

UNA INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL  
PARA FUNCIONES MULTIVARIABLES

---

Monzón, Gabriel

Una introducción al cálculo diferencial para funciones multivariantes / Gabriel Monzón.  
- 1a ed. - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2023.  
318 p. ; 23 x 16 cm. - (Textos básicos / 33)

ISBN 978-987-630-716-1

1. Matemática. 2. Cálculo Diferencial. I. Título.  
CDD 515.3

---

© Universidad Nacional de General Sarmiento, 2023  
J. M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)  
Prov. de Buenos Aires, Argentina  
Tel.: (54 11) 4469-7507  
ediciones@campus.ungs.edu.ar  
ediciones.ungs.edu.ar

Diseño de tapas: Daniel Vidable  
Diagramación: Gabriel Monzón  
Corrección: María Inés Castaño

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.  
Prohibida su reproducción total o parcial.  
Derechos reservados.

Impreso en Impresores SO.MI.AL. S.R.L.  
Pedro Medrano 1257, Los Polvorines, Malvinas Argentinas,  
Buenos Aires, en el mes de noviembre de 2023.  
Tirada: 200 ejemplares.



Libro  
Universitario  
Argentino

TEXTOS BÁSICOS

---

CIENCIAS EXACTAS

# Una introducción al Cálculo Diferencial para funciones multivariantes

GABRIEL MONZÓN

EDICIONES **UNGS**



Universidad  
Nacional de  
General  
Sarmiento



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Nociones topológicas básicas</b>	<b>11</b>
1.1. Prerrequisitos: producto escalar y norma . . . . .	12
1.2. Conjuntos abiertos . . . . .	14
1.3. Conjuntos cerrados . . . . .	28
1.4. Conjuntos compactos . . . . .	39
1.5. Funciones multivariadas: dominio natural . . . . .	43
<b>2. Gráfica de funciones</b>	<b>49</b>
2.1. Gráfica de una función, curvas de nivel y secciones . . . . .	49
2.1.1. Definiciones y observaciones . . . . .	49
2.1.2. Ejemplos . . . . .	55
2.2. Funciones acotadas . . . . .	64
2.2.1. Definiciones y propiedades básicas . . . . .	64
2.2.2. Acotación y curvas de nivel . . . . .	74
2.3. Extremos globales de una función . . . . .	77
2.3.1. Extremos y curvas de nivel . . . . .	79
<b>3. Límites y continuidad</b>	<b>87</b>
3.1. Límite para campos escalares . . . . .	87
3.1.1. Definición y propiedades elementales . . . . .	88
3.1.2. Ejemplos . . . . .	100
3.1.3. Lemas del sandwich (o intercalamiento) y cero por acotado . . . . .	105
3.1.4. Sobre la no existencia del límite . . . . .	113
3.2. Límite para campos vectoriales . . . . .	122
3.3. Continuidad . . . . .	127
3.3.1. Continuidad y existencia de extremos . . . . .	135

<b>4. Diferenciabilidad</b>	<b>141</b>
4.1. Diferenciabilidad de campos escalares . . . . .	141
4.1.1. Derivadas a lo largo de vectores, direccionales y parciales	141
4.1.2. Diferenciabilidad . . . . .	154
4.1.3. Hiperplano y plano tangente a la gráfica de una función	161
4.1.4. Propiedades básicas de campos escalares diferenciables	165
4.1.5. Una condición suficiente . . . . .	181
4.2. Diferenciabilidad de campos vectoriales . . . . .	183
4.3. Propiedades básicas . . . . .	188
4.4. Rectas y planos tangentes a conjuntos de nivel . . . . .	195
4.4.1. Vector velocidad y recta tangente a una trayectoria . .	195
4.4.2. Recta tangente a una curva de nivel . . . . .	197
4.4.3. Plano tangente a una superficie de nivel . . . . .	201
<b>5. Polinomios de Taylor y matriz Hessiana</b>	<b>205</b>
5.1. Polinomios de Taylor para funciones de una variable . . . . .	206
5.1.1. Polinomio de Taylor de primer orden . . . . .	206
5.1.2. Polinomio de Taylor de segundo orden . . . . .	210
5.1.3. Polinomio de Taylor de orden $n$ . . . . .	216
5.2. Polinomios de Taylor para funciones de varias variables . . . .	224
5.2.1. Polinomio de Taylor de primer orden . . . . .	224
5.2.2. Matriz Hessiana y polinomio de Taylor de segundo orden . . . . .	228
5.3. Igualdad de derivadas iteradas . . . . .	236
<b>6. Convexidad y concavidad</b>	<b>245</b>
6.0.1. Definiciones y ejemplos . . . . .	245
6.0.2. Estudio mediante la matriz Hessiana . . . . .	250
6.0.3. Criterios para clasificar matrices . . . . .	258
6.1. Ejemplos . . . . .	261
<b>7. Extremos</b>	<b>269</b>
7.1. Extremos locales . . . . .	269
7.2. Condición necesaria: puntos críticos . . . . .	271
7.3. Criterio de clasificación mediante la matriz Hessiana . . . . .	279
7.4. Extremos condicionados . . . . .	290
7.5. Estudio de extremos sobre dominios generales . . . . .	302

# Introducción

La *virtualización* forzosa ocasionada por la pandemia de covid-19 durante los años 2020-2021 a la que tuvo que acoplarse la actividad académica universitaria en general (entre tantas otras actividades) y, en particular, la correspondiente a la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) generó un gran abanico de recursos, herramientas y materiales que, probablemente, han sido y continúen siendo capitalizados y readaptados de diversas y múltiples maneras con el pasar del tiempo.

En mi caso particular, las actividades de docencia desarrolladas durante este período de virtualización estuvieron vinculadas a las materias *Cálculo II* y *Cálculo en Varias Variables* en la mencionada UNGS, y como producto de ellas germinaron notas y apuntes de clases que devinieron (tras varias versiones de corrección y completación) en el presente trabajo. En dichas notas, insumos básicos organizativos de mi tarea docente en la modalidad virtual, tuve la intención de focalizar en conceptos, resultados y procedimientos básicos y esenciales sobre el Cálculo Diferencial para funciones de varias variables que (a mi entender) todo curso introductorio (de ahí el nombre) a esta rama debe abordar, y de ilustrar, mediante diversos y variados ejemplos, su aplicabilidad.

En las subsecuentes correcciones y ampliaciones (incluyendo las que terminaron en la versión final) traté de que estas notas sean lo más autocontenidas posible; sin embargo, hay demostraciones para las cuales consideré conveniente y necesario remitir a fuentes externas y resultados que omití poner, ya que opté por ser lo más fiel posible a lo que efectivamente fue abordado durante las clases.<sup>1</sup> Podrán observar que las fuentes bibliográficas citadas no son muchas y corresponden a libros de referencia y consulta que usamos en *Cálculo II* y *Cálculo en Varias Variables*; esta cuestión no es azarosa sino intencional, ya que la no sobrecarga en el material de lectura fue un factor relevante tomado en cuenta al momento de planificar las materias bajo la modalidad virtual.

En este punto, es necesario también tener presente que los perfiles tanto de las materias mencionadas como de las y los estudiantes cursantes son distintos y que lo desarrollado en este trabajo busca atender las particularidades de cada perfil de

---

<sup>1</sup>Aunque algunas cuestiones tanto del Álgebra Lineal como del Análisis Clásico para funciones de una sola variable son presentados aquí, presuponemos que las y los estudiantes cuentan con una base sólida en ambas disciplinas, ya que las materias *Álgebra Lineal* y *Cálculo I* –materias en las que se aborda lo anteriormente descripto– son correlativas a *Cálculo II* y *Cálculo en Varias Variables*.

la mejor manera posible. Parece justo señalar que este texto cubre sobradamente lo correspondiente al Cálculo Diferencial para la materia *Cálculo en Varias Variables* (incluso, hay contenidos aquí que no son abordados en dicha materia, tales como los correspondientes al Capítulo 6), pero no cubre enteramente los contenidos de la materia *Cálculo II* (por ejemplo, no se tratan aquí los teoremas de la función inversa y de la función implícita).

Es extensa y variada la bibliografía existente para cursos que tratan sobre Cálculo Diferencial para funciones multivariadas (ver por ejemplo [3, 7, 11]), no obstante, este trabajo busca sumar una propuesta concreta para un curso introductorio a dicha disciplina que, insisto, fue la propuesta elegida para el período de virtualización 2020-2021, factible de ser realizada en el tiempo disponible durante cada semestre lectivo.

Como características particulares me gusta pensar que los temas se presentan de manera concreta y en un lenguaje cercano a las y los estudiantes (al menos esa fue la intención), que las referencias al software *Geogebra* promueven su uso como una herramienta sumamente útil de soporte gráfico (tanto para la instancia de conjeturación como para la etapa de validación o verificación) y que hay una gran cantidad y diversidad de ejemplos desarrollados que buscan ilustrar, simultáneamente, la aplicabilidad de resultados y métodos estándar, como la escritura de textos que combinen lo propio de la simbología y lógica matemática con lo general del lenguaje no matemático.

Para finalizar, me gustaría agradecer a todos/as aquellos/as estudiantes que destinaron tiempo y trabajo invaluable para leer este material (o alguna de sus tantas versiones preliminares) y que, en distintos grados y de distintas maneras, aportaron para mejorarlo. Este libro es para y por ellos/as, que han sido quienes bogaron para que una versión final estuviese disponible. Agradezco también a mi familia que ha sabido entender las numerosas horas destinadas a la producción de este material.

Gabriel, abril de 2023