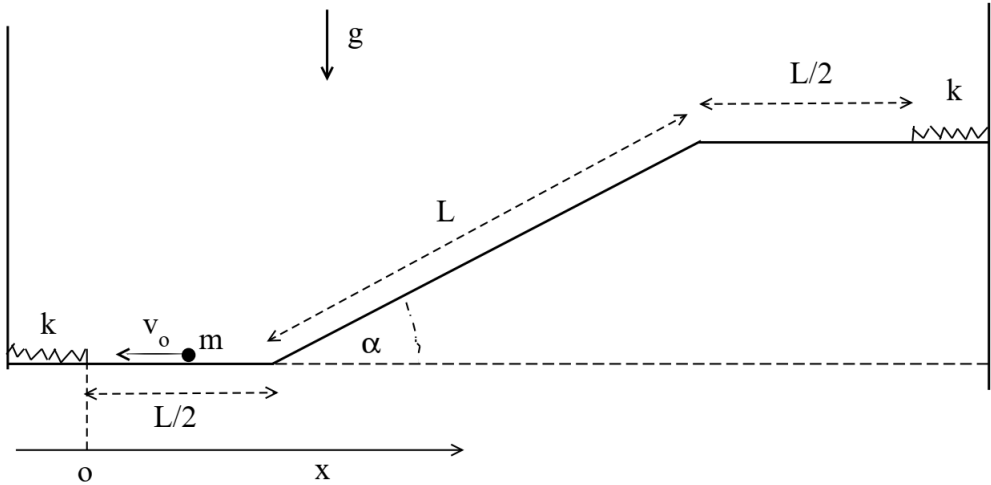
## 4.8. Ejercicios resueltos del capítulo

**PROBLEMA 1:** Un cuerpo de masa  $m$  puede moverse sobre una pista consistente en dos tramos horizontales de longitud  $\frac{L}{2}$  separados por un plano inclinado de ángulo  $\alpha$  y longitud  $L$ , como muestra la Fig. (4.33). Al final de cada tramo horizontal hay un resorte de constante elástica  $k$  y longitud relajada  $l_o$ . Ambos resortes tienen un extremo fijo a la pared, mientras que el otro extremo se encuentra libre. No hay rozamiento entre el cuerpo y la pista en ninguna parte.

- Hacer un gráfico para la energía potencial en función de la coordenada  $x$  (ver figura).
- Describir los posibles movimientos de acuerdo con la velocidad del cuerpo en el tramo de abajo,  $v_o$ .
- Expresar, para todos los movimientos posibles, la máxima compresión de los dos resortes.
- Supongamos ahora que en el tramo que corresponde al plano inclinado existe rozamiento con un coeficiente  $\mu_d = \mu_e = \mu$ , y que el cuerpo tiene una velocidad inicial  $v_o$  (estando abajo) como para subir y bajar varias veces. Determinar cuántas veces va a bajar, cuántas veces va a subir antes de detenerse y dónde se va a detener (considerar, por separado, los casos en que: (1)  $\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha) < 0$  y (2)  $\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha) > 0$ ).

Datos:  $L, m, \alpha, k, g, l_o$  y  $v_o$ .

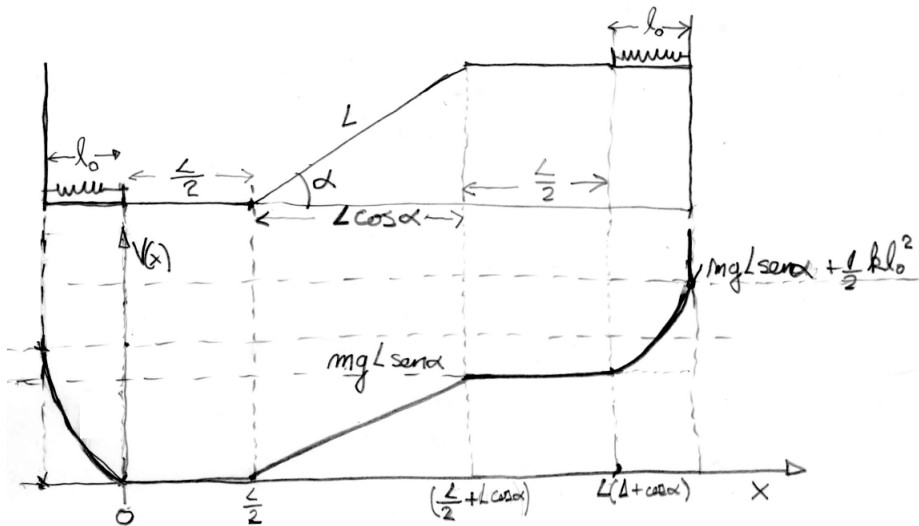
Figura 4.33: Problema 1



**RESOLUCIÓN:**

a)

Figura 4.34: Esquema general para el problema 1



El potencial  $V(x)$  quedará definido para las siguientes condiciones de intervalos de la posición  $x$ :

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{si} \quad -l_o \leq x < 0$$

$$V(x) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{L}{2}$$

$$V(x) = mg \tan(\alpha) \left(x - \frac{L}{2}\right) \quad \text{si} \quad \frac{L}{2} \leq x < L \left(\frac{1}{2} + \cos(\alpha)\right)$$

$$V(x) = mgL \sen(\alpha) \quad \text{si} \quad L \left(\frac{1}{2} + \cos(\alpha)\right) \leq x < L(1 + \cos(\alpha))$$

Finalmente,  $V(x) = mgL \sen(\alpha) + \frac{1}{2}k(x - L(1 + \cos(\alpha)))^2$  si  $L(1 + \cos(\alpha)) \leq x < L(1 + \cos(\alpha)) + l_o$

- b) y c) i. Para  $0 < v_o \leq \sqrt{2gL \sen(\alpha)}$ , la partícula se mueve entre dos puntos de retorno:

$$x_{r_1} = -\sqrt{\frac{m}{k}}v_o$$

comprimiendo el resorte de la izquierda en  $\sqrt{\frac{m}{k}}v_o$  y

$$x_{r_2} = \frac{v_o^2}{2g \tan(\alpha)}$$

a una altura  $h = x_{r_2} \tan(\alpha)$  sobre el plano inclinado.

ii.

Para  $\sqrt{2gL \sen(\alpha)} < v_o \leq \sqrt{\frac{k}{m}}l_o$  (asumimos  $\sqrt{2gL \sen(\alpha)} < \sqrt{\frac{k}{m}}l_o$ ).

Como se conserva la energía,

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + mgL \sen(\alpha) = \frac{1}{2}mv_o^2 \Rightarrow \sqrt{v_o^2 - 2gL \sen(\alpha)}$$

la partícula se mueve entre los puntos de retorno,

$$x_{r_1} = -\sqrt{\frac{m}{k}}v_o$$

comprimiendo el resorte de la izquierda en  $\sqrt{\frac{m}{k}}v_o$  y

$$x_{r_2} = -\sqrt{\frac{m}{k}}v_A + L(1 + \cos(\alpha))$$

comprimiendo el resorte de la derecha en  $\sqrt{\frac{m}{k}}v_A$ .

iii. Para

$$\sqrt{\frac{k}{m}}l_o < v_o \leq \sqrt{2gL \operatorname{sen}(\alpha) + \frac{k}{m}l_o^2}$$

la partícula llega a

$$x_{r1} = -l_o$$

y comprime totalmente el resorte de la izquierda. A la derecha se detiene en

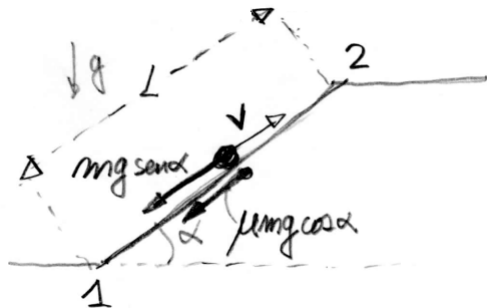
$$x_{r2} = \sqrt{\frac{m}{k}}v_A + L(1 + \cos(\alpha))$$

iv. Para  $\sqrt{2gL \operatorname{sen}(\alpha) + \frac{k}{m}l_o^2} < v_o$ , la partícula se mueve entre

$$-l_o \leq x \leq L(1 + \cos(\alpha)) + l_o$$

d) Calcularemos primero cuánto varía la energía cinética en una subida:

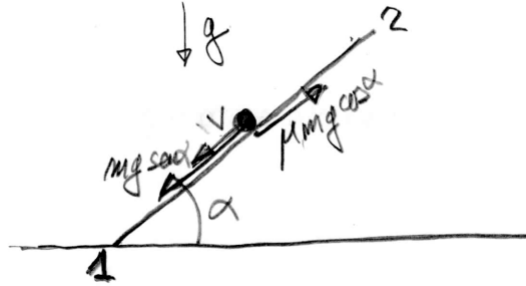
**Figura 4.35:**



$$\Delta T \Big|_{sub} = T_2 - T_1 = W \Big|_1^2 = -mgL(\operatorname{sen}(\alpha) + \mu \cos(\alpha)) = -A$$

y en una bajada

Figura 4.36:



$$\Delta T \Big|_{baj} = T_1 - T_2 = W \Big|_2^1 = -mgL(\mu \cos(\alpha) - \text{sen}(\alpha)) = -B$$

Esto quiere decir que la disminución de energía cinética entre una subida y una bajada es  $|\Delta T| = (A + B)$ , con  $A > 0$  y  $B > 0$ .

Observemos que si  $(\text{sen}(\alpha) - \mu \cos(\alpha)) < 0$ , tanto a la subida como a la bajada la energía cinética disminuye (esto quiere decir que la energía cinética se anulará, en este caso, en una subida o una bajada y la partícula entonces se detendrá en una subida o una bajada y se quedará allí, ya que  $(\text{sen}(\alpha) - \mu \cos(\alpha)) < 0$  es la condición para que la fuerza de rozamiento estático pueda equilibrar el peso). Si llamamos  $n$  al número de los eventos (subida + bajada) y  $E = \frac{1}{2}mv_0^2$  a la energía inicial del sistema, tendremos  $n$  de estos eventos (o sea,  $n$  subidas y  $n$  bajadas completas) si

$$n(A + B) \leq \frac{1}{2}mv_0^2 \leq (n + 1)(A + B)$$

con

$$n = \left[ \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{(A + B)} \right] \quad (\text{los corchetes significan la parte entera})$$

$$\Rightarrow n = \left[ \frac{\frac{1}{2}mv_o^2}{2gL\mu \cos(\alpha)} \right] = \left[ \frac{v_o^2}{2gL\mu \cos(\alpha)} \right]$$

El remanente de energía cinética

$$\left( \frac{1}{2}mv_o^2 - n(A + B) \right)$$

determinará si se detiene en una subida, o en una bajada. En efecto,

$$\left( \frac{1}{2}mv_o^2 - n(A + B) \right) < (A + B)$$

Entonces, si

$$\left( \frac{1}{2}mv_o^2 - n(A + B) \right) < A$$

se detiene en la subida  $(n + 1)$ . Si, en cambio,

$$A \leq \left( \frac{1}{2}mv_o^2 - n(A + B) \right) \leq (A + B)$$

sube una vez más  $((n + 1)$  subidas) y se detiene en la bajada  $(n + 1)$ .

Para  $(\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)) > 0$  no hay posición de equilibrio en el plano inclinado (la partícula no puede quedar detenida en el plano inclinado). Notemos además que, en este caso,  $A > 0$  y  $B < 0$ . Luego de las  $n$  subidas y bajadas completas, van a existir una serie de subidas parciales (sin llegar a la altura  $h = L \sin(\alpha)$  y con cada vez menos altura) con las bajadas subsiguientes hasta agotar la energía del sistema, y se detendrá finalmente en  $x_f = \frac{L}{2}$  (la base del plano inclinado).

**PROBLEMA 2:** Un cuerpo de masa  $m$  se mueve sobre el eje  $x$  bajo la acción de una fuerza conservativa que proviene del potencial

$$V(x) = 0.25 \frac{J}{m^4} x^4 - 4 \frac{J}{m^3} x^3 + 22 \frac{J}{m^2} x^2 - 48 \frac{J}{m} x + 40J$$

Se sabe que la posición  $x = 4m$  es una posición de equilibrio.

- Determinar si  $x = 4m$  corresponde a equilibrio estable o inestable. ¿Existen otras posiciones de equilibrio? De existir, encontrarlas y determinar el carácter de la estabilidad.
- Graficar el potencial  $V(x)$  y la fuerza  $F(x)$  que proviene de él.
- Hallar la energía mecánica mínima que puede tener el sistema.
- Discutir los posibles movimientos de acuerdo con la energía mecánica total del sistema.

### RESOLUCIÓN:

- Teniendo en cuenta la energía potencial del sistema

$$V(x) = 0.25 \frac{J}{m^4} x^4 - 4 \frac{J}{m^3} x^3 + 22 \frac{J}{m^2} x^2 - 48 \frac{J}{m} x + 40J$$

y que  $x = 4m$  es una posición de equilibrio, allí la fuerza debe anularse.

Como

$$F = -\frac{dV}{dx} = -\frac{J}{m^4} x^3 + 12 \frac{J}{m^3} x^2 - 44 \frac{J}{m^2} x + 48 \frac{J}{m}$$

este polinomio de grado 3 debe ser divisible por  $(x - 4m)$ . En efecto

$$F = -(x - 4m) (x^2 - 8mx + 12m^2) \frac{J}{m^4}$$

Entonces,

$$x_{\pm} = \frac{8m \pm \sqrt{8^2 m^2 - 4 \cdot 12 m^2}}{2} = \frac{8m \pm \sqrt{64 - 48} m}{2} = (4 \pm 2)m$$

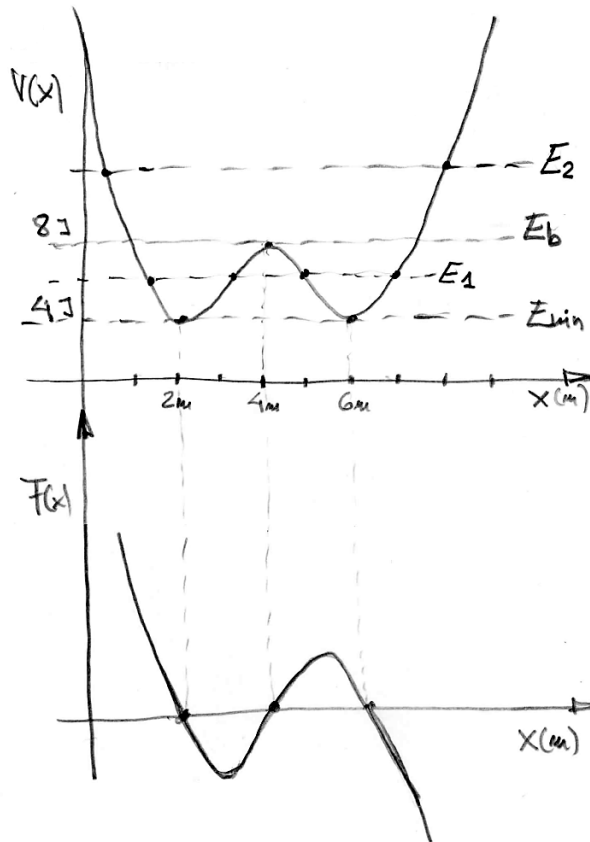


Entonces  $x = 6m$  y  $x = 2m$  son también puntos de equilibrio. Es fácil verificar que  $x = 4m$  es un máximo local de  $V(x)$  (equilibrio inestable), mientras que  $x = 6m$  y  $x = 2m$  resultan mínimos del potencial (equilibrio estable). Para ello, basta con derivar la fuerza respecto de  $x$  y verificar que

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=4m} < 0 \quad , \text{ que } \quad \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=2m} > 0 \quad \text{ y que } \quad \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=6m} > 0$$

b)

**Figura 4.37: Gráficos de  $V(x)$  y  $F(x)$**



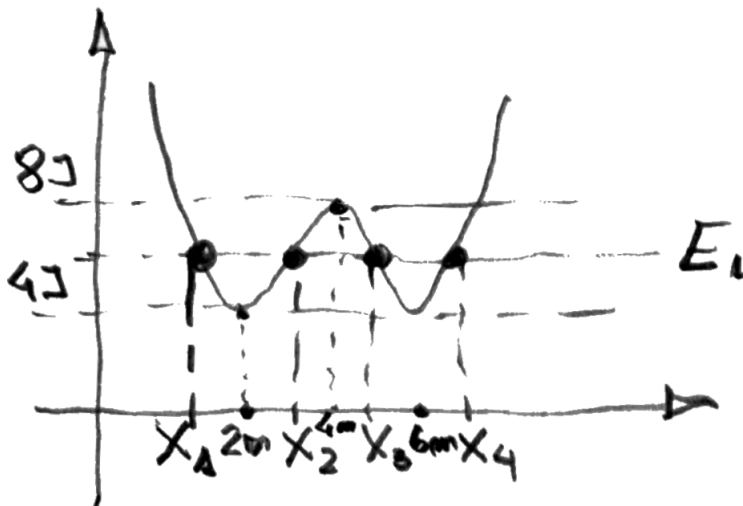
c) La energía mínima posible es en  $E_{min} = 4J$  (menos energía total implicaría energía cinética negativa).

d) Para  $E_{min} \leq E_1 \leq E_b$ , el movimiento del cuerpo de masa  $m$  está ligado alrededor del punto  $x = 2m$  o  $x = 6m$  (depende de la condición inicial).

Para  $E_b < E_2$ , el sistema tiene energía para superar la barrera energética que separa los mínimos. Por lo tanto, si bien permanece ligado,  $m$  pasa por ambos mínimos. Dicho de otro modo:

Si  $E = E_1$  ( $4J \leq E \leq 8J$ ), tendremos:

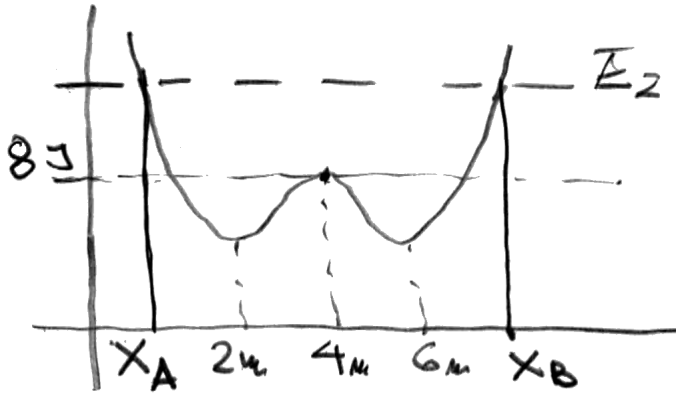
Figura 4.38:



El movimiento permanece confinado entre  $x_1$  y  $x_2$  (si inicialmente estaba allí) o confinado entre  $x_3$  y  $x_4$  (si inicialmente estaba allí). La partícula no puede salir de esos intervalos. Son dos tipos de movimiento ligados, uno alrededor de  $x = 2m$  y otro alrededor de  $x = 6m$ .

Si  $E = E_2$  ( $8J < E$ ), tendremos:

Figura 4.39:



El movimiento está confinado entre  $x_A$  y  $x_B$ . Es decir, hay un solo tipo de movimiento ligado. El sistema pasa de un mínimo a otro porque su energía permite superar la barrera energética que hay en  $x = 4m$ .



# Apéndice A

## Identidades trigonométricas

En este apéndice recordaremos algunas identidades trigonométricas que nos pueden resultar útiles.

1.  $\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$
2.  $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$ , si  $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$  para  $k \in \mathbb{Z}$
3.  $\text{cos}(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
4.  $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$
5.  $\text{cos}(x) = \text{cos}(x + 2\pi)$
6.  $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$
7.  $\text{cos}(x) = \text{cos}(-x)$
8.  $\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x)\text{cos}(y) + \text{cos}(x)\text{sen}(y)$
9.  $\text{sen}(x - y) = \text{sen}(x)\text{cos}(y) - \text{cos}(x)\text{sen}(y)$
10.  $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\text{cos}(x)$

11.  $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y)$

12.  $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \text{sen}(x)\text{sen}(y)$

13.  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)$

14. Fórmula de Euler:  $e^{x+iy} = e^x (\text{sen}(y) + i \cdot \cos(y))$

15.  $\text{sen}(x) \approx x$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Es decir, si  $x$  es cercano a 0,  $\text{sen}(x)$  es aproximadamente  $x$ .

16.  $\cos(x) \approx 1$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Es decir, si  $x$  es cercano a 0,  $\cos(x)$  vale aproximadamente 1.

17. Funciones hiperbólicas

a)  $\text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b)  $\text{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c)  $\text{tgh}(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\text{cosh}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

# Apéndice B

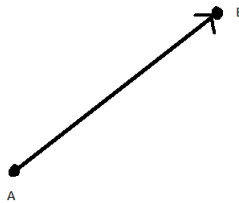
## Resumen de álgebra lineal

En este apéndice haremos un resumen de algunos conceptos básicos de álgebra lineal. Si bien trabajaremos principalmente en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , generalizaremos las definiciones y los teoremas, en caso de ser posible, a  $\mathbb{R}^n$ .

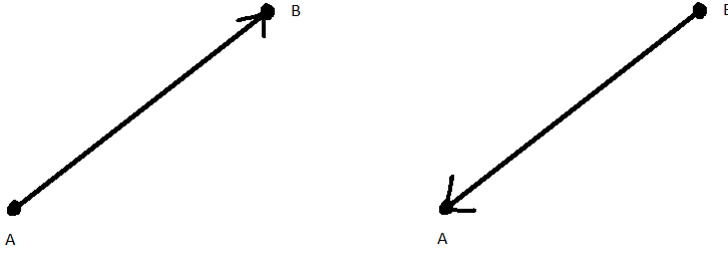
### B.1. Vectores

Diremos que un *vector* es un segmento de recta que tiene una orientación. Es decir, es un segmento que tiene un origen y un fin.

**Figura B.1:**

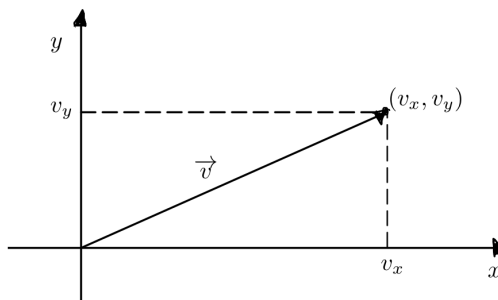


Cabe señalar que el segmento que va de  $A$  a  $B$  no es el mismo que va de  $B$  a  $A$ , ya que sus puntos iniciales y finales son distintos.

**Figura B.2:**

En un vector podemos distinguir su *dirección* (la inclinación que posee), su *sentido* (la orientación) y su *longitud* (cuánto mide).

En general, ubicaremos a los vectores en un sistema de *ejes cartesianos*. El vector  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  de  $\mathbb{R}^2$  tendrá como punto inicial el origen de coordenadas y como punto final  $(v_x, v_y)$ . De manera análoga, el vector  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$  de  $\mathbb{R}^3$  tendrá como punto inicial el origen de coordenadas y como punto final  $(w_x, w_y, w_z)$ . En física, generalmente se denota a los vectores con una línea recta en la parte superior ( $\vec{A}$ ) y no con una flecha ( $\vec{A}$ ), aunque eventualmente pueden también aparecer así. En este apéndice matemático, por dar un ejemplo, cuando hablamos y expresamos matemáticamente al vector  $\vec{H}$ , en física (y en todo este libro) lo representamos como  $\vec{H}$ .

**Figura B.3:**



## B.2. Operaciones

### B.2.1. Suma

Consideremos dos vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  y  $\vec{w} = (w_x, w_y)$ , se define al vector suma de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  al vector

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_x, v_y) + (w_x, w_y) = (v_x + w_x, v_y + w_y)$$

En  $\mathbb{R}^3$  se define de manera similar la suma: sean  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  y  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ , se define al vector suma de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  al vector

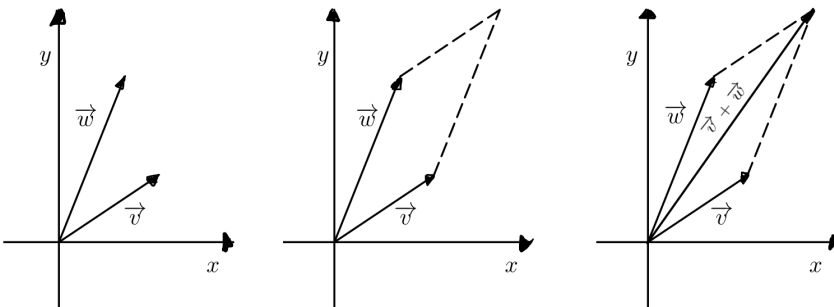
$$\vec{v} + \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) + (w_x, w_y, w_z) = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$$

Generalizando, si tenemos dos vectores  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  y  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , entonces el vector suma de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  es

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

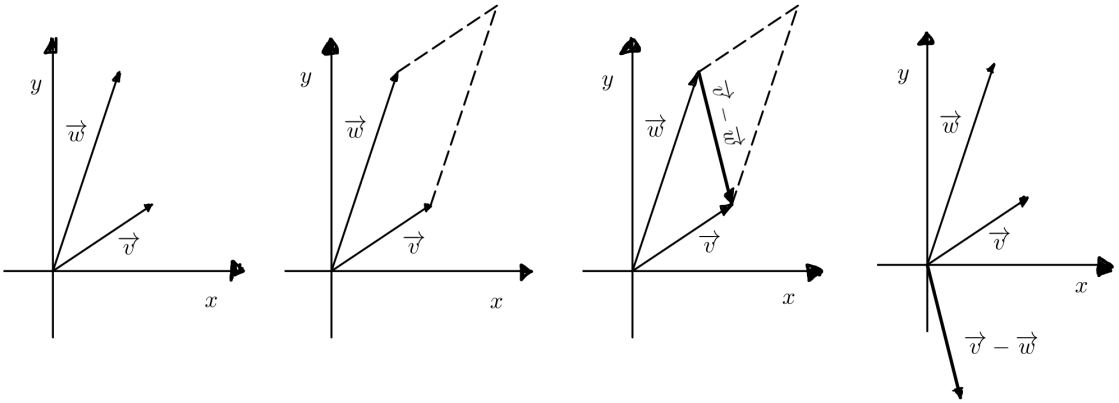
Esta operación se puede realizar de manera gráfica mediante la *regla del paralelogramo*. Esta regla permite sumar o restar vectores. Si se desea sumar los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , se dibuja un paralelogramo cuyos lados sean  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ . La diagonal del paralelogramo cuyo origen es el origen de coordenadas será el vector suma.

**Figura B.4:**



El vector resta  $\vec{v} - \vec{w}$  será la diagonal del paralelogramo que va desde el fin de  $\vec{v}$  hasta el fin de  $\vec{w}$ , que luego se debe trasladar al origen.

**Figura B.5:**



### B.2.2. Producto por un escalar

Si consideramos un vector  $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ , se define al producto de  $\lambda \in \mathbb{R}$  por  $\vec{v}$  al vector

$$\lambda \vec{v} = \lambda (v_x, v_y) = (\lambda v_x, \lambda v_y)$$

Ahora, si consideramos un vector  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ , se define al producto de  $\lambda \in \mathbb{R}$  por  $\vec{v}$  al vector

$$\lambda \vec{v} = \lambda (v_x, v_y, v_z) = (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z)$$

En general, si tenemos un vector  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , se define al producto de  $\lambda \in \mathbb{R}$  por  $\vec{v}$  al vector

$$\lambda \vec{v} = \lambda (v_1, v_2, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n)$$

Tener en cuenta que si  $\vec{v}$  no es el vector nulo y  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \vec{v}$  tiene la misma

dirección que  $\vec{v}$ , y si  $\lambda > 0$ ,  $\lambda\vec{v}$  tiene el mismo sentido que  $\vec{v}$ ; en cambio, si  $\lambda < 0$ ,  $\lambda\vec{v}$  tiene el sentido opuesto.

### B.2.3. Propiedades

Sean  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  vectores de  $\mathbb{R}^n$  y sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces (tener en cuenta que  $\vec{0}$  representa al vector nulo):

$$1. \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

$$2. \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$3. \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

$$4. (\alpha + \beta)\vec{w} = \alpha\vec{w} + \beta\vec{w}$$

$$5. \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

$$6. 1\vec{v} = \vec{v}$$

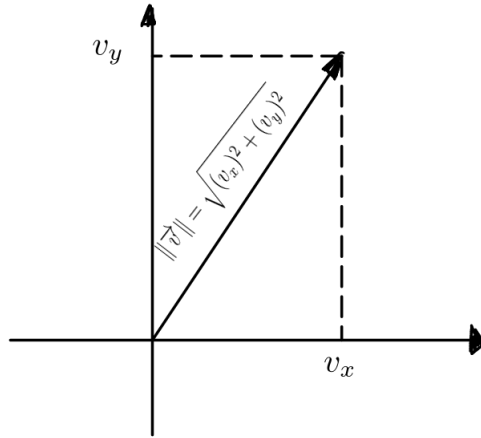
$$7. \vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{0}$$

$$8. 0\vec{v} = \vec{0}$$

### B.3. Norma

Si tenemos un vector  $\vec{v}$ , llamamos norma de  $\vec{v}$  a la longitud del vector  $\vec{v}$  y se denota  $\|\vec{v}\|$

Si tenemos un  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  de  $\mathbb{R}^2$ :

**Figura B.6:**

y usando el Teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\|\vec{v}\| = \|(v_x, v_y)\| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

Esta definición se puede extender a  $\mathbb{R}^3$ , es decir, si  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , su norma será:

$$\|\vec{v}\| = \|(v_x, v_y, v_z)\| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

Por lo que, si tenemos un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , su norma será:

$$\|\vec{v}\| = \|(v_1, v_2, \dots, v_n)\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \dots + (v_n)^2}$$

### B.3.1. Propiedades

Sean  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  dos vectores de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces:

1.  $\|\vec{v}\| \geq 0$
2.  $\|\vec{v}\| = 0$  si y solo si  $\vec{v} = \vec{0}$ , es decir, es el vector nulo.

3.  $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$

4. Desigualdad triangular:  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

5. Si  $\vec{v}$  es un vector no nulo, entonces  $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  es un vector de norma 1 que tiene la misma dirección y sentido que  $\vec{v}$ .

A estos últimos vectores se los conoce como vectores *unitarios* o *versores*. A los versores vinculados a los ejes coordenados en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  se los denota como:  $\hat{x}$  o  $\hat{i}$ ;  $\hat{y}$  o  $\hat{j}$ ; y  $\hat{z}$  o  $\hat{k}$ . Por lo que a un vector  $(a, b, c)$  se lo puede escribir como:

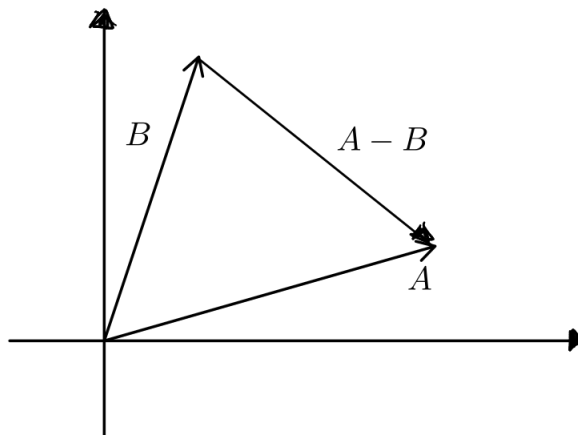
$$(a, b, c) = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

### B.3.2. Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^n$ , se define a la distancia entre  $A$  y  $B$  como a la norma entre  $A - B$ , es decir,

$$d(A, B) = \|A - B\|$$

Figura B.7:



Notar que  $\|A - B\| = \|B - A\|$ .

## B.4. Producto interno

Definiremos una operación entre vectores cuyo resultado es un número escalar. Es decir,

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

En  $\mathbb{R}^2$  se define como: si  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  y  $\vec{w} = (w_x, w_y)$ , entonces,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y$$

En  $\mathbb{R}^3$  se define como: si  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  y  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ , entonces,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

En general, si tenemos  $\mathbb{R}^n$  y dos vectores  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  y  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , entonces,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$$

Al producto interno se lo puede denotar como  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  o bien como  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ .

### B.4.1. Propiedades

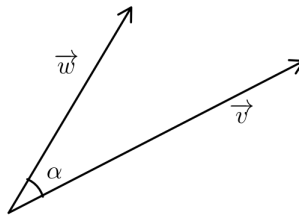
Sean  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  vectores de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces,

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3.  $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$
4.  $\vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\|^2$
5.  $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$

### B.4.2. Ángulo entre vectores

Sean dos vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  no nulos en  $\mathbb{R}^n$ , se llama ángulo entre  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  al ángulo  $\alpha$  determinado por  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  tal que  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

**Figura B.8:**



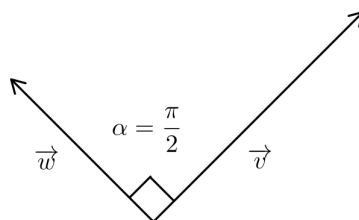
Y verifica que

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$

En particular, si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , diremos que  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son perpendiculares u ortogonales. Y verifican que  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ . Es decir,

$\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son perpendiculares si y sólo si  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

**Figura B.9:**



## B.5. Producto vectorial

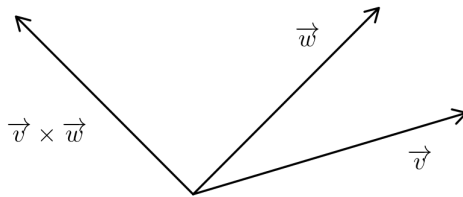
En  $\mathbb{R}^3$  existe una operación especial entre vectores cuyo resultado es un tercer vector, con la particularidad de que el vector resultante es perpendicular a los originales. Esta operación se llama *producto vectorial* o *cruz*:

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

y se define como:

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) \times (w_x, w_y, w_z) = (v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, v_x w_y - v_y w_x)$$

Figura B.10:



Otra manera de calcular este producto es usando la noción de determinantes:

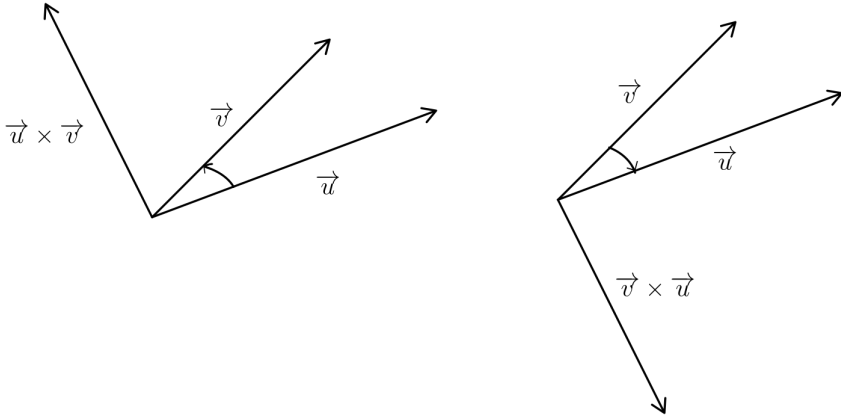
$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) \times (w_x, w_y, w_z) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \hat{x} \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

### B.5.1. Propiedades

Sean  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  vectores de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces,



**Figura B.11:**



1.  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ . Es decir, los vectores resultantes tienen sentidos opuestos.
2.  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
3.  $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$
4.  $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$  si y solo si los vectores son múltiplos.
5.  $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$  y  $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$



# Apéndice C

## Desarrollo de una función en serie de potencias

Las series de potencias tienen diversas aplicaciones: obtener aproximaciones de números irracionales, aproximar algunas integrales definidas que no se pueden resolver con los métodos habituales, obtener aproximaciones de funciones a partir de polinomios, etcétera. En este apéndice veremos una de estas aplicaciones.

### C.1. Series de potencias

Llamaremos serie de potencias centrada en  $a$  y coeficientes  $a_n$  a una expresión de la forma:

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + \cdots + a_n(x - a)^n + \cdots$$

Esta expresión también se la puede escribir como:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - a)^n$$

donde  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números reales y  $x$  es variable.

La convergencia<sup>1</sup> de esta serie dependerá del valor de  $x$ . Pero el Teorema de Abel que nos indica qué puede suceder con la convergencia de la serie en función del valor de  $x$ :

Si consideramos la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ , entonces se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones:

- a) La serie converge solo si  $x = a$ .
- b) Existe  $R \in \mathbb{R}_{>0}$ , tal que la serie es:
  - absolutamente convergente<sup>2</sup> para  $x \in (a - R, a + R)$
  - divergente si  $x \in (-\infty, a - R) \cup (a + R, +\infty)$
- c) Converge absolutamente para todo  $x \in \mathbb{R}$

Al número  $R$  se lo conoce como *radio de convergencia* de la serie, y a  $(a - R, a + R)$  se lo conoce como *intervalo de convergencia*  $I$ .

### C.1.1. Propiedades

A su vez, a una serie de potencias se puede interpretar como una función de variable  $x$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$$

El dominio de  $f$  es el conjunto de los  $x \in \mathbb{R}$ , en donde la serie es convergente y el valor de  $f(x)$  es la suma de la serie en dicho punto.

<sup>1</sup> Diremos que una serie  $\sum a_n$  es convergente si y solo si la sucesión de sumas parciales  $S_n$  es convergente. Caso contrario, la serie es divergente.

<sup>2</sup> Diremos que la serie  $\sum a_n$  converge absolutamente si  $\sum |a_n|$  converge. Diremos que la serie converge condicionalmente si  $\sum a_n$  converge pero  $\sum |a_n|$  diverge.

Esta función  $f$  tiene la particularidad de que es continua y derivable en todo punto del intervalo de convergencia. La derivada es

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$$

y el radio de convergencia de esta nueva serie es  $R$ . Podemos agregar que  $f$  es  $C^\infty$ , esto quiere decir que es infinitamente derivable (admite derivadas de cualquier orden y todas sus derivadas de cualquier orden son continuas) y vale que la derivada  $k$ -ésima es

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) a_n (x-a)^{n-k} \quad (\text{C.1})$$

Además, si  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$  y  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-a)^n$ , definidas en el mismo intervalo  $I$ , entonces,

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) (x-a)^n$$

para todo  $x \in I$ . Y si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha f(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n (x-a)^n$$

para todo  $x \in I$ .

En particular, si  $a = 0$  queda  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , definida sobre el intervalo  $I$ .

Por lo que, además, cumple que

- $f(\alpha x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\alpha x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n x^n$  para todo  $x$  que verifica que  $\alpha x \in I$ .

- $f(\alpha x^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^N)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{Nn}$  para todo  $x$  que verifica que  $x^N \in I$ .

## C.2. Desarrollo de funciones en serie de potencia

Por ahora sabemos que una serie de potencias es una función  $f$  de variable  $x$ , pero dada una función  $g$ , ¿es posible hallar una serie de potencia tal que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n?$$

Para poder asegurar esto,  $g$  debe ser continua e infinitamente derivable en su intervalo de convergencia  $I$ . De (C.1), se deduce que

$$a_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}$$

donde  $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$  y  $g^{(n)}$  es la derivada  $n$ -ésima de  $g$ .

Al desarrollo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

se lo conoce como *serie de Taylor*.

### C.2.1. Serie de Taylor

Por lo visto en el apartado anterior, tenemos que si  $f$  es infinitamente derivable en el intervalo  $(a - R, a + R)$ , podemos escribir a  $f$  como

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \end{aligned} \tag{C.2}$$

A la serie C.2 se la conoce como Serie de Taylor de  $f$  en  $a$ . Y si  $a = 0$ , se llama Serie de MacLaurin.

### C.2.2. Desarrollo o Polinomio de Taylor de orden $n$

Si en la expresión C.2 consideramos la  $n$ -ésima suma parcial, obtenemos un polinomio de grado a lo sumo  $n$ . Por lo que podemos definir lo siguiente:

Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable  $n + 1$  veces en un intervalo  $I = (a - R, a + R)$ .

Si  $x \in I$ , existe un punto  $c$  entre  $a$  y  $x$  tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Los términos  $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$  forman un polinomio de orden  $n$ , ya que el grado puede ser menor o igual a  $n$ , y se lo conoce como Polinomio de Taylor de orden  $n$  centrado en  $a$ .

A  $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$  se lo llama Resto o Error de Taylor o de Lagrange.

Se los suele denotar como:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$P_n$  verifica que:

$$P_n(a) = f(a)$$

$$P'_n(a) = f'(a)$$

$$P''_n(a) = f''(a)$$

$$P'''_n(a) = f'''(a)$$

⋮

$$P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Y  $R_n$  cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

esto quiere decir que, a medida que aumenta el orden, el error cometido es menor.

### C.3. Algunos desarrollos útiles

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$
- $\text{sen}(x) = \text{sen}(a) + \cos(a)(x - a) - \frac{\text{sen}(a)}{2!}(x - a)^2 - \frac{\cos(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$
- $\text{sen}(x + a) = \text{sen}(a) + \cos(a)x - \frac{\text{sen}(a)}{2!}x^2 - \frac{\cos(a)}{3!}x^3 + \dots$
- $\cos(x) = \cos(a) - \text{sen}(a)(x - a) - \frac{\cos(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{\text{sen}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$
- $\cos(x + a) = \cos(a) - \text{sen}(a)x - \frac{\cos(a)}{2!}x^2 + \frac{\text{sen}(a)}{3!}x^3 + \dots$
- $\ln(x) = \ln(a) + \frac{1}{a}(x - a) - \frac{1}{2a^2}(x - a)^2 + \frac{1}{3a^3}(x - a)^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(n - 1)a^{n-1}}(x - a)^{n-1} + \dots$



# Índice alfabético

- aceleración, 26
- cantidad de movimiento, 72
- centro de masa, 80
- choque
  - choque, 78
  - choque explosivo, 80
  - choque inelástico, 79
  - choque perfectamente elástico, 79
  - choque plástico, 79
- cinemática, 18
- colisión, 78
- coordenadas polares, 174
- desplazamiento, 21
- diagramas de energía, 231
- energía cinética, 203
- energía mecánica, 218
- energía potencial, 218
- fuerza, 88
- fuerza media, 87
- fuerzas centrales, 180
- fuerzas conservativas, 215
- fuerzas externas, 104
- fuerzas internas, 104
- fuerzas no conservativas, 215
- impulso, 79
- interacción, 84
- interacción a distancia, 90
- interacción de vínculo, 95
- leyes de Newton, 89
- masa inercial, 71
- masa variable, 109
- movimiento circular uniforme, 170
- movimiento de proyectiles, 182
- movimiento rectilíneo uniformemente variado, 36
- movimiento relativo, 49
- posición, 19
- sistema, 82
- sistema de referencia, 16
- tiro oblicuo, 182

trabajo, 203

velocidad, 23

velocidad del centro de masa, 81

velocidad media, 22

versores intrínsecos, 166

# Bibliografía

- [1] Ingard U. y Krausaar W. L. (1966); *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas*, Barcelona, Ed. Reverté.
- [2] French A.P. (1974); *Mecánica newtoniana*, Barcelona, Ed. Reverté.
- [3] Alonso M. y Finn E. (1987); *Física*, Vol. 1: Mecánica, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.
- [4] Roller D. E. y Blum R. (1983); *Física. Mecánica, ondas y termodinámica*, Vol. I, Barcelona, Ed. Reverté.
- [5] Roederer J. (2008); *Física elemental*, Buenos Aires, Ed. Eudeba.
- [6] Kittel C. H., Knight W. D. y Ruderman M. A. (1982); *Mecánica*, Berkeley Physics Course I, Barcelona, Ed. Reverté.
- [7] Feynman R. P., Leightin R. B. y Sands M. (1998); *Física*, Vol. 1: Mecánica, radiación y calor, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.
- [8] Maestripieri A., Pavón M. y Resmesar P. (2008); *Notas de álgebra lineal*, Los Polvorines, Universidad Nacional de General Sarmiento.
- [9] Schiffini C., Varela A. y Aragón A. (2004); *Introducción a la matemática para el primer ciclo universitario*, Los Polvorines, Universidad Nacional de General Sarmiento.

- [10] Apostol T. (2002); *Calculus*, Vol. 1, Barcelona, Ed. Reverté.
- [11] Spivak M. (1995); *Calculus*, Barcelona, Ed. Reverté.
- [12] Rubio D. (2008); *Números complejos*, Los Polvorines, Universidad Nacional de General Sarmiento.



En la mecánica clásica se describe el movimiento de objetos (mientras no sean extremadamente masivos y viajen a velocidades menores a la velocidad de la luz), desde una bala de cañón hasta una galaxia. En esa descripción, sabiendo el estado actual del objeto, se puede conocer cómo fue el movimiento previo y cómo se moverá.

Las notas de mecánica elemental están dirigidas a los estudiantes del Profesorado Universitario en Educación Superior en Física y en Matemática que estén cursando la materia Mecánica Elemental. De igual modo, también a aquellos estudiantes de las ingenierías que cursen Física I.

En esta primera parte se abordan los conceptos de cinemática, cantidad de movimiento, dinámica, trabajo y energía.

Universidad Nacional  
de General Sarmiento



Libro  
Universitario  
Argentino

