

UNA INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL
PARA FUNCIONES MULTIVARIABLES

Monzón, Gabriel

Una introducción al cálculo diferencial para funciones multivariables / Gabriel Monzón.
- 1a ed. - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2023.
318 p. ; 23 x 16 cm. - (Textos básicos / 33)

ISBN 978-987-630-716-1

1. Matemática. 2. Cálculo Diferencial. I. Título.
CDD 515.3

© Universidad Nacional de General Sarmiento, 2023

J. M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)

Prov. de Buenos Aires, Argentina

Tel.: (54 11) 4469-7507

ediciones@campus.ungs.edu.ar

ediciones.ungs.edu.ar

Diseño de tapas: Daniel Vidable

Diagramación: Gabriel Monzón

Corrección: María Inés Castaño

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.

Prohibida su reproducción total o parcial.

Derechos reservados.

Impreso en Impresores SO.MI.AL. S.R.L.

Pedro Medrano 1257, Los Polvorines, Malvinas Argentinas,

Buenos Aires, en el mes de noviembre de 2023.

Tirada: 200 ejemplares.



Libro
Universitario
Argentino

TEXTOS BÁSICOS

CIENCIAS EXACTAS

Una introducción al Cálculo Diferencial para funciones multivariantes

GABRIEL MONZÓN

EDICIONES **UNGS**



Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

Índice general

Introducción	9
1. Nociones topológicas básicas	11
1.1. Prerrequisitos: producto escalar y norma	12
1.2. Conjuntos abiertos	14
1.3. Conjuntos cerrados	28
1.4. Conjuntos compactos	39
1.5. Funciones multivariadas: dominio natural	43
2. Gráfica de funciones	49
2.1. Gráfica de una función, curvas de nivel y secciones	49
2.1.1. Definiciones y observaciones	49
2.1.2. Ejemplos	55
2.2. Funciones acotadas	64
2.2.1. Definiciones y propiedades básicas	64
2.2.2. Acotación y curvas de nivel	74
2.3. Extremos globales de una función	77
2.3.1. Extremos y curvas de nivel	79
3. Límites y continuidad	87
3.1. Límite para campos escalares	87
3.1.1. Definición y propiedades elementales	88
3.1.2. Ejemplos	100
3.1.3. Lemas del sandwich (o intercalamiento) y cero por acotado	105
3.1.4. Sobre la no existencia del límite	113
3.2. Límite para campos vectoriales	122
3.3. Continuidad	127
3.3.1. Continuidad y existencia de extremos	135

4. Diferenciabilidad	141
4.1. Diferenciabilidad de campos escalares	141
4.1.1. Derivadas a lo largo de vectores, direccionales y parciales	141
4.1.2. Diferenciabilidad	154
4.1.3. Hiperplano y plano tangente a la gráfica de una función	161
4.1.4. Propiedades básicas de campos escalares diferenciables	165
4.1.5. Una condición suficiente	181
4.2. Diferenciabilidad de campos vectoriales	183
4.3. Propiedades básicas	188
4.4. Rectas y planos tangentes a conjuntos de nivel	195
4.4.1. Vector velocidad y recta tangente a una trayectoria . .	195
4.4.2. Recta tangente a una curva de nivel	197
4.4.3. Plano tangente a una superficie de nivel	201
5. Polinomios de Taylor y matriz Hessiana	205
5.1. Polinomios de Taylor para funciones de una variable	206
5.1.1. Polinomio de Taylor de primer orden	206
5.1.2. Polinomio de Taylor de segundo orden	210
5.1.3. Polinomio de Taylor de orden n	216
5.2. Polinomios de Taylor para funciones de varias variables	224
5.2.1. Polinomio de Taylor de primer orden	224
5.2.2. Matriz Hessiana y polinomio de Taylor de segundo orden	228
5.3. Igualdad de derivadas iteradas	236
6. Convexidad y concavidad	245
6.0.1. Definiciones y ejemplos	245
6.0.2. Estudio mediante la matriz Hessiana	250
6.0.3. Criterios para clasificar matrices	258
6.1. Ejemplos	261
7. Extremos	269
7.1. Extremos locales	269
7.2. Condición necesaria: puntos críticos	271
7.3. Criterio de clasificación mediante la matriz Hessiana	279
7.4. Extremos condicionados	290
7.5. Estudio de extremos sobre dominios generales	302

Introducción

La *virtualización* forzosa ocasionada por la pandemia de covid-19 durante los años 2020-2021 a la que tuvo que acoplarse la actividad académica universitaria en general (entre tantas otras actividades) y, en particular, la correspondiente a la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) generó un gran abanico de recursos, herramientas y materiales que, probablemente, han sido y continúen siendo capitalizados y readaptados de diversas y múltiples maneras con el pasar del tiempo.

En mi caso particular, las actividades de docencia desarrolladas durante este período de virtualización estuvieron vinculadas a las materias *Cálculo II* y *Cálculo en Varias Variables* en la mencionada UNGS, y como producto de ellas germinaron notas y apuntes de clases que devinieron (tras varias versiones de corrección y completación) en el presente trabajo. En dichas notas, insumos básicos organizativos de mi tarea docente en la modalidad virtual, tuve la intención de focalizar en conceptos, resultados y procedimientos básicos y esenciales sobre el Cálculo Diferencial para funciones de varias variables que (a mi entender) todo curso introductorio (de ahí el nombre) a esta rama debe abordar, y de ilustrar, mediante diversos y variados ejemplos, su aplicabilidad.

En las subsecuentes correcciones y ampliaciones (incluyendo las que terminaron en la versión final) traté de que estas notas sean lo más autocontenidas posible; sin embargo, hay demostraciones para las cuales consideré conveniente y necesario remitir a fuentes externas y resultados que omití poner, ya que opté por ser lo más fiel posible a lo que efectivamente fue abordado durante las clases.¹ Podrán observar que las fuentes bibliográficas citadas no son muchas y corresponden a libros de referencia y consulta que usamos en *Cálculo II* y *Cálculo en Varias Variables*; esta cuestión no es azarosa sino intencional, ya que la no sobrecarga en el material de lectura fue un factor relevante tomado en cuenta al momento de planificar las materias bajo la modalidad virtual.

En este punto, es necesario también tener presente que los perfiles tanto de las materias mencionadas como de las y los estudiantes cursantes son distintos y que lo desarrollado en este trabajo busca atender las particularidades de cada perfil de

¹Aunque algunas cuestiones tanto del Álgebra Lineal como del Análisis Clásico para funciones de una sola variable son presentados aquí, presuponemos que las y los estudiantes cuentan con una base sólida en ambas disciplinas, ya que las materias *Álgebra Lineal* y *Cálculo I* –materias en las que se aborda lo anteriormente descripto– son correlativas a *Cálculo II* y *Cálculo en Varias Variables*.

la mejor manera posible. Parece justo señalar que este texto cubre sobradamente lo correspondiente al Cálculo Diferencial para la materia *Cálculo en Varias Variables* (incluso, hay contenidos aquí que no son abordados en dicha materia, tales como los correspondientes al Capítulo 6), pero no cubre enteramente los contenidos de la materia *Cálculo II* (por ejemplo, no se tratan aquí los teoremas de la función inversa y de la función implícita).

Es extensa y variada la bibliografía existente para cursos que tratan sobre Cálculo Diferencial para funciones multivariadas (ver por ejemplo [3, 7, 11]), no obstante, este trabajo busca sumar una propuesta concreta para un curso introductorio a dicha disciplina que, insisto, fue la propuesta elegida para el período de virtualización 2020-2021, factible de ser realizada en el tiempo disponible durante cada semestre lectivo.

Como características particulares me gusta pensar que los temas se presentan de manera concreta y en un lenguaje cercano a las y los estudiantes (al menos esa fue la intención), que las referencias al software *Geogebra* promueven su uso como una herramienta sumamente útil de soporte gráfico (tanto para la instancia de conjeturación como para la etapa de validación o verificación) y que hay una gran cantidad y diversidad de ejemplos desarrollados que buscan ilustrar, simultáneamente, la aplicabilidad de resultados y métodos estándar, como la escritura de textos que combinen lo propio de la simbología y lógica matemática con lo general del lenguaje no matemático.

Para finalizar, me gustaría agradecer a todos/as aquellos/as estudiantes que destinaron tiempo y trabajo invaluable para leer este material (o alguna de sus tantas versiones preliminares) y que, en distintos grados y de distintas maneras, aportaron para mejorarlo. Este libro es para y por ellos/as, que han sido quienes bogaron para que una versión final estuviese disponible. Agradezco también a mi familia que ha sabido entender las numerosas horas destinadas a la producción de este material.

Gabriel, abril de 2023